توسعه یک الگوریتم برای تخصیص و تسطیح منابع محدود دربرنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای – چند محصولی و چند پریودی

حسن خادمی زارع [i]، سیدمحمد تقی فاطمی قمی [ii]، میربهادر قلی آریانژاد [iii]

چکیده

مساله تخصیص و تسطیح منابع محدود در برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای، چند محصولی و چند پریودی یکی از مهم‌ترین و در عین حال مشکل‌ترین مسائل تصمیم گیری است . تاکنون الگوریتم‌های بهینه و ابتکاری متنوعی برای حل مساله تخصیص و تسطیح منابع محدود در اینگونه مسائل برنامه ریزی تولید ارائه شده است. در این مقاله یک روش کارا برای تخصیص وتسطیح منابع محدود در یک مساله برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای، چند محصولی و چند پریودی برای تعیین اندازه انباشته ارائه شده است. این روش با استفاده از تخصیص منابع محدود بر پایه ضرایب لاگرانژ، مساله برنامه ریزی تولید چند محصولی را به مسائل برنامه ریزی تولید یک محصولی تبدیل می‌کند. بعد از حل مدل ریاضی تک محصولی برای هر یک از محصولات، با مقایسه ظرفیت تخصیص داده شده و مورد نیاز برای هر یک از محصولات، میزان ظرفیت باقی‌مانده را محاسبه و عملیات تسطیح منابع به انجام می‌رسد. بر این اساس بعد از چند مرحله، تسطیح ظرفیت‌های باقیمانده دیگر در جواب مساله تاثیری نخواهد داشت. در این صورت جواب مساله اصلی حاصل شده است. طراحی آزمایش‌ها در این مقاله بیانگر استفاده بهینه این روش از منابع کمیاب و برتری آن نسبت به الگوریتم ژنتیک و برنامه ریزی خطی است .

کلمات کلیدی:

تخصیص و تسطیح منابع محدود، برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای و ضرایب لاگرانژ.

Developing an Algorithm for Limited Resources Allocation and Leveling in Multi-Stage, Multi-Product and Multi-Period Production Planning

H. Khademi Zare; S.M.T Fatemi Ghomi ;M.B.G. Aryanezhad

ABSTRACT

Problem of Resource Constrainted allocation and leveling in multi-stage, multi-product and multi-period production planning is one of the most difficult and important - decision making problems. Variuos heuristic and optimal algorithms have been provided to solve the problem . In this paper, an effective approach is proposed to solve the problem for lot-size determination . This approach, through the Resource Constrainted allocation based on Lagrange multiplier, decomposes a mutli-product production planning problem to a single product production planning problem. After solving the single product mathematical model for each product, by comparing the allocated and required capacity for each product, total remained capacity is calculated and resource leveling is performed. Accordingly, after

[i] دانشجوی دوره دکتری مهندسی صنایع ؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

[ii] استاد دانشکده صنایع ؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

[iii] استاد دانشکده مهندسی صنایع ؛ دانشگاه علم و صنعت ایران

several stages, leveling of the remained capacities does not affect the problem solution. In this case, the primary problem solution is obtained. Experiments designed in this paper indicate the optimal usage of the Resource Constrainted by this approach and its superiority over Genetic Algorithm and Linear Programming methods.

KEYWORDS:

Resource Constrainted allocation and leveling, multi-stage production planning, Lagrange multiplier.

۱- مقدمه

معمول‌ترین سیستم‌ها در دنیای ساخت و تولید، برنامه ریزی سیستم‌های تولید چند محصولی، چند پریودی و چند مرحله ای است [۱]، [۲] و [۳] تصمیمات مدیریتی در برنامه ریزی سیستم‌های تولید چند مرحله‌ای را بطور کلی می‌توان در سه دسته مسائل تصمیم گیری بلند مدت، میان مدت و کوتاه مدت تقسیم بندی کرد [٤]. آن بخش از تصمیمات مدیریتی ؛ که در برنامه ریزی تولید بیشتر مورد نظر است، تصمیمات میان مدت است که تخصیص و تسطیح منابع محدود برای تعیین اندازهٔ انباشته از جمله مسائل مهم آن است؛ زیرا در سیستم‌های تولید چند محصولی، چند مرحله‌ای بعد از عملیات تخصیص و تسطیح منابع محدود، نوبت به راه اندازی هر یک از مراحل برای هر یک از محصولات فرا می رسد ، سپس عملیات تولیدی بر روی انباشته ای از آن محصول صورت می گیرد [۵] و[۶] یکی از مهم‌ترین و بهترین راههای کنترل هزینه‌های تولید، تصمیم گیری صحیح در مورد عملیات تخصیص و تسطیح منابع محدود برای تعیین انباشته تولید هر یک از محصولات، در هر یک از مراحل تولید است؛ زیرا در سیستم های تولید چند مرحله‌ای موجودی‌های در جریان ساخت، هزینه زیادی به سیستم تحمیل کند [۷] و[۸] ؛ لذا کنترل میزان این موجودی ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. هرچند بعنوان یک اصل می توان گفت هر چه اندازه انباشته بیشتر باشد، زمان سیکل کاری طولانی‌تر شده و به تبع آن میزان موجودی بین مراحل و هزینه نگهداری افزایش می‌یابد [۹] ، ولی از برای دیگر با افزایش میزان انباشته تولیدی هزینه راه اندازی کاهش می‌یابد.

بر این اساس، تلفیق سیاستهای تخصیص و تسطیح منابع محدود با عملیات سفارش دهی و تعیین اندازهٔ تولیدی در هر یک از مراحل، هزینه‌های کل سیستم را حداقل می‌کند [۱۰]. عموماً روش لاگرانژ یکی از روش های حل مسائل بهینه سازی عملی است که راه حل های کاملاً نزدیک به جواب بهینه ارائه می کند [۱۱]. فیشر [۱۲] برای اولین بار به تشریح این روش پرداخت و کاربردهایی از آنرا ارائه کرد. افنتاکیس و گاویش [۱۳] با تکیه و بکارگیری Echelon بدون در نظر گرفتن عملیات تخصیص منابع محدود اقدام به ارائه مدلی برای حالت سیستم‌های تولیدی پیچیده کرد و با استفاده از ضرایب لاگرانژ و بهبود بخشیدن آنها در مراحل تکرار و با تعریف یک حد پائین به توسعهٔ یک روش انشعاب و تحدید پرداخته است. فرانس و آرمنتانو [١٤] برای تعیین اندازهٔ انباشته در سیستم‌های چند مرحله‌ای یک مدل هیورستیک با استفاده از ضرایب لاگرانژ ارائه داده‌اند. دومارو باروسگو [١٥] با استفاده از روش‌های ابتکاری ترکیبی برای تعیین اندازه انباشته تولید در سیستم های تولید چند مرحله‌ای استفاده کرد. شاوکای وابواتا [١٦]برای تعیین اندازه انباشته در سیستم‌های تولید یک مرحله‌ای، چند محصولی و تخصیص منابع محدود از روش هندسی استفاده کرده‌اند. ایشان تقاضا را ثابت فرض کرده و به کمک ضرایب لاگرانژ و مدل پایه EOQ مجموع هزینه های نگهداری و سفارش‌ها را حداقل کرد هاند. جوزف واروس [۱۷] برای تعیین اندازه انباشته در سیستم‌های تولید چند مرحله‌ای با ساختار مونتاژی و بدون محدودیت ظرفیت تولید برای یک محصول چند قطعه‌ای از ضرایب لاگرانژ استفاده کرد . سامبواسیوان [۱۸] برای تعیین اندازه انباشته و تخصیص منابع محدود در سیستم های تولید چند کارخانه‌ای، چندمحصولی و با تقاضای پویا از ترکیب ضرایب پایه لاگرانژ و روشهای هیورستیک استفاده کرد. تیزی [۲۲] برای تعیین اندازه انباشته در مسائل برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای؛ چند پریودی و یک محصولی با ساختارعمومی از الگوریتم ژنتیک ترکیبی (MA^1) استفاده کرد. ایشان برتری روش خود را نسبت به روش‌های موجود با مثالهای متعدد بررسی و تاکید کرد.

ساختار این مقاله به شرح زیراست: ابتدا مدل ریاضی مساله اصلی برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای؛ چند محصولی و چند پریودی ارائه شده است، سپس این مساله براساس الگوریتم ابتکاری تجزیه به n مساله تک محصولی تبدیل و بعد از تخصیص منابع کمیاب براساس ضرایب لاگرانژ به هریک از مسائل، مدل ریاضی مسائل تک محصولی ارائه و این مسائل بر مبنای الگوریتم ابتکاری توسعه فضای جواب حل شده اند. در نهایت، بین منابع مورد استفاده و تخصیص داده شده مقایسه و تسطیح منابع لازم انجام شده است. بعد از چند مرحله تکرار این عملیات، جواب‌های حاصل، با جواب روش های BLP و MA مقایسه و برتری آن مورد تائید شده است.

۲- مدل اصلی ریاضی

در این بخش، به تشریح مدل اصلی و ریاضی برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای؛ چند محصولی و چند پریودی با محدودیت ظرفیت می‌پردازیم. در این مساله محصولات مختلف در تخصیص منابع محدود با یکدیگر رقابت می‌کنند، پس باید با توجه به محدودیت منابع، دسته‌های تولیدی در هر یک از مراحل و پریودها بگونه‌ای تعیین شود که تقاضای تمامی محصولات در پریودهای مختلف برآورده گردد. در این مدل، سیستم تولیدی بصورت سری فرض شده و در هر مرحله تولید محدودیت ظرفیت وجود دارد. کمبود موجودی یا سفارش‌ها عقب افتاده مجاز نبوده و تقاضای هر پریود معین؛ ولی متغیر است. همچنین می بایست برای همه محصولات در پریود اول حداقل به میزان تقاضای پریود اول تولید وجود داشته باشد. زیرا در غیراینصورت با کمبود مواجه خواهیم شد. حال با هدف حداقل کرد ن مجموع هزینه های نگهداری و راه اندازی در یک افق برنامه‌ریزی محدود، مدل تصمیم گیری مربوط به این مدل تشریح می‌شود.

متغیرهای تصمیم گیری و پارامترها:

T: تعداد پریودهای کاری

M: تعداد مراحل کاری

N: تعداد محصولات

X_{ijt}: میزان تولید محصول i در مرحله j و پریود t

I_{ijt}: میزان موجودی محصول i در مرحله j در انتهای پریود t

$Y_{ijt} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ اگر محصول I درمرحله j ودرپریودtتولید شود درغیراین صورت

d_{it} : میزان تقاضای محصول i در پریود t

C_{jt}: زمان در دسترس برای انجام مرحله j در پریود t

a_{ij} : زمان تولید محصول i در مرحله j

A_{ijt}: هزینه راه اندازی برای تولید محصول i در مرحله j و پریود t

V_{ijt} : هزینه متغیر تولید محصول i در مرحله j و پریود t

H_{ijt}: هزینه نگهداری هر واحد محصول i در مرحله j و پریود t

S_{ij}: زمان راه اندازی برای تولید محصول i در مرحله j

براساس پارامترها و متغیرهای تصمیم گیری، تابع هدف و محدودیت های این مدل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left[A_{ijt}.Y_{ijt} + V_{ijt}.X_{ijt} + H_{ijt}.I_{ijt}\right] \qquad (۱)$$

S.t

$$I_{i,m,t-1} + X_{i,m,t} - I_{i,m,t} = d_{it} \quad i = 1,2,...,n \quad t = 1,2,...,T \qquad (۲)$$

$$I_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} = I_{i,j,t} + X_{i,j+1,t} \qquad (۳)$$
$$i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,m-1 \quad t = 1,2,...,T$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{ijt}.a_{ij}) + S_{ij} \le Y_{ijt}.C_j \qquad (٤)$$
$$i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,m-1 \quad t = 1,2,...,T$$

$$X_{ijt}, I_{ijt} \ge 0 \quad , \quad Y_{i,j,t} = 0,1 \qquad (۵)$$

در مدل ارائه شده، (۱) بیانگر تابع هدف است که مجموع هزینه‌های راه اندازی، متغیر تولید و نگه داری را حداقل کند؛ (۲) تضمین کننده تامین تقاضا در هر پریود است؛ (۳) نشان می‌دهد که مجموع جریان خارج شده از هر گره (i,j,t) در یک شبکه، بامجموع جریان وارد شده به آن گره مساوی است. (٤) مانع از افزایش تولید به میزان بیشتر از ظرفیت موجود است و (۵) بیانگر وضعیت متغیرها است.

همان طور که ملاحظه می‌شود محدودیت‌های مدل ریاضی ساختارهای متفاوت دارند. این امر سبب NP-hard شدن مدل مزبور می شود، از این رو برای حل مساله باید[7] از روش های ابتکاری استفاده کرد [۹].

۳- تجزیه مدل ریاضی چند محصولی به وسیله تخصیص منابع محدود

در مورد مسائلی که دارای چندین دسته محدودیت با ساختارهای متفاوت هستند، معمولاً این سوال مطرح می‌شود. که کدام دسته از محدودیت ها باید بعنوان عامل تجزیه در نظر گرفته شود. در پاسخ به این سوال باید رابطه متضادی را که بین عوامل زیر برقرار است در نظر گرفت [۱۹]:

الف – قدرت حد حاصل از ترکیب جواب مسائل

ب – سهولت تجزیه مساله اصلی به مسائل فرعی

ج – سهولت حل هر یک از مسائل فرعی

در مدل اصلی ریاضی مشاهده می‌شود که تنها محدودیت سوم (رابطه ٤) در ارتباط با همه محصولات است و در مساله دوگان این محدودیت با یک مجموعه از مضارب لاگرانژ λ_{jt} مواجه است که این امر موجب پیروی تابع هدف از روابط (۳،۲و۵) می‌شود. بدین ترتیب بوسیله تخصیص منابع محدود مساله ترکیبی چند محصولی به n مساله یک محصولی تبدیل می‌شود.

در این مدل از نظر عامل (الف) جواب حاصل لزوماً بهینه نیست زیرا :

$$Convex\left\{X : Min\left(\sum_{i=1}^{n}X_{ijt}.a_{ij} + S_{ij} - Y_{ijt}.C_{jt}\right)\right\} \qquad (٦)$$
$$j = 1,2,...m \qquad t = 1,2,...,T$$

$$\underline{C}\left\{X : \left(\sum_{i=1}^{n} X_{ijt}.a_{ij} + S_{ij} \le Y_{ijt}.C_{jt}\right)\right\} \quad j = 1,2,...m \quad t = 1,2,...,T \qquad (۷)$$

یعنی حد حاصل از مساله فرعی قوی تر از حد حاصل از آزادسازی خطی است. به عبارت دیگر حد پائین تابع هدف برای هر یک از مسائل فرعی کوچکتر یا مساوی با حد پائین تابع هدف مساله اصلی است؛ یعنی $\left(W_{LD} \le Z_{LD}\right)$. از نظر عامل (ب) تجزیه مساله اصلی و تخصیص منابع محدود باعث ایجاد n مساله یک محصولی مستقل می‌شود. از نظر عامل (ج) هر یک از مسائل مستقل دارای m متغیر است که حل آن نسبت به حالت قبل که در آن nm متغیر تصمیم گیری وجود دارد، به مراتب آسان تر است.

در مورد استفاده از روش تجزیه بر پایه ضرایب لاگرانژ برای سایر محدودیت‌ها شرایط فوق (الف، ب و ج) برقرار نیست؛ زیرا اولاً به دلیل وجود متغیرهای آزاد در علامت (ضرایب لاگرانژ) برای هر یک از محدودیت‌های مساوی، مسائل پیچیده تری بوجود می‌آید. ثانیاً نمی‌توان مساله را به n مساله مستقل تجزیه کرد [۱۹]. در این رابطه گوبای [۲۰] نشان داده است که اولاً روش ساده سازی ضرایب لاگرانژ نسبت به سایر ساده سازیها دقیق‌تر عمل می‌کند و ثانیاً روش ساده سازی ضرایب لاگرانژ محدودیت ظرفیت، در مقایسه با سایر محدودیت‌ها قوی ترین حد پایین را نسبت به جواب بهینه ارائه می‌دهد. ثالثاً استفاده از تکنیک تجزیه بر پایه ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب و تخصیص منابع محدود، در مدلهای برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای باعث ساده سازی مدل اصلی به n مساله مستقل خواهد شد.

برای تجزیه مساله اصلی به n مساله تک محصولی و تخصیص منابع محدود ابتدا متوسط زمان تولید محصولات توسط رابطه (۸) محاسبه می‌شود:

a_j: متوسط زمان تولید محصول در ایستگاه j

سپس برای تعیین ایستگاه گلوگاه (q) از رابطه (۷) استفاده می‌شود:

$$q = Min\left\{\frac{C_1}{\bar{a}_1}, \frac{C_2}{\bar{a}_2}, ..., \frac{C_m}{\bar{a}_m}\right\} \qquad (۹)$$

با فرض انتخاب ایستگاه j به عنوان ایستگاه گلوگاه، تخصیص ظرفیت منابع محدود به محصولات به نسبت میزان مصرف ظرفیت در ایستگاه (j) از رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

$$R_i = \frac{\bar{d}_i.a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{d}_i.a_{ij}} \qquad \text{j = ایستگاه گلوگاه} \qquad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰) مقدار $\bar{d}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_{it}$ متوسط مصرف محصول i در پریودهای $t = 1,2,...,T$ است که براساس مفهوم شناخته شده مقدار سفارش اقتصادی (EOQ^2) ویلسون [۲۱] بنا شده است که در آن متوسط تقاضا در هر پریود برای هر یک از محصولات بصورت یکنواخت فرض شده است.

با توجه به نسبت میزان مصرف ظرفیت برای هر یک از محصولات (R_i) در ایستگاه گلوگاه (j)، ماتریس C_{ij} را به صورت رابطه (۱۱) تشکیل می‌گردد.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_1R_1 & C_2R_1 & \cdots\cdots & C_mR_1 \\ C_1R_2 & C_2R_2 & \cdots\cdots & C_mR_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1R_n & C_2R_n & \cdots\cdots & C_mR_n \end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

هر سطر ماتریس فوق بیانگر ظرفیت تخصیص داده شده برای هر یک از محصولات در مراحل مختلف است.

٤- مدل ریاضی یک محصولی

پس از تخصیص منابع محدود و تجزیه مدل ریاضی چند محصولی به n مدل ریاضی تک محصولی، مدل برنامه ریزی تولید چند مرحله‌ای و چند پریودی هر یک از محصولات با محدودیت ظرفیت تولید $\left(C_1R_i, C_2R_i, ... C_mR_i\right) = \left(C'_1, C'_2, ... C'_m\right)$ بصورت زیر خواهد بود.متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای مربوط به این مدل بشرح زیر است.

A_{jt}: هزینه راه اندازی مرحله j در پریود t

X_{jt}: میزان تولید مرحله j در پریود t

V_{jt} : هزینه متغیر تولید مرحله j در پریود t

h_{jt} : هزینه نگهداری مرحله j در پریود t

I_{jt} : میزان موجودی مرحله j در پایان پریود t

C'_j : میزان ظرفیت تولید در مرحله j

D_t : میزان تقاضای محصول نهائی در پریود t

اگر محصول در مرحله j و پریود t تولید شود.

در غیر اینصورت

$Y_{jt} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ اگر محصول I درمرحله j ودرپریودtتولید شود

درغیراین صورت

براساس متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای فوق، تابع هدف و محدودیت ها بصورت زیر خواهد بود.

$$\min \quad Z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left[A_{j,t}.Y_{j,t} + V_{j,t}.X_{j,t} + h_{j,t}.I_{j,t}\right] \qquad (۱۲)$$

$S.t.$

$$I_{m,t-1} + X_{m,t} - I_{m,t} = D_t \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad (۱۳)$$

$$I_{j,t-1} + X_{j,t} - I_{j,t} - X_{j+1,t} = 0 \qquad t = 1,2,\dots,T \quad j = 1,2,\dots,m-1 \qquad (۱۴)$$

$$X_{j,t} \le Y_{j,t}.C_j \qquad (۱۵)$$

$$X_{j,t}, I_{j,t} \ge 0 \qquad (۱۶)$$

$$Y_{j,t} = \begin{cases} 1 & IF \quad X_{j,t} > 0 \\ 0 & OW \end{cases} \qquad (۱۷)$$

در مدل بالا رابطه (۱۲) بیانگر تابع هدف است که مجموع هزینه‌های راه اندازی، متغیر تولید و نگهداری را حداقل می‌کند؛ (۱۳) تضمین کننده تامین تقاضا در هر پریود است؛ (۱۴) نشان می‌دهد در یک شبکه، مجموع جریان خارج شده از هر گره (j,t) مساوی مجموع جریان وارد شده به آن گره است. (۱۵) مانع از افزایش تولید در هر مرحله بیش از ظرفیت موجود می‌شود.

۵- روش ریاضی حل مدل هر یک از محصولات:

نظر به اینکه هدف، ارائه یک روش انشعاب و تحدید برای حل مدل ریاضی تک محصولی است می‌بایست بگونه‌ای عمل شودکه در هر مرحله تکرار، وضعیت $Y_{j,t}$ از نظر صفر و یک روشن شود. در این حالت اگر یک وضعیت میانی در نظر گرفته شود ،تعدادی از این متغیرها مقدار یک داشته و تعدادی دیگر مقدار صفر به خود گرفته و مابقی آزاد هستند. بدین منظور فرض می کنیم متغیر $Y_{j,t}$ یک متغیر پیوسته بین صفر و یک است $(0 \le Y_{j,t} \le 1)$. در اثر این عمل فضای جواب مدل ریاضی تک محصولی توسعه می‌یابد، و جواب حاصل ازاین مساله می‌تواند بعنوان حد پائین مساله اصلی بکار رود. از طرف دیگر بایستی به این نکته توجه کرد که در مساله مذکور جواب بهینه همواره از رابطه $\left(Y_{j,t} = \frac{X_{ij}}{C_j} / 0 \le X_{ij} \le C_j\right)$ پیروی می‌کند.

در اثر تبدیل وضعیت متغیر صفر و یک $Y_{j,t}$ به حالت پیوسته $(0 \le Y_{j,t} \le 1)$ و رابطه $\left(Y_{j,t} = \frac{X_{ij}}{C_j} / 0 \le X_{ij} \le C_j\right)$ مدل شبکه با هزینه خطی عدد صحیح (صفر و یک) به مدل شبکه با هزینه خطی پیوسته تبدیل می‌شود. بعد از حل این مدل به وسیله نرم افزار Lingo برای متغیر $Y_{j,t}$ سه حالت زیر رخ می‌دهد:

الف: مقدار متغیر $Y_{j,t} = 1$ و معلوم است.

ب: مقدار متغیر $Y_{j,t} = 0$ و معلوم است.

ج: مقدار متغیر $0 \le Y_{j,t} \le 1$ و آزاد است.

این جواب با توجه به تابع هدف min به عنوان یک حد پائین برای مساله اصلی بکار می‌رود. در این صورت مدل توسعه یافته را می‌توان به شکل زیر مجدداً فرموله کرد .

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{A_{j,t}}{C_j} + V_{j,t}\right]X_{j,t} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} h_{j,t}.I_{j,t} \qquad (۱۸)$$

$st:$

$$I_{m,t-1} + X_{m,t} - I_{m,t} = D_t \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad (۱۹)$$

$$I_{j,t-1} + X_{j,t} - I_{j,t} - X_{j+1mt} = 0 \qquad t = 1,2,\dots,T \quad j = 1,2,\dots,m \qquad (۲۰)$$

$$0 \le X_{j,t} \le C_j \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad j = 1,2,\dots,m \qquad (۲۱)$$

$$I_{j,t} \ge 0 \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad j = 1,2,\dots,m \qquad (۲۲)$$

این مدل یک شبکه با هزینه خطی است که به آسانی با روشهای متداول از جمله روش حداکثر جریان با حداقل هزینه (Out of Kilter) قابل حل است [۹].

برای تعیین وضعیت متغیرهای صفر و یک علاوه بر حل مدل شبکه با هزینه خطی پیوسته به وسیله نرم افزار ingo ، الگوریتم تعیین وضعیت متغیرهای صفر و یک در بخش (۱-۵) ارائه شده است. در این روش با استفاده از قوانین و قضایای ایستگاه گلوگاه وضعیت متغیر صفر و یک معلوم شده است.

۵-۱-تعیین وضعیت متغیرهای صفر و یک

با توجه به اینکه در مدل مورد مطالعه کمبود موجودی یا سفارش‌های عقب افتاده مجاز نیست، تمامی مراحل تولید در پریود اول می‌بایست حداقل به میزان تقاضای پریود اول تولید داشته باشند تا جواب ممکن بدست آید؛ یعنی:

$$\left(Y_{j,t} = 1 \quad or \quad X_{j,t} \ge D_t\right) \qquad j = 1,2,\dots,m \qquad (۲۳)$$

علاوه بر پریود اول در بعضی از مراحل در پریودهای دیگر هم تولید ضروری است تا جواب ممکن بدست آید. مشخص کردن این موضوع کمک شایانی به روشن شدن وضعیت بعضی از متغیرهای $Y_{j,t}$ خواهد کرد و به تبع آن کاهش قابل ملاحظه‌ای در حجم محاسبات روش انشعاب و تحدید رخ می‌دهد. برای دسترسی به این موضوع ابتدا لازم است حداقل موجودی ارسالی {R(t)} از پریود t به پریود (t+1) واحد را بدست آورد.

$$q = \min(C'_1, C'_2, \dots, C'_m) \qquad (۲۴)$$

$$R(t) = \begin{cases} \max\left\{0, D_{t+1} + R(t+1) - q\right\} & IF \quad t < T \\ 0 & IF \quad t = T \end{cases} \qquad (۲۵)$$

q : حداقل ظرفیت تولید در مراحل مختلف

برای آنکه مشخص کنیم در مرحله j (گره (j,t) شبکه) آیا تولید ضروری است یا خیر، ابتدا P(j) را برای تمامی مراحل محاسبه می‌کنیم.

$$P(j) = \begin{cases} \min\left[C_{j_1}, P(j-1)\right] & IF \quad 1 < j \le m \\ C_1 & IF \quad j = 1 \end{cases} \quad (۲۶)$$

سپس حداکثرجریانی که می‌تواند از گره (j,t) بگذرد محاسبه می‌کنیم.

$$F_{j,t} = P(j)(t-1) - \sum_{i=1}^{t-1} D_i \quad (۲۷)$$

$$\begin{cases} if & F_{j,t} \ge D_t + R(t) \Rightarrow Y_{j,t} = 0,1 \\ if & F_{j,t} \le D_t + R(t) \Rightarrow Y_{j,t} = 1 \end{cases} \quad (۲۸)$$

قضیه: در صورتی که با شرط $Y_{j,t} = 1$ در پریود t جواب ممکن حاصل شود، در مراحل بعدی آن پریود نیز می‌بایست تولید انجام گیرد؛ یعنی :

$$\begin{cases} if \quad Y_{j,t} = 1 \Rightarrow Y_{j+1,t} = Y_{j+2,t} = \dots = Y_{m,t} = 1 \\ or \\ if \quad X_{j,t} > 0 \Rightarrow (X_{j+1,t}, X_{j+2,t}, \dots, X_{j+m,t}) > 0 \end{cases} \quad (۲۹)$$

اثبات: فرض کنید شرط $Y_{j,t} = 1$ در شروع مساله برقرار باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$F_{j,t} < D_t + R(t) \quad (۳۰)$$

برای روشن شدن وضعیت (j+1,t) علی القاعده بایستی P(j+1) را محاسبه کنیم . بنابراین:

$$P(j+1) = Min\{C_j, P(j)\} \quad (۳۱)$$

حداقل مقدار رابطه (۲۹) معادل C_j یا P(j) خواهد بود. $P(j+1) \le P(j)$ است. از طرف دیگر با علم به اینکه مجموع تقاضاها تا پریود (t-1) مشخص است، $\{F_{j+1,t} \le F_{j,t} < D_t + R(t)\}$ و قضیه ثابت است. این قضیه برای تعیین وضعیت صفر و یک بودن متغیر $Y_{i,t}$ استفاده شده است.

هدف از ارائه این قضیه ایجاد سهولت و سرعت بیشتر در تعیین وضعیت متغیرهای صفر و یک است. براین اساس هرگاه مقدار $Y_{j,t} = 1$ باشد در مراحل بعدی همان پریود مقدار $(Y_{j+1,t} = Y_{j+2,t} = \dots = Y_{m,t} = 1)$ می باشد و اگر $X_{i,t} > 0$ باشددرمراحل بعدی همان پریود $(X_{j+1,t} = X_{j+2,t} = \dots = X_{m,t} = 1)$ خواهد بود .

۲-۵-الگوریتم انشعاب و تحدید

قدم ۱ : جواب اولیه (ممکن) را با توجه به رابطه زیر بررسی کنید.

$$\sum_{i=1}^{t} D_i \le q \times t \qquad t = 1,2,\dots,T \quad (۳۲)$$

اگر رابطه فوق ارضاء نشود، مساله جواب ممکن نداشته و متوقف می‌شویم.

قدم ۲: تعیین وضعیت متغیرهای صفر و یک را با استفاده از روابط بخش (۷) تعیین کنید.

قدم ۳: مدل توسعه یافته P_i را به روش (Out of Kilter) حل کنید تا میزان انباشته و موجودی هر یک از مراحل تعیین شود.

قدم ۴: در صورتی که بین متغیرهای $Y_{j,t}$ هیچ متغیر آزادی وجود نداشته باشد متوقف می‌شویم. در غیر اینصورت آن متغیر آزادی که بیشترین اختلاف هزینه (تقریب خطی) را دارد انتخاب و عمل انشعاب را انجام می‌دهیم.

$$\Delta_{j,t} = A_{j,t} + D_{j,t}(V_{j,t} - h_{j,t}) \quad (۳۳)$$

قدم ۵: اگر در یک مرحله از پریود اول تا پریود t وضعیت همه متغیرهای صفر و یک تعیین شده و شرط زیر صادق باشد و یا بهبود درجواب حاصل نشود توقف کنید و در غیر این صورت به قدم سوم برگردید.

$$\sum_{i=1}^{t} Y_{j,t} . C'_j < \sum_{i=1}^{t} D_i \quad (۳۴)$$

پس از حل هریک از مسائل برنامه ریزی تولید چند مرحله ای، یک محصولی و چند پریودی با الگوریتم ارائه شده، نوبت به مقایسه میزان منابع تخصیص داده شده و میزان منابع مورد نیاز می‌رسد. این عملیات که باعث تسطیح منابع و ظرفیت های باقی مانده می‌شود به صورت زیر انجام می‌شود.

۶- تسطیح منابع و ظرفیت های باقی مانده

در این مرحله برای انجام عملیات تسطیح منابع، میزان ظرفیت باقیمانده (مازاد) برای هر یک از مسائل جزئی به کمک رابطه (۳۵) محاسبه شده است.

$$RC_i = (P'_i - \sum_{j=1}^{m} \overline{D}_i . a_{ij}) \quad (۳۵)$$

کل ظرفیت باقیمانده به وسیله رابطه $\left(RCT = \sum_{i=1}^{n} RC_i\right)$ محاسبه می شود. این ظرفیت باقیمانده را به نسبت ظرفیت منابع استفاده شده در هر یک از مسائل جزئی تقسیم می‌کنیم. روش اجرای کار به این صورت است که به مسائل تک محصولی که دارای ظرفیت باقیمانده زیادتری هستند مقدار ظرفیت کمتری تخصیص می‌یابد و به مسائل تک محصولی که ظرفیت باقیمانده کمتری دارند مقدار ظرفیت بیشتری تخصیص می‌یابد. عملیات تسطیح منابع مورد نظر طبق رابطه (۳۶) انجام می‌شود، در این صورت جواب های موجه بهتری حاصل خواهد شد.

$$CA_i = RCT . \frac{\overline{D}_i . a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} P'_i . a_{ij}} \quad (۳۶)$$

۷- الگوریتم حل مساله (p)

قدم ۱: مساله اصلی را با استفاده از ضرایب لاگرانژ در منابع کمیاب به n مساله مستقل تبدیل کنید.

قدم ۲: هر یک از مسائل جزئی را با روش ابتکاری ارائه شده حل کنید.

قدم ۳: ظرفیت باقیمانده هر یک از مسائل جزئی را نسبت به ظرفیت تخصیص یافته محاسبه کنید.

قدم ۴: عملیات تسطیح منابع را برای کل ظرفیت های باقیمانده RCT انجام دهید.

قدم ۵: به قدم دوم برگردید و تا رسیدن به شرط توقف مساله را ادامه دهید.

۱-۷- طراحی آزمایش ها

برای بررسی میزان کارآئی الگوریتم‌های ارائه شده تعداد ۳۰۰ مساله تصادفی با مشخصات زیر ایجاد شده‌اند:

۱-ابعادمسائل‌ایجادشده‌در محدوده[$(N.M.T) = (3\times 3\times 5)$ الی $(N.M.T) = (5\times 8\times 15)$] قراردارد فهرست مسائل در جدول (۱) آمده است.

۲- هزینه و زمان راه اندازی هر یک از محصولات در هر پریود به صورت تصادفی و جداگانه از توزیع یکنواخت (۱۰-۱) انتخاب شده‌اند.

۳- هزینه نگهداری موجودی و هزینه متغیر تولید هر یک از محصولات در هر پریود نیز به صورت جداگانه از توزیع یکنواخت (۱۰-۱) انتخاب شده‌اند.

٤- میزان تقاضای هر یک از محصولات در هر پریود به صورت تصادفی از توزیع یکنواخت (۱۰-۱) انتخاب شده است.

٥- میزان ظرفیت تولید ماشین آلات نیز بصورت تصادفی از توزیع یکنواخت (۳۰-۱۵) انتخاب شده‌اند.

برای حل مسائل فوق دو برنامه در محیط VB[3] نوشته شده است. این دو برنامه با الگوریتم های ابتکاری تجزیه و ترکیب (HDC[4]) و الگوریتم ژنتیک ترکیبی(MA) نوشته شده است.

الگوریتم ژنتیک ترکیبی [۲۲] بطور خلاصه دارای مراحل زیر است :

قدم ۱- ارائه جواب اولیه: در این روش جواب اولیه بصورت یک ماتریس $(T\times 2M)$ که M تعداد محصولات و T تعداد پریودهاست.

قدم ۲- تعیین تابع ارزش برای هریک از جوابها: در این تابع دو عامل هزینه و امکان پذیری بصورت همزمان در نظر گرفته شده است.

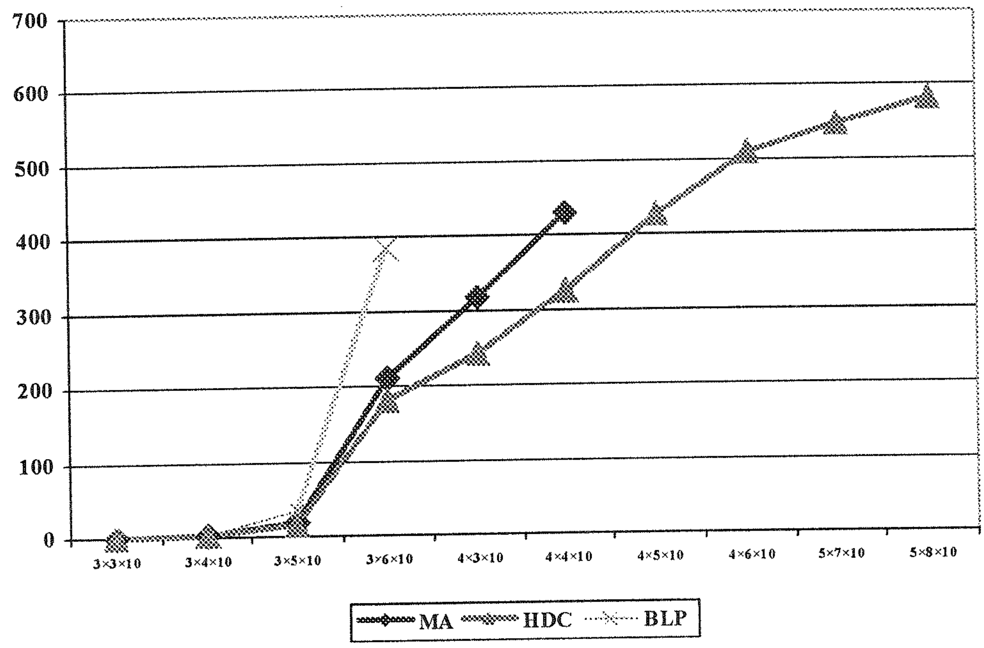
قدم ۳- تعیین اندازه ساختار جمعیت: جمعیت این تحقیق دارای m گروه می باشد و محصول نیز دارای ساختار سری است.

قدم ۴- جمعیت اولیه: هریک از راه حلهای جمعیت اولیه توسط الگوریتم واگنر – ویتین (ww) تعیین می‌شود. این جواب ممکن است قابل قبول یا غیرقابل قبول باشد.

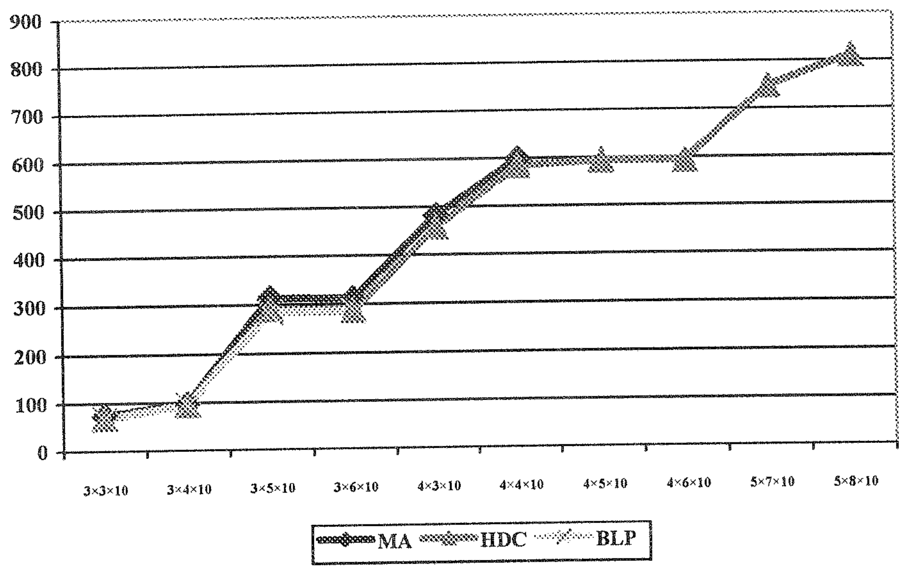
قدم ۵- ترکیب سلسله مراتب تولید: این روش با استفاده از ترکیب جوابها در مراحل متوالی به جوابهای جدید دست می-یابد.

برای اثبات کارائی الگوریتم ژنتیک ترکیبی [۲۲] از تعداد ۲۵۰ مساله با ابعاد وشرایط مختلف در شرایط واقعی استفاده شده است. این مسائل دارای ابعاد، هزینه و زمان راه اندازی، هزینه نگه داری و متغیر تولید، میزان تقاضا و ظرفیت تولید مختلف بوده‌اند.

نتایج مقایسه ای از دو جنبه زمان حل در جدول (۱) و کرد از (۱) و از نظر هزینه کل در جدول (۲) و کرد ار(۲) آمده است.



نمودار (۱): مقایسه زمان حل روش‌های مختلف



نمودار (۲): مقایسه هزینه کل روش های مختلف

جدول (۱): مقایسه زمان حل روشهای مختلف

Problem Size (N.M.T)	زمان حل (دقیقه) BLP	MA	HDC
٥×٣×٣	٠/٣١	٠/٣٨	٠/٢٤
١٠×٣×٣	٠/٥٥	٠/٦٥	٠/٧١
١٥×٣×٣	١/١١	١/٥١	٠/٩٥
٥×٤×٣	٢/١٢	٢/٠٢	١/٨٥
١٠×٤×٣	٣/١٧	٣/٨٢	٢/٩٧
١٥×٤×٣	٨/١٨	٥/٨٧	٧/١٥
٥×٥×٣	٢٠/٢٧	١٤/٥١	١٢/١٨
١٠×٥×٣	٣٥/١٨	١٨/٦٢	١٥/٢٥
١٥×٥×٣	٣٩/١٢	١٩/٥٣	١٦/٢٢
٥×٦×٣	٢٤٥/١٨	١٢٧/٣٢	١١١/١٥
١٠×٦×٣	٣٨٥/١٩	٢١٢/١٥	١٨٢/٢٤
١٥×٦×٣	-	٢١٨/٢٧	٢١٢/١٤
٥×٣×٤	٤٨٥/١٥	٣١١/١٥	٢٢٠/٨٥
١٠×٣×٤	-	٣١٨/١١	٢٤٢/٢٥
١٥×٣×٤	-	٣٢٥/٤٢	٢٤٥/١١
٥×٤×٤	٥٩٠/٨١	٤٢٢/١٨	٣٢١/١٧
١٠×٤×٤	-	٤٢٩/١٢	٣٢٥/١٩
١٥×٤×٤	-	-	٣٩١/١٥
٥×٥×٤	-	٥٣١/١٥	٤١٥/١٨
١٠×٥×٤	-	-	٤٢٧/١٩
١٥×٥×٤	-	-	٤٨٠/٤١
٥×٦×٤	-	-	٤٩٢/٥٢
١٠×٦×٤	-	-	٥١٠/١٧
١٥×٦×٤	-	-	٥١٨/٨٧
٥×٧×٥	-	-	٥٢٥/٩٤
١٠×٧×٥	-	-	٥٤٨/٢١
١٥×٧×٥	-	-	٥٦١/١٧
٥×٨×٥	-	-	٥٥٢/١٧
١٠×٨×٥	-	-	٥٨٢/١٥
١٥×٨×٥	-	-	-

نتایج مقایسه ای نشان می‌دهد که روش (HDC) علاوه بر ارائه جوابهای بهتر با هزینه کمتر، مسائل را در زمان کمتری حل می‌کند. این الگوریتم (HDC) همچنین مسائل با ابعاد بزرگتر که توسط الگوریتم‌های (MA,[5] BLP) در حداکثر زمان مورد بررسی (۱۰ ساعت) حل نشده اند را در زمانهای کمتر از ۱۰ ساعت با جوابهای نزدیک بهینه حل می‌کند. مقدار بهبود حاصل توسط الگوریتم (HDC) با توجه به مسائل حل شده به میزان

جدول (۲): مقایسه هزینه کل روشهای مختلف

Problem Size (N.M.T)	زمان حل (دقیقه) BLP	MA	HDC
۳×۳×۵	۴۵	۴۸	۴۵
۳×۳×۱۰	۶۸	۷۵	۷۱
۳×۳×۱۵	۹۲	۹۳	۹۲
۳×۴×۵	۸۴	۸۴	۸۴
۳×۴×۱۰	۹۶	۹۸	۹۶
۳×۴×۱۵	۱۱۸	۱۲۵	۱۲۲
۳×۵×۵	۲۱۵	۲۳۵	۲۳۰
۳×۵×۱۰	۲۸۶	۳۱۵	۲۹۲
۳×۵×۱۵	۲۹۷	۳۲۱	۳۰۵
۳×۶×۵	۲۶۵	۲۹۸	۲۶۵
۳×۶×۱۰	۲۸۷	۳۱۲	۲۸۸
۳×۶×۱۵	-	۳۲۸	۳۱۵
۴×۳×۵	۳۱۶	۳۲۸	۳۲۱
۴×۳×۱۰	-	۴۸۲	۴۵۸
۴×۳×۱۵	-	۵۱۸	۴۸۲
۴×۴×۵	۵۲۶	۵۳۶	۵۱۱
۴×۴×۱۰	-	۵۹۸	۵۸۵
۴×۴×۱۵	-	-	۵۶۲
۴×۵×۵	-	۵۶۹	۵۴۲
۴×۵×۱۰	-	-	۵۹۴
۴×۵×۱۵	-	-	۶۱۲
۴×۶×۵	-	-	۶۰۵
۴×۶×۱۰	-	-	۵۹۴
۴×۶×۱۵	-	-	۶۲۴
۵×۷×۵	-	-	۷۲۲
۵×۷×۱۰	-	-	۷۴۸
۵×۷×۱۵	-	-	۸۲۷
۵×۸×۵	-	-	۷۵۲
۵×۸×۱۰	-	-	۸۱۲
۵×۸×۱۵	-	-	-

۲۵/۸ درصد کاهش زمان و ۱۹/۳ درصد کاهش هزینه است .

۸- نتیجه گیری

این تحقیق، یک روش ابتکاری تخصیص و تسطیح منابع محدود بر پایه ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب برای تعیین اندازه انباشته پویا درمسائل برنامه ریزی تولید چند مرحله ای – چند

محصولی و چند پریودی با محدودیت ظرفیت تولید و هدف حداقل کردن مجموع هزینه‌های نگهداری موجودی و راه اندازی کرد ه است. مراحل این روش ابتکاری با تجزیه مساله اصلی به n مساله فرعی شروع می‌شود. در این تجزیه از تخصیص منابع محدود براساس ضرایب لاگرانژ استفاده شده است. پس از حل هر یک از مسائل فرعی، ظرفیت‌های باقیمانده محاسبه و تسطیح شده‌اند. سپس مسائل فرعی با ظرفیت های جدید حل وبررسی شده است . این مراحل تا رسیدن به شرط توقف ادامه یافته است. نتایج محاسباتی بیانگر آنست که روش تخصیص و تسطیح بر پایه ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب راه حل مناسبی را برای‌تعیین‌انداز انباشته در مسائل مشابه این تحقیق فراهم می‌کند. همچنین، تلفیق روش تخصیص و تسطیح بر پایه ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب با روش‌های فرا ابتکاری می‌تواند به عنوان تحقیقات آتی بررسی و ارزیابی شود .

۹- مراجع

[۱] Gayal ,S.K., Gunasekaran, A. , "Multi – stage productron Inventory systems" , Eur.J. of Operations Research" , Vol.46, 1990

[۲] Zapfel , G. , Missbauer, H., "New Concepts for production planning and Cntrol , Eur.j. of operations Research , Vol 67, 1993.

[۳] Amin , M. Altiock ,(1997) , "control policies for multi – product Multi - stage Manufacturing Systems." International Journal of Production Research Society , Vol.49, PP.625-634.

[۴] L.F.Gelders, L.N. Wassenhove, Production Planning A review , European Journal of Operational Research, 7 (2) (1981) 101 -110.

[۵] H.Bah L , L. Ritzman, J.Gupta, Determining Lot – Sizes and Resource Requirements: A Reriew , Operations Research Society of America , 35, (3) (1987)

[۶] Takeda , Kuroda , (1999) , "optimal Inventory configuration of finished and semifinished products in Multi – stage production inventory system with an Acceptable Response Time" , Computers and Industrial Engineering , Vol.37, No.1, pp.251 -255.

[۷] Simpson, N.C., "Questioning the relative virtues of dynamic Lot sizing rules" , Computers and Operations Research", Vol.28, pp.899 –914,2001.

[۸] Cunasekaran , A. Goyal , S.K. , " Multi – Level Lot – sizing in a Rayon yarn company : A Case study" , Eur.J. of Operations Research.65, 1993

[۹] B.Karimi , S.M. T. Fatemi Ghomi , J.M. Wilson, "the capucitated lot sizing problem: a review of models and algorithms" , OMEGA the International Journal of Management Science , Vol.31, 2003

[۱۰] George Liberopoulos and Yves Dallery , "comparative modeling of multi- stage production – inventory control policies with lot sizing" , int.J.of Prod.Res. Vol.,41, No.6, 2003

[۱۱] Newson , E.F. , " Multi – Item Lot – size scheduling by Heuristic purt II: with Fixed Resources", Management Science, Vol.21, No. 10 ,1975 .

[۱۲] Fisher, M.L., The Lagrangain Relaxation Method for Solved Integer Programming Problems, Management Seience 27, 1-18,1981.

[۱۳] Afentakes , P. Gavish , B., Karmarkar , u. , "Computationally Efficient optimal solutions to the Lot – sizing Problem in Multi - stage Assembly Systems" , Management science Vol.30, No. 2 , 1984.

[۱۳] France, Armentano. (1997) , "A Heuristic Method for Lot – sizing in Multi – stage systems" , Computers and Operations Research , Vol.24, NO.9 , pp.861-874.

[۱۵] L.Ozdamar, G. Barbarosoglu, An intergreated Lagrangean – relaxation – Simulated annealing approach to the multi-Level multi-item Capacited Lot – Sizing Problem. International Journal of Production Economic 68 (2000) 319-331.

[۱۶] A.I. Shawky and M.O.A Ben-Elata, "constrained Production Lot – size model with tradecredit policy: "a comparison geometric programming approach via Lagrange" , Production Planning and Control , Vol. 12, No. 7-2001

[۱۷] jozsef Voros, " on the relaxation of Multi - Level Dynamic Lot – sizing models" , International Journal of Production economics, Vol.77 , 2002

[۱۸] Murali Sambasivan , Salleh Yahya , "A lagrongean – based heuristic for Multi –plant , Multi – Item , Multi –period capacitated Lot – sizing problems

[۱۹] Biggs , J.R. Good man , S.H. , Handy . S.T. , "Lot – sizing Rules in a Hierarchical Multi – Stage Inventory systems , Production and Inventory Management , First Quarter, 1977

[۲۰] Gobay , H. , "Multi – stage Production planning" , Management Science, Vol.25, No.11, 1979

[۲۱] Bleakburn , j. D. Millen, R. A. , "Improved Heuristics for multi – stage Requiements planning systems", Management Science , Vol.28 , No.1, 1982.

[۲۲] B.Regina, L.Femando, A Memetic Algorithm for Multistage Capacitated Lot-Sizing Problem, International Journal of Production Economics, Vol 124,(2004) 315-329.

زیرنویس ها

1 MA= Memetic Algorithm
2 EOQ= Economic Order Quantity
3 VB= Visual Basic
4 HDC= Heuristic Decomposition - Cmposition
5 BLP= Binary Linear Programming