یک الگوریتم تصویرافاین سریع بر پایه پیگیری تطبیقی با تنظیم قسمتی ازبردار پارامترها

محمد شمس اسفندآبادی[i]؛ علی محلوجی فر[ii]؛ محمدباقرمنهاج[iii]؛ سیدعارف هادئی[iv]

چکیده

فیلترهای سازگار از ابزارهای مهم در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال‌های دیجیتال به شمارمی‌روند. در این مقاله، الگوریتم جدیدی با نام *الگوریتم تصویرافاین سریع* برای فیلترهای سازگار؛ که مبتنی بر پیگیری تطبیقی کار می‌کند، ارائه شده است. دراین الگوریتم در هر تکرار، یکی از ضرائب فیلتر به صورت بهینه انتخاب و اصلاح می‌شود. یکی دیگر از مشخصه های این الگوریتم آن است که در هر لحظه می‌توان تعداد تکرار پیگیری تطبیقی را یک بار یا بیشتر اجرا کرد. بنابراین می توان بین سرعت همگرایی و پیچیدگی محاسبات تعادل مناسبی برقرار کرد. همچنین عملکرد الگوریتم ارائه شده درحالت گذرا و ماندگار، بر پایه رابطه بقای انرژی در فیلترهای سازگار، بررسی شدو یک رابطه جامع برای متوسط مربع خطا درحالت ماندگاراستخراج گردید. نتایج شبیه سازی روی شناسایی سیستم نشان می‌دهد که این روش نسبت به الگوریتم های کلاسیک فیلترهای سازگار، عملکرد مطلوبی ازنظر سرعت همگرایی و همچنین متوسط مربع خطای حالت ماندگاردارد.

کلمات کلیدی

فیلتر سازگار، پیگیری تطبیقی، رابطه بقای انرژی، شناسایی سیستم، سرعت همگرایی، پیچیدگی محاسبات، متوسط مربع خطای حالت ماندگار.

A Fast Affine Projection Algorithm Based on Matching Pursuit with Partial Parameters Adjustment

Mohammad Shams Esfand Abadi; Ali Mahlooji Far; Mohammad Bagher Menhaj; Sayed Aref Hadei

ABSTRACT

Adaptive filtering is an indispensable tool in a large number of signal processing applications. In this paper, a new adaptive filtering algorithm named *fast affine projection algorithm* based on matching pursuits (MP) is presented. In this algorithm, one of the filter coefficients is suitably selected and updated iteratively. Another characteristic of the proposed algorithm is employing one or more MP-iterations at each time instant, in order to fulfill a suitable tradeoff between convergence rate and computational complexity. The Performance of the proposed algorithm is fully studied through the energy conservation analysis used in adaptive filters and a general expression for the steady-state mean square error is derived. The simulation results highlight better the out-performance of the proposed algorithm in terms of both convergence rate and steady-state mean square error.

KEYWORDS

Adaptive filter, Matching pursuit, Energy conservation, System identification, Convergence rate, Computational complexity, Steady-state mean square error.

[i] دانشجوی دکتری دانشگاه تربیت مدرس؛ بخش برق؛ گروه مهندسی پزشکی

[ii] استادیاردانشگاه تربیت مدرس؛ بخش برق؛ گروه مهندسی پزشکی

[iii] استاددانشگاه صنعتی امیرکبیر؛ بخش برق؛ گروه کنترل

[iv] دانشجوی کارشناسی دانشگاه شهید رجایی؛ بخش برق؛ گروه قدرت

۱- مقدمه

ازفیلترهای سازگار[۱] نزدیک به چهار دهه است که به عنوان یک ابزار ضروری در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال استفاده می‌شود، به طوری که هم اکنون نیز یکی از روشهای تکامل یافته در زمینه پردازش سیگنال‌های دیجیتال از نظر پایه‌های تئوری است. کاربردهایی نظیر ترازگرکانال[۲]، حذف اکو[۳]، حذف نویز[۴]، بهبود سیگنال[۵]، شناسایی سیستم[۶]، و پیش بینی کننده خطی[۷] نمونه هایی از تنوع کاربرد فیلترهای سازگار هستند. فیلترسازگار یک وسیله محاسباتی است که به صورت یک الگوریتم تکراری، برای مدل کردن رابطه بین دو سیگنال در زمان واقعی[۸]، تلاش می‌کند. در طول چهل سال گذشته الگوریتم‌های متعددی برای فیلترهای سازگار پیشنهاد شده اند که در بین آنها الگوریتم *حداقل میانگین مربعات*[۹]، *حداقل میانگین مربعات نرمالیزه شده*[۱۰]، *حداقل مربعات بازگشتی*[۱۱]، و *الگوریتم های تصویرافاین*[۱۲] جزو مهم ترین و مشهورترین الگوریتم ها محسوب می‌شوند [۱]-[۶]. فیلترهای سازگار با یک الگوریتم تکراری سعی درحل *معادله وینر- هاف*[۱۳] دارند. این الگوریتم ها بر پایه روش‌های با شیب تصادفی[۱۴] عمل می‌کنند. دراین روش‌ها با جایگزینی تقریب‌های مناسب درالگوریتم های تندترین شیب[۱۵]، الگوریتم‌های متنوعی با درجات محاسباتی وخواص عملکردی مختلف محقق می‌شوند.

الگوریتم های با شیب تصادفی حداقل دو مزیت دارند:

۱- به مشخصه های واقعی آماری سیگنال[۱۶]؛ که در الگوریتم تندترین شیب مورد نیاز است، نیازی نخواهد بود و در عمل نیزاین مقادیربندرت وجودخواهندداشت. روشهای با شیب تصادفی دارای مکانیزم *یادگیری* هستند؛ به طوری که آنها را قادر به تخمین مشخصه های آماری موردنیازقادرمی‌سازد.

۲- این روش ها مکانیزم *ردیابی* دارند که آنها را در ردیابی تغییرات درمشخصه های آماری سیگنال توانمندمی‌کند.

ترکیب دو توانایی یادگیری و ردیابی، دلایل اصلی گسترش استفاده از روشهای با شیب تصادفی (و در ادامه فیلترهای سازگار) است.

الگوریتم حداقل میانگین مربعات از جنبه‌های مختلف به عنوان منشأ تئوری فیلترهای سازگار شناخته می شود. این الگوریتم را Widrow و Hoff در سال ۱۹۶۰ پیشنهاد کردند[۷]. تعداد کمی ازالگوریتم ها از نظر تئوری های فیلترینگ و تخمین تا این حد مو فقیت و گسترش همه جانبه پیدا کرده اند. در الگوریتم LMS مقادیر واقعی ماتریس خود همبستگی[۱۷] و بردار همبستگی متقابل[۱۸] با مقادیر لحظه‌ای درالگوریتم تندترین شیب جایگزین می شوند. ازویژگی های مهم این الگوریتم پیچیدگی محاسباتی[۱۹](حجم محاسباتی) پایین آن است؛ اما سرعت پایین همگرایی[۲۰] این الگوریتم، بویژه هنگامی که سیگنال ورودی رنگی باشد، از جمله مشکلات این الگوریتم است. برای کاهش این مشکل، فیلتر NLMS را Nagoma و Noda [۸] و Albert وGardner [۹] به طور مستقل پیشنهاد کردند؛ گرچه به نظر می رسد اصطلاحات واقعی NLMS به Bitmead و Anderson [۱۰] برمی‌گردد. درالگوریتم NLMS از الگوریتم نیوتن استفاده شده است و مانند الگوریتم LMS، مقادیر واقعی ماتریس خود همبستگی و بردار همبستگی متقابل با مقادیر لحظه ای جایگزین می شوند. اگرچه الگوریتم NLMS نسبت به LMS سرعت همگرایی بالاتردارد؛ اما پیچیدگی محاسباتی بالاتری نیز دارد. گرچه LMS و NLMS به علت سادگی محاسبات، کاربرد وسیعی دارند؛ اما هنگامی که سیگنال ورودی رنگی باشد، این الگوریتم ها سرعت همگرایی پایینی خواهند داشت. برای رفع این مشکل Ozeki و Umeda [۱۱] الگوریتم AP راپیشنهاد دادند. دراین الگوریتم مشخصه های آماری سیگنال با تقریب های بهتری جایگزین می شوند. با وجود اینکه این عمل باعث افزایش سرعت همگرایی خواهدشد، اما پیچیدگی محاسباتی را بالا خواهد برد. برای رفع این مشکل انواع مختلف APA پیشنهاد شدند؛ مانند Partial-Rank Algorithm (PRA) به وسیله Kratzer و Morgan [۱۲] و Binormalized Data-Reusing LMS به وسیله Campos و Diniz [۱۳]، [۱۴]. آخرین و کامل ترین بررسی و مطالعه روی خانواده APA را Shin و Sayed انجام داده اند [۱۵]، [۱۶]. دربین الگوریتم‌های فیلترهای سازگار، الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی بالاترین سرعت همگرایی را دارد. اگر چه در این الگوریتم از تقریب های دقیق تری برای ماتریس خودهمبستگی و بردار همبستگی متقابل استفاده می شود؛ اما یکی از مشکلات این الگوریتم پیچیدگی محاسباتی بالای آن است. استفاده از الگوریتمی که عملکرد قابل مقایسه ای با الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی و همچنین پیچیدگی محاسباتی پایین تری نسبت به الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی داشته باشد، می‌تواند بسیار مفید باشد. دراین مقاله الگوریتم جدیدی برای فیلترهای سازگار با نام الگوریتم تصویرافاین سریع ارائه می‌شود. این الگوریتم مبتنی بر پیگیری تطبیقی[۲۱] [۱۷]- [۲۱] است؛ به طوری که در هر تکرار، یکی از ضرائب فیلتر به صورت بهینه انتخاب و اصلاح می شود. یکی دیگر از مشخصه های این الگوریتم آن است که در هر لحظه می‌توان تعداد تکرار پیگیری تطبیقی را یک بار یا بیشتر انجام داد؛ بنابراین می‌توان بین سرعت همگرایی و پیچیدگی محاسبات تعادل مناسبی را برقرار کرد. الگوریتم ارائه

شده عملکرد قابل مقایسه‌ای با الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی دارد و از نظر محاسباتی نسبت به این الگوریتم ساده تر است. موفقیت فیلترهای سازگار در مکانیزم یادگیری، با بررسی عملکرد فیلتر در حالت ماندگار و گذرا بررسی می شود. بررسی عملکرد حالت ماندگار نشان می دهد که یک فیلتر سازگار چگونه مشخصه‌های آماری سیگنال را در زمان کافی یاد می گیرد. بررسی عملکرد حالت گذرا نشان می‌دهد که یک فیلتر سازگار با چه سرعتی به تغییرات در خواص آماری سیگنال تنظیم می‌شود. به همین دلیل، مطالعه عملکرد فیلترهای سازگار در حالت ماندگار و همچنین حالت گذرا، بسیار مهم و اساسی است. در میان روش های بررسی عملکرد فیلترهای سازگار، استفاده ازرابطه بقای انرژی، در مقایسه با دیگرروشها دارای دقت مناسبی است. رابطه بقای انرژی را ابتدا Sayed و Rupp [۲۲]، [۲۳] ارائه کردند. آنها نشان دادند که چگونه رابطه بقای انرژی می‌تواند برای مطالعه عملکرد متوسط مربع خطای ماندگار استفاده شود. درمقاله های ارائه شده توسط Yousef و Sayed [۲۴]- [۲۶]، رابطه واریانس ازرابطه بقای انرژی استخراج شد. عملکرد الگوریتم حداقل میانگین مربعات نرمالیزه شده به وسیله رابطه بقای انرژی را نیز Naffouri و Sayed انجام دادند[۲۷]. مقاله اخیر Shin و Sayed نیز، عملکرد حالت ماندگار خانواده APA را با استفاده ازرابطه بقای انرژی بررسی می کند [۱۵]، [۱۶]. همچنین Husoy و Abadi یک قالب واحد برای بررسی عملکرد گذرای فیلترهای سازگار بر پایه رابطه بقای انرژی ارائه دادند[۲۸]. دراین روش، نیاز به فرض یک مدل خاص درسیگنال ورودی؛ که یکی از ایرادات روش های گذشته بود، رفع می‌شود. بررسی عملکرد الگوریتم ارائه شده دراین مقاله نیز در حالت ماندگار و گذرا بر پایه رابطه بقای انرژی است.

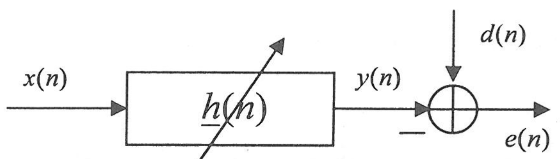
در قسمت بعدی این مقاله، پس از بیان مسأله فیلترهای سازگار، الگوریتم تصویرافاین سریع ارائه و محاسبات اصلی آن بیان می شود. همچنین در ادامه نشان خواهیم داد که این الگوریتم می تواند بصورت بهینه توسعه یابد. درقسمت چهارم، عملکرد الگوریتم تصویرافاین سریع برپایه رابطه بقای انرژی درحالت گذرا و ماندگار بررسی ورابطه متوسط مربع خطای حالت ماندگار در این الگوریتم محاسبه شده است. درقسمت بعد، نتایج شبیه سازی الگوریتم تصویرافاین سریع روی شناسایی سیستم و مقایسه عملکرد آن با دیگر الگوریتم‌های کلاسیک فیلترهای سازگارحداقل میانگین مربعات، حداقل میانگین مربعات نرمالیزه شده، الگوریتم تصویرافاین و حداقل مربعات بازگشتی، ارائه گردیده است و قسمت آخر شامل نتیجه گیری و جمع بندی است. درطول مقاله از عملگرهای ریاضی مطابق با جدول (۱) استفاده می‌شود.

جدول (۱): عملگرهای ریاضی استفاده شده درطول مقاله

$\lvert \cdot \rvert$	اندازه یک عدداسکالر
$\lVert \cdot \rVert$	اندازه اقلیدسی یک بردار
$\lVert \underline{t} \rVert_{\Sigma}^2$	اندازه اقلیدسی وزندار یک بردارستونی که بصورت $\underline{t}^T \Sigma \underline{t}$ تعریف می شود.
$Tr(.)$	مجموع عناصرروی قطراصلی یک ماتریس
$()^T$	ترانهاده یک بردار یا ماتریس
$E\{.\}$	امیدریاضی
$A \otimes B$	ضرب کرونکر ماتریسهای A و B.
$<.,.>$	ضرب داخلی دوبردار
$vec(T)$	تبدیل ماتریس T با اندازه $M \times M$ به یک بردارستونی $\underline{t}$ با اندازه $M^2 \times 1$، با قراردادن پشت سر هم ستونهای ماتریس T
$vec(\underline{t})$	تبدیل یک بردارستونی $\underline{t}$ با اندازه $M^2 \times 1$ به یک ماتریس T با اندازه $M \times M$.

۲- مسأله فیلترهای سازگار

بسیاری از مسائل پردازش سیگنال که در کاربردهای مختلف با آنها روبروهستیم می توانند در قالب شکل (۱) بیان شوند. نمونه‌ای ازچنین کاربردی در شناسایی سیستم، پیش بینی کننده خطی، و حذف اکو می‌باشد. دراین شکل $x(n)$ نمونه سیگنال ورودی درزمان لحظه ای n، $\underline{h}(n)$ ضرایب فیلتر، $y(n)$ خروجی فیلتر، $d(n)$ نمونه سیگنال مطلوب و $e(n)$ خطای خروجی می‌باشد.



شکل (۱): ساختارکلی یک فیلترسازگار

فیلتربا ضرایب $\underline{h}$؛ که $E\{e^2(n)\}$ را در محیط ایستان حداقل می کند، فیلتر وینر نامیده می شود. درفیلترهای متغیربازمان به ضرایب فیلتر $\underline{h}$ اجازه داده می‌شود تا با زمان تغییر کنند که به تحقق فیلترهای سازگار منجر می شود. ضرایب فیلتررا به صورت بردار $\underline{h}(n)$ با اندازه $M \times 1$ نشان می‌دهیم، به طوری که n منطبق بر زمان لحظه‌ای نمونه سیگنال ورودی $x(n)$ است. با توجه به شکل (۱)، هدف هر فیلتر سازگار، تخمین سیگنال مطلوب $d(n)$ با استفاده از فیلتر متغیر با زمان $\underline{h}(n) = [h_0(n), h_1(n), \dots, h_{M-1}(n)]^T$ روی سیگنال ورودی $x(n)$ است. درفیلترهای سازگارکلاسیک نظیر حداقل میانگین مربعات، حداقل میانگین مربعات نرمالیزه شده، حداقل مربعات بازگشتی و الگوریتم تصویرافاین، در هر تکرار، تمامی وزن ها اصلاح می شوند؛ اما در الگوریتم ارائه شده در قسمت بعد، یکی از

ضرایب به طور بهینه انتخاب واصلاح می‌گردد. الگوریتم تصویر افاین سریع بر پایه الگوریتم پیگیری تطبیقی کارمی‌کند. در این شیوه، ابتدا باید بهترین ضریب برای اصلاح مشخص و سپس مقدار اصلاح شده برای این ضریب فیلتر محاسبه شود. همچنین می‌توان این مرحله را برای هر نمونه سیگنال جدید، با یک پیگیری تطبیقی یا بیشتر اجرا کرد، به طوری که تعادل مناسبی بین سرعت همگرایی و پیچیدگی محاسبات برقرار شود. الگوریتم ارائه شده، حتی فقط با یک تکرار پیگیری تطبیقی برای هر نمونه، عملکرد مناسبی خواهد داشت. همچنین با تکرار بیشتر پیگیری تطبیقی برای هر نمونه سیگنال، محاسبات اضافه شده، زیاد نخواهد بود.

۳- الگوریتم تصویرافاین سریع

با توجه به شکل (۱)، سیگنال خطای $e(n)$ را می‌توان به صورت رابطه (۱) بیان کرد:

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n)x(n-k) \quad (۱)$$

با بررسی نمونه های $n,\ldots,n-L+2,n-L+1$ به طوری که $L > M$ باشد، رابطه (۱) رامی توان به صورت رابطه (۲) نوشت:

$$\underline{e}(n) = \underline{d}(n) - X(n)\underline{h}(n) \quad (۲)$$

دراین رابطه، $\underline{e}(n)$ بردارسیگنال خطا و $\underline{d}(n)$ بردار نمونه سیگنال مطلوب با اندازه $L\times 1$ است.

$$\underline{d}(n) = [d(n), d(n-1), \ldots, d(n-L+1)]^T \quad (۳)$$

$$\underline{e}(n) = [e(n), e(n-1), \ldots, e(n-L+1)]^T \quad (۴)$$

همچنین $X(n)$، ماتریس $L\times M$ سیگنال ورودی است و به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$X(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-M+1) \\ x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(n-M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(n-L+1) & x(n-L) & \cdots & x(n-L-M+2) \end{bmatrix} \quad (۵)$$

ماتریس $X(n)$ را می توان به صورت زیر نیزنوشت:

$$X(n) = [\underline{x}_0(n), \underline{x}_1(n), \ldots, \underline{x}_{M-1}(n)] \quad (۶)$$

با توجه به رابطه (۶)، ستون های ماتریس $X(n)$ از رابطه (۷) حاصل می‌شوند:

$$\underline{x}_j(n) = [x(n-j), x(n-j-1), \ldots, x(n-j-L+1]^T \quad (۷)$$

مسأله فیلترهای وفقی را می‌توان با این هدف بیان کرد که ضرایب فیلتر $\underline{h}(n)$ درهرلحظه n اصلاح شود؛ به طوری که خطا تا حد امکان کوچک باشد. رابطه $X(n)\underline{h}(n)$ را می‌توان به صورت مجموع وزن هایی از ستون های $X(n)$ نوشت، به طوری که $\underline{h}(n)$ عامل های وزن نامیده می‌شود:

$$X(n)\underline{h}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n)\underline{x}_k(n) \quad (۸)$$

یک الگوریتم کارآمد برای ساختن تقریبی از ترکیب خطی بردارها، از روی یک مجموعه داده، الگوریتم پیگیری تطبیقی است [۲۰]، [۲۱]. ما یک الگوریتم بازگشتي، برای ساختن تقریبی از $\underline{d}(n)$ با استفاده از ترکیب خطی ستون های $X(n)$ ارائه خواهیم داد.

۳-۱- توسعه الگوریتم تصویرافاین سریع

فرض کنیم که تقریبی برای $\underline{d}(n-1)$ در زمان $n-1$ از $X(n)\underline{h}(n-1)$ رادر اختیار داریم، خطای تقریبی پیشین در لحظه n ازرابطه (۹) حاصل می‌شود:

$$\underline{e}_0(n) = \underline{d}(n) - X(n)\underline{h}(n-1) \quad (۹)$$

برای تقریب بهتر؛ و با هدف اصلاح فقط یک ضریب در $\underline{h}(n-1)$، خطای جدیدی به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌کنیم :

$$\underline{e}_1(n) = \underline{d}(n) - X(n)\left(\underline{h}(n-1) + h^{update}_{j_0(n)}(n)\underline{u}_{j_0(n)}\right) \quad (۱۰)$$

توجه کنید که $j_0(n)$ شماره ضریبی از بردار فیلتراست که باید در صفرمین تکرار پیگیری تطبیقی MP ودرزمان n اصلاح شود. $\underline{u}_j$ یک بردار $M\times 1$ با مقدار یک در موقعیت j و صفر در بقیه مکان ها ست. بنابراین با توجه به قسمت دوم طرف راست رابطه (۱۰)، تنها یک ضریب از بردار ضرایب اصلاح می‌شود. هدف دیگر رابطه (۱۰)، رسیدن به تقریب بهتر برای سیگنال مطلوب است. بدین منظور با تصویر کردن بردار $\underline{e}_0(n)$ روی ستون های ماتریس $X(n)$، و انتخاب بزرگ‌ترین مقدار، مناسب ترین تقریب و در نتیجه مناسب ترین ضریب را برای اصلاح انتخاب می‌کنیم. بنابراین $j_0(n)$ شماره ستونی از $X(n)$ است که $\underline{e}_0(n)$ روی آن ستون دارای ماکزیمم تصویرباشد، یا به عبارت دیگر:

$$j_0(n) = \arg\max_j \frac{\left|< \underline{e}_0(n), \underline{x}_j(n) >\right|}{\left\|\underline{x}_j(n)\right\|} \quad (۱۱)$$

با تعیین شاخص $j_0(n)$، ضریب فیلتر با رابطه (۱۲) اصلاح می‌شود:

$$h_{j_0(n)}(n) = h_{j_0(n)}(n-1) + h^{update}_{j_0(n)}(n) \quad (۱۲)$$

به طوری که $h^{update}_{j_0(n)}(n)$، اندازه تصویر $\underline{e}_0(n)$ روی بردار واحد، با جهت به دست آمده از $\underline{x}_{j_0(n)}(n)$ است و مقدار $h^{update}_{j_0(n)}(n)$ از رابطه (۱۳) حاصل می‌شود:

$$h^{update}_{j_0(n)}(n) = \frac{<\underline{e}_0(n), \underline{x}_{j_0(n)}(n)>}{\|\underline{x}_{j_0(n)}(n)\|^2} \qquad (۱۳)$$

بنابراین برای صفرمین تکرار MP، بردار فیلتر، مطابق با رابطه (۱۴) اصلاح می‌شود:

$$\underline{h}^0(n) = \underline{h}(n-1) + h^{update}_{j_0(n)}(n)\underline{u}_{j_0(n)} \qquad (۱۴)$$

نتیجه خطای رابطه (۱۰)، می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\underline{e}_1(n) = \underline{d}(n) - X(n)\underline{h}^0(n) \qquad (۱۵)$$

اگر بخواهیم بیشتر از یک تکرار MP در زمان n داشته باشیم، بایستی $\underline{e}_1(n)$ را به جای $\underline{e}_0(n)$ قرار دهیم. این عمل می‌تواند چندین بار به طور دلخواه (MP بار) انجام شود.

$$h_{j_0(n)}(n), h_{j_1(n)}(n), \ldots, h_{j_{MP-1}(n)}(n) \qquad (۱۶)$$

شایان ذکراست اگر $MP > 2$ باشد، این امکان وجود دارد که یکی از ضرایب فیلتر در زمان معین n بیشتر از یک بار اصلاح شود. روند توصیف شده دربالا بر پایه استفاده از الگوریتم پیگیری تطبیقی روی مجموعه‌ای از بردارهای به دست آمده از ستون‌های $X(n)$، به منظور ایجاد یک تقریب برای $\underline{d}(n)$ منطبق است[۲۰]. روندکلی الگوریتم تصویرافاین سریع درزیرآمده است:

FOR $n = 0,1,\ldots$ **DO**

$\underline{e}(n) = \underline{d}(n) - X(n)\underline{h}(n-1)$

FOR $i = 0,1,\ldots, MP-1$ **DO**

$$j_i(n) = \arg\max_j \frac{|\underline{e}^T(n)\underline{x}_j(n)|}{\|\underline{x}_j(n)\|}, \quad j = 0,1,\ldots, M-1$$

$$h^{update}_{j_i(n)}(n) = \frac{\underline{e}^T(n)\underline{x}_{j_i(n)}(n)}{\|\underline{x}_{j_i(n)}(n)\|^2}$$

$$h_{j_i(n)}(n) = h_{j_i(n)}(n-1) + h^{update}_{j_i(n)}(n)$$

$$\underline{e}(n) = \underline{e}(n) - h^{update}_{j_i(n)}(n)\underline{x}_{j_i(n)}(n)$$

END FOR

END FOR

روابط (۱۱) و (۱۳) را می‌توان با استفاده از رابطه (۱۰) به صورت زیر بیان کرد:

$$j_0(n) = \arg\max_j \frac{1}{\|\underline{x}_j(n)\|} \Big| <\underline{d}(n), \underline{x}_j(n)> - \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1) <\underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n)> \Big| \qquad (۱۷)$$

و

$$h^{update}_{j_0(n)}(n) = \frac{1}{\|\underline{x}_{j_0(n)}(n)\|^2}\Big\{ <\underline{d}(n), \underline{x}_{j_0(n)}(n)> - \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1) <\underline{x}_k(n), \underline{x}_{j_0(n)}(n)>\Big\} \qquad (۱۸)$$

دراین روابط، اگر یک ضریب اصلاح شود، یک تکرار MP برای هر نمونه سیگنال جدید انجام می‌شود. معادله های (۱۸) و (۱۹) را می‌توان برای تکرارهایی که $i > 0$ (تکرار MP بیشتر از یک) و درزمان لحظه ای n، به صورت زیر بیان کرد:

$$j_i(n) = \arg\max_j \frac{1}{\|\underline{x}_j(n)\|} \Big| <\underline{d}(n), \underline{x}_j(n)> - \sum_{k=0}^{M-1} h_k^{i-1}(n-1) <\underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n)> \Big| \qquad (۱۹)$$

و

$$h^{update}_{j_i(n)}(n) = \frac{1}{\|\underline{x}_{j_i(n)}(n)\|^2}\Big\{ <\underline{d}(n), \underline{x}_{j_i(n)}(n)> - \sum_{k=0}^{M-1} h_k^{(i-1)}(n-1) <\underline{x}_k(n), \underline{x}_{j_i(n)}(n)>\Big\} \qquad (۲۰)$$

ازاین تساوی ها روشن می‌شود که برخی ازروابط فقط به n بستگی دارند. به طوری که تنها یکبار برای هر n محاسبه می شوند و به صورت تغییر نیافته در همه تکرارهای MP در زمان n استفاده می شوند. برخی روابط نیز به n و شاخص MP بستگی دارند و بایستی برای هر تکرار MP اصلاح شوند. اگربتوانیم اصلاح در تکرار n را به تکرار 0 ارتباط دهیم، رابطه به دست آمده یک رابطه با ارزش و بهینه خواهد بود.

از روابط (۱۷) و (۱۸) مشخص است که ضرب داخلی $<\underline{d}(n), \underline{x}_j(n)>$ و $<\underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n)>$ نقش مهم و کلیدی در محاسبات الگوریتم ایفا می‌کنند. این مقادیر را می‌توان با رابطه های بازگشتی زیرمحاسبه کرد:

$$<\underline{d}(n), \underline{x}_j(n)> = <\underline{d}(n-1), \underline{x}_j(n-1)> + d(n)x(n-j) - d(n-L)x(n-j-L) \qquad (۲۱)$$

و

$$<\underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n)> = <\underline{x}_k(n-1), \underline{x}_j(n-1)> + x(n-k)x(n-j) - x(n-k-L)x(n-j-L) \qquad (۲۲)$$

در بخش بعد به توسعه بهینه الگوریتم تصویرافاین سریع می پردازیم.

۳-۲- توسعه بهینه الگوریتم تصویرافاین سریع

الگوریتم کارآمد از لحاظ محاسباتی می تواند با استفاده از ارتباط سیگنال ورودی درتکرارهای مختلف با یکدیگر حاصل شود. در این قسمت روابط بازگشتی کارآمدی برای محاسبات انجام شده در این الگوریتم ارائه می‌شود. در این الگوریتم، عملگرهای ریاضی ضرب وتقسیم (حجم محاسبات) را در هر تکرار وبرای تمامی روابط محاسبه می‌کنیم.

۳-۲-۱ محاسبه $\|\underline{x}_j(n)\|^2$ و $<\underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n)>$

عبارات $\|\underline{x}_j(n)\|^2$ و $<\underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n)>$ در هردو رابطه (۱۷) و (۱۸) وجود دارند و باید در هر تکرار محاسبه شوند؛ اما هنگامی

که $k=j$ است، مقدار $<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$ برابر با مربع اندازه اقلیدسی؛ یعنی $\|\underline{x}_j(n)\|^2$ خواهد بود، بنابراین تنها به محاسبه $<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$ می‌پردازیم.

عبارت $<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$ برای $k=0,1,\dots,M-1$ و $j=0,1,\dots,M-1$، المان های ماتریس $X^T(n)X(n)$ است. از رابطه (۵) مشخص است که برای $j=1,2,\dots,M-1$ رابطه $\underline{x}_{j-1}(n-1)=\underline{x}_j(n)$ برقرار است. این بدان معناست که محاسبه $X^T(n)X(n)$ با دانستن $X^T(n-1)X(n-1)$، تنها به پیداکردن بالاترین سطر و اولین ستون این ماتریس نیاز است. المان‌های دیگر این ماتریس را می توان از $X^T(n-1)X(n-1)$ به دست آورد. همچنین ماتریس $X^T(n)X(n)$ متقارن است. بنابراین تنها به محاسبه اولین سطر یا ستون، برای تعیین $X^T(n)X(n)$ نیازداریم. اولین سطریا ستون ماتریس $X^T(n)X(n)$ را می‌توان به صورت $<\underline{x}_0(n),\underline{x}_j(n)>$ برای $j=0,1,\dots,M-1$ با رابطه بازگشتی زیر محاسبه کرد:

$$<\underline{x}_0(n),\underline{x}_j(n)>=<\underline{x}_0(n-1),\underline{x}_j(n-1)> + x(n)x(n-j)-x(n-L)x(n-j-L) \quad (۲۳)$$

با ذخیره $x(n-L)x(n-j-L)$؛ که در تکرار گذشته محاسبه شده است، نتیجه می گیریم که برای محاسبه ضرب داخلی ستون‌های ماتریس $X(n)$ تنها به یک ضرب برای هر j نیاز است و در مجموع به M ضرب نیاز داریم.

۳-۲-۲- محاسبه $\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$

درالگوریتم تصویرافاین سریع، در هرتکرارتنها یکی از ضرایب فیلتراصلاح می‌شود. فرض کنید درزمان $n-1$، ضریب $j_0(n-1)$ باید اصلاح شود. با رابطه (۲۴) می توان ضریب $j_0(n-1)$ ام فیلتر را اصلاح کرد:

$$h_j(n-1)=h_j(n-2)+\delta(j-j_0(n-1))h^{update}_{j_0(n-1)}(n-1) \quad (۲۴)$$

به طوری که $\delta(n)$ ضربه واحد می باشد. با توجه به رابطه بازگشتی (۲۲) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)> &= \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-2)<\underline{x}_k(n-1),\underline{x}_j(n-1)> \\ &+ h^{update}_{j_0(n-1)}(n-1)<\underline{x}_{j_0(n-1)}(n-1),\underline{x}_j(n-1)> \\ &+ x(n-j)\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)x(n-k) \\ &- x(n-j-L)\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)x(n-k-L)\end{aligned} \quad (۲۵)$$

با دقت در رابطه (۲۵) مشخص می‌شود که عبارت اول در سمت راست رابطه (۲۵) با $\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$ در زمان لحظه‌ای گذشته $n-1$ برابراست؛ بنابراین این عبارت از تکرار قبل به‌دست می آید. همچنین با دانستن مقادیر ضرب های داخلی $<\underline{x}_k(n-1),\underline{x}_j(n-1)>$ از تکرار گذشته، عبارت $h^{update}_{j_0(n-1)}(n-1)<\underline{x}_{j_0(n-1)}(n-1),\underline{x}_j(n-1)>$ به M ضرب (یک ضرب برای هر j) نیازدارد. دوعبارت دیگر در رابطه (۲۵) نیز به $4M$ ضرب نیازدارند.

۳-۲-۳- محاسبه $<\underline{d}(n),\underline{x}_j(n)>$

باتوجه به رابطه (۲۱)، مشخص می‌شود که با ذخیره کردن $d(n-L)x(n-j-L)$ در تکرار گذشته، تعداد ضرب مورد نیاز برابر با M در هر تکرار خواهد بود. یعنی تنها به محاسبه $d(n)x(n-j)$ برای $j=0,1,\dots,M-1$ نیازخواهیم داشت.

۳-۲-٤- جمع بندی

با اجرای یک تکرار MP در هر زمان n، محاسبات لازم در الگوریتم تصویرافاین سریع را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

۱- اصلاح $<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$ ودر نتیجه محاسبه $\|\underline{x}_j(n)\|^2$ (M ضرب).

۲- اصلاح $<\underline{d}(n),\underline{x}_j(n)>$ (M ضرب).

۳- اصلاح $\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>$ ($5M$ ضرب).

۴- محاسبه عبارت زیر؛

$$|<\underline{d}(n),\underline{x}_j(n)>-\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>|^2$$

برای $j=0,1,\dots,M-1$ و سپس تقسیم بر $\|\underline{x}_j(n)\|^2$ و نهایتا پیداکردن شاخص j با مشخص شدن بزرگ ترین مقدار. (M ضرب و تقسیم و $M-1$ مقایسه).

۵- اصلاح ضرایب فیلتر برطبق معادله (۱۸). (یک تقسیم)

بنابراین درمجموع برای هر تکرار به $8M$ ضرب و $M+1$ تقسیم نیاز خواهیم داشت. پیدا کردن شاخص j می تواند به صورت ساده تر و با محاسبات کمتری انجام شود. این عمل می تواند با استفاده ازرابطه (۲۶) به جای رابطه (۱۷) انجام گیرد:

$$j_0(n)=\arg\max_j |<\underline{d}(n),\underline{x}_j(n)> - \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n-1)<\underline{x}_k(n),\underline{x}_j(n)>| \quad (۲۶)$$

دراین رابطه از تقسیم عبارت بالا بر $\|\underline{x}_j(n)\|$ صرفنظرنموده و بنابراین به اندازه M ضرب و تقسیم از پیچیدگی محاسبات (حجم محاسبات) کاسته می‌شود. دلیل استفاده از این تقریب آن است که انرژی ستون ها، $\|\underline{x}_j(n)\|^2$، به طورآهسته با j تغییر

می کند. خطای ایجاد شده بافرض نادرست بودن این فرض نیز مهم نیست؛ زیرا ضرایب به طور سریع اصلاح می‌شوند. بنابراین با این فرض، پیچیدگی محاسبات در هر تکرار به $7M$ ضرب و $M-1$ مقایسه و یک تقسیم کاهش می‌یابد. تعداد عمل جمع نیز $10M-1$ درهرتکراراست.

۳-۲-۵- تکرار MP اضافی

تنها تفاوت روابط (۱۹) و (۲۰) با روابط (۱۷) و (۱۸) در عبارت (۲۷) است:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_k^{(i-1)}(n) < \underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n) > \qquad (۲۷)$$

اصلاح ضریب فیلتر برای تکرار $i > 0$ ام MP از رابطه (۲۸) حاصل می‌شود:

$$h^i_{j,(n)}(n) = h^{(i-1)}_{j,(n)}(n) + h^{update}_{j,(n)}(n) \qquad (۲۸)$$

بنابراین رابطه (۲۷) را می‌توان بصورت رابطه (۲۹) نوشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{M-1} h_k^{(i-1)}(n) < \underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n) > \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} h_k^{(i-2)}(n) < \underline{x}_k(n), \underline{x}_j(n) > \\ &+ h^{update}_{j_{(i-1)}}(n) < \underline{x}_{j_{(i-1)}}(n), \underline{x}_j(n) >\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

عبارت اول درسمت راست رابطه (۲۹) از تکرار $i-1$ ام قابل محاسبه است. بنابراین تنها به محاسبه عبارت دوم نیاز داریم. این عبارت نیاز به M ضرب و M جمع دارد. اصلاح ضریب فیلتر نیز به یک جمع و یک تقسیم برای هر تکرار MP نیاز خواهد داشت. به طورکلی، هر تکرار اضافی MP، به M ضرب، یک تقسیم، $2M+1$ جمع و $M-1$ مقایسه نیاز دارد.

٤- بررسی عملکردالگوریتم تصویرافاین سریع

تمرکز ما برای بررسی عملکرد الگوریتم تصویرافاین سریع روی تحلیل عملکرد گذرا خواهد بود که با توجه به آن می‌توان عملکرد حالت ماندگار الگوریتم را بررسی کرد. منحنی یادگیری یک فیلترسازگار به وسیله رشد زمانی مقادیر متوسط مربع خطای پیشین؛ یعنی $E\{e_a^2(n)\}$ تعریف می‌شود؛ به طوری که خطای پیشین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_a(n) = \underline{x}^T(n)[\underline{h}_t - \underline{h}(n-1)] \qquad (۳۰)$$

$\underline{h}_t$ بردار ناشناخته ضرایب فیلتر است که سعی داریم آن را تخمین بزنیم. با تعریف بردار خطای وزن به صورت $\underline{\varepsilon}(n) = \underline{h}_t - \underline{h}(n)$، خطای تخمین پیشین[۲۲] را می توان به صورت $e_a(n) = \underline{x}^T(n)\underline{\varepsilon}(n-1)$ نوشت. بنابراین متوسط مربع خطای پشین ازرابطه (۳۱) تعیین می‌شود:

$$E\{e_a^2(n)\} = E\{\underline{\varepsilon}^T(n-1)\underline{x}(n)\underline{x}^T(n)\underline{\varepsilon}(n-1)\} \qquad (۳۱)$$

بااستفاده از فرضیات استقلال[۲۳] [۵] و استفاده از تعریف اندازه اقلیدسی وزن دار[۲۴] خواهیم داشت:

$$E\{e_a^2(n)\} = E\{\underline{\varepsilon}^T(n-1)R_x\underline{\varepsilon}(n-1)\} = E\{\|\underline{\varepsilon}(n-1)\|^2_{R_x}\} \qquad (۳۲)$$

به طوری که $R_x = E\{\underline{x}(n)\underline{x}^T(n)\}$ ماتریس خود همبستگی سیگنال ورودی است؛ بنابراین برای یافتن منحنی یادگیری، به یافتن $E\{\|\underline{\varepsilon}(n-1)\|^2_{R_x}\}$ به صورت تابعی از n نیازاست. با نگاهی مجدد به رابطه (۱۴) متوجه خواهیم شد که می‌توان این رابطه را به رابطه‌ای که تمامی وزن ها درآن اصلاح می‌شوند، تبدیل کرد:

$$\underline{h}(n) = \underline{h}(n-1) + \frac{1}{\|\underline{x}_{j(n)}(n)\|^2} i_{j(n)} X^T(n)\underline{e}(n) \qquad (۳۳)$$

به طوری که:

$$\underline{e}(n) = \underline{d}(n) - X(n)\underline{h}(n-1) \qquad (۳۴)$$

بردارخطای خروجی خواهدبود. بردار سیگنال مطلوب نیز با در نظرگرفتن مدل داده به صورت خطی، از رابطه (۳۵) حاصل می‌شود:

$$\underline{d}(n) = X(n)\underline{h}_t + \underline{v}(n) \qquad (۳۵)$$

به طوری که $\underline{v}(n)$ بردار نویز اندازه گیری شده با اندازه $L\times 1$ است. باجایگذاری (۳۵) در (۳۴)، برای خطای خروجی به (۳۶) خواهیم رسید:

$$\underline{e}(n) = X(n)\underline{\varepsilon}(n-1) + \underline{v}(n) \qquad (۳۶)$$

که درآن، $j(n)$ آرگومان ضریبی از فیلتر است که باید اصلاح شود. همچنین $i_{j(n)}$ یک ماتریس $M\times M$ است که عنصر $(j(n), j(n))$ آن برابر یک و بقیه عناصرآن صفراست. بنابراین عبارت $i_{j(n)}X^T(n)$ یک ماتریس است که سطر $j(n)$ام آن همان سطر $j(n)$ام ماتریس $X^T(n)$ و بقیه سطرهای آن صفر می باشد. اگر در هر زمان لحظه ای، تکرار MP بیشتری داشتیم، $j(n)$ با $j_i(n)$ به طوری که $i = 0,1,\ldots, MP-1$ باشد، جایگزین می‌شود. همان‌طورکه درقسمت های قبل بیان شد، تکرار MP، تعداد اصلاح در هرزمان لحظه ای است.

باتعریف $C^{-1}(n) = \frac{1}{\|\underline{x}_{j(n)}(n)\|^2} i_{j(n)}$، رابطه (۳۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underline{h}(n) = \underline{h}(n-1) + C^{-1}(n)X^T(n)\underline{e}(n) \qquad (۳۷)$$

با توجه به تعریف بردارخطای وزن $\underline{\varepsilon}(n) = \underline{h}_t - \underline{h}(n)$، رابطه (۳۷) را می‌توان به صورت رابطه (۳۸) نوشت:

$$\underline{\varepsilon}(n) = \underline{\varepsilon}(n-1) - C^{-1}(n)X^T(n)\underline{e}(n) \qquad (۳۸)$$

باجایگذاری رابطه (۳٦) دررابطه (۳۸) خواهیم داشت:

$$\underline{\varepsilon}(n)=\underline{\varepsilon}(n-1)-C^{-1}(n)X^{T}(n)[X(n)\underline{\varepsilon}(n-1)+\underline{v}(n)]$$
$$=[I-C^{-1}(n)X^{T}(n)X(n)]\underline{\varepsilon}(n-1)-C^{-1}(n)X^{T}(n)\underline{v}(n) \quad (۳۹)$$

باگرفتن اندازه اقلیدسی وزن دار از رابطه (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned}\|\underline{\varepsilon}(n)\|_{\Sigma}^{2}&=\underline{\varepsilon}^{T}(n)\Sigma\,\underline{\varepsilon}(n)\\&=\{\underline{\varepsilon}^{T}(n-1)-\underline{\varepsilon}^{T}(n-1)X^{T}(n)X(n)C^{-T}(n)\\&\quad-\underline{v}^{T}(n)X(n)C^{-T}(n)\}\,\Sigma\\&\quad\{\underline{\varepsilon}(n-1)-C^{-1}(n)X^{T}(n)X(n)\underline{\varepsilon}(n-1)\\&\quad-C^{-1}(n)X^{T}(n)\underline{v}(n)\}\end{aligned} \quad (۴۰)$$

با تعریف $A(n)=X(n)C^{-T}(n)\Sigma C^{-1}(n)X^{T}(n)$، رابطه (۴۰) را می‌توان به صورت (۴۱) ساده کرد:

$$\begin{aligned}\|\underline{\varepsilon}(n)\|_{\Sigma}^{2}&=\|\underline{\varepsilon}(n-1)\|_{\Sigma'}^{2}+\underline{v}^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\\&\quad-\underline{\varepsilon}^{T}(n-1)\Sigma C^{-1}(n)X^{T}(n)\underline{v}(n)\\&\quad-\underline{v}^{T}(n)X(n)C^{-T}(n)\Sigma\,\underline{\varepsilon}(n-1)\\&\quad+\underline{\varepsilon}^{T}(n-1)X^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\\&\quad+\underline{v}^{T}(n)A(n)X(n)\underline{\varepsilon}(n-1)\end{aligned} \quad (۴۱)$$

به طوری که Σ' ازرابطه (۴۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\Sigma'&=\Sigma-\Sigma C^{-1}(n)X^{T}(n)X(n)-X^{T}(n)X(n)C^{-T}(n)\Sigma\\&\quad+X^{T}(n)A(n)X(n)\end{aligned} \quad (۴۲)$$

با فرض اینکه نویز $\underline{v}(n)$ مستقل و با توزیع یکسان[۲۵] و از نظر آماری از ماتریس سیگنال ورودی $X(n)$ مستقل است و صرفنظر ازوابستگی $\underline{\varepsilon}(n-1)$ به نویزهای گذشته، با گرفتن امیدریاضی ازرابطه (۴۱) خواهیم داشت:

$$E\{\|\underline{\varepsilon}(n)\|_{\Sigma}^{2}\}=E\{\|\underline{\varepsilon}(n-1)\|_{\Sigma'}^{2}\}+E\{\underline{v}^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\} \quad (۴۳)$$

با توجه به فرضی که برای نویز $\underline{v}(n)$ در نظر گرفته شده است، آشکاراست که باقیمانده عبارات در (۴۱) صفرخواهندشد. با تعریف $Q(n)=X^{T}(n)X(n)C^{-T}(n)$، عبارت Σ' دررابطه (۴۲) به صورت رابطه (۴۴) درخواهد آمد:

$$\Sigma'=\Sigma-\Sigma Q^{T}(n)-Q(n)\Sigma+Q(n)\Sigma Q^{T}(n) \quad (۴۴)$$

بااعمال عملگر $vec(.)$ به دوطرف (۴۴):

$$\begin{aligned}\sigma'&=vec\{\Sigma'\}=vec\{I\Sigma I\}-vec\{I\Sigma Q^{T}(n)\}\\&\quad-vec\{Q(n)\Sigma I\}+vec\{Q(n)\Sigma Q^{T}(n)\}\end{aligned} \quad (۴۵)$$

و با تعریف رابطه بین عملگر $vec(.)$ و ضرب کرونکر $\otimes$ به صورت $vec(X\Sigma Y)=\{Y^{T}\otimes X\}.vec\{\Sigma\}$، خواهیم داشت:

$$\sigma'=\{I-Q(n)\otimes I-I\otimes Q(n)+Q(n)\otimes Q(n)\}vec\{\Sigma\} \quad (۴۶)$$

باتعریف:

$$F=I-\{Q(n)\otimes I+I\otimes Q(n)\}+Q(n)\otimes Q(n) \quad (۴۷)$$

خواهیم داشت:

$$\sigma'=F\sigma \quad (۴۸)$$

همچنین با فرض اینکه سیگنال ورودی $X(n)$ مستقل و با توزیع یکسان است و $\underline{\varepsilon}(n-1)$ مستقل از $Q(n)$ می‌باشد، رابطه (۴۷) را می‌توان با تعریف $\Sigma'=E\{\Sigma'\}$، ساده تر کرد:

$$\begin{aligned}F=E\{F\}&=I-E\{Q(n)\}\otimes I+I\otimes E\{Q(n)\}\\&\quad+E\{Q(n)\otimes Q(n)\}\end{aligned} \quad (۴۹)$$

بنابراین رابطه (۴۳) بصورت رابطه (۵۰) بیان می‌شود:

$$E\{\|\underline{\varepsilon}(n)\|_{\sigma}^{2}\}=E\{\|\underline{\varepsilon}(n-1)\|_{F\sigma}^{2}\}+E\{\underline{v}^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\} \quad (۵۰)$$

عبارت $E\{\underline{v}^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\}$ را می توان به صورت زیر ساده کرد:

$$E\{\underline{v}^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\}=\sigma_{v}^{2}Tr(E\{A(n)\}) \quad (۵۱)$$

به طوری که σ_{v}^{2} واریانس نویز است. رابطه (۵۱) را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$E\{\underline{v}^{T}(n)A(n)\underline{v}(n)\}=\sigma_{v}^{2}Tr(E\{A(n)\})=\sigma_{v}^{2}\gamma^{T}\sigma \quad (۵۲)$$

به طوری که γ ازرابطه (۵۳) حاصل می‌شود.

$$\gamma=vec(E\{C^{-1}(n)X^{T}(n)X(n)C^{-T}(n)\}) \quad (۵۳)$$

با جایگزینی $\Sigma=R_{x}$ در (۵۰) قادرخواهیم بود که عملکرد گذرای الگوریتم تصویرافاین سریع را بررسی کنیم.

$$E\{\|\underline{\varepsilon}(n)\|_{r}^{2}\}=E\{\|\underline{\varepsilon}(-1)\|_{F^{n}r}^{2}\}+\sigma_{v}^{2}\gamma^{T}\{I+F+\ldots+F^{n-1}\}r \quad (۵۴)$$

به طوری که:

$$r=vec\{R_{x}\} \quad (۵۵)$$

است. مقدار متوسط مربع خطای اضافی[۲۶] در حالت ماندگار از رابطه (۵۶) حاصل می‌شود.

$$EMSE=\lim_{n\to\infty}E\{|e_{a}(n)|^{2}\} \quad (۵۶)$$

بنابراین باتوجه به (۳۲)، مقدار $EMSE$ با میل کردن n به سمت بی‌نهایت از (۵۷) حاصل می‌شود:

$$EMSE=\sigma_{v}^{2}\gamma^{T}\{I-F\}^{-1}r \quad (۵۷)$$

همچنین باتوجه به (۳۶) می‌دانیم:

$$e(n)=e_{a}(n)+v(n) \quad (۵۸)$$

بنابراین مقدار متوسط مربع خطا[۲۷] درحالت ماندگار از (۵۹) حاصل می شود:

$$MSE=\lim_{n\to\infty}E\{|e(n)|^{2}\}=EMSE+\sigma_{v}^{2} \quad (۵۹)$$

مقدار متوسط مربع انحراف ضرایب[۲۸] نیز با جایگذاری $r=vec\{I\}$ در (۵۷) از رابطه (۶۰) حاصل می شود.

$$MSD=\sigma_{v}^{2}\gamma^{T}\{I-F\}^{-1}vec\{I\} \quad (۶۰)$$

۵- نتایج شبیه سازی

برای بررسی عملکرد الگوریتم تصویرافاین سریع از ساختار شناسایی سیستم با فیلترهای سازگار نشان داده شده در شکل (۲) استفاده کرده ایم.

در این کاربرد، پاسخ ضربه سیستم ناشناخته را؛ که بایستی شناسایی شود، به صورت زیردرنظر می‌گیریم:

$$P(z) = 0.1483 + 0.2595z^{-1} - 0.0318z^{-2} - 0.1536z^{-3} - 0.2118z^{-4} + 0.1059z^{-5} + 0.5295z^{-6} + 0.7314z^{-7} \qquad (۶۱)$$

به طوری که:

$$P(0) = 0.1483, P(1) = 0.2595, P(2) = -0.0318,$$
$$P(3) = -0.1536, P(4) = -0.2118, P(5) = 0.1059$$
$$P(6) = 0.5295, P(7) = 0.7314$$

(۶۲)

درجه فیلترسازگاررا ۸، اندازه L را ۳۲ و واریانس نویز اضافه شده $v(n)$، برابر با $\sigma_v^2 = 10^{-3}$ درنظر گرفته شده است. همچنین عملکردفیلترسازگار، با دونوع ورودی آزمایش شده است:

۱-سیگنال ورودی $x(n)$، نویزسفید گوسی است.

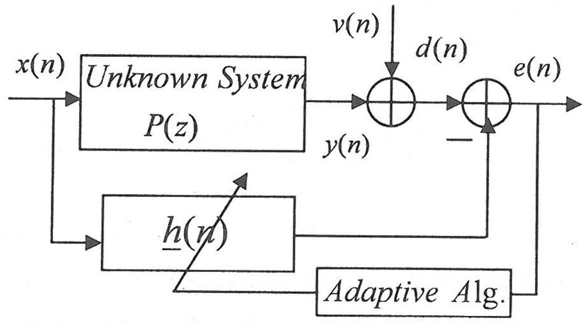
۲- سیگنال ورودی $x(n)$، نویزسفید گوسی است که از سیستم مرتبه اول (۶۳) عبورداده شده است. در این حالت، سیگنال خروجی، نویزگوسی رنگی خواهدبود.

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \qquad (۶۳)$$

نسبت سیگنال به نویز ازرابطه زیرحاصل می شود:

$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{E[y^2(n)]}{E[v^2(n)]}\right) \qquad (۶۴)$$

باتوجه به رابطه (۶۴) نسبت سیگنال به نویز در این آزمایش $SNR = 30dB$ خواهدبود. منحنی های یادگیری رسم شده در تمامی شبیه سازی ها با میانگین گیری از ۲۰۰ آزمایش رسم شده اند.



شکل (۲): ساختارکلی شناسایی سیستم توسط فیلترسازگار

شکل های (۳) و (۴) نتایج شبیه سازی با الگوریتم LMS و مقایسه آن با الگوریتم تصویرافاین سریع را نشان می دهد. در این شبیه سازی، منحنی های یادگیری الگوریتم LMS و تصویر افاین سریع برای ورودی نویز گوسی سفید و نویز گوسی رنگی ترسیم شده است. هرچند که برای ورودی نویزسفید، الگوریتم LMS عملکرد خوبی دارد اما برای ورودی نویز رنگی، سرعت پایین همگرایی دارد. این نتایج برای اندازه گام های مختلف نشان داده شده است. با افزایش اندازه گام، باوجود افزایش سرعت همگرایی، خطای ماندگار سیستم نیز افزایش می یابد. همان طور که نتایج شبیه سازی نشان می دهد، الگوریتم تضویر افاین سریع با یک پیگیری تطبیقی $MP = 1$، در مقایسه با الگوریتم LMS به ویژه هنگام ورودی نویزرنگی، سرعت همگرایی بالا و متوسط مربع خطای ماندگارپایینی دارد.

شکل های (۵) و (۶) نتایج شبیه سازی با الگوریتم NLMS برای اندازه گام های مختلف و مقایسه آن با الگوریتم تصویر افاین سریع رانشان می دهند. دراین الگوریتم نیز همانند الگوریتم LMS، عملکرد این فیلتر برای ورودی نویز سفیدورنگی بررسی شده است. همان طور که ازنتایج مشخص است، این الگوریتم علاوه براینکه سرعت همگرایی بالاتری بویژه هنگام ورودی نویزرنگی نسبت به الگوریتم LMS دارد، خطای ماندگار بالایی نیزدارد. با افزایش اندازه گام، سرعت همگرایی و خطای ماندگار الگوریتم افزایش می یابد. مقایسه منحنی های یادگیری الگوریتم NLMS با الگوریتم تصویرافاین سریع نشان می دهد که الگوریتم ارائه شده حتی با یک پیگیری تطبیقی، سرعت همگرایی بالا وخطای ماندگار کمتری می باشد.

شکل‌های (۷) و (۸) نتایج شبیه سازی با الگوریتم AP و مقایسه آن با الگوریتم تصویر افاین سریع با یک پیگیری تطبیقی را برای ورودی های نویز سفید و رنگی نشان می دهد. دراین نتایج، اندازه گام را ثابت درنظرگرفتیم و پارامتر دیگری به نام درجه الگوریتم AP، را تغییر دادیم[۱۶]. با افزایش درجه الگوریتم AP، علاوه برافزایش سرعت همگرایی خطای ماندگارنیز افزایش می یابد. درشکل (۸)، سرعت همگرایی الگوریتم تصویر افاین سریع با یک پیگیری تطبیقی کمتر ازالگوریتم AP با (K=4) است، درمقابل خطای ماندگار الگوریتم AP در مقایسه با الگوریتم تصویرافاین سریع، بیشتر است. همان طور که در ادامه شبیه سازی ها نشان داده خواهد شد (شکل ۱۱)، با افزایش تعداد پیگیری های تطبیقی می‌توان سرعت همگرایی الگوریتم تصویرافاین سریع راافزایش داد.

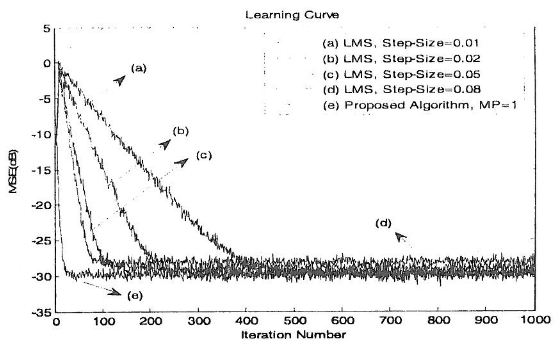
شکل های (۹) و (۱۰) نتایج شبیه سازی توسط الگوریتم RLS را برای ورودی های نویزسفید و رنگی و مقایسه آن با الگوریتم تصویر افاین سریع را نشان می دهد. همان طور که نتایج نشان می دهد الگوریتم RLS سرعت همگرایی بالا و نیز خطای ماندگار کمی دارد. برای ورودی نویز سفید، الگوریتم های RLS و تصویرافاین سریع عملکرد مشابهی دارند و برای ورودی

نویز رنگی، الگوریتم RLS سرعت همگرایی بالاتری دارد. همان طور که شکل‌های (۱۰) و (۱۱) نشان می دهند با افزایش تعداد پیگیری های تطبیقی، می توان به عملکردی قابل مقایسه با الگوریتم RLS نزدیک شد.

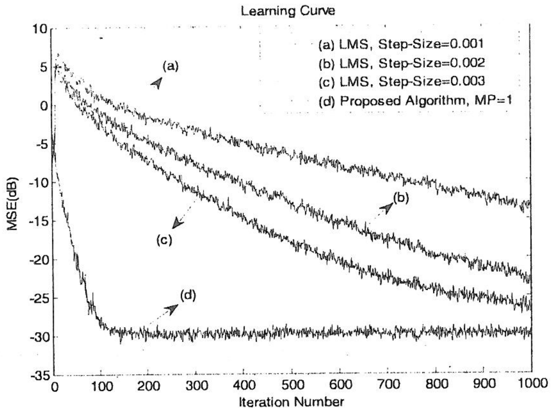
منحنی تغییرات ضرایب فیلتر درالگوریتم تصویرافاین سریع در شکل های (۱۲) تا (۱۵) و برای ورودی های نویزسفید و رنگی و با تعداد تکرار پیگیری های تطبیقی مختلف نمایش داده شده است. همان طور که مشخص است با افزایش تعداد پیگیری های تطبیقی، سرعت همگرایی وزن‌ها به مقادیر نهایی افزایش می یابد. نتایج تئوری منحنی یادگیری الگوریتم تصویر افاین سریع با رابطه بازگشتی (۵۴) در شکل های (۱۶) و (۱۷) نشان داده شده است. همانطور که ازنتایج پیداست توافق نتایج شبیه سازی با نتایج تئوری، سازگاری قابل قبولی دارند.

۶- نتیجه گیری

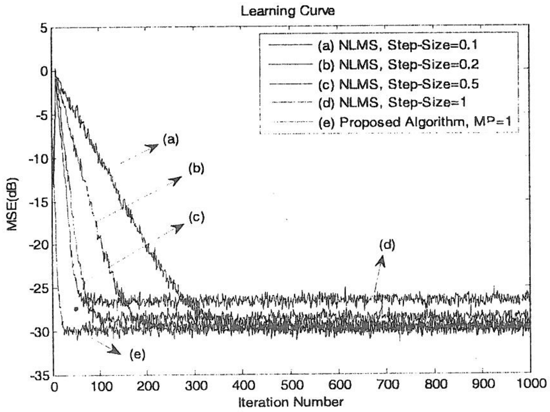
دراین مقاله، الگوریتم جدیدی برپایه الگوریتم پیگیری تطبیقی بانام الگوریتم تصویرافاین سریع ارائه شد. در این الگوریتم در هر تکرار، یکی از ضرائب فیلتربه صورت بهینه انتخاب و اصلاح می‌شود. یکی دیگر از مشخصه های این الگوریتم آن است که در هر لحظه می‌توان پیگیری تطبیقی را یک بار یا بیشتر تکرار کرد. بنابراین، می‌توان بین سرعت همگرایی و پیچیدگی محاسبات تعادل برقرارکرد. این الگوریتم سرعت همگرایی و توانایی ردیابی بالا دارد و همان طور که در نتایج شبیه سازی نشان داده شد، عملکردی قابل مقایسه با الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی را نیز داراست. عملکرد الگوریتم ارائه شده در حالت گذرا و ماندگار بر پایه رابطه بقای انرژی بررسی شد و یک رابطه جامع برای مقدار خطای ماندگاردر این الگوریتم ارائه شد. پیچیدگی محاسبات این الگوریتم به طور کامل بررسی گردیدو به طور بهینه توسعه داده شد. همان طور که نشان داده شد، می‌توان بین پیچیدگی محاسبات و سرعت همگرایی، تعادل مناسبی برقرارکرد.



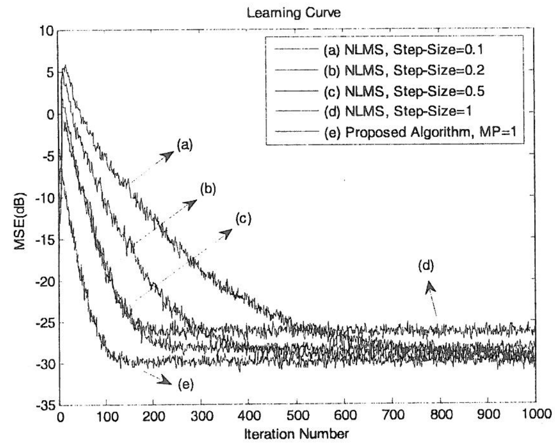
شکل (۳): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم LMS برای اندازه گام های مختلف و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی سفید)



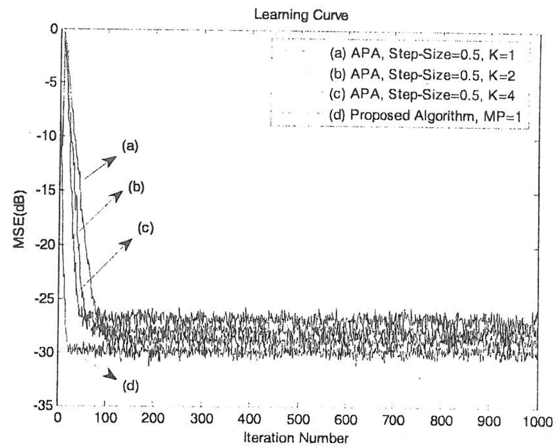
شکل (۴): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم LMS برای اندازه گام های مختلف و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی رنگی)



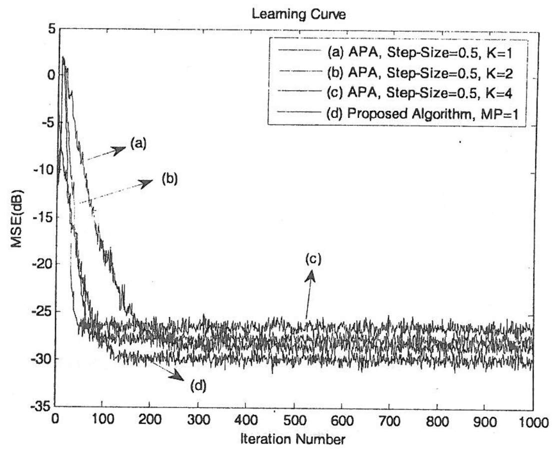
شکل (۵): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم NLMS برای اندازه گام های مختلف و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی سفید)



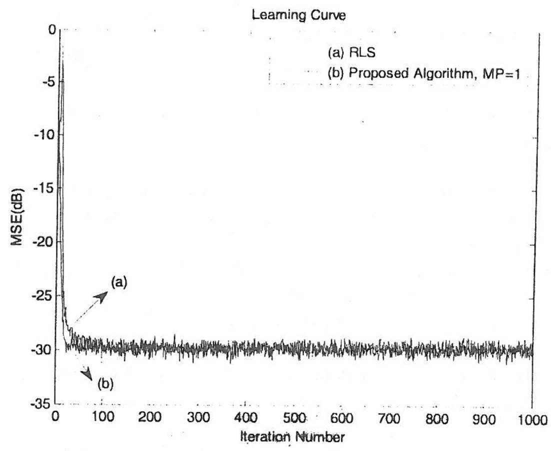
شکل (۶): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم NLMS برای اندازه گام های مختلف و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی رنگی)



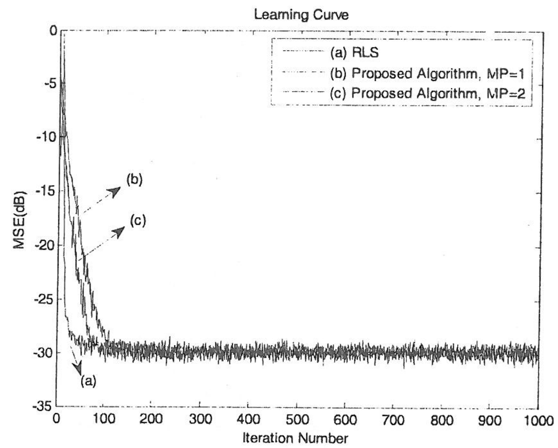
شکل (۷): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم AP برای K های مختلف و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی سفید)



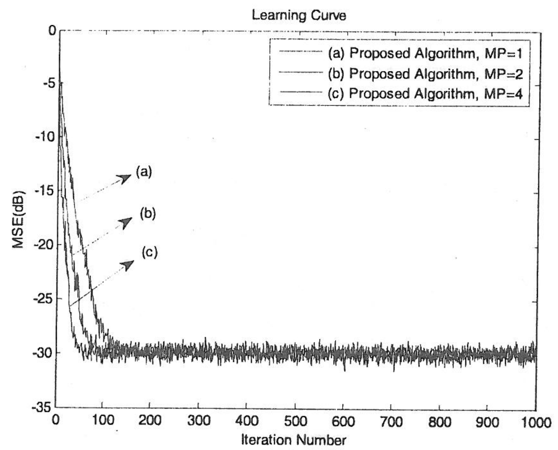
شکل (۸): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم AP برای K های مختلف و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی رنگی)



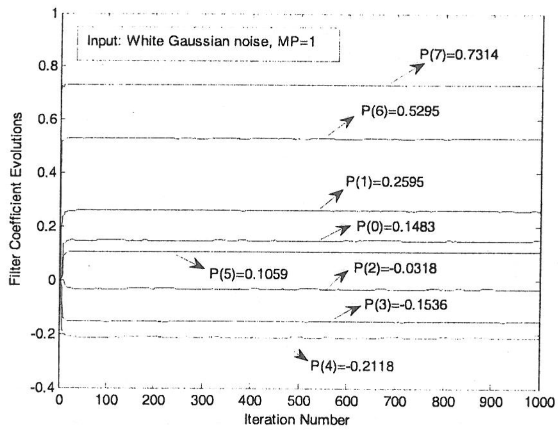
شکل (۹): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم RLS و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی سفید)



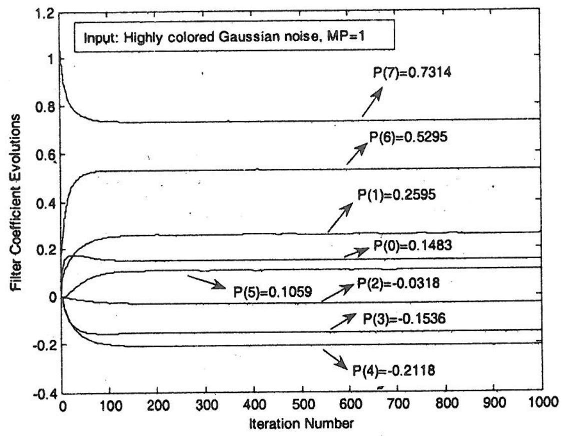
شکل (۱۰): مقایسه منحنی یادگیری الگوریتم RLS و الگوریتم تصویرافاین سریع (ورودی: نویز گوسی رنگی)



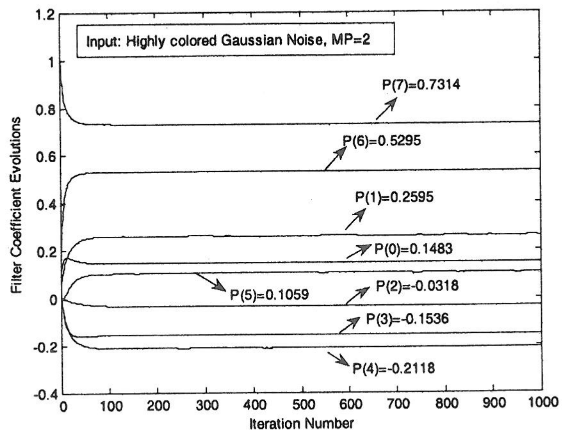
شکل (۱۱): منحنی یادگیری الگوریتم تصویرافاین سریع با پیگیریهای تطبیقی مختلف (ورودی: نویز گوسی رنگی)



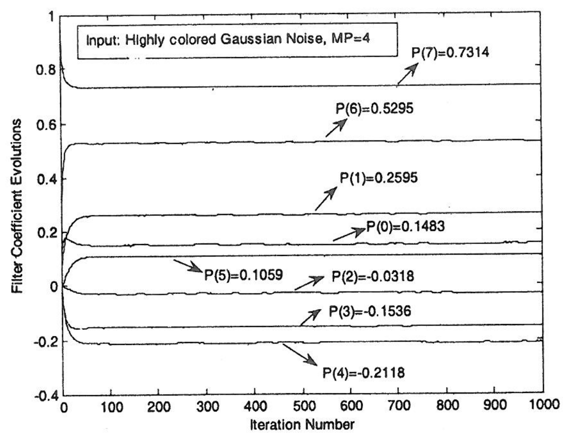
شکل (۱۲): منحنی رشدزمانی ضرایب الگوریتم تصویرافاین سریع برای یک پیگیری تطبیقی (ورودی: نویز گوسی سفید)



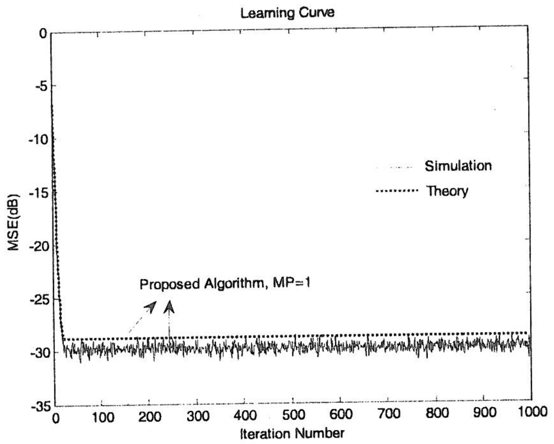
شکل (۱۳): منحنی رشدزمانی ضرایب الگوریتم تصویرافاین سریع برای یک پیگیری تطبیقی (ورودی: نویز گوسی رنگی)



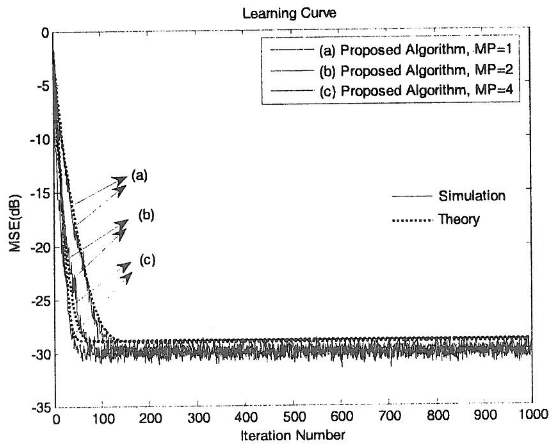
شکل (۱۴): منحنی رشد زمانی ضرایب الگوریتم تصویرافاین سریع برای دو پیگیری تطبیقی(ورودی: نویز گوسی رنگی)



شکل (۱۵): منحنی رشدزمانی ضرایب الگوریتم تصویرافاین سریع برای چهار پیگیری تطبیقی (ورودی: نویز گوسی رنگی)



شکل (۱۶): منحنی یادگیری الگوریتم تصویرافاین سریع دردوحالت شبیه سازی وتئوری (ورودی: نویز گوسی سفید)



شکل (۱۷): منحنی یادگیری الگوریتم تصویرافاین سریع دردوحالت شبیه سازی وتئوری (ورودی: نویز گوسی رنگی)

۷- مراجع

[۱] Widrow, B.; Streans, S. D.; *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.

[۲] Treichler, J. R.; Johnson, C. R.; Larimore, M. G.; *Theory and Design of Adaptive Filters*, Wiley, 1987.

[۳] Farhang-Broujeny, B.; *Adaptive Filters: Theory and Applications*, Wiley, 1998.

[۴] Haykin, S.; *Adaptive Filter Theory*, 4th Edition, NJ: Prentice-Hall, 2002.

[۵] Sayed, A. H.; *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley, 2003.

[۶] Diniz, P. S. R.; *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*, 2nd Edition, Kluwer, 2002.

[۷] Widrow, B.; Hoff, M. H.; "*Adaptive switching circuits*", Proc. IRE WESCON Conv. Rec, p.p. 96-104, 1960.

[۸] Nagumo, J.; Noda, A.; "*A learning method for system identification*", IEEE Trans. Automat. Contr, vol. 12 p.p. 282-287, 1967.

[۹] Albert, A. E.; Gardner, L. S.; *Stochastic Approximation and nonlinear Regression*, MIT Press, 1967.

[۱۰] Bitmead, R. R.; Anderson, B. D. O.; "*Performance of adaptive estimation algorithms in dependent random environments*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 25 p.p. 788-794, 1980.

[۱۱] Ozeki, K.; Umeda, T.; "*An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its proporties*", Electron. Commun. Jpn, vol. 67-A, p.p. 19-27, 1984.

[۱۲] Kratzer, S. G.; Morgan, D. R.; "*The partial-rank algorithm for adaptive beamforming*", Proc. SPIE, vol. 564, p.p. 9-14 1985.

[۱۳] Morgan, D. R.; Kratzer, S. G.; "*On a class computationally efficient, rapidly converging, generalized NLMS algorithm*", IEEE Signal Processing Letters, vol. 3, p.p. 245-247, 1996.

[۱۴] Apolinario, J.; Campos, M. L.; Diniz, P. S. R.; "*Convergence analysis of the binormalized data-reusing LMS algorithm*", IEEE Trans. Signal Processing vol. 48, p.p. 3235-3242, 2000.

[۱۵] Shin, H. C.; Sayed, A. H.; "*Transient behavior of affine projection algorithms*", Proc. Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Proc., Hong Kong, p.p. VI-353-356, 2003.

[۱۶] Shin, H. C.; Sayed, A. H.; "*Mean square performance of a family of affine projection algorithms*", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 52, p.p. 90-102, 2004.

[۱۷] Abadi, M. S. E.; Husøy, J. H.; "*A comparative study of some simlified RLS type algorithms*", Proc. First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, Hammamet, Tunisia p.p. 705-708, 2004.

[۱۸] Abadi, M. S. E.; Husøy, J. H.; "*Channel equalization using recursive adaptive matching pursuit algorithm*", Proc. Iranian Conference on Electerical Engineering, Zanjan, Iran, p.p. 265-268, 2005.

[۱۹] Abadi, M. S. E.; Daneshvar, S.; Lotfizad, M.; Mahlooji Far, A.; "*Recursive adaptive matching pursuit in noise cancellation for speech enhancement*", Proc. The Second International Conference on Information and Knowledge Technology, Tehran, Iran, 2005.

[۲۰] Mallat, S. G.; Zhang, Z.; "*Matching pursuits with time-frequency dictionaries*", IEEE Trans. Signal Processing vol. 41, p.p. 3397-3415, 1993.

[۲۱] Cotter, S. F.; Adler, R.; Rao, B.; Kreutz-Delgado, K.; "*Forward sequential algorithms for best basis selection*", IEE Proceedings Vision, Image and Signal Processing, vol. 146, p.p. 235-244, 1999.

[۲۲] Sayed, A. H.; Rupp, M.; "*A time-domain feedback analysis of adaptive algorithms via the small gain theorem*", Proc. SPIE, p.p. 458-469, 1995.

[۲۳] Rupp, M.; Sayed, A. H.; "*A time-domain feedback analysis of filtered-error adaptive gradient algorithms*", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, p.p. 1428-1439, 1996.

[۲۴] Yousef, N. R.; Sayed, A. H.; "*A unified approach to the steady-state and tracking analyses of adaptive filtering algorithms*", Proc. 4th IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Antalya, Turkey, p.p. 699-703, 1999.

[۲۵] Yousef, N. R.; Sayed, A. H.; "*Steady-state and tracking analyses of the sign algorithm without the explicit use of the independence assumptions*", IEEE Signal Processing Letters, vol. 7, p.p. 307-309, 2000.

[۲۶] Yousef, N. R.; Sayed, A. H.; "*A unified approach to steady-state and tracking analyses of adaptive filters*", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 49 p.p. 314-324, 2001.

[۲۷] Al-Naffouri, T. Y.; Sayed, A. H.; "*Transient analysis of data-normalized adaptive filters*", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 51, p.p. 639-652, 2003.

[۲۸] Husøy, J. H.; Abadi, M. S. E.; "*Transient analysis of adaptive filters using a general framework*", Automatika, Journal for control, Mesurement, Electronics, Computing and Communications, vol. 45, p.p. 121-127, 2004.

۸- زیرنویس ها

۱ Adaptive Filters
۲ Channel Equalizer
۳ Echo Cancellation
۴ Noise Cancellation
۵ Signal Enhancement
۶ System Identification
۷ Linear Predictor
۸ Real Time
۹ Least Mean Squares (LMS)
۱۰ Normalized Least Mean Squares (NLMS)
۱۱ Recursive Least Squares (RLS)
۱۲ Affine Projection (AP)
۱۳ Wiener-Hopf
۱۴ Stochastic Gradient
۱۵ Steepest Descent
۱۶ Underlying Signal Statistics
۱۷ Autocorrelation
۱۸ Cross-Correlation
۱۹ Computational Complexity
۲۰ Convergence Rate
۲۱ Matching Pursuit (MP)
۲۲ A Priori Estimation Error
۲۳ Independence Assuptions
۲۴ Weighted Euclidean Norm
۲۵ Independent and Identically Distributed
۲۶ Excess Mean Square Error (EMSE)
۲۷ Mean Square Error (MSE)
۲۸ Mean Square Coefficient Deviation (MSD)