بررسی تأثیر نحوه میانیابی ممنتوم در حل معادلات آبهای کم‌عمق

محمدرضا هادیان[i]؛ امیررضا زراتی[ii]

چکیده

استفاده از شبکه‌های جابجا نشده با توجه به سهولت برنامه‌ریزی و انعطاف‌پذیری بهتر آن در حل معادلات جریان، مخصوصاً در هندسه‌های پیچیده با استقبال زیادی مواجه شده است. برای جلوگیری از ایجاد نوسان در میدان فشار که ویژه شبکه جابجا نشده است، روش میانیابی ممنتوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مقاله حاضر دو روش میانیابی ممنتوم برای حل مسأله ماندگار با استفاده از معادلات غیرماندگار در آبهای کم عمق مورد توجه قرار گرفته است. نتایج مدل عددی برای یک جریان با الگوی پیچیده نشان داد که هر دو روش عملکرد تقریباً یکسانی دارند و می‌توان با دقت مناسبی از روش ساده‌تر که نیاز به محاسبات کمتری دارد، استفاده کرد. البته برای پایداری روش ساده‌تر به گام زمانی کوچکتری نیاز است.

کلمات کلیدی

شبکه جابجا نشده، آبهای کم‌عمق، میانیابی ممنتوم، مدل عددی، آبگیرجانبی.

Study on the Effect of Momentum Interpolation Method for Solving Shallow Water Equations

M.R.Hadian; A.R.Zarrati

ABSTRACT

Using collocated grid is very popular because of its flexibility and easiness in programming, to solve fluid flow equations specially in complex geometry. Momentum interpolation is used for this type of grid to prevent pressure oscillation. In the present paper, two methods of momentum interpolation are studied to solve steady state problems using unsteady equations in shallow water flows. Results of numerical model for a complex flow pattern showed that both of these methods give almost the same results. Therefore, the simpler model which needs less calculations can be employed to achieve the same accurate results. However, shorter time step should be used in the simpler method because of stability constrains.

KEYWORDS

Collocated Grid, Shallow Water, Momentum Interpolation, Numerical Model, Lateral Intake.

[i] استادیار؛ دانشکده مهندسی عمران، مجتمع فنی مهندسی، دانشگاه یزد

یزد، خیابان طالقانی، دانشگاه یزد، صندوق پستی ۷۴۱-۸۹۱۹۵

تلفن: ۹-۸۲۱۱۶۷۱(۳۵۱) داخلی ۲۴۷۰ ؛ نمابر: ۸۲۱۰۶۹۹(۳۵۱) ؛ پست الکترونیک: mr_hadian@yazduni.ac.ir

[ii] دانشیار؛ دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تهران، خیابان حافظ، روبروی سمیه، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۵۹۱۴، شماره ۴۲۴.

تلفن: ۶۴۵۴۳۰۰۲(۲۱) ؛ نمابر: ٦٤١٤٢١٣(۲۱) ؛ پست الکترونیک: zarrati@aut.ac.ir

۱- مقدمه

توسعه فناوری و پیشرفت در ساخت رایانه‌های با سرعت و توانایی‌های بالاتر، این امکان را بوجود آورده تا مدلهای عددی به نحو قابل ملاحظه‌ای در پروژه‌های مختلف تحقیقاتی و کاربردی مورد استفاده قرار گیرند. معادلات آبهای کم‌عمق یکی از مواردی هستند که در دهه‌های گذشته مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند و استفاده از آنها در پروژه‌های کاربردی نیز بسیار متداول شده است. اگرچه جریان آب در طبیعت معمولاً بگونه‌ای است که شبیه‌سازی آن باید به صورت سه بعدی مورد توجه قرار گیرد، در بسیاری از مواردی که در مهندسی رودخانه و سواحل مطرح هستند، می‌توان با تقریب بسیار خوبی از شتاب جریان در جهت قائم صرف‌نظر نمود و معادلات متوسطگیری شده در عمق را که دوبعدی هستند، مورد استفاده قرار داد.

تحقیقات زیادی در زمینه حل عددی این معادلات صورت گرفته و مشکلات مربوط به حل این معادلات توسط بسیاری از پژوهشگران بررسی شده است. همچنین روشهای عددی مختلفی برای حل این معادلات بکار رفته است. یکی از متداول‌ترین روشها در حل این معادلات، روش احجام محدود است. در این روش، میدان جریان به تعدادی حجم کنترل تقسیم‌بندی می‌گردد و معادلات پیوستگی و ممنتوم یا معادلات بقای هر پارامتر دیگری (مانند شوری یا آلودگی) برای حجم‌کنترلها نوشته شده و در نهایت مجموعه معادلات حاصل با استفاده از روش عددی مناسب حل می‌شود.

پس از شبکه‌بندی میدان جریان، اولین سوالی که مطرح می‌شود، محل ذخیره‌سازی متغیرها است. ساده‌ترین حالتی که می‌توان درنظر گرفت، ذخیره متغیرها در مرکز حجم کنترلها است. استفاده از این روش در حل معادلات، می‌تواند باعث بوجود آمدن میدان فشار بصورت زیگزاگ شود؛ چرا که در معادلات تنها گرادیان فشار وارد می‌شود و نه خود مقادیر فشار. با توجه به نحوه منقطع سازی معادلات، در این حالت فشار خود سلول در محاسبات منظور نشده و در عمل دو میدان فشار که گرادیان یکسانی دارند، می‌توانند به عنوان جواب معادلات مطرح شوند. این مسأله در زمینه معادلات ناویر- استوکس توسط محققان مختلفی بررسی شده است. یکی از راه‌حلهایی که برای رهایی از این مشکل مطرح شده، استفاده از شبکه جابجا شده است. در این حالت برای حل معادلات ممنتوم و پیوستگی از حجم‌کنترل‌های متفاوتی استفاده می‌شود [۱۳]. باآنکه استفاده از شبکه جابجا شده مشکل فوق را حل می‌کند ولی پیچیدگی‌هایی دارد که استفاده از آن را دشوار می‌نماید. در این روش به علت استفاده از حجم کنترل‌های متفاوت، حل معادلات نیاز به توجه خاص دارد و در صورتی که شبکه محاسباتی یکنواختی مناسبی نداشته باشد، مقادیری که به عنوان مقادیر سرعت یا فشار برای سلول در نظر گرفته می‌شوند، نماینده خوبی از مقدار آن پارامتر در مرکز سلول مورد نظر نیستند [۱۳]. همچنین بسیاری از ضرائب باید روی وجوه حجم کنترل‌ها برای هر معادله بصورت مجزا محاسبه شوند که باعث اتلاف وقت می‌گردد. ازطرفی در توسعه مدلها به روشهای پیشرفته عددی مانند مختصات منحنی‌الخط، بلوکهای چندگانه یا شبکه‌های چندگانه، استفاده از شبکه جابجا شده بسیار مشکل است. این در حالی است که با استفاده از شبکه جابجا نشده برنامه‌ریزی بسیار راحت‌تر انجام می‌شود. در حل معادلات نیز با توجه به آنکه حجم کنترل‌های ثابتی برای همه معادلات در نظر گرفته می‌شود، مقادیر سرعت‌ها و شارهای عبوری از سلول‌ها برای حل همه معادلات یکسان است. چنانچه حل ضمنی معادلات مورد نظر باشد، ضرائب معادلات منقطع شده انتقال-پخش ممنتوم برای معادلات ممنتوم در هر دو جهت و معادله انتقال هر پارامتر دیگری یکسان است و لذا این ضرائب فقط یکبار در حل معادلات محاسبه می‌شوند.

برای رفع مشکل نوسانات فشار در روش شبکه‌های جابجا نشده، استفاده از میانیابی ممنتوم بجای میانیابی خود مقادیر سرعت، اولین بار توسط ری و چو برای حل معادلات ناویر – استوکس بصورت دوبعدی پیشنهاد شد [۱۴] و بعد توسط محققان دیگری توسعه داده شد. یکی از مشکلات روش ری و چو وابستگی مقادیر سرعت روی وجوه حجم‌کنترل به ضرائب تخفیفی است که در حل معادلات به روش ضمنی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این مسأله توسط ماجومدار و میلر و اشمیت بررسی شده و راه حلی نیز برای آن ارائه شده است [۷]، [۱۰]. روش ساده‌تری برای این مسأله توسط میلائین پیشنهاد شده [۸]، [۹] که توسط محققان دیگر نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]، [۱۹]. زمانی که برای حل معادلات از فرم غیرماندگار آنها استفاده شود، وابستگی مقدار سرعت روی وجه سلول به مقدار گام زمانی نیز مطرح می شود. استفاده از روشی که سرعت روی وجوه سلول را مستقل از ضرائب تخفیف و گام زمانی بدست دهد، برای حل معادلات ناویر استوکس مورد بررسی برخی محققین قرار گرفته است [۱]، [۶]، [۱۷]. در مورد توسعه این روشها برای استفاده در حل معادلات آبهای کم‌عمق و میزان تأثیر این روشها بر دقت جوابها تاکنون تحقیقی انجام نشده است. در مقاله حاضر این مسأله مورد توجه قرار

می‌گیرد و دو روش که بطور عمده برای میانیابی ممنتوم روی وجوه سلولها مطرح هستند، برای حل جریان ماندگار با استفاده از فرم غیرماندگار معادلات آبهای کم عمق، بررسی می‌شود. همچنین لزوم استفاده از میانیابی ممنتوم در حل معادلات پیوستگی و یا استفاده توأم در حل معادلات پیوستگی و ممنتوم بررسی می‌گردد. در ادامه در مورد دقت جوابها و شرایط همگرائی روشهای بررسی شده بحث و نتیجه گیری می شود.

۲- معادلات حاکم

معادلات سه‌بعدی آبهای کم‌عمق با فرض بزرگ بودن ابعاد افقی جریان در مقابل بعد قائم و درنتیجه صرف‌نظر از شتابهای قائم بدست می‌آیند. در این حالت توزیع فشار در عمق جریان را می‌توان بصورت هیدرواستاتیک درنظرگرفت. انتگرال گیری از این معادلات در عمق جریان به فرم دو بعدی معادلات آبهای کم عمق منجر می‌شود. با صرف نظر از شتاب کوریولیس و ترمهایی که حاصل غیریکنواخت بودن توزیع سرعت در عمق هستند، معادلات آبهای کم عمق در سیستم مختصات منحنی الخط بدین صورت نوشته می‌شوند [۲۲]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{1}{J}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(Uh)+\frac{\partial}{\partial \eta}(Vh)\right)=0 \qquad (۱)$$

$$\begin{aligned} &J\frac{\partial}{\partial t}(hu)+\frac{\partial}{\partial \xi}(hUu)+\frac{\partial}{\partial \eta}(hVu)\\ &\quad-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(q_{11}\frac{\partial hu}{\partial \xi}-q_{12}\frac{\partial hu}{\partial \eta}\right)\right]\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(q_{22}\frac{\partial hu}{\partial \eta}-q_{12}\frac{\partial hu}{\partial \xi}\right)\right]=S_u \end{aligned} \qquad (۲)$$

$$\begin{aligned} &J\frac{\partial}{\partial t}(hv)+\frac{\partial}{\partial \xi}(hUv)+\frac{\partial}{\partial \eta}(hVv)\\ &\quad-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(q_{11}\frac{\partial hv}{\partial \xi}-q_{12}\frac{\partial hv}{\partial \eta}\right)\right]\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(q_{22}\frac{\partial hv}{\partial \eta}-q_{12}\frac{\partial hv}{\partial \xi}\right)\right]=S_v \end{aligned} \qquad (۳)$$

در این روابط u و v سرعت‌های متوسط عمقی کارتزین، U و V سرعت‌های متوسط عمقی کنتراواریانت در جهت‌های عمومی ξ و η، h عمق آب، g شتاب ثقل، ν_e لزجت مؤثر ($\nu_e=\nu+\nu_t$)، ν لزجت سیال، ν_t لزجت گردابه‌ای، ζ تراز سطح آزاد جریان ($\zeta=h+Z_b$)، Z_b تراز بستر، J ژاکوبین تبدیل ($J=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi$) و x_ξ، y_η، x_η و y_ξ متریک‌ها هستند.

عبارتهای چشمه در معادلات ممنتوم نیز برابرند با:

$$\begin{aligned} S_u=&\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(y_\eta\frac{\partial Uh}{\partial \xi}-y_\xi\frac{\partial Uh}{\partial \eta}\right)\right]\\ &+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(y_\eta\frac{\partial Vh}{\partial \xi}-y_\xi\frac{\partial Vh}{\partial \eta}\right)\right]\\ &-gh\left(y_\eta\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}-y_\xi\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)-J\frac{\tau_{bx}}{\rho} \end{aligned} \qquad (۴)$$

$$\begin{aligned} S_v=&\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(-x_\eta\frac{\partial Uh}{\partial \xi}+x_\xi\frac{\partial Uh}{\partial \eta}\right)\right]\\ &+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\nu_e}{J}\left(-x_\eta\frac{\partial Vh}{\partial \xi}+x_\xi\frac{\partial Vh}{\partial \eta}\right)\right]\\ &-gh\left(x_\xi\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}-x_\eta\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)-J\frac{\tau_{by}}{\rho} \end{aligned} \qquad (۵)$$

در این روابط τ_{bx} و τ_{by} تنش کف در جهت‌های x و y هستند که می‌توان با استفاده از رابطه مانینگ بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho}=\frac{g n^2 u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} \qquad (۶)$$

$$\frac{\tau_{by}}{\rho}=\frac{g n^2 v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} \qquad (۷)$$

که در آنها n ضریب زبری مانینگ است. سایر پارامترهای بکاررفته در روابط فوق بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} q_{11}&=x_\eta^2+y_\eta^2\\ q_{12}&=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta\\ q_{22}&=x_\xi^2+y_\xi^2 \end{aligned} \qquad (۸)$$

سرعت‌های کنتراواریانت و کارتزین نیز بصورت ذیل به یکدیگر تبدیل می‌گردند:

$$U=uy_\eta-vx_\eta \qquad (۹)$$

$$V=vx_\xi-uy_\xi \qquad (۱۰)$$

$$u=\frac{1}{J}\left(Ux_\xi+Vx_\eta\right) \qquad (۱۱)$$

$$v=\frac{1}{J}\left(Vy_\eta+Uy_\xi\right) \qquad (۱۲)$$

برای محاسبه لزجت گردابه‌ای نیز معمولاً مدل صفرمعادله‌ای به شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۳]:

$$\nu_t=\frac{\kappa}{6}u_* h \qquad (۱۳)$$

که در آن u_* تنش برشی کف است.

۳- روش عددی حل معادلات

در این تحقیق برای حل عددی معادلات از روش احجام محدود استفاده شده و از معادلات درداخل حجم کنترل

انتگرال‌گیری شده است. معادلات ممنتوم یا هر معادله انتقال دیگری مانند φ در سیستم مختصات منحنی الخط بصورت زیر در می‌آید:

$$J\frac{\partial}{\partial t}(h\varphi)+\frac{\partial}{\partial \xi}(Uh\varphi)+\frac{\partial}{\partial \eta}(Vh\varphi) -\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Gamma_\varphi \frac{q_{11}}{J}\frac{\partial (h\varphi)}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\Gamma_\varphi \frac{q_{22}}{J}\frac{\partial (h\varphi)}{\partial \eta}\right)\right\} = S_\varphi \quad (۱۴)$$

برای معادلات ممنتوم مقدار φ در رابطه فوق برابر با u و v قرار داده می‌شود. رابطه مذکور پس از انتگرال‌گیری در داخل حجم کنترل به فرم کلی زیر قابل بیان است:

$$\frac{A_p}{\alpha_\varphi}\varphi_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}\varphi_{nb} + \frac{1-\alpha_\varphi}{\alpha_\varphi}A_p\varphi_p^{**} + A_p^o\varphi_p^o + S_\varphi \quad (۱۵)$$

که در آن α_φ ضریب تخفیف برای پارامتر φ بوده و بالانویسهای "o" و "**" به ترتیب نشان دهنده مقدارφ در زمان قبل و سعی قبلی می‌باشند. با استفاده از رهیافت قانون توانی برای عبارات انتقال و پخش و استفاده از روش ضمنی اولر مرتبه اول برای ترم زمان، ضرائب معادله کلی فوق بصورت زیر بدست می‌آید [۱۳]:

$$A_E = D_e \max\left(0,\left[1-\frac{0.1|F_e|}{D_e}\right]^5\right)+\max(-F_e,0) \quad (۱۶)$$

$$A_W = D_w \max\left(0,\left[1-\frac{0.1|F_w|}{D_w}\right]^5\right)+\max(F_w,0) \quad (۱۷)$$

$$A_N = D_n \max\left(0,\left[1-\frac{0.1|F_n|}{D_n}\right]^5\right)+\max(-F_n,0) \quad (۱۸)$$

$$A_S = D_s \max\left(0,\left[1-\frac{0.1|F_s|}{D_s}\right]^5\right)+\max(F_s,0) \quad (۱۹)$$

$$A_p^o = (Jh^o)_p \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta t} \quad (۲۰)$$

$$A_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} - S_p + (Jh)_p\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta t} + \overbrace{F_e - F_w + F_n - F_s}^{\Delta F} \quad (۲۱)$$

یادآوری می‌شود که در محاسبه ضریب A_p، مقدار ΔF نیز وجود دارد که در حالت کلی و برای حالت غیرماندگار دارای مقدار غیرصفر است. علت این امر تفاوت معادله پیوستگی در معادلات آبهای کم عمق با معادله پیوستگی معادلات ناویر-استوکس است که در اینجا عبارت مربوط به تغییرات زمانی سطح آزاد جریان نیز در این رابطه وجود دارد. بنابراین مقدار ΔF در حل معادلات جریان غیرماندگار آب‌های کم‌عمق قابل حذف نیست.

عبارات F_i و D_i در ضرائب فوق، شارهای انتقال و پخش هستند که بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_e = (hU)_e\Delta\eta \;,\quad F_w = (hU)_w\Delta\eta$$
$$F_n = (hV)_n\Delta\xi \;,\quad F_s = (hV)_s\Delta\xi \quad (۲۲)$$

$$D_e = \left(\frac{\Gamma_\varphi q_{11} h}{J\Delta\xi}\right)_e\Delta\eta, D_w = \left(\frac{\Gamma_\varphi q_{11} h}{J\Delta\xi}\right)_w\Delta\eta$$
$$D_n = \left(\frac{\Gamma_\varphi q_{22} h}{J\Delta\eta}\right)_n\Delta\xi, D_s = \left(\frac{\Gamma_\varphi q_{22} h}{J\Delta\eta}\right)_s\Delta\xi \quad (۲۳)$$

در محاسبه روابط فوق بجز مقادیر سرعتها، سایر مقادیر روی وجوه سلولها با استفاده از میانیابی خطی محاسبه می شوند. در مورد تعیین مقادیر سرعت برای جلوگیری ازنوسانات سطح‌آب باید از میانیابی ممنتوم استفاده کرد که در ادامه در مورد آن بحث خواهد شد.

برای محاسبه سطح آزاد جریان در حالت غیرماندگار می‌توان بطور مستقیم از معادله پیوستگی استفاده نمود که منجر به روش صریح برای محاسبه تراز سطح آب خواهد شد. به منظور رفع مشکل عدد کورانت و رهایی از محدودیت در انتخاب گام زمانی، برای محاسبه تراز سطح آزاد جریان از روشی مشابه SIMPLEC استفاده می‌شود. که فرم توسعه داده شده آن برای معادلات آبهای کم عمق غیر ماندگار به شکل زیر است [۲]،[۲۰]-[۲۳]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(Bh^*\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(Ch^*\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}\right)= -\left[J\frac{\partial \zeta^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(U^*h^*)+\frac{\partial}{\partial \eta}(V^*h^*)\right] \quad (۲۴)$$

رابطه فوق با استفاده از روش اختلاف مرکزی منقطع و حل می‌شود. مقادیر ستاره دار، مقادیر بدست آمده از حل معادلات ممنتوم هستند و مقادیر نهایی سعی موجود، از جمع مقادیر ستاره‌دار و تصحیح‌های آنها به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$U = U^* + U',\; V = V^* + V'$$
$$\zeta = \zeta^* + \alpha_p\zeta' \;\; (h = h^* + \alpha_p h') \quad (۲۵)$$

ضرائب B و C و مقدار اصلاحات سرعت‌های کنتراواریانت نیز برابرند با:

$$U' = B\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi} \;,\quad B = \frac{-g h q_{11}\Delta\xi\Delta\eta}{\frac{A_p}{\alpha_v}-\sum A_{nb}} \quad (۲۶)$$

$$V' = C\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}\ ,\ \ C = \frac{-g\,h\,q_{22}\,\Delta\xi\,\Delta\eta}{\dfrac{A_p}{\alpha_v} - \sum A_{nb}} \tag{۲۷}$$

که در آنها α_v ضریب زیر تخفیف سرعت است. با توجه به روابط فوق، معادلات را می‌توان بدین صورت حل کرد:

۱- حل معادلات ممنتوم و محاسبه مقادیر سرعت‌های ستاره دار (۱۵).

۲- حل معادله تصحیح تراز سطح آزاد (۲۴).

۳- اصلاح مقادیر سرعت‌ها و تراز سطح آب (۲۵).

۴- تکرار مراحل ۱ تا ۳ تا زمان رسیدن به همگرائی.

۵- انجام محاسبات فوق برای گام زمانی بعد.

٤- میانیابی ممنتوم

همانگونه که در قسمت قبل عنوان شد، در محاسبه ضرائب معادله ممنتوم و همچنین در محاسبه ترم چشمه معادله تصحیح تراز سطح آب (سمت راست (٢٤)) مقادیر سرعتهای جریان روی وجوه حجم‌کنترل مورد نیاز است. استفاده از میانیابی خطی برای محاسبه این سرعتها باعث ایجاد مجموعه جواب زیگزاگ برای تراز سطح آب خواهد شد. برای این موضوع ری و چو از میانیابی ممنتوم استفاده کردند [١٤]. اگر روند ارائه شده توسط این محققان مورد استفاده قرار گیرد، سرعت مثلاً روی وجه شرقی حجم‌کنترل که به عنوان نمونه در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U_e = \overline{U_e} - \left(\overline{B_1}\right)_e \left[\overline{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_e} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_e\right] \tag{۲۸}$$

$$B_1 = \frac{-g\,h\,q_{11}\,\alpha_v\,\Delta\xi\,\Delta\eta}{A_p} \tag{۲۹}$$

در این رابطه علامت خط بالای عبارت‌ها، نشان‌دهنده میانیابی خطی برای آن عبارت است. به عنوان مثال ترمهای گرادیان تراز سطح آزاد جریان در (۲۸) بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_e = \frac{\zeta_E - \zeta_P}{\Delta\xi} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_e} &= f1\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_P + (1-f1)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_E \\ &= f1\frac{\zeta_E - \zeta_W}{2\Delta\xi} + (1-f1)\frac{\zeta_{EE} - \zeta_P}{2\Delta\xi}\end{aligned} \tag{۳۱}$$

در این روابط $f1$ ضریب وزنی مربوط به میانیابی خطی برای وجه شرقی سلول می‌باشد. ماجومدار و میلر و اشمیت نشان دادند که در روش ارائه شده توسط ری و چو مقادیر سرعت روی وجوه حجم کنترل وابسته به ضرائب تخفیف می‌باشد [۷]، [۱۰]. در رابطه فوق با توجه به وجود α_v در B_1 این مسئله بخوبی مشاهده می‌شود. برای رفع این مشکل ماجومدار با تغییر روند میانیابی ممنتوم و استفاده از ضرائب زیرتخفیف، رابطه دیگری را ارائه داد که در آن مقدار سرعت روی وجوه حجم کنترل در سعی قبلی نیز در محاسبات وارد می‌شود. استفاده از این روش مستلزم آن است که مقادیر سرعتهای روی وجوه حجم‌کنترلها در هر سعی برای استفاده در سعی بعدی ذخیره شود. در حالت استفاده از سیستم مختصات منحنی الخط با ترکیب مقادیر سرعتهای کارتزین روی وجوه حجم کنترل، مقدار U در وجوه شرقی و غربی و مقدار V در وجوه شمالی و جنوبی حجم‌کنترل باید ذخیره شوند. در روش ساده‌تر دیگری که توسط میلائین پیشنهاد شد [۸]، [۹] ، رابطه (۲۸) با حذف مقدار α_v از B_1 مورد استفاده قرار می‌گیرد. به این ترتیب در این حالت دیگر نیازی به ذخیره سازی مقادیر سرعتها روی وجوه حجم کنترل برای سعی بعدی نمی‌باشد. این روش توسط محققین دیگر نیز مورد استفاده و تأیید قرار گرفت [۱۲]، [۱۹].

توسعه‌ای که توسط ماجومدار و میلائین در میانیابی ممنتوم داده شده است مربوط به معادلات حالت ماندگار می‌باشد. برای استفاده از این روابط در حالت غیرماندگار، وابستگی مقادیر سرعتهای روی حجم‌کنترل به گام زمانی (Δt) نیز مطرح می‌شود. چرا که Δt در A_p نیز وارد شده و بنابراین در محاسبه B_1 نمی‌توان به مقداری که مستقل از گام زمانی باشد، دست یافت. چوئی ضمن نشان‌دادن وابستگی روش ری و چو به گام زمانی، روشی را در سیستم مختصات کارتزین ارائه داد که وابستگی خیلی کمی به گام زمانی داشت [۱]. یو و همکاران نیز با یادآوری این مطلب که روش چوئی مستقل از گام زمانی نیست، دو روش که نتایجی مستقل از گام زمانی بدست می‌داد ارائه کردند [۱۷]. روش ارائه شده توسط این مولفین نیاز به میانیابی ترمهای مختلف موجود در ضریب A_p دارد و برای سیستم مختصات کارتزین توسعه داده شده است. استفاده از این روابط برای سیستم مختصات منحنی‌الخط نیاز به ذخیره سازی ترمهای مختلفی از A_p دارد که خود نیازمند حافظه کامپیوتری زیادی است. لین و لچزاینر نیز برای حل معادله سه‌بعدی ناویر-استوکس ضمن ارائه مروری بر روشهای مختلف برای میانیابی ممنتوم، روشی را برای سیستم مختصات منحنی‌الخط پیشنهاد دادند که جوابهایی مستقل از ضرائب زیرتخفیف و گام زمانی بدست می‌داد [٦]. این روش در واقع توسعه روش ماجومدار برای حالت غیرماندگار است و برای محاسبه سرعت در وجوه حجم کنترل باید مقدار سرعت روی وجوه هم در سعی قبلی و هم در گام زمانی قبلی ذخیره

شود.

در اینجا معادلات آبهای کم عمق با استفاده از دو روش برای میانیابی ممنتوم حل شده و نتایج با هم مقایسه می‌شوند. روش اول روش اصلاح شده ری و چو توسط میلائین است که در آن به صورت نمونه سرعت در وجوه شرقی و شمالی حجم کنترل برای آبهای کم‌عمق و در سیستم مختصات منحنی‌الخط بصورت زیر بدست می‌آید:

$$U_e=\overline{U_e}-\left(\overline{B_2}\right)_e\left[\left(\overline{\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}}\right)_e-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)_e\right] \tag{۳۲}$$

$$V_n=\overline{V_n}-\left(\overline{C_2}\right)_n\left[\left(\overline{\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}}\right)_n-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_n\right] \tag{۳۳}$$

$$B_2=\frac{-g\,h\,q_{11}\,\Delta\xi\,\Delta\eta}{A_p},\ C_2=\frac{-g\,h\,q_{22}\,\Delta\xi\,\Delta\eta}{A_p} \tag{۳۴}$$

روش دوم نیز روش لین و لچزاینر است که پس از توسعه برای معادلات آبهای کم عمق‌می‌باشد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}U_e={}&f_1\left\{\begin{array}{l}A_P\left[U_P-(1-\alpha_v)U_P^{**}\right]-\alpha_v\,A_P^0U_P^o\\+\alpha_v\left(g\,h\,q_{11}\,\Delta\xi\Delta\eta\right)_P\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)_P\end{array}\right\}\frac{1}{(A_P)_e}\\&+(1-f_1)\left\{\begin{array}{l}(A_P)_E\left[U_E-(1-\alpha_v)U_E^{**}\right]\\-\alpha_v\left(A_P^0\right)_E U_E^o\\+\alpha_v\left(g\,h\,q_{11}\,\Delta\xi\Delta\eta\right)_E\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)_E\end{array}\right\}\frac{1}{(A_P)_e}\\&+(1-\alpha_v)U_e^{**}\\&+\left\{\begin{array}{l}\alpha_v\left(A_P^0\right)_e U_e^o\\-\alpha_v\left(g\,h\,q_{11}\,\Delta\xi\Delta\eta\right)_e\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)_e\end{array}\right\}\frac{1}{(A_P)_e}\end{aligned} \tag{۳۵}$$

$$\begin{aligned}V_n={}&f_2\left\{\begin{array}{l}A_P\left[V_P-(1-\alpha_v)V_P^{**}\right]-\alpha_v\,A_P^0V_P^o\\+\alpha_v\left(g\,h\,q_{22}\,\Delta\xi\Delta\eta\right)_P\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_P\end{array}\right\}\frac{1}{(A_P)_n}\\&+(1-f_2)\left\{\begin{array}{l}(A_P)_N\left[V_N-(1-\alpha_v)V_N^{**}\right]\\-\alpha_v\left(A_P^0\right)_N V_N^o\\+\alpha_v\left(g\,h\,q_{22}\,\Delta\xi\Delta\eta\right)_N\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_N\end{array}\right\}\frac{1}{(A_P)_n}\\&+(1-\alpha_v)V_n^{**}\\&+\left\{\begin{array}{l}\alpha_v\left(A_P^0\right)_n V_n^o\\-\alpha_v\left(g\,h\,q_{22}\,\Delta\xi\Delta\eta\right)_n\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_n\end{array}\right\}\frac{1}{(A_P)_n}\end{aligned} \tag{۳۶}$$

در روابط فوق ضرائب f_1 و f_2 ضرائب مربوط به میانیابی خطی هستند و مقادیر روی وجوه سلول از روابطی مشابه روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\left(A_P\right)_e=f_1\left(A_P\right)_P+\left(1-f_1\right)\left(A_P\right)_E \tag{۳۷}$$

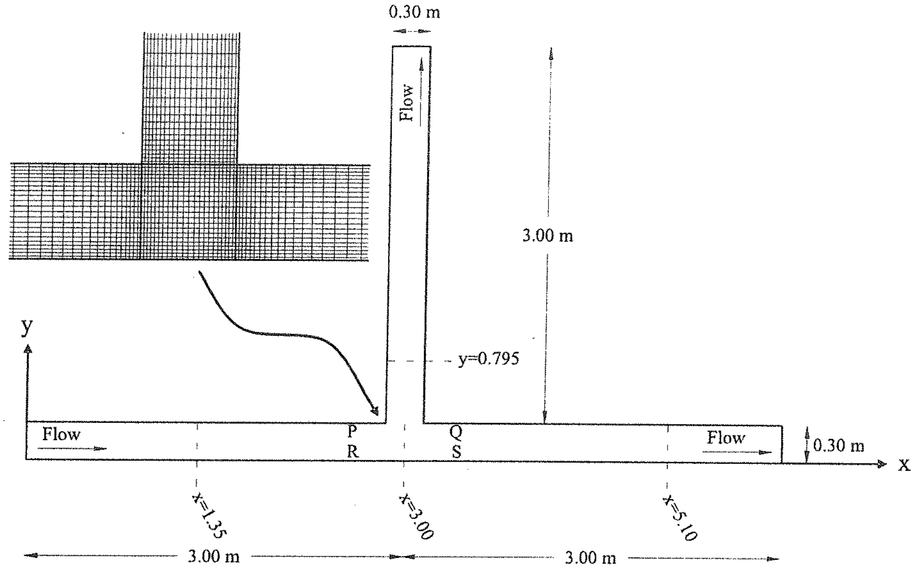
$$\left(A_P\right)_n=f_2\left(A_P\right)_P+\left(1-f_2\right)\left(A_P\right)_N \tag{۳۸}$$

باید توجه داشت که سرعتهای محاسبه شده به روش میانیابی ممنتوم باید حتماً در حل معادله تصحیح عمق استفاده شوند؛ اما تاکنون در مورد لزوم استفاده از این سرعت‌ها در حل معادلات ممنتوم برای آبهای کم عمق تحقیقی صورت نگرفته است. برای حل معادلات ناویر- استوکس، یو و همکاران نشان دادند که استفاده از میانیابی خطی برای سرعت‌های روی وجوه سلول‌ها در معادلات ممنتوم باعث تفاوت جواب‌ها می‌گردد ولی میزان تأثیر آنها زیاد نیست [۱۷].

با توجه به مباحث مطرح شده در بخشهای قبل دراینجا دو روش ذکرشده برای میانیابی ممنتوم در وجوه سلول مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در هر روش دقت جوابها در حالتی‌که میانیابی ممنتوم فقط در معادله پیوستگی استفاده شود و یا در هر دو معادله پیوستگی و ممنتوم مورد استفاده قرار گیرد، بررسی می‌شود. همچنین میزان تأثیر حذف ΔF از ضریب A_p در تحلیل یک جریان ماندگار با حل معادلات غیرماندگار بررسی می‌گردد.

۵- آزمایش‌های عددی و بررسی نتایج

به منظور انجام بررسی تأثیر نحوه میانیابی ممنتوم، جریان در یک آبگیر جانبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این آزمایش جریان نسبتاً پیچیده‌ای در محل اتصال آبگیر به کانال اصلی دارد که با یک ناحیه چرخشی قوی در آبگیرجانبی و یک جریان چرخشی ضعیف‌تر در کانال اصلی و در پائین‌دست محل اتصال آبگیر همراه است. جریان در کانال اصلی و در بالادست محل اتصال کانال جانبی یکنواخت است. برای این مطالعات آزمایش‌های شتار و مورتی که ابعاد آن در شکل (۱) نشان داده شده، در نظر گرفته شده است [۱۵]. مقدار دبی ورودی ۵/۶۷ لیتر در ثانیه و عمق آب در انتهای کانال اصلی و آبگیر جانبی به ترتیب برابر با ۵/۵ و ٤/۵ سانتیمتر می‌باشد. همچنین مقاطعی که در آنها سرعت طولی برداشت شده و نتایج برای آنها مقایسه شده است، در شکل (۱) مشخص شده‌اند.



شکل (۱): وضعیت نمادین فلوم آزمایشگاهی آبگیر جانبی و ابعاد آن، همراه با مقاطع مورد استفاده در مقایسه‌ها و شبکه محاسباتی.

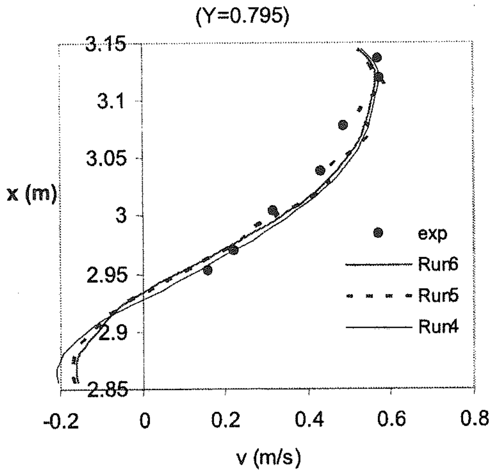
برای سهولت در ارائه نتایج، حالتهای مختلفی که برای حل جریان مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در جدول (۱) ذکر شده‌اند. در این جدول عبارتهای MI و LI به ترتیب برای نشان دادن میانیابی ممنتوم و میانیابی خطی استفاده شده‌اند. Method-1 و Method-2 نیز به ترتیب به معادلات (۳۲) تا (۳٤) (روش میلائین) و معادلات (۳۵) تا (۳۸) (روش لین و لچزاینر) مربوط هستند. توجه شود که در کلیه این آزمایش‌ها از میانیابی ممنتوم در معادله پیوستگی استفاده شده است.

جدول (۱): مشخصات آزمایش‌های مختلف در تحلیل جریان در آبگیر جانبی.

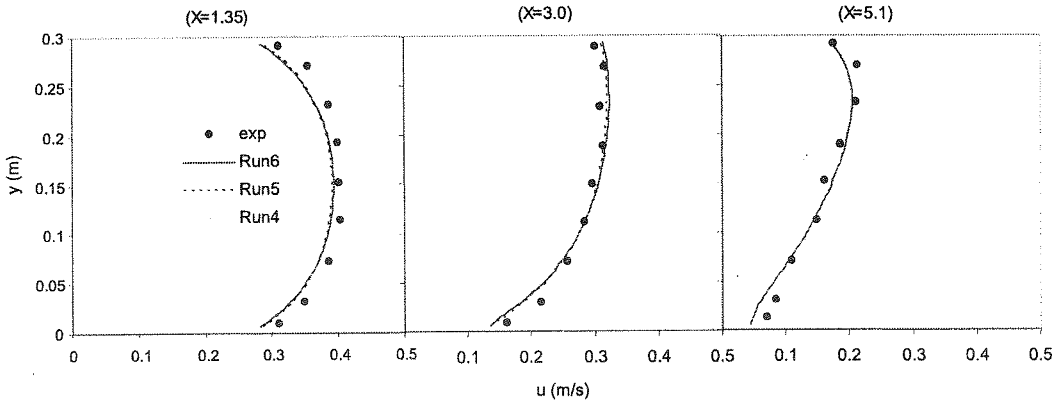
	روش میانیابی ممنتوم	معادله ممنتوم	ΔF
Run1	Method-1	LI	0
Run2	Method-1	LI	Calculated
Run3	Method-1	MI	Calculated
Run4	Method-2	LI	0
Run5	Method-2	LI	Calculated
Run6	Method-2	MI	Calculated
Run1	Method-1	LI	0

برای آنکه نتایج حالت‌های مختلف بهتر قابل بررسی باشد، نتایج Run6 که بیشترین محاسبات را داشته و مطابق با نتایج موجود وابستگی هم به ضرائب زیرتخفیف و Δt ندارد، به عنوان مبنای مقایسه‌ها در نظر گرفته می‌شود. همانگونه که در شکل‌های (۲) تا (۷) آمده است، نتایج این اجرا بهترین تطابق را با نتایج آزمایشگاهی داشته و از این رو در بین آزمایش‌های مذکور در جدول (۱) می‌تواند به عنوان دقیق‌ترین اجرا در نظر گرفته شود. در شکل (۲) پروفیل سرعت v جریان در امتداد مقطعی از کانال جانبی، بدست آمده از Run6، Run5 و Run4 همراه با نتایج آزمایشگاهی ارائه شده است. همچنین پروفیل سرعت u در سه مقطع از کانال اصلی در شکل (۳) آمده است. همانگونه که ملاحظه می شود، زمانی که از روش لین و لچزاینر استفاده شده است، بکاربردن میانیابی خطی در معادله ممنتوم (Run5) باعث ایجاد نوساناتی در سرعتهای منطقه جریان چرخشی کانال جانبی شده است (شکل (۲)). این درحالیست که محاسبه سرعت در منطقه بالادست آبگیر که دارای جریانی یکنواخت است، با هر سه روش بدون نوسان و تقریباً یکسان بدست آمده است (شکل (۳)). در همین حالت حذف ΔF از محاسبات باعث شده که نوسانات مذکور در قسمت چرخشی نیز حذف شوند (Run4 در شکل ۲). بنابراین اگرچه حذف ΔF از نظر کلی در حل معادلات غیرماندگار آبهای کم‌عمق صحیح نیست، ولی می‌تواند در حل یک مسأله ماندگار، مورد استفاده قرار بگیرد. البته باید توجه داشت که با استفاده از روش دوم سرعت‌های روی وجوه المان‌ها باید به هر حال با میانیابی ممنتوم محاسبه و ذخیره شوندو از این رو می‌توان از آنها براحتی در معادله ممنتوم نیز استفاده کرد. بنابراین میانیابی خطی در معادله ممنتوم کار محاسبات را ساده‌تر نمی‌کند.

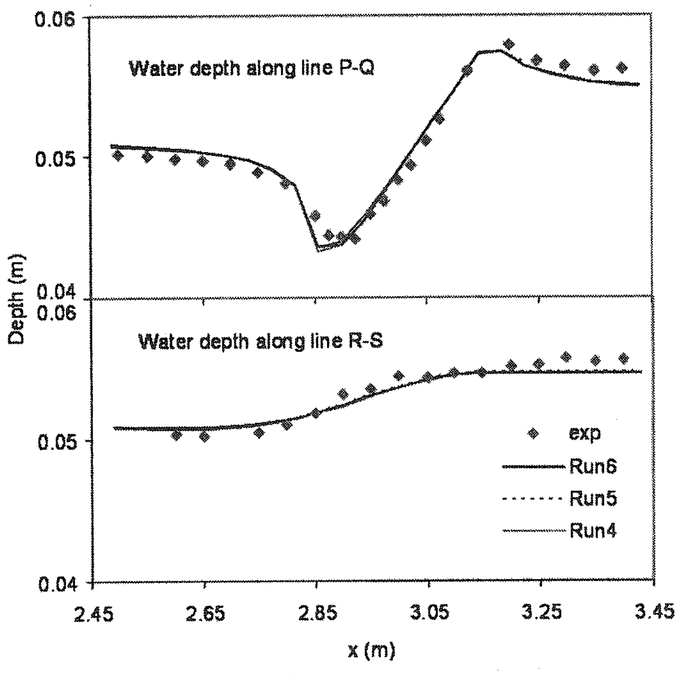
در شکل (۴) پروفیل تراز سطح آب بدست آمده از Run6، Run5 و Run4 در امتداد محورهای P-Q و R-S از کانال اصلی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده و نشان می‌دهد که هر سه روش به جواب‌های یکسانی منجر شده و دقت یکسانی در پیش‌بینی تراز سطح آزاد جریان داشته‌اند.



شکل (۲): مقایسه نمودار سرعت در امتداد کانال جانبی برای Run6، Run5 و Run4.



شکل (۳): مقایسه نمودار سرعت در امتداد کانال اصلی برای Run6، Run5 و Run4.



شکل (۴): مقایسه نمودار سطح آب در امتداد کانال اصلی برای Run6، Run5 و Run4.

نتایج Run6 و Run3 دقیقاً بر هم منطبق هستند و بجز تغییر بسیار جزئی در یکی دو قسمت، در سایر قسمتها تفاوت آنها قابل تشخیص نیست. از این رو، در نمودارهای ارائه شده، نتایج Run3 ذکر نشده است. استفاده از Run3 این مزیت را نسبت به Run6 دارد که رابطه مورد استفاده برای میانیابی سرعت ساده تر است. ضمن آنکه نیازی به ذخیره سرعت‌های روی وجوه

سلول در زمان قبل نیست و از اینرو حافظه کمتری اشغال می‌شود.

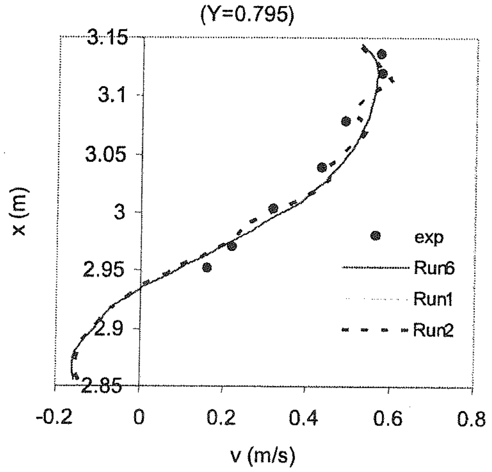
مشابه با شکل‌های (۲) تا (٤)، در شکلهای (٥) تا (۷)، نتایج Run6 با Run1 و Run2 آمده است. نمودارها نشان می‌دهند که استفاده از میانیابی خطی برای معادلات ممنتوم و همچنین حذف یا عدم حذف ΔF در روش میلائین نتایجی مشابه روش پیچیده‌تر لین و لچزاینر می‌دهد. نکته قابل توجه در اینجا آن است که در Run1 با توجه به روش مورد استفاده برای میانیابی ممنتوم، نیازی به ذخیره‌سازی سرعتهای روی وجوه حجم کنترل نیست و سرعتها در هر زمان در معادله پیوستگی محاسبه و استفاده می‌شوند. باید توجه داشت که حذف ΔF تنها برای حل مسأله ماندگار می‌تواند قابل قبول باشد. نکته قابل توجه در مورد مقایسه Run6 و Run1 آنکه در روش لین و لچزانیر از معادله با پیچیدگی خیلی بیشتری نسبت به روش میلائین استفاده می‌شود در حالیکه نتایج نهایی تفاوت قابل‌ملاحظه‌ای ندارند. به عبارت دیگر با استفاده از یک رابطه خیلی ساده‌تر در جریان خیلی پیچیده آبگیرجانبی نتایج با دقت مشابهی بدست می‌آید.

نکته‌دیگری که لازم است مد نظر قرار گیرد، میزان پایداری معادلات در روشهای مختلف می باشد. هر چند به علت استفاده از روش ضمنی محدودیتی مانند آنچه که در روشهای صریح برای گام زمانی مطرح است، وجود ندارد ولی عملاً بدلیل پایداری، مخصوصاً با وجود جریان چرخشی نمی‌توان مقدار گام زمانی را خیلی بزرگ در نظر گرفت. در اینجا به منظور بررسی میزان پایداری روابط کلیه آزمایش‌ها با استفاده از مقدار ضریب زیرتخفیف ثابتی انجام شده و حداکثر مقدار ممکن برای گام زمانی با سعی و خطا بدست آمده‌است. بدین ترتیب که برای هر تست مذکور در جدول (۱)، ابتدا از یک Δt بسیار کوچک استفاده شده و در صورت مناسب بودن Δt و همگرایی مدل، مجدداً مدل با استفاده از گام زمانی بزرگ‌تری مورد آزمایش قرار گرفته است. و این عمل تا رسیدن به بزرگ‌ترین مقداری که برنامه با شکست مواجه نشود، ادامه یافته است. در کلیه اجراها از شرط اولیه بصورت جریان با سرعت ثابت در امتداد کانال اصلی و کانال جانبی استفاده شده و محاسبات تا زمانی طولانی که دیگر مقادیر متغیرها تغییر نمی‌کردند، انجام می‌گرفت. مقدار حداکثر Δt ممکن برای حالتهای مختلف درجدول (۲) آمده است.

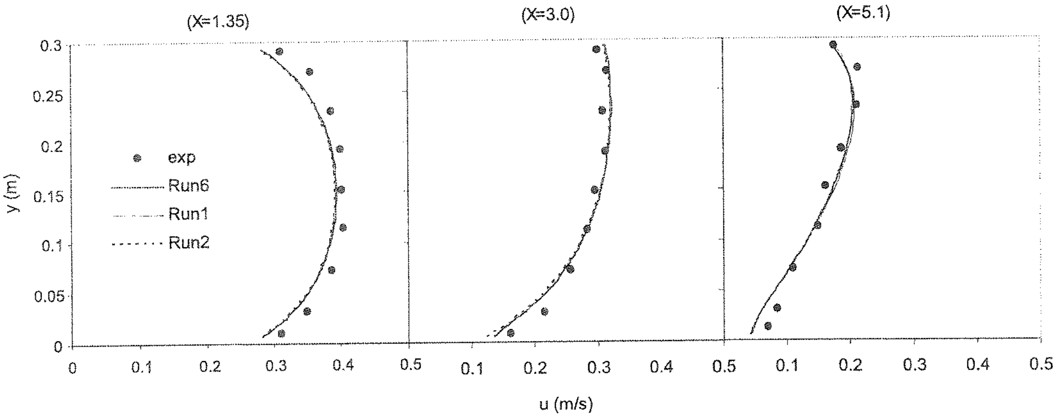
جدول (۲): حداکثرمقدار گام زمانی در تست‌های مختلف برای ضرائب تخفیف ثابت.

	Δt (Sec.)
Run1	1.0
Run2	0.8
Run3	1.0
Run4	0.25
Run5	0.25
Run6	2.5

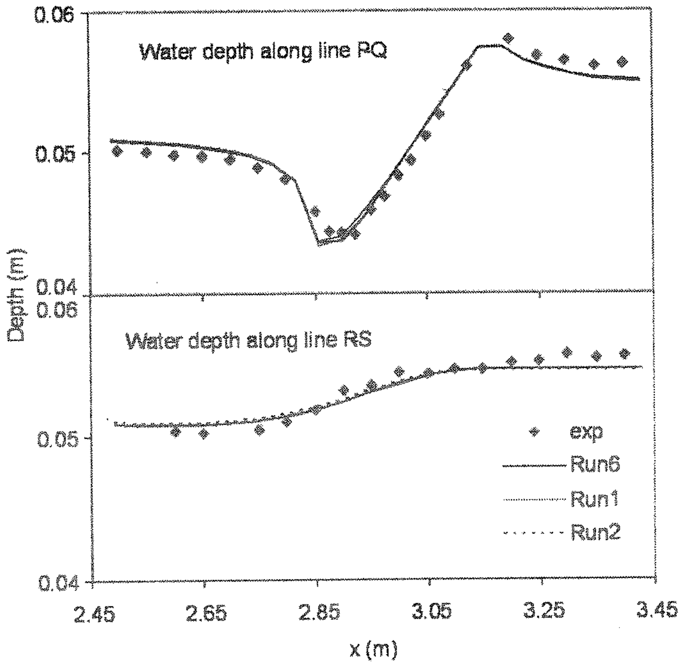
همانگونه که از این نتایج مشاهده می‌شود. Run6 دارای بهترین وضعیت پایداری بوده و می‌توان مقدار گام زمانی را در آن از همه حالتهای دیگر بیشتر در نظر گرفت. همچنین زمانی‌که از سرعت‌های حاصل از میانیابی خطی در معادلات ممنتوم استفاده می‌شود، باید از گام‌های زمانی کوچکتری استفاده نمود. این ضرورت در استفاده از روش لین و لچزاینر بیشتر است.



شکل (٥): مقایسه نمودار سرعت در امتداد کانال جانبی برای Run6، Run1 و Run2.



شکل (۶): مقایسه نمودار سرعت در امتداد کانال اصلی برای Run6، Run1 و Run2.



شکل (۷): مقایسه نمودار سطح آب در امتداد کانال اصلی برای Run6، Run1 و Run2.

۶- نتیجه‌گیری

از شبکه‌جابجا نشده بدلیل پیچیدگی کمتر آن در مقایسه با شبکه‌جابجا شده از نظر برنامه‌ریزی رایانه‌ای استفاده زیادی می‌شود. به منظور جلوگیری از ایجاد نوسان در سطح آب، استفاده از میانیابی ممنتوم برای محاسبه سرعت‌های روی وجوه سلول‌ها پیشنهاد شده است. برای آنکه این سرعت‌ها به ضرائب زیر تخفیفی که در روش ضمنی برای حل معادلات استفاده می‌شود و همچنین به گام زمانی وابسته نباشند، روابط مختلفی در مراجع مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله تأثیر دقت این روابط برای استفاده در معادلات آبهای کم‌عمق مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین میزان تأثیر استفاده از سرعتهای حاصل از میانیابی ممنتوم برای حل معادلات ممنتوم و یا استفاده از میانیابی خطی در حل این معادلات، بررسی شده است.

نتایج نشان می‌دهد که در حل معادلات آبهای کم‌عمق حتی در شرایط یک جریان پیچیده مانند آبگیر جانبی که دارای مناطق چرخشی است، می‌توان از رابطه ساده‌تر استفاده کرد و به جواب‌هایی با همان دقت روش پیچیده دست یافت. البته در صورت استفاده از رابطه ساده باید گامهای زمانی کوچکتری در حل معادلات مورد استفاده قرار گیرد. در صورتیکه در حل معادلات ممنتوم از میانیابی خطی برای محاسبه سرعتهای روی وجوه سلولها استفاده شود، نوساناتی در پروفیل سرعت در برخی قسمتهایی که جریان بصورت پیچیده می‌باشد، بوجود می‌آید. در صورتی‌که ترم ΔF در محاسبات برابر صفر منظور شود، می‌توان با دقت قابل قبولی به جوابهای واقعی دست یافت. البته این امر تنها در مورد حل یک مسأله ماندگار با استفاده از روابط غیرماندگار قابل انجام است.

۷- مراجع

[1] Choi, Seok Ki; "*Note on the Use of Momentum Interpolation Method for Unsteady Flows*", Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 36, pp 545-550, 1999

[2] Hadian, M.R. ;Zarrati, A.R. and Eftekhari, M.; "*Development of an Implicit Numerical Model for Calculation of Sub- and Super-Critical Flows*", International Journal of Engineering, Vol. 18 No. 1, pp 85-95 2004

[3] Jia, Y.; Wang, S. S.Y.; "*Numerical Model for Channel Flow and Morphological Change Studies*", Journal of Hydraulic Engineering, Vol.125, No.9, pp 924-933, 1999

[4] Kimura, I.; Hosoda, T.; "*Fundamental Properties of Flows in Open Channel with Dead Zone*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.123, No.2, pp 98-107 , 1997

[5] Kuipers, J.; Vreugdenhil C.B.; "*Calculation of Two-Dimensional Horizontal Flow*", Rep. S163, Part 1, Delft Hydraulics Lab., Delft, Netherlands, 1973.

[6] Lien, F.S.; Leschziner, M.A.; "*A General Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm for Turbulent Flow at all Speeds Incorporating Second-Moment Turbulence-Transport Closure, Part 1: Computational Implementation*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 114, pp 123-148, 1994

[7] Majumdar, S.; "*Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids*", Numerical Heat Transfer, VOl.13 pp.125-132, 1988

[8] Melaaen, M.C.; "*Calculation of Fluid Flows with Staggered and Nonstaggered Vurvilinear Nonorthogonal Grids-The Theory*", Vol. Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 21 pp 1-19 1992.

[9] Melaaen, M.C.; "*Calculation of Fluid Flows with Staggered and Nonstaggered Vurvilinear Nonorthogonal Grids- A Comparison*", Vol. Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 21 pp 1-19 1992.

[10] Miller, T.F.and Schmidt, F.W., "*Use of Pressure-Weighted Interpolation Method for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System*", Numerical Heat Transfer, Vol. 14 pp 213-233, 1988

[11] Molls, T.; Chaudhry, M.H.; "*Depth-Averaged Open-Channel Flow Model*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.121, No.6, pp 453-465, 1995.

[12] Olsen N.R.B.; "*CFD Algorithms for Hydraulic Engineering. Class notes 2000*, Available: http://www.bygg.ntnu.no/~nilsol/cfd/cfdalgo.pdf

[13] Patankar, S.V.; Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, 1980.

[14] Rhie, C.M.; Chow, W.L.; "*Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil Trailing Edge Separation*", AIAA Journal, Vol.21, No.11 pp.;1525-1532 1983

[15] Shettar, Ashok S. & Murthy, K. Keshava, "*A Numerical Study of Division of Flow in Open Channels*", Journal of Hydraulic Reaserch, IAHR, Vol.34, No.5, pp 651-675., 1996

[16] Tingsanchali, T.; Maheswaran, S.; "*2-D Depth-Averaged Computation near Groyne*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.116, No.1, pp.71-86 1990

[17] Yu, B.; Tao, W.; Wei, J.; Kawaguchi, Y.; Toshio, T.; Ozoe, H.; "*Discussion on Momentum Interpolation Method for Collocated Grids of Incompressible Flow*", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 42 pp 141-166, 2002

[18] Vregdenhill, C.B.; Wijbenga, J.H.A.; "*Computation of Flow Pattern in Rivers*", Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol.108 (HY11), pp. 1296-1310 1982

[19] Wang, Y.; Komori, S.; "*Comparison of Using Cartesian and Covariant Velocity Components on Non-orthogonal Collocated Grids*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 31 pp. 1265-1280 1999

[20] Weerakoon, S.B; Tamai, N.; Kavahara, Y., "*Depth-Averaged Flow Computation at a River Confluence*", Proc. Ins. Civil Engrg. Water & Maritime Engrg., Vol.156, No.1, pp.73-83, 2003

[21] Zarrati, A.R.; Jin, Y.C.; "*Development of a Generalized Multi-Layer Model for 3-D Simulation of Free Surface Flows*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 46, pp.1049-1067, 2004

[22] Zarrati, A.R.; Tamai, N.; Jin, Y.C.; "*Mathematical Modeling of Meandering Channels with a Generalized Depth Averaged Model*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Accepted for Publication, 2005

[23] Zhou, Jian Guo ; "*Velocity-Depth Coupling in Shallow-Water Flows*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.121, No.10 pp. 717-724, 1995.