حل مساله مقدار مرزی مربوط به انتشار امواج سطحی آب

آرمان عقیلی[i]؛ آسیه پارسانیا[ii]

چکیده

رده‌ای از مسائل مقدار مرزی که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرند به انتشار امواج سطحی دو بعدی آب عمیق در شرایط وجود یک مانع عمودی با سطح سخت مربوط می‌شوند، با این فرض که سطح آب با یک لایه نازک یخ پوشیده شده باشد. همچنین فرض شده است که پوشش یخی همانند یک صفحه انعطاف پذیر همگن رفتار کند. مسائل مورد نظر منجر به حل معادله لاپلاس دو بعدی در یک ربع صفحه می‌شود، با شرط مرزی نیومن روی مرز قائم و شرطی که مستلزم مشتقات تا مرتبه پنجم تابعی نامعلوم روی مرز افقی پوشش یخی است، می‌شود. با این دو شرط مرزی است که یکتایی جوابها تضمین می‌شود. روشی که در اینجا برای حل مساله مقدار مرزی مذکور بکار گرفته می‌شود، عبارتست از تعیین جواب یکتای رده‌ای خاص از معادله انتگرال فردهلم منفرد نوع اول.

کلمات کلیدی

امواج سطحی آب، معادله انتگرال فردهلم منفرد نوع اول، تبدیل فوریه، معادله لاپلاس دو بعدی و ...

Surface Water Waves Involving a Vertical Barrier in the Presence of an ice Cover

Arman Aghili; Asieh Parsania

ABSTRACT

A class of boundary value problems involving propagation of two dimensional surface water waves, associated with deep water and a plane vertical rigid barrier is investigated under the assumption that a thin sheet of ice covers the surface. We assume that the ice cover behaves like a thin isotropic elastic plate. The problems under consideration lead to those of solving the two dimensional Laplace equation in a quarter plane, under a Neumann boundary condition on the vertical boundary and a condition involving up to the fifth order derivatives of unknown function on the horizontal ice covered boundary, along with two appropriate edge conditions, ensuring the uniqueness of the solutions. The method employed here to solve the mixed boundary value problem is to determine the unique solution of a special type of singular Fredholm integral equation of the first kind.

KEYWORDS

Surface water waves, First kind of singular Fredholm integral equation, Fourier transform, Two-dimensional Laplace equation,...

۱- مقدمه

رده مسائل مقدار مرزی مورد نظر بصورت زیر بیان می شود. ما حرکت غیر دورانی یک سیال تراکم ناپذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم که به علت نوسانات هارمونیک یک صفحه قائم مولد موج تحت جاذبه بوجودمی‌آید. حرکت سیال غیر دورانی فرض می‌شود و از نیروهای چسبندگی صرفنظر می‌کنیم. از دستگاه مختصات دکارتی قائم استفاده می‌کنیم که در آن محور y بطور قائم رو به پایین است، بطوریکه $y = 0$ و $x > 0$ سطح آزاد و غیر منبسط سیال را

[i] دانشیار دانشگاه گیلان، دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی؛ پست الکترونیکی armanaghili@yahoo.com

[ii] پست الکترونیکی a_parsania@yahoo.com.

نشان دهد وسیال ناحیه $x > 0$ و $y \geq 0$ را اشغال کند[۱] .

در مسائل مورد بررسی در $x = 0$ یک مولد موج نوسان کننده هارمونیک یا دیوار قائم سخت را در نظر می‌گیریم. حرکت، دو بعدی و $time - harmonic$ است و توسط پتانسیل سرعت $\phi(x,y,t)$،یعنی قسمت حقیقی $\varphi(x,y)e^{-it}$ توصیف می‌شود که در آن t نمایش دهنده زمان بدون بعد است. ضریب وابسته به زمان e^{-it} در سراسر تحلیل پنهان می‌ماند، بنابراین $\varphi(x,y)$ در معادله زیر صدق می‌کند :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad x>0\,,y>0 \tag{۱}$$

که شرایط مرزی زیر را دارد :

$$D\frac{\partial^5\varphi}{\partial y\partial x^4}(x,0)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0)+\varphi(x,0)=0\,,\,x>0 \tag{۲}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y)=u(y) \tag{۳}$$

$$\varphi\to 0 \quad as \quad y\to\infty \tag{۴}$$

که در آن $D > 0$ ثابت معلوم و $u(y)$ تابعی است که در مساله داده می‌شود. اگر $x = 0$ نشان دهنده یک دیوار قائم باشد $u(y) = 0$ و اگر $x = 0$ نماینده یک مولد موج باشد $u(y) \neq 0$ [۲]. همچنین

$$\varphi\approx A_0e^{-i\lambda x-\lambda y}+R\,\mathrm{e}^{i\lambda x-\lambda y} \quad as \quad x\to\infty \tag{۵}$$

که در آن A_0 یک ثابت معلوم و R یک ثابت مجهول است که باید تعیین گردد و λ ثابتی مثبت و حقیقی است. از طرف دیگر به منظور یکتایی جواب دو شرط گوشه ای زیر را نیز در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y\partial x^3}(x,0)\to\mu_1 \quad , \quad x\to 0^+ \tag{۶}$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,0)\to\mu_2 \quad , \quad x\to 0^+ \tag{۷}$$

هدف یافتن جواب مساله تشریح شده است. برای این منظور ابتدا معادله (۱) را حل می‌کنیم. با اعمال شرایط، مساله منجر به حل یک معادله انتگرال نوع اول می‌گردد، برای حل آن روشهایی را بکار می‌بریم تا آن را به یک معادله دیفرانسیل بدل کنیم. با حل آن، در نهایت جواب معادله انتگرال مذکور حاصل می‌گردد، البته در ضمن حل مساله متغیرهای جدیدی تعریف می‌کنیم که ادامه محاسبات را ساده تر کنند، سپس با اعمال شرایط مرزی و گوشه‌ای تمامی این متغیرها را محاسبه می‌کنیم. در آخر برای حالت خاصی از مساله، ضریب بازتاب را با کمک نرم افزار Maple محاسبه می‌شود.

۲- روش حل

معادله چند جمله‌ای $\alpha\left(1+D\alpha^4\right)-1=0$ تنها دارای یک ریشه حقیقی مثبت λ و چهار ریشه مختلط است که با زوجهای $\left(\lambda_1,\overline{\lambda_1}\right)$ و $\left(\lambda_2,\overline{\lambda_2}\right)$ نشان داده می‌شوند در اینجا $\mathrm{Re}\{\lambda_1\}>0$ و $\mathrm{Im}\{\lambda_1\}>0$ و $\mathrm{Re}\{\lambda_2\}<0$ و نماد "بار" نشان دهنده مزدوج مختلط است. ریشه حقیقی مثبت λ ، طول موج مربوط به موج سطحی انتشار یافته مورد بررسی ماست و وقتی کلیه جوابهای ممکن ذکر شده در بخش قبل جمع آوری شود می‌توانیم نمایش زیر را برای تابع نامعلوم $\varphi(x,y)$ ارائه دهیم. ابتدا معادله لاپلاس را به روش جداسازی حل می‌کنیم، [۳] ، لذا داریم:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\varphi(x,y)=X(x)Y(y) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=X''Y\\[2mm]\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=XY''\end{cases}$$

با جای گذاری در معادله داریم:

$$X''Y+XY''=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\pm\xi^2$$

بار اول حالت $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=+\xi^2$ را در نظر می‌گیریم و بار دیگر معادله را در حالت $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\xi^2$ حل می‌کنیم.

حالت اول:

$$\begin{cases}X''=\xi^2X\to X=c_1e^{\xi x}+c_2e^{-\xi x}\\ Y''=-\xi^2Y\to Y=d_1\cos\xi y+d_2\sin\xi y\end{cases}$$

نتیجه می‌شود :

$$\varphi(x,y)=\left(c_1e^{\xi x}+c_2e^{-\xi x}\right)\left(d_1\cos\xi y+d_2\sin\xi y\right)$$

حال به دلیل کرانداری $\varphi(x,y)$ وقتی $x\to\infty$ باید $c_1=0$. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}d_1'=c_2d_1\\ d_2'=c_2d_2\end{cases}$$

لذا داریم :

$$\varphi(x,y)=e^{-\xi x}\left(d_1'\cos\xi y+d_2'\sin\xi y\right)$$

از شرط (۲) نتیجه می‌شود:

$$0=\left(D\xi^5+\xi\right)d_2'+d_1' \Rightarrow\quad d_1'=-\left(D\xi^4+1\right)\xi d_2'$$

$$\varphi(x,y)=e^{-\xi x}(-(D\xi^4+1)\xi d_2'\cos\xi y+d_2'\sin\xi y)$$
$$=d_2'e^{-\lambda x}(-(D\lambda^4+1)\lambda\cos\lambda y+\sin\lambda y)$$

تعریف می‌کنیم:

$$d_2'(\xi)=-\frac{2}{\pi}\frac{A(\xi)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}$$

$$\varphi(x,y)=\frac{2}{\pi}\frac{A(\xi)e^{-\xi x}(\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}$$

لذا بنا بر اصل بر هم نهی جوابها نتیجه می‌شود :

$$\varphi(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{A(\xi)(\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}e^{-\xi x}d\xi$$

حالت دوم:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\xi^2$$

$$\begin{cases}X''+\xi^2X=0\rightarrow X=c_1e^{i\xi x}+c_2e^{-i\xi x}\\ Y''-\xi^2Y=0\rightarrow Y=d_1e^{\xi y}+d_2e^{-\xi y}\end{cases}$$

$$\varphi(x,y)=\left(c_1e^{i\xi x}+c_2e^{-i\xi x}\right)\left(d_1e^{\xi y}+d_2e^{-\xi y}\right)$$

با توجه به کرانداری φ ، وقتی $y\rightarrow\infty$ نتیجه می شود $d_1=0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}c_1'=d_2c_1\\ c_2'=d_2c_2\end{cases}$$

لذا داریم:

$$\varphi(x,y)=c_1'e^{i\xi x-\xi y}+c_2'e^{-i\xi x-\xi y}$$

حال با اعمال شرط مرزی(۲) نتیجه می‌شود:

$$0=\left(-D\xi^5-\xi+1\right)\left(c_1'e^{i\xi x}+c_2'e^{-i\xi x}\right)$$
$$\Rightarrow\qquad 0=\left(D\xi^5+\xi-1\right)$$

همانطور که قبلا اشاره شد ریشه‌های معادله فوق عبارتند از $\lambda,\lambda_1,\overline{\lambda_1},\lambda_2,\overline{\lambda_2}$، بنابراین جواب معادله مذکور به صورت زیر در می‌آید:

$$\varphi(x,y)=A_0e^{-i\lambda x-\lambda y}+\mathrm{R}e^{i\lambda x-\lambda y}+A_1e^{i\lambda_1x-\lambda_1y}$$
$$+C_1e^{i\lambda_2x-\lambda_2y}+B_1e^{-i\lambda_1x-\lambda_1y}+A_2e^{-i\overline{\lambda_1}x-\overline{\lambda_1}y}+B_2e^{i\overline{\lambda_1}x-\overline{\lambda_1}y}$$
$$+C_2e^{-i\lambda_2x-\lambda_2y}+D_1e^{i\overline{\lambda_2}x-\overline{\lambda_2}y}+D_2e^{i\overline{\lambda_2}x-\overline{\lambda_2}y}$$

حال از شرط (٤) داریم $\varphi\rightarrow0$ وقتی $y\rightarrow\infty$ ، لذا

$$C_1=C_2=D_1=D_2=0$$

$$\varphi(x,y)=A_0e^{-i\lambda x-\lambda y}+\mathrm{R}e^{i\lambda x-\lambda y}+A_1e^{i\lambda_1x-\lambda_1y}+A_2e^{-i\overline{\lambda_1}x-\overline{\lambda_1}y}$$

با در نظر گرفتن دو جواب مذکور خواهیم داشت:

$$\varphi(x,y)=A_0e^{-i\lambda x-\lambda y}+\mathrm{R}e^{i\lambda x-\lambda y}+A_1e^{i\lambda_1x-\lambda_1y}+A_2e^{-i\overline{\lambda_1}x-\overline{\lambda_1}y}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{A(\xi)\left(\xi\left(D\xi^4+1\right)\cos\xi y-\sin\xi y\right)}{\xi^2\left(1+D\xi^4\right)^2+1}e^{-\xi x}d\xi\qquad(۸)$$

که در آن $A(\xi)$ تابع نامعلوم است و باید تعیین شود . در مقابل سه ثابت نامعلوم R، A_1 و A_2 که در مسائل مختلف متفاوتند ، ثابت A_0 معلوم فرض می‌شود .

باید توجه شـود کـه جوابهـای $e^{\pm i\lambda_2x-\lambda_2y}$ و $e^{\pm i\overline{\lambda_2}x-\overline{\lambda_2}y}$ در نمایش(۸) ظاهر نمی‌شوند ، که این به خاطر شرط (٤) می باشد، همانطور که در بالا ثابت شد .

حال با استفاده از نمایش (۸) برای $\varphi(x,y)$ و شرط (۳) در می‌یابیم که $A(\xi)$ باید در معادله انتگرال نوع اول که در زیر بیان می‌شود صدق کند :

$$u(y)=-i\lambda A_0e^{-\lambda y}+i\lambda\,\mathrm{R}e^{-\lambda y}+i\lambda_1A_1e^{-\lambda_1y}-i\overline{\lambda_1}A_2e^{-\overline{\lambda_1}y}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{-\xi A(\xi)\left(\xi\left(D\xi^4+1\right)\cos\xi y-\sin\xi y\right)}{\xi^2\left(1+D\xi^4\right)^2+1}d\xi$$

تعریف می‌کنیم:

$$f(y)=-u(y)-i\lambda A_0e^{-\lambda y}+iR\lambda e^{-\lambda y}+i\lambda_1A_1e^{-\lambda_1y}-i\overline{\lambda_1}A_2e^{-\overline{\lambda_1}y}\qquad(۹)$$

لذا

$$\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{-\xi A(\xi)\left(\xi\left(D\xi^4+1\right)\cos\xi y-\sin\xi y\right)}{\xi^2\left(1+D\xi^4\right)^2+1}d\xi=f(y)$$
$$,\ y>0\qquad(۱۰)$$

به منظور سازگاری معادله انتگرال فوق بدنبال جواب غیر صفر برای معادله انتگرال همگن نوع اول زیر هستیم [٤]

$$\int_{y=0}^{\infty}f(y)h(y)dy=0\qquad(۱۱)$$

که در آن

$$\int_{y=0}^{\infty}h(y)\left[\xi\left(D\xi^4+1\right)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dy=0\qquad(۱۲)$$

حال معادله انتگرال فوق را حل می‌کنیم:

$$0=\int_{y=0}^{\infty}h(y)\left[\xi\left(D\xi^4+1\right)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dy$$

$$= -\int_0^{\infty} h(y)\sin \xi y dy + \xi \int_0^{\infty} h(y)\cos \xi y dy + D\xi^5 \int_0^{\infty} h(y)\cos \xi y dy$$

برای ساده کردن انتگرال فوق، انتگرالهای کسینوسی را به روش جزء به جزء به انتگرال سینوسی تبدیل می‌کنیم:

$$\xi \int_{y=0}^{\infty} h(y)\cos \xi y dy = -\int_{y=0}^{\infty} h'(y)\sin \xi y dy$$

$$D\xi^5 \int_{y=0}^{\infty} h(y)\cos \xi y dy = -D\int_{y=0}^{\infty} h^{(5)}(y)\sin \xi y dy$$

البته برای رسیدن به نتیجه فوق فرض کردیم:

$$\left.\frac{d^3 h}{dy^3}\right|_{y=0} = 0 ،\ \left.\frac{dh}{dy}\right|_{y=0} = 0 ،\ h(y) \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$$

حال در معادله اول جای گذاری می‌کنیم:

$$0 = -\int_0^{\infty} h(y)\sin \xi y dy - \int_0^{\infty} h'(y)\sin \xi y dy - D\int_0^{\infty} h^{(5)}(y)\sin \xi y dy$$

$$0 = -\int_{y=0}^{\infty}\left[D\frac{d^5}{dy^5} + \frac{d}{dy} + 1\right]h(y)\sin \xi y dy$$

با توجه به تعریف تبدیل فوریه سینوسی و معکوس آن داریم[۵]:

$$\left[D\frac{d^5}{dy^5} + \frac{d}{dy} + 1\right]h(y) = 0$$

با شرایط مرزی

$$\left.\frac{dh}{dy}\right|_{y=0} = 0\ ,\ \left.\frac{d^3 h}{dy^3}\right|_{y=0} = 0$$

$$h(y) \to 0 \quad as \quad y \to \infty$$

حال معادله دیفرانسیل فوق را حل می‌کنیم:

ابتدا معادله مشخصه آن را تعیین می‌کنیم که عبارتست از

$$Dm^5 + m + 1 = 0$$

به سادگی می‌توان نشان داد که ریشه‌های آن عبارتست از $-\lambda$ ، $-\lambda_1$ ، $-\overline{\lambda_1}$ ، $-\lambda_2$ و $-\overline{\lambda_2}$ (واضح است که ریشه‌های معادله مذکور قرینه ریشه‌های معادله $Dm^5 + m - 1 = 0$ است). لذا جواب معادله دیفرانسیل عبارتست از

$$h(y) = c_1 e^{-\lambda y} + c_2 e^{-\lambda_1 y} + c_3 e^{-\overline{\lambda_1} y} + c_4 e^{-\lambda_2 y} + c_5 e^{-\overline{\lambda_2} y}$$

از طرفی داریم $\mathrm{Re}\{\lambda_2\} < 0$ لذا $\mathrm{Re}\{-\lambda_2\} > 0$، بنابراین باتوجه به شرط $h(y) \to 0$ وقتی $y \to \infty$ نتیجه می‌شود

$$c_4 = c_5 = 0 \quad \Rightarrow h(y) = c_1 e^{-\lambda y} + c_2 e^{-\lambda_1 y} + c_3 e^{-\overline{\lambda_1} y}$$

حال با اعمال شرایط $\left.\frac{dh}{dy}\right|_{y=0} = 0$ و $\left.\frac{d^3 h}{dy^3}\right|_{y=0} = 0$ به دستگاه زیر می‌رسیم

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1\lambda + c_2\lambda_1 + c_3\overline{\lambda_1} = 0 \\ c_1\lambda^3 + c_2\lambda_1^3 + c_3\overline{\lambda_1}^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = c\lambda_1\overline{\lambda_1}(\overline{\lambda_1}^2 - \lambda_1^2) \\ c_2 = c\lambda\overline{\lambda_1}(\lambda^2 - \overline{\lambda_1}^2) \\ c_3 = c\lambda\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda^2) \end{cases}$$

که نتیجه می‌شود

$$h(y) = c[\ \lambda_1\overline{\lambda_1}(\overline{\lambda_1}^2 - \lambda_1^2)e^{-\lambda y} + \lambda\overline{\lambda_1}(\lambda^2 - \overline{\lambda_1}^2)e^{-\lambda_1 y} + \lambda\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda^2)e^{-\overline{\lambda_1} y}\ ] \qquad (۱۳)$$

و در آن c ثابت دلخواه است .

حال معادله انتگرال (۱۰) را حل می‌کنیم.

طرفین معادله انتگرال مذکور را در $[\ \xi(D\xi^4 + 1)\cos \xi y - \sin \xi y\ ]$ ضرب کرده و نسبت به y از $y = 0$ تا $y = \infty$ انتگرال می‌گیریم. البته در ضمن اثبات نیازمند استفاده از روابط زیر هستیم :

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-at}\cos bt dt = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{Re}(a)\quad 0, b\quad 0$$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-at}\sin bt dt = \frac{b}{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{Re}(a)\quad 0, b\quad 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\varepsilon t}\cos xt dt = \pi\delta(x) \qquad \forall x$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t=0}^{\infty} e^{-\varepsilon t}\sin xt dt = \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

و در آن $\delta(t)$ تابع دلتای دیراک است.

$$\frac{2}{\pi}\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{-\tau A(\tau)(\tau(D\tau^4 + 1)\cos \tau y - \sin \tau y)}{\tau^2(1 + D\tau^4)^2 + 1}d\tau = f(y)$$

$$F(\xi) = \int_{y=0}^{\infty}[\xi(D\xi^4 + 1)\cos \xi y - \sin \xi y]f(y)dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{y=0}^{\infty}[\xi(D\xi^4 + 1)\cos \xi y - \sin \xi y]\times$$

$$\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{-\tau A(\tau)(\tau(D\tau^4 + 1)\cos \tau y - \sin \tau y)}{\tau^2(1 + D\tau^4)^2 + 1}d\tau\, dy$$

با تعویض ترتیب انتگرالگیری داریم:

$$F(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau^2A(\tau)(D\tau^4+1)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}\times$$

$$\int_{y=0}^{\infty}\cos\tau y\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dyd\tau$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau A(\tau)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}\times$$

$$\int_{y=0}^{\infty}\sin\tau y\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dyd\tau$$

$$=\xi(D\xi^4+1)\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau^2A(\tau)(D\tau^4+1)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}[\delta(\tau+\xi)$$

$$+\delta(\tau-\xi)]d\tau-\frac{2}{\pi}\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau^2A(\tau)(D\tau^4+1)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}\frac{\xi}{\xi^2-\tau^2}d\tau$$

$$-\frac{2}{\pi}\xi(D\xi^4+1)\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau A(\tau)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}\frac{\tau}{\tau^2-\xi^2}d\tau$$

$$+\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau A(\tau)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}[\delta(\tau+\xi)-\delta(\tau-\xi)]d\tau$$

طرف راست معادله بالا را ساده می‌کنیم :

$$F(\xi)=\xi A(\xi)+\frac{2D}{\pi}\xi\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau^2A(\tau)(\tau^2+\xi^2)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}d\tau$$

$$F(\xi)=\xi A(\xi)+\frac{2D}{\pi}\xi\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau^4A(\tau)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}d\tau$$

$$+\frac{2D}{\pi}\xi^3\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{\tau^2A(\tau)}{\tau^2(1+D\tau^4)^2+1}d\tau$$

بنابراین داریم

$$\xi A(\xi)=F(\xi)\quad D_1\xi\quad D_2\xi^3 \tag{۱۴}$$

و در آن

$$\begin{cases}D_1=\dfrac{2D}{\pi}\dfrac{\xi^4A(\xi)}{Q(\xi)}d\xi\\[2mm] D_2=\dfrac{2D}{\pi}\displaystyle\int_{\xi=0}^{\infty}\dfrac{\xi^2A(\xi)}{Q(\xi)}d\xi\end{cases} \tag{۱۵}$$

$$Q(\xi)=\xi^2(1+D\xi^4)^2+1 \tag{۱۶}$$

حال با جای گذاری رابطه بدست آمده برای $\xi A(\xi)$ در روابط فوق داریم

$$D_1=\frac{2D}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^4A(\xi)}{Q(\xi)}d\xi$$

$$=J_3(F)-D_1I_4-D_2I_6$$

$$(1+I_4)D_1\quad I_6D_2\quad J_3(F)$$

از طرف دیگر

$$D_2=\frac{2D}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^2A(\xi)}{Q(\xi)}d\xi=J_1(F)\quad D_1I_2\quad D_2I_4$$

$$(1+I_4)D_2+I_6D_1=J_1(F)$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}D_1=\dfrac{(1+I_4)J_3-I_6J_1}{(1+I_4)^2-I_2I_6}\\[2mm] D_2=\dfrac{(1+I_4)J_1-I_2J_3}{(1+I_4)^2-I_2I_6}\end{cases} \tag{۱۷}$$

که در آن

$$\begin{cases}I_r=\dfrac{2D}{\pi}\displaystyle\int_{\xi=0}^{\infty}\dfrac{\xi^r}{Q(\xi)}d\xi & r=1,2,3,4,5,6\\[2mm] J_s(F)=\dfrac{2D}{\pi}\displaystyle\int_{\xi=0}^{\infty}\dfrac{\xi^sF(\xi)}{Q(\xi)}d\xi & s=1,2,3\end{cases} \tag{۱۸}$$

از (۱٤) داریم

$$A(\xi)=\frac{F(\xi)}{\xi}\quad D_1\quad D_2\xi^2 \tag{۱۹}$$

از طرفی با جای گذاری (۹) در زیر بدنبال رابطه‌ای برای $F(\xi)$ هستیم

$$F(\xi)=\int_{y=0}^{\infty}\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]f(y)dy$$

$$=\int_0^{\infty}\left[-u(y)-i\lambda(A_0-R)e^{-\lambda y}+i\lambda_1A_1e^{-\lambda_1 y}-i\overline{\lambda_1}A_2e^{-\overline{\lambda_1}y}\right]\times$$

$$\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dy$$

با ضرب دو کروشه در هم و جداسازی انتگرالها و استفاده از خواص ذکر شده برای توابع مثلثاتی به رابطه زیر می‌رسیم

$$F(\xi)=\frac{-i\lambda(A_0-R)\xi\left[(\lambda-1)+\lambda D\xi^4\right]}{\xi^2+\lambda^2}$$

$$+\frac{i\lambda_1A_1\xi\left[(\lambda_1-1)+\lambda_1D\xi^4\right]}{\xi^2+\lambda_1^2}-\frac{i\overline{\lambda_1}A_2\xi\left[(\overline{\lambda_1}-1)+\overline{\lambda_1}D\xi^4\right]}{\xi^2+\overline{\lambda_1}^2}$$

$$-\int_{y=0}^{\infty}u(y)\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dy$$

با جای گذاری رابطه فوق در رابطه مربوط به $J_s(F)$ داریم

$$J_s(F)=\frac{2D}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^s F(\xi)}{Q(\xi)}d\xi$$

$$=-\lambda(A_0-R)\left[(\lambda-1)L_s-\lambda DL_{s+4}\right]$$

$$+\lambda_1 A_1\left[(\lambda_1-1)L_{1,s}-\lambda_1 DL_{1,s+4}\right]$$

$$-\overline{\lambda}_1 A_2\left[(\overline{\lambda}_1-1)L_{2,s}\quad \overline{\lambda}_1 DL_{2,s+4}\right]\quad c_s$$

$$J_s(F)=-\left[(A_0-R)u_s+A_1v_s\quad A_2w_s\quad c_s\right] \tag{۲۰}$$

که در آن

$$u_s=\lambda\left[(\lambda-1)L_s-\lambda DL_{s+4}\right] \tag{۲۱}$$

$$v_s=-\lambda_1\left[(\lambda_1-1)L_{1,s}-\lambda_1 DL_{1,s+4}\right] \tag{۲۲}$$

$$w_s=\overline{\lambda}_1\left[(\overline{\lambda}_1-1)L_{2,s}-\overline{\lambda}_1 DL_{2,s+4}\right] \tag{۲۳}$$

$$c_s=\frac{2D}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^s\int_{y=0}^{\infty}u(y)\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dy}{Q(\xi)}d\xi$$

$$L_s=\frac{2D}{\pi}i\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^{s+1}}{(\xi^2+\lambda^2)Q(\xi)}d\xi \tag{۲۴}$$

$$L_{1,s}=\frac{2D}{\pi}i\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^{s+1}}{(\xi^2+\lambda_1^{\,2})Q(\xi)}d\xi \tag{۲۵}$$

$$L_{2,s}=\frac{2D}{\pi}i\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^{s+1}}{(\xi^2+\overline{\lambda}_1^{\,2})Q(\xi)}d\xi \tag{۲۶}$$

بنا بر این تا این مرحله توانستیم تابع $A(\xi)$ را بر حسب جملاتی از ثابتهای مجهول R ، A_1 و A_2 بنویسیم . حال به کمک شرایط گوشه‌ای (٦) و (٧) همراه با شرط سازگاری (١١) ثابتهای مذکور را تعیین می‌کنیم.

از شرط (٦)داریم:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y\partial x^3}\to\mu_1 \qquad x\to 0^+\quad on\quad y=0$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y\partial x^3}=-i\lambda^4A_0e^{-i\lambda x-\lambda y}+i\lambda^4\,\mathrm{R}e^{i\lambda x-\lambda y}$$

$$+i\lambda_1^{\,4}A_1e^{i\lambda_1x-\lambda_1y}-i\overline{\lambda}_1^{\,4}A_2e^{-i\overline{\lambda}_1x-\overline{\lambda}_1y}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^3A(\xi)\left(-\xi^2(D\xi^4+1)\sin\xi y-\cos\xi y\right)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}e^{-\xi x}d\xi$$

حال قرار می‌دهیم $y=0$ و x را به صفر میل می‌دهیم.

$$\mu_1=-i\lambda^4A_0+i\lambda^4R+i\lambda_1^{\,4}A_1-i\overline{\lambda}_1^{\,4}A_2$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^4A(\xi)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}d\xi \tag{۲۷}$$

ابتدا مقدار انتگرال را محاسبه می‌کنیم، برای این منظور از رابطه (١٤) بجای $\xi A(\xi)$ مقدارش را قرار می‌دهیم

$$\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^4A(\xi)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}d\xi$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[-D_1I_4-D_2I_6+J_3(F)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[-\frac{(1+I_4)J_3-I_6J_1}{(1+I_4)^2-I_2I_6}I_4-\frac{(1+I_4)J_1-I_2J_3}{(1+I_4)^2-I_2I_6}I_6+J_3(F)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[\frac{I_4I_6-(1+I_4)I_6}{(1+I_4)^2-I_2I_6}J_1+\frac{I_2I_6-(1+I_4)I_4}{(1+I_4)^2-I_2I_6}J_3+J_3(F)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[-\frac{I_4I_6-(1+I_4)I_6}{(1+I_4)^2-I_2I_6}\left[(A_0-R)u_1+A_1v_1+A_2w_1+c_1\right]\right.$$

$$-\frac{I_2I_6-(1+I_4)I_4}{(1+I_4)^2-I_2I_6}\left[(A_0-R)u_3+A_1v_3+A_2w_3+c_3\right]$$

$$\left.-\left[(A_0-R)u_3+A_1v_3+A_2w_3+c_3\right]\right]$$

به سادگی می‌توان نوشت:

$$=\frac{\pi}{2D}(A_0-R)\left[\frac{(1+I_4)u_1-I_2u_3}{\Delta}I_6+\frac{(1+I_4)u_3-I_6u_1}{\Delta}I_4-u_3\right]$$

$$+\frac{\pi}{2D}A_1\left[\frac{(1+I_4)v_1-I_2v_3}{\Delta}I_6+\frac{(1+I_4)v_3-I_6v_1}{\Delta}I_4-v_3\right]$$

$$+\frac{\pi}{2D}A_2\left[\frac{(1+I_4)w_1-I_2w_3}{\Delta}I_6+\frac{(1+I_4)w_3-I_6w_1}{\Delta}I_4-w_3\right]$$

$$+\frac{\pi}{2D}\left[\frac{(1+I_4)c_1-I_2c_3}{\Delta}I_6+\frac{(1+I_4)c_3-I_6c_1}{\Delta}I_4-c_3\right]$$

حال باجای گذاری دررابطه مربوط به μ_1 به رابطه زیر می‌رسیم:

$$r_1R+a_1A_1+b_1A_2=s_1 \tag{۲۸}$$

که در آن

$$r_1=i\lambda^4+\frac{\lambda}{D}\{(\lambda-1)L_3+\lambda DL_7\}\quad\frac{1}{D}(I_6q\quad I_4p)$$

$$a_1=i\lambda_1^{\,4}+\frac{\lambda_1}{D}\{(\lambda_1-1)L_{1,3}+\lambda_1DL_{1,7}\}+\frac{1}{D}(I_6q_1+I_4p_1)$$

$$b_1=-i\overline{\lambda}_1^{\,4}-\frac{\overline{\lambda}_1}{D}\{(\overline{\lambda}_1-1)L_{2,3}+\overline{\lambda}_1DL_{2,7}\}+\frac{1}{D}(I_6q_2+I_4p_2)$$

$$s_1=\mu_1+A_0\left[i\lambda^4+\frac{\lambda}{D}\{(\lambda-1)L_3+\lambda DL_7\}-\frac{1}{D}(I_6q+I_4p)\right]$$

$$-\left[\frac{(1+I_4)c_1-I_2c_3}{D\Delta}I_6+\frac{(1+I_4)c_3-I_6c_1}{D\Delta}I_4-\frac{1}{D}c_3\right]$$

و همچنین

$$p=\frac{(1+I_4)u_3-I_6u_1}{\Delta} \qquad (۲۹)$$

$$p_1=\frac{(1+I_4)v_3-I_6v_1}{\Delta} \qquad (۳۰)$$

$$p_2=\frac{(1+I_4)w_3-I_6w_1}{\Delta} \qquad (۳۱)$$

$$q=\frac{(1+I_4)u_1-I_2u_3}{\Delta} \qquad (۳۲)$$

$$q_1=\frac{(1+I_4)v_1-I_2v_3}{\Delta} \qquad (۳۳)$$

$$q_2=\frac{(1+I_4)w_1-I_2w_3}{\Delta} \qquad (۳۴)$$

که در آن

$$\Delta=(1+I_4)^2-I_2I_6 \qquad (۳۵)$$

از طرف دیگر از شرط (۷) نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,0)\to\mu_2 \qquad x\to 0^+$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}=\lambda^3A_0e^{-i\lambda x-\lambda y}+\lambda^3\operatorname{Re}^{i\lambda x-\lambda y}$$

$$+\lambda_1{}^3A_1e^{i\lambda_1x-\lambda_1y}+\overline{\lambda_1}^3A_2e^{-i\overline{\lambda_1}x-\overline{\lambda_1}y}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^2A(\xi)\left(-\xi^2(D\xi^4+1)\sin\xi y-\cos\xi y\right)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}e^{-\xi x}d\xi$$

حال قرار می‌دهیم $y=0$ و x را به صفر میل می‌دهیم.

$$\mu_2=\lambda^3A_0+\lambda^3R+\lambda_1{}^3A_1+\overline{\lambda_1}^3A_2$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^3A(\xi)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}d\xi$$

ابتدا مقدار انتگرال را محاسبه می‌کنیم، برای این منظور از رابطه (۱٤) بجای $\xi A(\xi)$ مقدارش را قرار می‌دهیم

$$\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi^3A(\xi)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}d\xi=\frac{\pi}{2D}\left[-D_1I_3-D_2I_5+J_2(F)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[-\frac{(1+I_4)J_3-I_6J_1}{(1+I_4)^2-I_2I_6}I_3-\frac{(1+I_4)J_1-I_2J_3}{(1+I_4)^2-I_2I_6}I_5+J_2(F)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[\frac{I_2I_5-(1+I_4)I_3}{(1+I_4)^2-I_2I_6}J_3+\frac{(1+I_4)I_5-I_3I_6}{(1+I_4)^2-I_2I_6}J_1+J_2(F)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}\left[-\frac{I_2I_5-(1+I_4)I_3}{\Delta}[(A_0-R)u_3+A_1v_3+A_2w_3+c_3]\right.$$

$$+\frac{(1+I_4)I_5-I_3I_6}{\Delta}[(A_0-R)u_1+A_1v_1+A_2w_1+c_1]$$

$$\left.-[(A_0-R)u_2+A_1v_2+A_2w_2+c_2]\right]$$

$$=\frac{\pi}{2D}(A_0-R)\left[-\frac{I_2I_5-(1+I_4)I_3}{\Delta}u_3+\frac{(1+I_4)I_5-I_3I_6}{\Delta}u_1-u_2\right]$$

$$+\frac{\pi}{2D}A_1\left[-\frac{I_2I_5-(1+I_4)I_3}{\Delta}v_3+\frac{(1+I_4)I_5-I_3I_6}{\Delta}v_1-v_2\right]$$

$$+\frac{\pi}{2D}A_2\left[-\frac{I_2I_5-(1+I_4)I_3}{\Delta}w_3+\frac{(1+I_4)I_5-I_3I_6}{\Delta}w_1-w_2\right]$$

$$+\frac{\pi}{2D}\left[-\frac{I_2I_5-(1+I_4)I_3}{\Delta}c_3+\frac{(1+I_4)I_5-I_3I_6}{\Delta}c_1-c_2\right]$$

حال با جای گذاری در رابطه مربوط به μ_2 به رابطه زیر می‌رسیم

$$r_2R+a_2A_1 \quad b_2A_2 \quad s_2 \qquad (۳۶)$$

که در آن

$$\begin{cases} r_2=\lambda^3-\frac{\lambda}{D}\{(\lambda-1)L_2+\lambda DL_6\}-\frac{1}{D}(I_5q+I_3p) \\ a_2=\lambda_1{}^3-\frac{\lambda_1}{D}\{(\lambda_1-1)L_{1,2}+\lambda_1DL_{1,6}\}-\frac{1}{D}(I_5q_1+I_3p_1) \\ b_2=\overline{\lambda_1}^3-\frac{\overline{\lambda_1}}{D}\{(\overline{\lambda_1}-1)L_{2,2}+\overline{\lambda_1}DL_{2,6}\}-\frac{1}{D}(I_5q_2+I_3p_2) \\ s_2=\mu_2+A_0\left[-\lambda^3-\frac{\lambda}{D}\{(\lambda-1)L_2+\lambda DL_6\}+\frac{1}{D}(I_5q+I_3p)\right] \\ +\left[\frac{(1+I_4)c_1-I_2c_3}{D\Delta}I_5+\frac{(1+I_4)c_3-I_6c_1}{D\Delta}I_3-\frac{1}{D}c_2\right] \end{cases}$$

از طرف دیگر از شرط (۱۱) داریم

$$\int_{y=0}^{\infty}f(y)h(y)dy=0$$

که با جایگذاری از روابط (۹) و (۱۳) به صورت زیر در می‌آید

$$0=\int_{y=0}^{\infty}[-u(y)-i\lambda A_0e^{-\lambda y}+iR\lambda e^{-\lambda y}+i\lambda_1A_1e^{-\lambda_1y}$$

$$-i\overline{\lambda_1}A_2e^{-\overline{\lambda_1}y}]\times c[\lambda_1\overline{\lambda_1}(\overline{\lambda_1}^2-\lambda_1^2)e^{-\lambda y}$$

$$+\lambda\overline{\lambda_1}(\lambda^2-\overline{\lambda_1}^2)e^{-\lambda_1y}+\lambda\lambda_1(\lambda_1^2-\lambda^2)e^{-\overline{\lambda_1}y}]dy$$

با ضرب کروشه‌ها و محاسبه انتگرالها خواهیم داشت

$$r_3R+a_3A_1 \quad b_3A_2 \quad s_3 \qquad (۳۷)$$

که در آن

$$r_3=(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\overline{\lambda_1}^2-\lambda_1{}^2)$$

$$+2\lambda^2\overline{\lambda_1}(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\lambda^2-\overline{\lambda_1}^2)$$

$$+2\lambda^2\lambda_1(\lambda+\lambda_1)(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\lambda_1{}^2-\lambda^2) \qquad (۳۸)$$

$$a_3 = 2\lambda_1^{\,2}\overline{\lambda_1}(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\overline{\lambda_1}^{\,2}-\lambda_1^{\,2}) + \overline{\lambda_1}\lambda(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\lambda^2-\overline{\lambda_1}^{\,2}) + 2\lambda\lambda_1^{\,2}(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1^{\,2}-\lambda^2) \qquad (۳۹)$$

$$b_3 = -\left[2\lambda_1\overline{\lambda_1}^{\,2}(\lambda+\lambda_1)(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\overline{\lambda_1}^{\,2}-\lambda_1^{\,2}) + \lambda\lambda_1(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1+\overline{\lambda_1})(\lambda_1^{\,2}-\lambda^2)\right] + 2\lambda\lambda_1^{\,2}(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda^2-\overline{\lambda_1}^{\,2}) \qquad (۴۰)$$

$$s_3 = A_0 r_3 - i(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\overline{\lambda_1})(\lambda_1+\overline{\lambda_1})\times \left[\lambda_1\overline{\lambda_1}(\overline{\lambda_1}^{\,2}-\lambda_1^2)\int_{y=0}^{\infty}u(y)e^{-\lambda y}dy + \lambda\overline{\lambda_1}(\lambda^2-\overline{\lambda_1}^{\,2})\times \int_{y=0}^{\infty}u(y)e^{-\lambda_1 y}dy - \lambda\lambda_1(\lambda_1^2-\lambda^2)\int_{y=0}^{\infty}u(y)e^{-\overline{\lambda_1}y}dy\right] \qquad (۴۱)$$

در آخر با حل دستگاه سه معادله سه مجهول زیر مقادیر ثابتهای R ، A_1 و A_2 تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} r_1 R + a_1 A_1 + b_1 A_2 = s_1 \\ r_2 R + a_2 A_1 + b_2 A_2 = s_2 \\ r_3 R + a_3 A_1 + b_3 A_2 = s_3 \end{cases} \qquad (۴۲)$$

لذا نتیجه می‌شود

$$R = \frac{s_3(a_1b_2-a_2b_1)-a_3(b_2s_1-b_1s_2)-b_3(a_1s_2-a_2s_1)}{r_3(a_1b_2-a_2b_1)-a_3(b_2r_1-b_1r_2)-b_3(a_1r_2-a_2r_1)}$$

$$A_1 = \frac{(b_2s_1-b_1s_2)+R(b_1r_2-b_2r_1)}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$A_2 = \frac{(a_1s_2-a_2s_1)+R(a_2r_1-a_1r_2)}{a_1b_2-a_2b_1}$$

با داشتن ثابتهای R ، A_1 و A_2 و محاسبه $F(\xi)$ و جای گذاری آن در رابطه (۱۹) مقدار $A(\xi)$ تعیین می‌شود و در نهایت با جای گذاری مقادیر محاسبه شده در رابطه (۸) تابع $\varphi(x,y)$ بدست می‌آید ،

$$\varphi(x,y) = A_0e^{-i\lambda x-\lambda y} + R\,e^{i\lambda x-\lambda y} + A_1e^{i\lambda_1 x-\lambda_1 y} + A_2e^{-i\overline{\lambda_1}x-\overline{\lambda_1}y} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{A(\xi)\left(\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right)}{\xi^2(1+D\xi^4)^2+1}e^{-\xi x}d\xi$$

$$A(\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi} - D_1 - D_2\xi^2$$

$$F(\xi) = \frac{-i\lambda(A_0-R)\xi\left[(\lambda-1)+\lambda D\xi^4\right]}{\xi^2+\lambda^2} + \frac{i\lambda_1A_1\xi\left[(\lambda_1-1)+\lambda_1D\xi^4\right]}{\xi^2+\lambda_1^2} - \frac{i\overline{\lambda_1}A_2\xi\left[(\overline{\lambda_1}-1)+\overline{\lambda_1}D\xi^4\right]}{\xi^2+\overline{\lambda_1}^{\,2}} - \int_0^{\infty}u(y)\left[\xi(D\xi^4+1)\cos\xi y-\sin\xi y\right]dy$$

در حالت خاص $A_0 = 1$ و $u(y) = 0$ یعنی در حالتیکه مانع نشان دهنده یک دیوار قائم باشد نتایج را در مورد ضریب بازتاب امواج سطحی ایجاد شده در مقابل صخره قائم بررسی می‌کنیم نتایج بدست آمده توسط نرم افزار Maple را در زیر آورده‌ایم. با مشاهده نتایج خواهیم دید که صرفنظر از خطای مرتکب شده مقدار ضریب بازتاب $|R|$ برابر یک خواهد بود که این نتیجه هم با توجه به قانون بقای جرم و انرژی قابل پیشگویی است .

جدول(۱): $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = 0$

D	R	|R|
0.01	0.9944024462-0.1284168332I	1.002660016
0.02	0.9951093554-0.1493414171I	1.006253193
0.03	0.9970581147-0.1598366169I	1.009788408
0.04	0.9995613701-0.1659031855I	1.013235806
0.05	1.002349872-0.1695575607I	1.016589904

جدول(۲): $\mu_2 = 0.4$, $\mu_1 = 0.2$

D	R	|R|
0.01	0.9932859617-0.1218549442I	1.000732546
0.02	0.9925900939-0.1425432733I	1.002772995
0.03	0.9930834329-0.1534705566I	1.004872090
0.04	0.9940994962-0.1602915541I	1.006939517
0.05	0.9953796842-0.1648968711I	1.008945833

جدول(۳): $\mu_2 = 0.7$, $\mu_1 = 0.3$

D	R	|R|
0.01	0.9931140365-0.1119717339I	0.999406403
0.02	0.9917173111-0.1312594325I	1.000366065
0.03	0.9914036547-0.1416367376I	1.001470006
0.04	0.9915561043-0.1482954210I	1.002584181
0.05	0.9919368965-0.1529659025I	1.003661982

۳- مراجع

[۱] A.Chakrabarti, D.S.Ahluwalia, S.R.Manam; "*Surface water waves involving a vertical barrier in the presence of an ice cover*", International Journal of Engineering Science 41, 1145-1162, 2003.

[۲] R.V.Goldshtein, A.V.Marchenkov, "*The diffraction of plane gravitational waves by the edge of an ice cover*", Prikl.Math.Mech. (PMM) USSR53, 731-736, 1989.

[۳] M.R.Speigel, *Theory and problems of Laplace Transforms*, Schum's Outline Series, 1991.

[٤] A.D.Polyanin, A.V.Manzhirov, *Handbook of integral equation*, CRC press, 1998.

[٥] رضوانی، محمد علی؛ شمس، بیژن؛ **آنالیز فوریه**، ۱۳۶۹.

[٦] باقری، محمد؛ **واژگان ریاضی** ، انتشارات فرهنگان،۱۳۷۷.