طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی توسط برنامه‌ریزی ماتریسی

علی باباپور آتشگاه[i]؛ عباس سیفی[ii]

چکیده

در عمل اغلب آزمایش‌ها چندپاسخی هستند و بدلیل همبستگی پاسخ‌ها وهزینه زیاد مدل‌سازی جداگانه آنها طراحی آزمایش‌های چندپاسخی ضروری است. تولید طرح بهینه چندپاسخی یکی از مسایل سخت بهینه‌سازی است. سه الگوریتم عمومی برای تولید طرح بهینه چندپاسخی ارایه شده است که هر سه، طرح پیوسته بهینه تولید می‌کنند و روشی برای تولید طرح گسسته بهینه در ادبیات موضوع گزارش نشده است. مشکلات الگوریتم‌های موجود عبارتنداز: نیاز به حل مسایل بهینه‌سازی متعدد، عملیات دستی پیچیده و زمانبر، کندی و کارایی پایین و پیچیدگی تحلیل حساسیت طرح‌های تولید شده. در این مقاله، یک مدل‌سازی جدید برای مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی با استفاده از برنامه‌ریزی ماتریسی پیشنهاد شده است. مدل پیشنهادی بدلیل حل یک مسأله بهینه‌سازی بجای حل مسایل متعدد، بهره‌گیری از الگوریتم‌های نقاط داخلی و مکانیزه‌شدن عملیات آن نسبت به روش‌های موجود سریعتر است. مدل پیشنهادی قابلیت تولید طرح گسسته و طرح پیوسته بهینه را دارد. حل‌پذیری مدل پیشنهادی و سهولت تحلیل حساسیت طرح‌های تولیدشده با حل چند مسأله نمونه نشان داده شده است. با تعریف چندین معیار، ویژگی‌های مدل پیشنهادی با الگوریتم‌های موجود مقایسه شده است.

کلمات کلیدی :

طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی؛ برنامه‌ریزی ماتریسی؛ مدل‌های خطی چندپاسخی

Optimal Design of Multi-Response Experiments Using Semi-Definite Programming

Ali Babapour Atashgah; Abbas Seifi

ABSTRACT

Real-world experiments are often multi-response. The correlation between responses and the cost of experimenting lead one to cast the problem as a multi-response model. Generation of a multi-response optimal design is a challenging problem. There exist three general algorithms and all of them generate approximate design and no method for multi-response n-exact design has been cited in the literature. The existing methods have some drawbacks such as the necessity of solving many optimization problems in the process of generating an optimal design, cumbersome manual operations and the complexity of performing sensitivity analysis. In this paper, we propose a Semi-Definite Programming (SDP) model for multi-response optimal design. The proposed method is efficient because of solving a one shot optimization problem instead of many optimization problems, enjoying the recent advancements of interior-point solution algorithms and elimination of cumbersome manual operations. The proposed model has been tested on several test problems and proved to be very efficient since the optimal designs were found very quickly in all cases. The

[i] دانشجوی دکتری مهندسی صنایع؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر: ababapour@aut.ac.ir.

[ii] مولف مخاطب؛ دانشیار دانشکده مهندسی صنایع؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر: aseifi@aut.ac.ir.

robustness of the generated designs with respect to the variance-covariance matrix is also assessed for those test problems in order to show how sensitivity analysis can be performed. The characteristics of the proposed method are also compared with those of other existing methods.

KEYWORDS:

Multi-Response D-Optimal Designs; Semi-Definite Programming, and Multi-Response Linear Models.

۱- مقدمه

طراحی و تحلیل آزمایش‌ها[1] یکی از شاخه‌های آمار کاربردی است که استفاده از آن افزایش بهره‌وری آزمایش‌ها را درپی دارد. درصورتیکه هر اجرا آزمایش یک پاسخ درپی داشته باشد به چنین آزمایشی، آزمایش تک‌پاسخی گفته می‌شود و درصورتیکه هر اجرا آزمایش منجر به بیش از یک پاسخ شود به چنین آزمایشی، آزمایش چندپاسخی اطلاق می‌گردد. منظور از طرح آزمایش تعیین نحوه ترکیب مقادیر عوامل است که در آن مشخص می‌شود در هر اجرا هر عامل در چه مقداری تنظیم شده و آزمایش به اجرا درمی‌آید.

با مرور ادبیات گسترده طراحی بهینه آزمایش‌های تک‌پاسخی می‌توان گفت که کاربرد طراحی بهینه آزمایش‌ها در حوزه‌های مختلف علوم از قبیل مهندسی، پزشکی، داروسازی و علوم اجتماعی رو به افزایش است [۱]. در طراحی بهینه آزمایش‌های تک‌پاسخی از روش‌های تحلیلی، بهینه‌سازی، الگوریتم‌های جستجو و الگوریتم‌های ابتکاری[2] استفاده شده است. ازآنجا که هدف مقاله حاضر بررسی مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی است، به تعداد خیلی کمی از مقالات تک‌پاسخی اشاره می‌شود [۲] - [۱۰].

در عمل، اغلب آزمایش‌ها چندپاسخی هستند و بدلیل همبستگی بین پاسخ‌ها و یا هزینه چشم‌گیر مدل‌سازی جداگانه پاسخ‌ها طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی ضرورت می‌یابد [۱۱]. مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی، تعمیم‌یافته مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های تک‌پاسخی است. با توجه به گستردگی مسایل آزمایش‌های چندپاسخی در عمل و برخلاف مسایل تک‌پاسخی تحقیقات زیادی روی طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی به انجام نرسیده است [۱۲]. اولین مقاله طراحی آزمایش‌های چندپاسخی درسال ۱۹۶۶ توسط دراپر و هانتر[3] نوشته شده است. در این مقاله دراپر و هانتر معیاری را برای انتخاب نقاط آزمایشی که باید به طرح موجود اضافه شوند توسعه داده‌اند [۱۳] . فدوروو[4] در سال ۱۹۷۲ در فصلی از کتاب خود ضمن تعمیم برخی از اصول و قضایای طرح بهینه تک‌پاسخی از جمله قضیه عمومی هم‌ارزی، الگوریتمی جهت تولید طرح پیوسته بهینه برای آزمایش‌های چندپاسخی ارائه کرده است [۴]. مطالعات بعدی و گسترش مفاهیم طراحی آزمایش‌های چندپاسخی مربوط به روی، جناندیرکن و سریواستوا[5] است که از طرح‌های استاندارد برای آزمایش‌های چندپاسخی استفاده کرده‌اند [۱۴]. همچنین ویجسنها[6] در سال ۱۹۸٤ الگوریتمی توسعه داده است که با ماتریس کوراپانس تخمینی پاسخ‌ها طرح تولید می‌کند [۱۵]. کرافت وشافر[7] بصورت تحلیلی برای مدل‌های دوپاسخی خاصی طرح بهینه محاسبه کرده‌اند [۱۶]. ایمحوف[8] در سال ۲۰۰۰ کار کرافت و شافر را گسترش داده است [۱۷]. در دو مقاله اخیر، شکل مدل فرضی خیلی محدود کننده است. بیشف[9] با اثبات سه قضیه بدنبال آن است که شرایطی را برای ماتریس کواریانس پاسخ‌ها ارایه کند که طرح گسسته بهینه مشاهدات ناهمبسته، برای مشاهدات همبسته نیز بهینه باشد و سعی کرده است که نتایج حاصل را به چندپاسخی تعمیم دهد [۱۸]. چانگ[10] در سال ۱۹۹٤ ویژگی‌هایی برای طرح بهینه چندپاسخی بدست آورده است که درصورت تامین شدن آنها می‌توان از طرح بهینه تک‌پاسخی برای آزمایش‌های چندپاسخی استفاده کرد [۱۹]. همچنین چانگ در سال ۱۹۹۷ الگوریتمی را برای تولید طرح نزدیک بهینه چندپاسخی ارایه کرده است [۲۰]. بطور خلاصه، با بررسی ادبیات طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی، می‌توان گفت که تاکنون سه الگوریتم برای تولید طرح پیوسته بهینه چندپاسخی ارایه شده است که عبارتند از:

۱- الگوریتم فدوروو.

۲- الگوریتم چانگ.

۳- الگوریتم ویجسنها.

با بررسی آنها می‌توان گفت هر سه آنها قابلیت تولید طرح پیوسته را داشته و الگوریتم فدوروو و ویجسنها طرح بهینه D را تولید می‌نمایند و الگوریتم چانگ در شرایط خاص طرح بهینه D و دراغلب موارد طرح نزدیک بهینه را تولید می‌کند. مشکلات الگوریتم‌های موجود عبارتند از: نیاز به حل مسایل بهینه سازی متعدد، عملیات دستی پیچیده و زمانبر، کندی و کارایی پایین و پیچیدگی تحلیل حساسیت طرح تولید شده. همچنین روشی عمومی برای تولید طرح گسسته بهینه در ادبیات موضوع گزارش نشده است.

درصورت ارایه مدلی که بتواند بجای حل چندین مسأله بهینه‌سازی، با یک بهینه‌سازی طرح بهینه را تولید نماید قطعاً چنین رویکردی بهبود چشم‌گیری در تولید طرح بهینه چندپاسخی ایجاد می‌کند. هدف این مقاله ارایه چنین رویکردی

است. در این مقاله مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی در قالب برنامه‌ریزی ماتریسی مدل‌بندی و حل شده است. مدل پیشنهادی قابلیت تولید طرح پیوسته بهینه و طرح گسسته بهینه را دارد. مدل پیشنهادی، توسعه مدل تک‌پاسخی بوید و وندنبرگه[11] [۲۱] به آزمایش‌های چندپاسخی است.

ساختار مقاله چنین است: در بخش دوم مقاله تعاریف و تئوری مورد نیاز ارایه شده است. بخش سوم به بررسی الگوریتم‌های موجود می‌پردازد و در بخش چهارم مدل پیشنهادی تشریح شده است. بخش پنجم به نتایج محاسباتی و بخش ششم به بحث و مقایسه الگوریتم‌های موجود با مدل پیشنهادی تخصیص یافته است و در بخش هفتم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ارایه شده است.

۲- تعاریف و تئوری طراحی بهینه آزمایش‌ها

۲-۱- طرح آزمایش

بطور کلی می‌توان طرح آزمایش را به دو دسته تقسیم کرد (۱) طرح پیوسته[12] (۲) طرح گسسته[13]. طرح پیوسته که با ξ نشان داده می‌شود با رابطه (۱) تعریف شده و دارای دو ردیف است که ردیف اول نشان‌دهنده مختصات نقاط آزمایش و ردیف دوم نیز نشان‌دهنده درصدی از کل آزمایش‌ها (λ_i) است که باید در نقطه $\mathbf{x}_i$ اجرا شود $\lambda_i \ge 0$ و مجموع λ_iها نیز باید برابر یک باشد.

$$\xi = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_N \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_N \end{Bmatrix} \qquad (۱)$$

طرح گسسته با $\xi(N)$ نشان داده شده و با رابطه (۲) تعریف می‌گردد. این طرح نیز مثل طرح پیوسته دو ردیف دارد که در ردیف اول نقاط آزمایش نشان داده شده و در ردیف دوم n_i تعداد آزمایش‌هایی را که باید در $\mathbf{x}_i$ انجام شود نشان می‌دهد. پیوسته یا گسسته بودن یک طرح آزمایش براساس سطر دوم رابطه‌های(۱) و (۲) تعریف می‌شود.

$$\xi(N) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_N \\ n_1 & \dots & n_N \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

۲-۲- مدل خطی چندپاسخی

یک مدل خطی چندپاسخی (خطی نسبت به پارامترهای مدل) بصورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad i = 1, \cdots, r \qquad (۳)$$

مدل (۳)، بدون اندیس i یک مدل تک‌پاسخی است. در آزمایش‌های چندپاسخی تعداد r پاسخ بصورت هم‌زمان مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مدل (۳)، $\mathbf{Y}_i$ بردار $n \times 1$ مشاهدات پاسخ iام، $\mathbf{X}_i$ ماتریس $n \times p_i$ که p_i نشان‌دهنده پارامترهای مدل iام است. هر سطر ماتریس $\mathbf{X}_i$ تابعی است از فرم مدل iام که فرم کلی آن برابر است با $\mathbf{f}_i^T(\mathbf{x}_j)$. هر سطر ماتریس $\mathbf{X}_i$ تابعی است از مدل iام و هر نقطه طرح آزمایش $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \cdots, x_{jq})$ نشان‌دهنده نحوه تنظیم q عامل می‌باشد و $\mathbf{x}_j \in \chi$ که χ نشان‌دهنده فضای طراحی می‌باشد. فضای طراحی از اشتراک دامنه تغییرات عوامل بدست می‌آید. $\boldsymbol{\beta}_i$ بردار مجهولات مدل به ابعاد $p_i \times 1$ می‌باشد که آزمایشگر بدنبال تخمین آنها است. $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ بردارخطای پاسخ iام است که فرض می‌شود برداری تصادفی به ابعاد $n \times 1$ با توزیع نرمال باشد. همچنین فرض می‌شود که

$$\begin{aligned} & E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0 & & \\ & Var(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \sigma_{ii} \mathbf{I}_n & & i = 1, \cdots, r \\ & Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \sigma_{ij} \mathbf{I}_n & & i, j = 1, \cdots, r \quad i \neq j \end{aligned} \qquad (٤)$$

ماتریس کواریانس پاسخ‌ها با $\boldsymbol{\Sigma}$ نشان‌داده می‌شود و ماتریسی است به ابعاد $r \times r$ و برابر است با:

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij}) \qquad (٥)$$

در این مقاله فرض شده است می‌توان $\boldsymbol{\Sigma}$ را با استفاده از تخمین‌زننده سازگار پیشنهادی زلنر[14] مطابق با رابطه (٦) و با استفاده از داده‌های دردسترس تخمین‌زد [۲۲]. در صورتیکه ماتریس کواریانس پاسخ‌ها برای مدل دوپاسخی و بطور مشابه برای چندپاسخی بصورت $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ با $-1 \le \rho \le 1$ باشد می‌توان از آن در مدل پیشنهادی استفاده کرد و برای مقادیر مختلف ρ طرح تولید نمود.

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\mathbf{y}_i^T [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^T][\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_j (\mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^T] \mathbf{y}_j}{n} \quad , i, j = 1, \dots, r \qquad (٦)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\hat{\sigma}_{ij});$$

درصورت انجام n آزمایش می‌توان مدل (۳) را بصورت ماتریسی مطابق با رابطه (۷) نوشت:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۷)$$

که $\mathbf{Y}$ بردار مشاهدات به ابعاد $1 \times r \cdot n$ و برابر با $\mathbf{Y}^T = [\mathbf{Y}_1^T, \cdots, \mathbf{Y}_r^T]$ است. $\mathbf{X}$ ماتریس قطری بلوکی است که بصورت $\mathbf{X} = \mathrm{diag}(\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_r)$ نشان‌داده می‌شود. بردار پارامترهای مدل $\boldsymbol{\beta}$ بصورت $\boldsymbol{\beta}^T = [\boldsymbol{\beta}_1^T, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r^T]$ تعریف می‌شود که برداری به ابعاد $1 \times p$ و $p = \sum_{i=1}^{r} p_i$ است. بردار خطای مدل، برابر با $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r^T]$، برداری

تصادفی به ابعاد $1\times r\cdot n$ است.

اینجا لازم است به ضرب کرونکر[15] اشاره شود. ضرب کرونکر با نماد $\otimes$ نشان داده شده و برای دو ماتریس $\mathbf{A}\in R^{k\times m}$ و $\mathbf{B}\in R^{l\times n}$ ماتریسی به ابعاد $kl\times mn$ با تعریف زیر است [٤]:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}\mathbf{B} & \cdots & a_{km}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{۸}$$

ماتریس کواریانس خطای $\boldsymbol{\varepsilon}$ بصورت زیر نشان‌داده می‌شود:

$$\Delta=\Sigma\otimes\mathbf{I}_n \tag{۹}$$

بهترین تقریب‌زننده نااریب خطی[16] برای $\boldsymbol{\beta}$ با استفاده ازروش حداقل مربعات تعمیم‌یافته بصورت زیر معرفی شده است:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}^T\Delta^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\Delta^{-1}\mathbf{Y} \tag{۱۰}$$

که در آن Δ طبق رابطه (۹) تعریف شده و Σ قابل تخمین و نامنفرد است. ماتریس کواریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برابر است با:

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}})=(\mathbf{X}^T\Delta^{-1}\mathbf{X})^{-1} \tag{۱۱}$$

ابعاد ماتریس کواریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برابر با $p\times p$ می‌باشد. ماتریس $Var(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ نشان‌دهنده میزان اطلاعات طرح و به‌عبارتی دیگر نشانگر دقت تخمین است. تخمین پاسخ‌ها در $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_q)$ به صورت زیر است :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})=\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{۱۲}$$

که $\mathbf{F}^T(\mathbf{x})=\mathrm{diag}(\mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}),\ldots,\mathbf{f}_r^T(\mathbf{x}))$ ماتریسی قطری بلوکی $r\times p$ است و $\mathbf{f}_i^T(\mathbf{x})$ سطر iام ماتریس $\mathbf{X}_i$ در نقطه $\mathbf{x}$ می‌باشد. ماتریس اطلاعات طرح ξ مطابق بارابطه (۱۳) و ماتریس کواریانس $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ مطابق بارابطه (۱٤) تعریف شده است. ابعاد ماتریس کواریانس $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ $r\times r$ است.

$$\mathbf{M}(\xi,\Sigma)=\int_{\chi}\mathbf{F}(\mathbf{x})\Sigma^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\xi(d\mathbf{x}) \tag{۱۳}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},\xi,\Sigma)=\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}^{-1}(\xi,\Sigma)\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{۱٤}$$

۳-۲- برنامه‌ریزی ماتریسی

برنامه‌ریزی ماتریسی شاخه جدیدی از برنامه‌ریزی ریاضی است که در ده سال گذشته مورد توجه محققان قرار گرفته است. برنامه‌ریزی ماتریسی در حوزه‌های مختلف علوم از قبیل مهندسی، آمار، مالی، بهینه‌سازی ترکیبی[17] و بهینه‌سازی کلی[18] مورد استفاده واقع شده است. بکارگیری الگوریتم‌های نقاط داخلی در حل مسایل برنامه‌ریزی ماتریسی محققان را بر آن داشته است با استفاده از این نوع برنامه‌ریزی به مدل‌سازی و حل مسایل کاربردی بزرگ بپردازند. در این الگوریتم‌ها تابع حجم محاسبات از درجه چندجمله‌ای و کارایی آنها در عمل ثابت شده است [۲۱],[۲۳]-[۲٦]. یکی از الگوهای برنامه‌ریزی ماتریسی عبارت است از:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ \mathbf{c}^T\boldsymbol{\lambda}+\log\det\mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda})^{-1}\\ &\qquad \text{subject to :}\\ &\qquad\qquad \mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{G}_0+\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_m\mathbf{G}_m\succ 0\\ &\qquad\qquad \mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{B}_0+\lambda_1\mathbf{B}_1+\cdots+\lambda_m\mathbf{B}_m\succ= 0\end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن ماتریس‌های $\mathbf{G}_i=\mathbf{G}_i^T\in R^{l\times l}$ و $\mathbf{B}_i=\mathbf{B}_i^T\in R^{n\times n}$ و بردار $\mathbf{c}^T\in R^m$ داده‌های مدل و معلوم هستند. محدودیت $\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda})\succ=0$ به‌معنی نیمه‌معین مثبت‌بودن ماتریس $\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda})$ است و محدودیت $\mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda})\succ 0$ به‌معنی معین مثبت‌بودن ماتریس $\mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda})$ است. همچنین $\boldsymbol{\lambda}\in R^m$ متغیر تصمیم مدل می‌باشد. استفاده از تابع لگاریتم باعث بهبود عملکرد الگوریتم‌های حل می‌شود.

۳- بررسی الگوریتم‌های موجود

همانطورکه در بخش ۱ توضیح داده شد سه الگوریتم عمومی برای تولید طرح پیوسته بهینه D چندپاسخی وجود دارد. الگوریتم فدوروو پایه الگوریتم‌های ویجسنها (۱۹۸٤) و چانگ (۱۹۹۷) است. دراین بخش برای فراهم ساختن پایه‌ای مشترک برای مقایسه الگوریتم‌های موجود با مدل پیشنهادی، قدم‌های اصلی الگوریتم فدوروو تشریح شده است.

الگوریتم فدوروو با یک طرح اولیه دلخواه شروع می‌شود و نقطه‌ای از فضای طراحی را که در آن اثر ($Trace$) ماتریس واریانس تخمین پاسخ‌ها بیشترین مقدار را دارد یافته و به طرح قبلی اضافه می‌کند. این فرایند تا برآورده‌شدن معیار توقف و بدست آمدن طرح بهینه ادامه می‌یابد. قدم‌های این الگوریتم در ادامه ارایه شده است.

۱- طرح اولیه ξ_0 را طوری انتخاب نمائید که ماتریس $\mathbf{M}(\xi_0,\Sigma)$ نامنفرد باشدو قرار دهید: $i=0$.

۲- با حل مسأله بهینه‌سازی زیر نقطه $\mathbf{x}_i$ را پیدا کنید.

$$\underset{\mathbf{x}\in\chi}{\mathrm{Max}}\ \ Trace[\Sigma^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{x},\xi_i,\Sigma)]$$

۳- با بررسی معیار توقف زیر در خصوص ادامه یا توقف فرایند، تصمیم‌گیری نمائید. در این معیار، δ مقداری کوچک، مثبت و معلوم است و p تعداد پارامترهای مدل را نشان می‌دهد.

$$\left|Trace[\Sigma^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{x}_i,\xi_i,\Sigma)]-p\right|\le\delta$$

در صورت برآورده‌شدن این شرط فرایند را ادامه‌ندهید،

طرح ξ_i طرح بهینه است. در غیراینصورت به قدم ٤ بروید.

٤- به طرح موجود ξ_i نقطه جدید $\mathbf{x}_i$ با استفاده از رابطه $\xi_{i+1} = (1-\tau_i)\xi_i + \tau_i \xi_{\mathbf{x}_i}$ اضافه نمائید که در آن τ_i از رابطه زیر بدست می‌آید و $\xi_{\mathbf{x}_i}$ یک طرح یک نقطه‌ای است.

$$\tau_i = \frac{Trace(\Sigma^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{x}_i,\xi_i,\Sigma)) - p}{p\times(Trace(\Sigma^{-1}D(\mathbf{x}_i,\xi_i,\Sigma))-1)}$$

٥- قراردهید: $i=i+1$ و به قدم ٢ بروید.

این الگوریتم‌ها طرح بهینه را با یافتن و اضافه کردن نقاطی از فضای طراحی تولید می‌نمایند که در آنها واریانس تخمین پاسخ‌ها بیشترین مقدار را دارد. الگوریتم چانگ به الگوریتم فدوروو خیلی شبیه است تنها تفاوت آن در نحوه انتخاب طرح اولیه است. چانگ طرح اولیه را از اجتماع طرح‌های بهینه تک‌پاسخی می‌سازد. همچنین تفاوت اصلی الگوریتم ویجسنها در تخمین و استفاده از Σ به‌جای معلوم فرض کردن آن با استفاده از داده‌های حاصل از آزمایش است. ویژگی‌های مهم این الگویتم‌ها عبارتند از:

١- همگرایی آنها به طرح بهینه، وابستگی خیلی زیادی به کیفیت طرح اولیه دارد.

٢- در هر تکرار الگوریتم لازم است با عملیاتی زمانبر و خسته کننده ماتریس $\mathbf{M}(\xi,\Sigma)$ و عبارت $Trace[\Sigma^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{x},\xi_i,\Sigma)]$ دستی محاسبه شوند.

٣- الگوریتم در قدم ٢ در هر تکرار برای پیداکردن نقطه جدید یک مسأله بهینه‌سازی بدون محدویت را حل می‌کند که با افزایش تعداد عامل‌ها و تعداد پاسخ‌های مدل، تشکیل و حل آنها زمان قابل توجهی را به خود اختصاص می‌دهند. این سوال به ذهن خطور می‌کند آیا می‌توان طرح بهینه را درزمان کمتر و با یک بهینه‌سازی با ابعاد بزرگتر تولیدکرد؟

٤- از منظر تئوری حدی برای تعداد تکرارهای الگویتم تا همگرایی به طرح بهینه وجود ندارد.

هدف اصلی این مقاله ارایه روشی است که علاوه بر برطرف ساختن مشکلات روش‌های موجود بتواند طرح بهینه گسسته را نیز تولید نماید.

٤- مدلی جدید برای طرح بهینه D چندپاسخی

با استناد به تعریف بخش قبل، یک طرح آزمایش با تعیین نقاط و تعداد(یا نسبت) آزمایش در هر نقطه تعریف می‌شود. حال فرض کنید که فضای طراحی به K نقطه آزمایش ($\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_K \in \chi$) افراز شده است. طرحی بهینه خواهد بود که N آزمایش را بنحوی به K نقطه تخصیص دهد که واریانس پارامترهای تخمینی با آن در بین سایر طرح‌ها کمترین مقدار را داشته باشد. پس می‌توان گفت که هدف مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی یافتن طرحی است که دترمینان ماتریس کواریانس تخمین‌زننده پارامترها کمینه شود. به‌عبارتی‌دیگر:

$$\begin{aligned}&\text{Min}\quad \det\left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{X}\right]^{-1}\\&\qquad\text{subject to :}\\&\qquad\quad \mathbf{x}_i\in\chi\quad i=1,2,\cdots,\mathrm{N}\end{aligned}\tag{١٦}$$

در مدل (١٦) طرح بهینه با کمینه‌سازی دترمینان یک ماتریس تولید می‌شود.

با استفاده از ماتریس $\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}(\mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}),\ldots,\mathbf{f}_r^T(\mathbf{x}))$ که در بخش دوم تعریف شد می‌توان $Var(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ را بصورت رابطه (١٧) تعریف کرد.

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = [\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{x}_i)]^{-1}\tag{١٧}$$

همچنین $Var(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ را براساس K نقطه ممکن می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = [\sum_{j=1}^{K}n_j(\mathbf{F}(\mathbf{v}_j)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{v}_j))]^{-1}\tag{١٨}$$

باتوجه به‌رابطه (١٨) می‌توان گفت که در طرح بهینه از K نقطه ممکن آنهایی شرکت خواهند داشت که n متعلق به آنها بزرگتر از صفر باشد. با استفاده از این تعریف و مدل کلی (١٦) می‌توان مدل برنامه‌ریزی ماتریسی طرح بهینه D چندپاسخی را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ \log\det\left[\sum_{j=1}^{K}n_j(\mathbf{F}(\mathbf{v}_j)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{v}_j))\right]^{-1}\\&\qquad\text{subject to :}\\&\qquad\quad n_1+\cdots+n_K=N,\\&\qquad\quad n_j\ge 0,\\&\qquad\quad n_j\text{'s are integers.}\end{aligned}\tag{١٩}$$

متغیرهای تصمیم مدل (١٩)، اعداد صحیح $n_1,\ldots,n_K$ هستند. n_i نشان‌دهنده این است که در نقطه iام از K نقطه موجود n_i آزمایش از N آزمایش به انجام می‌رسد. در این مدل N، $\mathbf{F}(\mathbf{v}_j)$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ معلوم هستند. مدل (١٩) یک مدل عدد صحیح است. این مدل با استفاده از روش دو مرحله‌ای برنامه‌ریزی ماتریسی و شاخه و کران حل می‌شود. با حل این مدل طرح گسسته بهینه چندپاسخی بدست می‌آید.

برای تولید طرح پیوسته بهینه کافی است که محدودیت عددصحیح مدل (١٩) آزاد گردد که به‌همین منظور متغیر λ_j

بصورت $\lambda_j = {n_j}/{N}$ تعریف شده است که در آن λ_j نشان‌دهنده نسبتی از کل آزمایش‌ها است که در نقطه $\mathbf{x}_j$ انجام می‌شود. حال می‌توان ماتریس $Var(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ را براساس λ_j بصورت زیر نوشت:

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{N}[\sum_{j=1}^{K} \lambda_j (\mathbf{F}(\mathbf{v}_j)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{v}_j))]^{-1} \qquad (۲۰)$$

با استفاده از رابطه (۲۰) و با صرف نظرکردن از ضریب ثابت $\left({1}/{N}\right)$ می‌توان مدل (۱۹) را به شکل مدل (۲۱) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} &\text{Min } \log\det\left[\sum_{j=1}^{K} \lambda_j (\mathbf{F}(\mathbf{v}_j)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{v}_j))\right]^{-1} \\ &\qquad \text{subject to :} \\ &\qquad\qquad \mathbf{e}^T\boldsymbol{\lambda} = 1, \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{\lambda} \ge 0. \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که در آن $\boldsymbol{\lambda} \in R^K$ متغیر تصمیم مدل و $\mathbf{e}$ بردار یک‌ها است و $\mathbf{F}(\mathbf{v}_j)$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ معلوم هستند. نتیجه حل این مدل تولید طرح پیوسته بهینه چندپاسخی است.

مدل‌های پیشنهادی (۱۹) و (۲۱) با استفاده از ابزار YALMIP در محیط MATLAB قابل حل هستند. حل‌پذیری آنها با حل چند مسأله نمونه تست شده است و نتایج آنها در بخش مربوط به نتایج محاسباتی ارایه شده است. مزایای این مدل‌ها در بخش٦ ارایه شده است.

۵- نتایج محاسباتی

کارایی و حل‌پذیری مدل‌های پیشنهادی با مدل‌سازی و حل چندین مسأله نمونه که قبلاً توسط سایر روش‌ها حل‌شده بودند تست شد. برای جلوگیری از طولانی‌شدن مقاله در این بخش نتایج حل یک مسأله نمونه بصورت مشروح ارایه شده و به ارایه نتایج کلی شش مسأله نمونه دیگر اکتفا شده است. برای حل مسایل نمونه از یک کامپیوتر شخصی P4 1.6GHz استفاده شده است.

مسأله ۱: این مسأله در سال ۱۹۸٤ توسط ویجسنها حل‌شده است [١٤]. این مسأله یک مدل دوپاسخی با سه عامل است. صورت مسأله عبارت است از:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \beta_{112}x_1x_2 + \beta_{113}x_1x_3 \\ &\quad + \beta_{111}\ {}_1^2 + \beta_{133}\ {}_3^2 + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_{20} + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{212}x_1x_{22} + \beta_{211}x_1^2 \\ &\quad + \beta_{222}x_2^2 + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\chi = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : -1.73 \le \ _q \le 1.73, \ = 1,2,3\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix},$$

برای تولید طرح گسسته بهینه‌ای با ۲۰ آزمایش، فضای طراحی به پنجاه نقطه آزمایش با استفاده از طرح بهینه ویجسنها و افزودن سایر نقاط افراز شد. مدل (۱۹) نوشته شد و با استفاده از ابزار YALMIP در محیط MATLAB حل گردید که طرح بهینه بدست آمده در ستون n-exact جدول (۱) نشان‌داده شده است. همچنین طرح پیوسته این مسأله با نوشتن مدل (۲۱) و حل آن در ستون $\lambda^{(1)}$ جدول (۱) ارایه شده است. مقدار تابع هدف مدل پیشنهادی با طرح پیوسته بهینه تولید شده برابر با (۲۲/۹۶۷۳-) است ولی مقدار این معیار با طرح ویجسنها برابر با (۳/۰۳٤۸-) است. مقدار تابع هدف مدل نشان‌دهنده لگاریتم واریانس تخمین‌زننده پارامترها است. با مقایسه این دو مقدار روشن است که طرح بهینه پیشنهادی بهتر است و واریانس پارامترهای تخمینی با استفاده از آن کمتر خواهد بود.

برای نشان‌دادن سهولت تحلیل حساسیت طرح‌های تولیدی با مدل پیشنهادی، ماتریس کوواریانس پاسخ‌ها بصورت $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ پارامتری شد و با انتخاب مقادیر مختلف برای ρ از بازه $\rho \in (-1,1)$ و حل دوباره مدل (۲۱) حساسیت طرح پیوسته بهینه نسبت به تغییرات ماتریس کوواریانس پاسخ‌ها بررسی شد که نتایج حاصل در ستون‌های $\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(6)}$ جدول (۱) آمده است. همانطورکه در جدول (۱) مشهود است طرح پیوسته بهینه حاصل نسبت به $\boldsymbol{\Sigma}$ مقاوم نیست.

برای اختصار به ارایه نتایج کلی شش مسأله نمونه دیگر همراه با مسأله اول در جدول (۲) بسنده شده است.

۶- مقایسه روش‌های تولید طرح بهینه D چندپاسخی

همانطورکه پیشتر گفته شد در ادبیات موضوع سه الگوریتم(۱) فدوروو،(۲) ویجسنها و(۳) چانگ برای تولید طرح پیوسته بهینه چندپاسخی ارایه شده است. اگر چه نمی‌توان با مقایسه کمی دو مقدار زمانی درخصوص روش‌ها به صراحت قضاوت نمود، ولی با توجه به‌اینکه روش پیشنهادی بجای حل چندین مسأله بهینه‌سازی با حل یک مسأله بهینه‌سازی طرح بهینه را تولید می‌نماید و نیز با در نظر گرفتن مراحل متعدد حذف‌شده، می‌توان گفت مدل پیشنهادی طرح بهینه را در

مقایسه با الگوریتم‌های موجود سریعتر تولید می‌نمایند. این موضوع

جدول (۱) طرح‌های گسسته و پیوسته بهینه D مسأله ۱

x_1	x_2	x_3	n-exact	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$ $\rho=-0.5$	$\lambda^{(3)}$ $\rho=+0.5$	$\lambda^{(4)}$ $\rho=-0.1$	$\lambda^{(5)}$ $\rho=0$	$\lambda^{(6)}$ $\rho=-0.9$
۱/۶۸	۰	۰	۱	۰/۰۵۹۹	۰/۰۵۹۹	۰/۰۵۹۳	۰/۰۵۹۳	۰/۰۴۶۹	۰/۰۲۷۲
۰	۱/۶۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۰۹	۰/۰۲۶۳
۰	۰	۰	۲	۰/۰۸۵	۰/۰۸۵	۰/۰۸۵	۰/۰۸۵	۰/۰۸۲	۰/۰۶۶
۱/۷۲۸	−۱/۷۲۹	−۱/۷۲	۲	۰/۰۸۰۵	۰/۰۸۰۵	۰/۰۸۰۳	۰/۰۸۰۳	۰/۰۷۵۷	۰/۰۶۸۹
۱/۷۲۹	۱/۷۲۹	۱/۷۲۹	۲	۰/۰۸۹	۰/۰۸۹	۰/۰۸۹	۰/۰۸۹	۰/۰۸۹۶	۰/۰۹۰۵
−۱/۷۲۵	−۱/۷۲۳	۱/۷۱۵	۱	۰/۰۶۷۱	۰/۰۶۷۱	۰/۰۶۷	۰/۰۶۷	۰/۰۶۶۲	۰/۰۷۳۲
−۱/۷۳	۱/۷۲۱	۱/۷۲۹	۱	۰/۰۷۱۵	۰/۰۷۱۵	۰/۰۷۱۳	۰/۰۷۱۳	۰/۰۶۷۴	۰/۰۶۵۶
۱/۷۳	−۱/۷۲۹	۱/۷۲۹	۱	۰/۰۷۴۸	۰/۰۷۴۸	۰/۰۷۴۶	۰/۰۷۴۶	۰/۰۷۱۲	۰/۰۶۶۳
−۱/۷۳	۱/۷۳	۰/۰۲۶	۲	۰/۰۸۰۵	۰/۰۸۰۵	۰/۰۸۰۶	۰/۰۸۰۶	۰/۰۸۳۷	۰/۰۸۴۳
۱/۷۳	−۱/۷۳	−۰/۰۴۵	۰	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۶۹	۰/۰۱۶۹	۰/۰۳	۰/۰۴۹
−۱/۷۲۹	−۱/۷۳	−۱/۷۲۸	۲	۰/۱۰۵۶	۰/۱۰۵۶	۰/۱۰۵۶	۰/۱۰۵۶	۰/۱۰۵۶	۰/۱۰۲۳
−۱/۷۳	−۰/۰۹۶	۱/۷۳	۱	۰/۰۳۵۴	۰/۰۳۵۴	۰/۰۳۵۹	۰/۰۳۵۹	۰/۰۴۶۱	۰/۰۵۵۷
۱/۷۲۹	۱/۷۲۴	−۱/۷۲۹	۲	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۷۳	۰/۰۸
−۰/۱۵۴	۱/۷۳	−۱/۷۳	۲	۰/۰۸۸۳	۰/۰۸۸۳	۰/۰۸۸۲	۰/۰۸۸۲	۰/۰۸۶	۰/۰۷۲۱
−۰/۱۰۱	−۱/۷۳	۱/۷۳	۱	۰/۰۷۰۲	۰/۰۷۰۲	۰/۰۷۰۳	۰/۰۷۰۳	۰/۰۷۱۲	۰/۰۷۲۳
۱/۷۲۹	۱/۷۲۹	۱/۷۲۲	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱

جدول (۲) خلاصه نتایج محاسباتی هفت مسأله نمونه

شماره مسأله	تعداد پاسخ‌های مدل	تعداد عامل‌های مدل	تعداد پارامترهای مدل	تعداد نقاط ممکن	زمان تولید طرح پیوسته بهینه به ثانیه
۱	۲	۳	۱۴	۵۰	۹/۲
۲	۴	۳	۱۹	۱۲۵	۱۰۹
۳	۲	۲	۹	۵۰	۱/۶
۴	۲	۳	۱۴	۵۰	۶/۵
۵	۲	۴	۲۰	۱۰۰	۶۳/۳
۶	۳	۱	۸	۲۰	۰/۲
۷	۳	۱	۹	۲۰	۰/۷

جدول (۳) ویژگی‌های الگوریتم‌های موجود و روش پیشنهادی

معیارها	الگوریتم فدوروو (۱۹۷۲)	الگوریتم چانگ(۱۹۹۷)	الگوریتم ویجسنها (۱۹۸۴)	مدل باباپور و سیفی
ماتریس واریانس و کورایانس پاسخ ها	معلوم	برابر با ماتریس واحد	با انجام آزمایش تخمین‌زده می‌شود.	معلوم یا با استفاده از داده‌ها قابل تخمین می‌باشد.
طرح اولیه	طرح تصادفی یکنواخت	طرح حاصل از اجتماع طرح‌های بهینه تک‌پاسخه	طرح تصادفی یکنواخت	طرحی دلخواه از نقاط ممکن
کیفیت جواب	طرح بهینه D	طرح نزدیک بهینه D	طرح بهینه D	طرح بهینه D
مدل پاسخ	مدل خطی عمومی	برای برخی از مدل‌های خاص	مدل خطی عمومی	مدل خطی عمومی
فضای طراحی	عمومی	مکعبی	عمومی	عمومی
طرح تولید شده	پیوسته	پیوسته	پیوسته	گسسته و پیوسته
روش تولید طرح	بهینه‌سازی متعدد	بهینه‌سازی متعدد	بهینه‌سازی متعدد	با حل یک بهینه‌سازی

با ملاحظه زمان عملیات گزارش‌شده در جدول (۲) قابل نتیجه‌گیری است. همچنین روش پیشنهادی به عملیات دستی پیچیده‌ای مشابه الگوریتم‌های قبلی نیاز ندارد. ویژگی‌های اصلی روش‌های تولید طرح پیوسته بهینه در جدول (۳) خلاصه شده است.

مدل پیشنهادی پاسخ مناسبی برای سوال طرح شده در بخش ۳ است و مزیت اصلی مدل پیشنهادی قابلیت تولید طرح گسسته بهینه برای آزمایش‌های چندپاسخی است که تاکنون در ادبیات موضوع روشی برای آن ارایه نشده بود. همچنین روش پیشنهادی برای تولید طرح پیوسته بهینه نیز در مقایسه با سه الگوریتم موجود از مزایای قابل توجه‌ای برخوردار است که عبارتند از:

۱- مزیت مهم روش پیشنهادی سرعت تولید طرح بهینه است. پیش‌بینی می‌شود زمان تولید طرح در الگوریتم‌های قبلی با افزایش ابعاد مسأله بصورت اجتناب‌ناپذیر افزایش‌یافته و تولید طرح برای مسایل نسبتاً بزرگ عملاً غیرممکن شود. در روش پیشنهادی بنابه دلایل زیر زمان تولید طرح با افزایش ابعاد مسأله بصورت اجتناب‌ناپذیر افزایش نمی‌یابد.

۱-۱- در ادبیات برنامه‌ریزی ماتریسی گزارش شده است که تعداد تکرارهای مورد نیاز برای حل مدل پیشنهادی علی‌رغم افزایش ابعاد مسأله ثابت می‌ماند [۲۱].

۱-۲- مدل پیشنهادی عملیات دستی موردنیاز برای تشکیل مسایل بهینه‌سازی مربوط به الگوریتم‌های موجود را حذف می‌نماید.

۱-۳- ضرورت حل مسایل بهینه‌سازی متعدد مربوط به روش‌های موجود از بین می‌رود.

۲- انعطاف‌پذیری مدل پیشنهادی امکان مدل‌سازی سایر معیارهای بهینگی را فراهم می‌سازد و همچنین می‌توان با افزودن سایر محدودیت‌های فنی و هزینه‌ای به تولید طرح بهینه پرداخت.

۳- سهولت تحلیل حساسیت طرح‌های تولید شده.

٤- وجود الگوریتم‌های حل قوی مبتنی بر نقاط داخلی برای مدل‌های پیشنهادی. از نظر تئوری ثابت شده است که در بدترین شرایط تابع حجم محاسبات الگوریتم‌های نقاط داخلی از درجه چندجمله‌ای است [۲۱].

۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

با بررسی ادبیات طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی مشخص شد: اولاً روشی برای تولید طرح گسسته بهینه وجود ندارد. ثانیاً سه الگوریتم موجود طرح پیوسته بهینه بدلیل مشکلات خود از کارایی خوبی برخوردار نیستند.

همانطورکه گفته شد عمده مشکل آنها از آنجا ناشی می‌شود که برای تولید طرح بهینه مجبور به حل مسایل بهینه‌سازی متعدد هستند و همین امر یکی از دلایل ناکارآمدی آنها است. این الگوریتم‌ها برای یافتن هر نقطه طرح بهینه مجبور به حل یک مسأله بهینه‌سازی هستند. در این مقاله مسأله طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی در قالب برنامه‌ریزی ماتریسی بنحوی مدل‌سازی و حل شد که می‌تواند با یک بهینه‌سازی بجای بهینه‌سازی‌های متعدد طرح بهینه‌را تولید کند. مزیت اصلی مدل پیشنهادی تولید طرح گسسته بهینه است. هر چند که در تولید طرح پیوسته نیز مشکلات روش‌های موجود را برطرف کرده است.

در بررسی ادبیات موضوع اشاره شد که در ۱۵ سال گذشته از روش‌های ابتکاری برای تولید طرح گسسته بهینه تک‌پاسخی استفاده شده است. یکی از کارهای آتی، استفاده از این روش‌ها در طراحی بهینه آزمایش‌های چندپاسخی و مقایسه روش پیشنهادی با آنها خواهدبود. از جمله کارهای آتی دیگر تعمیم مدل پیشنهادی به سایر معیارهای بهینگی از قبیل A و E است.

۸- مراجع

[۱] Berger, M.P.F. and Wong, W.K., Applied Optimal Designs, Wiley, New York, 2005.

[۲] Atkinson, A.C., Donev, A.N., Optimum Experimental Designs, Oxford University Press, 1992.

[۳] Pukelsheim,F., Optimal Design of Experiments, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[٤] Fedorov,V.V., Theory of Optimal Experiments, Academic Press, Inc., 1972.

[٥] Boer,E.P.J., Hendrix,E.M.T., Global Optimization Problems in Optimal Design of Experiments in Regression Models, Journal of Global Optimization 18, 385-398, 2000.

[٦] Cook, R.D., Nachtsheim, C.H., A Comparison of Algorithms for Constructing Exact D-Optimal Designs, Technometrics 22(3), 315-324, 1980.

[۷] Gaffke, N., Heiligers, B., Algorithms for optimal design with application to multiple polynomial regressions, Metrika 42, 173-190,1995b

[۸] Drain, D., Carlyle, W.M., Montogomery, D.C., et al., A genetic algorithm hybrid for constructing optimal response surface designs, Quality and Reliability Engineering International 20(7), 637-650, 2004.

[۹] Borkowski, J.J., Using a genetic algorithm to generating small exact response surface designs, Journal of Probability and Statistical Science 1 (1), 65-88, 2003.

[۱۰] Angelis, L., Bora-senta,E., Moyssiadis,C., Optimal exact experimental designs with correlated errors through a simulathed annealing algorithms, Computational Statistics& Data Analysis 37,275-296,2001.

[۱۱] Shah, H.K., Montgomery, D.C., Carlyle, W.M., Response surface modeling and optimization in multi-response experiments using seemingly unrelated regression, Quality Engineering 16(3), 387-397, 2004.

[۱۲] Khuri, A. I., Cornell, J.A., Response Surfaces: Designs and Analysis Second Edition, Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc., 1996.

[۱۳] Draper, N.R., Hunter, W.G., Design of Experiments for Parameter Estimation in Multiresponse Situations, Biometrika 53, 525-533, 1966.

[۱٤] Roy, S.N., Gnanadesikan, R., and Srivastava, J.N., Analysis and Design of Certain Quantitative Multiresponse Experiments, Pergamon Press, 1971.

[۱٥] Wijesinha,M.M.C., Design of Experiments for Multi-response Models, Unpublished Ph.D. Thesis, Dep. of Statistics, University of Florida, Gainesville, 1984.

[۱٦] Krafft,O., Schaefer,M., D-Optimal designs for a Multivariate Regression Model, Journal of Multivariate Analysis 42, 130-140, 1992.

[۱۷] Imhof,L., Optimum Designs for Multi-response Regression Models, Journal of Multivariate Analysis, 72, 120-131, 2000.

[۱۸] Bischoff,W., On D-Optimal Designs for Linear Models Under Correlated Observations with an Application to a Linear Model with Multiple Response, Journal of Statistical Planning and Inference 37, 69-80, 1993.

[۱۹] Chang, S.I., Some Properties of Multi-response D-Optimal Designs, Journal of Mathematical Analysis and Applications 184, 256-262, 1994.

[۲۰] Chang, S.I., An Algorithm to Generate Near D-Optimal Designs for Multiple-Response Surface Models, IIE Transactions 29, 1073-1081, 1997.

[۲۱] Boyd, S., Vandenberghe, L., Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004, http://www.stanford.edu//~boyd.

[۲۲] Zellner, A., An efficient method of estimating seeming unrelated regressions and tests for aggregation bias, American Statistical Association Journal 57, 348-368, 1962.

[۲۳] Vandenberghe, L., Boyd, S., Semidefinite programming, SIAM Review 38(1), 49-95, 1996.

[۲٤] Lewis, A.S., Overton, M.L., Eigenvalue Optimization, Acta Numerica, 149-160, 1996.

[۲٥] Todd, M.J., Semidefinite Optimization, Acta Numerica 10, 515-560, 2001.

[۲٦] Vandenberghe,L., Boyd, S., Wu, S.-P., Determinant Maximization with Linear Matrix Inequality Constraints, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 19(2), 499-533, 1998.

۹- زیرنویس‌ها

1- Design and Analysis of Experiments
2- Evolutionary Algorithms
3 - Draper and Hunter
4 - Fedorov
5 - Roy and Gnanadesikan and Srivastava
6 - Wijesinha
7 - Krafft and Schaefer
8 - Imhof
9 - Bischoff
10 - Chang
11- Boyd and Vandenberghe
12 -Approximate Design
13 - Exact Design
14 - Zellner
15 - Kronecker
16 - Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)
17 - Combinatorial Optimization
18 - Global Optimization