مسأله‌شبکه جریان باحداقل هزینه با روابط خطی اضافی بین جریان کمان‌ها

حسن صالحی فتح‌آبادی[i]؛محمدعلی رعایت‌پناه[ii]

چکیده

در این مقاله، مسأله مینیمم هزینه جریان و قیود خطی بین جریان کمان‌ها بررسی و محاسبه می‌شود. این قیود ایجاب می‌کنند جریان کمان‌های عضو زیر مجموعه‌های دلخواهی از مجموعه کمان‌ها با کمان مرجع از همان زیر مجموعه‌ها دارای رابطه خطی باشند.چون ساختار پایه، در این مسأله همانند ساختار درخت پوشای پایه‌ای نیست، در نتیجه ابتدا یک ساختار گراف پوشای پایه‌ای برای مسأله به‌دست می‌آوریم و این ساختار پایه را یک q+1- جنگل خوب معرفی می‌کنیم. سپس با توجه به شرایط بهینگی، الگوریتم سیمپلکس شبکه جریان را باز تعریف می‌کنیم به نحوی که براحتی جواب مسأله بالا را محاسبه کند.

کلمات کلیدی

شبکه جریان، الگوریتم سیمپلکس شبکه، درخت پایه‌ای، ماتریس وقوع.

Minimum Cost Network Flow Problem With Additional Linear Relation Between Arcs' Flow

H. Salehi Fathabadi; M. A. Raayatpanah

ABSTRACT

In this paper the minimum cost flow problem with additional linear constraints on some arcs' flows has been considered. The additional constraints show that the flow on arcs which are belonged to specific subsets of arcs have to be linearly depended on the flow on a specific arc(called reference arc) in the subset. Since the basis structure in this problem is not a spanning tree, we introduce a basis spanning graph and call it a good (q+1)-forest for the problem .Then by regarding the optimality conditions ,we restructure the network simplex algorithm to solve the above problem .

KEYWORDS

Network flow , Network simplex algorithm, base tree ,incidence matrix.

۱- مقدمه

مسأله مینیمم هزینه شبکه جریان G=(N,A) شامل n گره و m کمان را در نظر بگیرید. یکی از راه‌های حل این مسأله استفاده از الگوریتم سیمپلکس شبکه است. یکی از دلایل اصلی کارا بودن این الگوریتم، ساختار خاص ماتریس ضرایب آن می‌باشد؛ اما این ساختار با اضافه شدن قیود خطی دیگر به مسأله از بین می‌رود.

در این مقاله، تمرکز ما روی مسأله مینیمم هزینه جریان با قیود اضافی است به این ترتیب که هر کمان درون یک زیر مجموعه معین از کمان‌ها جریانی را حمل می‌کند که با جریان یک کمان دیگر از همان زیر مجموعه رابطه خطی دارد. این نوع قیود خطی در مسایل چند دوره‌ای به‌وجود می‌آید. وقتی که شبکه را در هر دوره تکرار می‌کنیم یک سری از کمان‌های مشخص در هر دوره، جریان خطی با یکدیگر دارند.

[i] دانشیار ؛ دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر: salehi@khayam.ut.ac.ir

[ii] کارشناسی ارشد ؛دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر: raayatpanah@khayam.ut.ac.ir

کار برد این‌گونه مسایل در مسأله مدیریت سیستم آبی منابع آبی و مسایل تدارکاتی چند دوره‌ای است.

شبکه $G=(N,A)$ را در نظر بگیرید؛ u_{ij} را کران بالای جریان کمان (i, j)، c_{ij} را هزینه انتقال یک واحد جریان روی کمان (i, j) در نظر می‌گیریم. هر گره i دارای تقاضا / عرضه b_i است. اگر $b_i > 0$ گره i را گره عرضه و $b_i < 0$ گره i را گره تقاضا بنامیم، بدون از دست دادن کلیت مسأله نیز فرض کنیم که b_i، c_{ij} و u_{ij}ها اعدادی صحیح باشد و:

$$\sum_{i\in N} b_i = 0$$

مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots A_p$ زیر مجموعه‌های A و $(k_r, l_r)\in A_r$ کمان مرجع در A_r است که می‌خواهیم جریان روی کمان‌های A_r با کمان مرجع رابطه خطی داشته باشند یعنی:

$$A_r = \{(i, j) \mid x_{ij} = \alpha^r_{ij} x_{k_r l_r} + \lambda^r_{ij} : (i, j) \in A\}$$
$$r = 1, \dots, p$$

α^r_{ij}، λ^r_{ij} اعداد ثابت متناظر با کمان (i, j) از مجموعه A_r است. (توجه کنید $x_{k_r l_r} \in A_r$ که $\alpha^r_{k_r l_r} = 1$ و $\lambda^r_{k_r l_r} = 0$ می‌باشد).

حال با توجه به نمادهای بالا، مسأله با روابط خطی بین کمان‌ها را به‌صورت زیر فرمول‌نویسی می‌کنیم:

$$\text{P1: } Min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{S.t} \qquad (1)$$

$$(1.a) \quad \sum_{\{j;(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j;(j,i)\in A\}} x_{ji} = b(i) \qquad \forall i \in N$$

$$x_{ij} = \alpha^r_{ij} x_{k_r l_r} + \lambda^r_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A_r, \quad r = 1, 2, \dots p \qquad (1.b)$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (1.c)$$

در مسأله(P1) قیود 1-a را قیود توازن یا نگهدارنده جریان و قیود 1-b قیود همبستگی جریان نامیده می‌شوند. و قیود 1-c مربوط به کران‌های جریان کمان‌ها را تعیین می‌کند.

در مرجع [۳] علی وهمکارانش حالت خاصی از این مسأله را تحت عنوان جریان مساوی بررسی کردند. آنها فرض کردند که زیر مجموعه‌های $r = 1, \dots, p, A_r$ فقط دو کمان دارند و $\alpha^r_{ij} = 1$ و $\lambda^r_{ij} = 0$ است. آنها برای این مسأله یک الگوریتم با استفاده از تکنیک های ترمیم و تجزیه گسترش دادند؛ اما از هیچیک از الگوریتم‌ها و روش‌های شبکه‌های جریان استفاده نکردند. بعضی کاربردهای مسأله جریان مساوی عبارت از تخصیص بودجه مرکزی به پروژه های متنوع[5] و مسأله زمان بندی خدمه [۸] می‌باشد.

مرجع [۲] برای مسأله مدیریت منابع آبی، مسأله جریان مساوی ساده را بیان می‌کند که یک حالت ساده از مسأله p1 است که فقط دارای یک مجموعه قیود 1-b با $\alpha^r_{ij} = 1$ و $\lambda^r_{ij} = 0$ است. آنها برای حل مسأله آنها دو نوع الگوریتم متفاوت را به‌کار بردند؛ در روش اول از الگوریتم سیمپلکس شبکه و در روش دوم از الگوریتم پارامتریک برای حل مسأله استفاده کردند.

در مرجع [٦] کالوت مسأله جریان مساوی را در حالت کلی‌تری حل کرد. وی در تعریف مسأله مشابهP1 ، $\alpha^r_{ij} = 1$ و $\lambda^r_{ij} = 0$ را در نظر گرفته و با توسیع سیمپلکس شبکه الگوریتم جریان مساوی در حالت کلی را ارایه کرد.

در این مقاله، به جای قیود تساوی، حالت کلی همبستگی خطی مقدار جریان روی کمان‌ها را در نظر گرفته و الگوریتمی برای حل آن ارایه خواهیم داد؛ بدین گونه که بعد از بازنویسی مجدد مسأله و به کار بردن نمادهایی برای سادگی نمایش مسأله، ثابت می‌کنیم که رتبه ماتریس ضرایب قیود مسأله برابر n-1 است که این مطلب، ما را برای جواب پایه‌ای کمک خواهد کرد. در بخش ۲ ، پس از مدل‌سازی مجدد مسأله، مفاهیم و مقدمات لازم در بخش ۳ چگونگی ساخت و خواص جواب‌های پایه‌ای و در بخش ٤ محاسبه مقدار متغیرهای پایه‌ای مطرح می‌شود و در بخش ٥ الگوریتم مورد نظر ارایه و تجزیه و تحلیل می‌گردد و بالاخره در بخش ٦ یک مثال عددی برای پیاده‌سازی ساختار الگوریتم بیان خواهد شد.

۲- ساختار کلی و خواص مدل

در ابتدای این بخش به بیان تعاریف و نمادگذاری لازم برای بازنویسی مجدد مسأله می‌پردازیم.

λ_r, c_r را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_r = \sum_{(i,j)\in A_r} \alpha^r_{ij} c_{ij} \qquad , \qquad r = 1, 2, \dots, p$$

$$\lambda_r = \sum_{(i,j)\in A_r} \lambda^r_{ij} c_{ij} \qquad , \qquad r = 1, 2, \dots, p$$

برای هر گره i، d^i_r و l^i_r را به شرح زیر بیان می‌کنیم:

$$d^i_r = \sum_{\{j \mid (i,j)\in A_r\}} \alpha^r_{ij} - \sum_{\{j \mid (j,i)\in A_r\}} \alpha^r_{ji}$$

$$l^i_r = \sum_{\{j \mid (i,j)\in A_r\}} \lambda^r_{ij} - \sum_{\{j \mid (j,i)\in A_r\}} \lambda^r_{ji}$$

$r = 1,\dots, p, \quad i = 1,2,\dots, n$

چون به ازای هر $(i, j) \in A$، $0 \le x_{ij} \le u_{ij}$ پس

$$0 \le \alpha_{ij}^r x_{k_r l_r} + \lambda_{ij}^r \le u_{ij} \quad ,\forall (i,j) \in A_r \quad r = 1,2,\dots,p$$

و در صورتی که $\alpha_{ij} > 0$ آنگاه:

$$\frac{-\lambda_{ij}^r}{\alpha_{ij}^r} \le x_{k_r l_r} \le \frac{u_{ij} - \lambda_{ij}^r}{\alpha_{ij}^r} \quad , \forall (i,j) \in A_r \quad , \quad r = 1,\dots, p \qquad (۲)$$

با توجه به این که به ازای هر $(i, j) \in A_r$ یک حدود مقدار برای $x_{k_r l_r}$ به‌دست می‌آید، بنابراین برای این که مجموعه مقادیر $x_{k_r l_r}$ ناتهی حاصل شود، باید بازه‌های تولید شده برای $x_{k_r l_r}$ به وسیله (۲) متداخل باشد؛ به عبارت دیگر، برای این که مجموعه مقادیر $x_{k_r l_r}$ ناتهی شود لازم است به ازای هر (i,j) و هر (a,b) در A_r داشته باشیم:

$$\frac{-\lambda_{ij}^r}{\alpha_{ij}^r} \le \frac{u_{ab} - \lambda_{ab}^r}{\alpha_{ab}^r} \quad , \quad r = 1,\dots,p$$

پس اگر قرار دهیم:

$$u_r = \min\{ \frac{u_{ij} - \lambda_{ij}^r}{\alpha_{ij}^r} \,|\, (i,j) \in A_r \} \qquad (۳)$$

$$l_r = \max\{ \frac{-\lambda_{ij}^r}{\alpha_{ij}^r} \,|\, (i,j) \in A_r \} \qquad (۴)$$

برای این که مجموعه مقادیر مربوط به متغیر $x_{k_r l_r}$ ناتهی شوند لازم است $l_r \le u_r$ باشد و با توجه به اینکه $0 \le x_{k_r l_r} \le u_{k_r l_r}$ است، باید $0 \le l_r$ شود که این نتیجه به‌صورت لم زیر بیان می‌شود:

لم ۱. شرط لازم و کافی برای این که ناحیه حاصل از قیود 1-b ناتهی باشد آن است که $0 \le l_r \le u_r$ شود.

فرض می‌کنیم $\bar{G} = (N, \bar{A})$ زیرشبکه G باشد که $\bar{A} = A - \cup_{r=1}^{p} A_r$ بدون از دست دادن کلیت استدلال می‌توان فرض کرد که شبکه $\bar{G}$ همبند و شامل حداقل یک درخت پوشا ست. (در غیر این صورت می‌توان با افزودن کمان‌های فرضی با هزینه بالا این مشکل را حل کرد).

حال با توجه نمادهای معرفی شده در این قسمت، مسأله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{P2:} \quad Min \quad \sum_{(i,j)\in \bar{A}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{r=1}^{p} c_r x_{k_r l_r} + \sum_{r=1}^{p} \lambda_r$$

S.t (۵)

$$\sum_{\{j:(i,j)\in \bar{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in \bar{A}\}} x_{ji} + \sum_{r=1}^{p} d_r^i x_{k_r l_r} + \sum_{r=1}^{p} l_r^i = b(i) \quad \forall i \in N \qquad (5\text{-a})$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (i,j) \in \bar{A} \qquad (5\text{-b})$$

$$l_r \le x_{k_r l_r} \le u_r \qquad r = 1,\dots, p \qquad (5\text{-c})$$

مدل بالا با جای‌گذاری قیود 1-b در قیود 1-a در مسأله p1 به‌دست آمده است.

با توجه به ستون ضرایب x_{ij} در قیود 1-a؛ که درایه i ام ۱+ ودرایه j ام ۱- وبقیه درایه ها صفر است، خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in N} d_r^i = \sum_{i \in N} \Big(\sum_{\{j:(i,j)\in A_r\}} \alpha_{ij}^r - \sum_{\{j:(j,i)\in A_r\}} \alpha_{ji}^r \Big) = 0$$

و به طور مشابه $\sum_{i\in N} l_r^i = 0$. بحث بالا لم زیر را نتیجه می‌دهد:

لم ۲. a) $\sum_{i\in N} d_r^i = 0$ که $r = 1,\dots,p$

b) $\sum_{i\in N} l_r^i = 0$ که $r = 1,\dots,p$

اگر از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم، می‌توانیم کران پایین را در قیود (5-c) برداریم.

$$x'_{k_r l_r} = x_{k_r l_r} - l_r, \quad u'_r = u_r - l_r \Rightarrow 0 \le x'_{k_r l_r} \le u'_r$$

حال در مسأله P2 به‌جای $x_{k_r l_r}$ مقدار $x'_{k_r l_r} + l_r$ را قرار می‌دهیم، در قیود 5-a مقدار $\sum_{r=1}^{p} d_r^i l_r$ و در تابع هدف مقدار $\sum_{s=1}^{p} c_r l_r$ ظاهر می‌شود و با توجه به لم ۲ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} d_r^i l_r = \sum_{r=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} d_r^i l_r = \sum_{r=1}^{p} l_r \sum_{i=1}^{n} d_r^i = 0$$

بنابراین $b'(i)$ و λ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b'(i) = b(i) - \sum_{r=1}^{p} l_r^i - \sum_{r=1}^{p} d_r^i l_r \qquad (۶)$$

و:

$$\lambda = \sum_{r=1}^{p} c_r l_r + \sum_{r=1}^{p} \lambda_r$$

بعد از تغییرات بیان شده می‌توان مدل P2 را به شکل P3 بازنویسی کرد:

P3:

$$Min \sum_{(i,j)\in \overline{A}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{r=1}^{p} c_r x'_{k_r l_r} + \lambda$$

S.t (۷)

$$\sum_{\{j:(i,j)\in \overline{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in \overline{A}\}} x_{ji} + \sum_{r=1}^{p} d_r^i x'_{k_r l_r} = b'(i) \quad \forall i \in N \qquad (۷-a)$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (i,j)\in \overline{A} \qquad (۷-b)$$

$$0 \le x'_{k_r l_r} < u'_r \qquad r = 1,2,\dots,p \qquad (۷-c)$$

با توجه به این که λ یک مقدار ثابت است، بنابراین می‌توان بدون در نظر گرفتن مقدار آن، مسأله را به‌صورت مینیمم بیان کرد.

۳- ساختار پایه

در ابتدا ثابت می‌کنیم مرتبه ماتریس وابسته به قیود ۷-a در مدل P3 هم مرتبه ماتریس وقوع گره کمان شبکه G است.

لم ۳. مرتبه ماتریس A' وابسته به قیود ۷-a در مدل P3 برابر n-1 است.

اثبات . ماتریس A دارای n سطر و $|A'|$ ستون به ازای کمان‌های عضو $\overline{A}$ به‌اضافه p ستون و به ازای هر متغیر $x'_{k_r l_r}$, $r = 1,2,\dots,p$ است؛ در نتیجه:

$$A' = [\overline{A}', d_1, d_2, \dots, d_p]$$

در رابطه بالا، $\overline{A}'$ ماتریس وقوع گره کمان مربوط به شبکه $\overline{G}$ و d_r, $r = 1,2,\dots,p$ ستون متناظر با $x'_{k_r l_r}$ است. با توجه به لم ۲ و این که $\overline{A}'$ ماتریس وقوع یک شبکه است پس مجموع تمام سطرهای ماتریس A برابر با صفر خواهد شد. بنابراین، مرتبه ماتریس A' کمتر از n است؛ و چون $\overline{G}$ زیر شبکه همبند G است، پس شامل یک درخت فراگیر است و مرتبه ماتریس $\overline{A}'$ برابر n-1 است؛ بنابراین A' زیر ماتریس با مرتبه n-1 دارد پس مرتبه ماتریس A' حداقل n-1 خواهد بود؛و چون مرتبه ماتریس A' کمتر از n و مرتبه ماتریس عددی صحیح است؛ در نتیجه، مرتبه ماتریس A' برابر n-1 خواهد شد،این گونه است که حال لم ثابت می شود.

مسأله P3 یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای کراندار است که طبق لم بالا مرتبه ماتریس ضرایب آن n-1 است؛ بنابراین جواب پایه‌ای از n-1 متغیر پایه متناظر با بردارهایی که در A' مستقل خطی هستند، تشکیل شده است و بقیه متغیرها در کران بالا یا پایین خود خواهند بود.

فرض کنید یک پایه مسأله P3 داده شده است؛ واضح است که اگر هیچ یک از متغیرهای $x'_{k_r l_r}$ در پایه نباشد این پایه به یک درخت فراگیر $\overline{G}$ وابسته است. در غیر این صورت فرض کنید پایه شامل q متغیر $\{x'_{k_1 l_1}, x'_{k_2 l_2}, \dots, x'_{k_p l_p}\}$ است. برای سادگی در علامت گذاری فرض کنید که این متغیرها عبارت باشند از: $x'_{k_1 l_1}, x'_{k_2 l_2}, \dots, x'_{k_q l_q}$، اکنون باید $n-q-1$ متغیر x_{ij}، $(i,j)\in \overline{A}$ را طوری انتخاب کنیم که ابتدا با خودشان مستقل خطی وسپس با q متغیر $x'_{k_1 l_1}, x'_{k_2 l_2}, \dots, x'_{k_q l_q}$ نیز مستقل باشند. برای این منظور، ابتدا یک درخت پوشای فراگیر T از $\overline{G}$ انتخاب می‌کنیم و سپس q کمان از درخت را حذف می‌کند (این کار تضمین می‌کند n-q-1 متغیر خودشان با هم مستقل خطی هستند.) درخت فراگیر T به q+1 گره–درخت $T_1, T_2, \dots, T_{q+1}$ تجزیه می‌شود. بنابراین متغیرهای پایه‌ای را می‌توان در یک فرم جنگل F تشکیل شده از مؤلفه‌های $T_1, T_2, \dots, T_{q+1}$ دید که با هم تمام گره‌ها در شبکه G را پوشش می‌دهند. این ساختار را یک q+1- جنگل پوشا می‌نامند. فرض کنید $\overline{B}$ زیر ماتریسی از $\overline{A}'$وابسته به جنگل پوشایF باشد $rank(\overline{B}) = n-q-1$؛اکنون ما باید ستون‌های $d_1, d_2, \dots d_q$ وابسته به متغیرهای $x'_{k_1 l_1}, x'_{k_2 l_2}, \dots x'_{k_q l_q}$ را طوری اختیار کنیم که ماتریس $B = [\overline{B}, d_1, d_2, \dots, d_q]$ دارای مرتبه معادل n-1 باشد .

قضیه ۱: مرتبه هر ماتریس B برابرn-1 است . اگر و تنها اگر ماتریس:

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{k\in T_1} d_1^k \cdots & \sum_{k\in T_1} d_q^k \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \sum_{k\in T_q} d_1^k \cdots & \sum_{k\in T_q} d_q^k \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

دارای مرتبه کامل باشد؛ یعنی $rank(D) = q$ [۶]

تعریف ۱: q+1- جنگل پوشای با مؤلفه‌های $T_1, T_2, \dots, T_{q+1}$ در $\overline{G}$ را زمانی یکq+1- جنگل خوب می‌نامیم که متغیرهای $\{x'_{k_s l_s}\}_{s\in S}$ و $S \subset \{1 \dots p\}$, $|S| = q$ راطوری انتخاب کنیم که $rank(D) = q$.

توجه کنید که ۱- جنگل خوب ،یک درخت پوشا در $\overline{G}$ است؛ پس با توجه به مطالب بیان شده، قضیه زیر را نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۲: یک پایه برای مسأله شبکه جریان با روابط خطی بین کمان‌ها تشکیل شده از یک q+1– جنگل خوب در رابطه با

متغیرهای $\left\{ x'_{k_1 l_1}, \ldots, x'_{k_q l_q} \right\}$ است.

۴- محاسبه مقدار متغیرهای پایه‌ای

اکنون پس از توصیف پایه، نوبت به محاسبه مقدار متغیرهای پایه‌ای می‌رسد. اگر پایه مطرح شده، یک ۱-جنگل خوب بود، این یک درخت پوشای در شبکه $\overline{G}$ است؛ پس طبق روش سیمپلکس شبکه، مقدار جریان روی متغیرهای پایه‌ای را به‌دست می‌آوریم؛ در غیر این صورت فرض می‌کنیم پایه مطرح شده یک q+1- جنگل خوب با متغیرهای $x'_{k_1 l_1}, \ldots, x'_{k_q l_q}$ است. ابتدا روش زیر را برای محاسبه متغیرهای پایه‌ای $x'_{k_1 l_1}, \ldots, x'_{k_q l_q}$ به‌کار می‌بریم:

قضیه ۳. مقدار متغیرهای $x'_{k_1 l_1}, \ldots, x'_{k_q l_q}$ با استفاده از حل سیستم خطی زیر به‌دست می‌آید:

$$D\begin{pmatrix} x'_{k_1 l_1} \\ \vdots \\ x'_{k_q l_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(T_1) \\ \vdots \\ b(T_q) \end{pmatrix} \qquad (۹)$$

$$b(T_h) = \sum_{k \in T_h} b'_k - u(T_h) - \sum_{k \in T_h} \sum_{s \in \overline{U}} d_s^k u_s \ , \quad h = 1, \ldots, q$$

$$u(T_h) = \sum_{(i,j) \in V_1} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in V_2} u_{ij} \qquad , h = 1, \ldots, q$$

$$V_۱ = \{(i,j) : i \in T_h, j \notin T_h, (i,j) \in U'\}$$

$$V_۲ = \{(i,j) : i \notin T_h . j \in T_h . (i,j) \in U'\}$$

$$U' = \{(i,j) \in \overline{A} : x_{ij} \in U\}$$

$$\overline{U} = \{s \in \{۱, \ldots, p\} : x'_{k_s l_s} = u_s\}$$

Uمجموعه کمان‌های پایه، با مقدار کران بالا هستند [۶].

بعد از به‌دست آوردن مقدار همه متغیرهای $x'_{k_1 l_1}, x'_{k_2 l_2}, \ldots, x'_{k_q l_q}$، با توجه به رابطه خطی موجود، مقدار جریانی را برای هر کمان عضو مجموعه A_r، $r = 1 \ldots q$ مشخص می‌کنیم؛ سپس عرضه و تقاضای گرهi را به‌صورت $b''(i) = b'(i) - \sum_{r=1}^{p} d_r^i x'_{k_r l_r}$ به هنگام می‌کنیم. حال کمان‌های مجموعه A_r، $r = 1 \ldots q$ را از q+1 – جنگل خوب حذف می‌کنیم یک q+1 – جنگل پوشا به‌دست می‌آوریم که برای هر مؤلفه درخت، از این جنگل پوشا روش کلی الگوریتم سیمپلکس شبکه را به کار برده و مقدار جریان برای هر کمان در هر درخت T_h، $h = ۱, ۲, \ldots, q + ۱$ را مشخص می‌کنیم، سرانجام اگر مقدار همه متغیرهای پایه‌ای در کران‌هایشان بود این جواب پایه‌ای، یک جواب پایه‌ای شدنی خواهد بود.

تعریف ۴: $b(T_h)$ را به‌عنوان نیازمندی درخت T_h در نظر می‌گیریم؛ اگر $b(T_h) > ۰$ درخت T_h درخت عرضه و اگر $b(T_h) < ۰$ درخت T_h درخت تقاضاست.

۵- الگوریتم سیمپلکس شبکه برای مسأله با رابطه خطی بین کمان‌ها

حالا در موقعیتی هستیم که الگوریتم برای مسأله شبکه جریان با رابطه خطی بین کمانها ارایه دهیم. از آنجا که جزییات الگوریتم سیمپلکس شبکه را برای حل این مسأله به‌کار می‌بریم، از این رو این الگوریتم را الگوریتم سیمپلکس شبکه برای مسأله با رابطه خطی بین کمان‌ها می‌نامیم.

اکنون با تغییراتی، قدم‌های اصلی سیمپلکس شبکه را بیان کرده و بحث می‌کنیم. چطور با یک جواب شدنی پایه‌ای شروع و بررسی کنیم که این جواب بهینه است یا خیر؛ و چگونه متغیرهای خارج شونده و وارد شونده را تعیین کنیم.

۵-۱- به‌دست آوردن پایه اولیه

پایه اولیه را می‌توان به‌طور کامل با متغیرهای فرضی شروع کرد؛ یعنی گره فرضی s را معرفی می‌کنیم و کمان (s, j) را برای هر $j \in N$ که $b(j) < ۰$ و کمان (j, s) برای هر $j \in N$ که $b(j) > ۰$ باشد، رسم می‌کنیم. هزینه و ظرفیت این کمان‌های فرضی را M در نظر می‌گیریم –که M مقداری به اندازه کافی بزر گ است–. در این حالت، پایه شدنی اولیه یک ۱-جنگل خوب است که شامل گره s و تمام کمان‌های فرضی و تمام کمان‌های غیر پایه‌ای دیگر در کران پایین خودشان هستند.

۵-۲- محاسبه هزینه کاهش یافته

برای یک پایه داده شده باید بررسی کنیم که آیا این پایه بهینه است یا خیر. برای این منظور، به محا سبه پتانسیل گره‌ها π_i، $\forall i \in N$ و هزینه کاهش یافته برای هر متغیر نیاز داریم. اگر پایه ۱-جنگل خوب باشد که یک درخت پوشا در $\overline{G}$ است، پس برای محاسبه π_i از همان روش سیمپلکس استفاده می‌کنیم. حال اگر پایه یک q+1- جنگل خوب، با مؤلفه‌های $T_۱, T_۲, \ldots, T_{q+۱}$ و متغیرهای $x'_{k_r l_r}$ ، $r = 1, \ldots q$ باشد، روش محاسبه π_i ها از دو گام تشکیل خواهد شد: گام اول برای هر درخت T_h، $h = ۱, \ldots, q + ۱$ پتانسیل گره π_k را برای هر گره $k \in T_h$ مثل روش سیمپلکس استفاده می‌کنیم. (در هر درخت یک گره را به عنوان گره ریشه در نظر می‌گیریم)؛ سپس هزینه کاهش یافته مربوط به متغیرها $x'_{k_r l_r}$، $r = ۱, \ldots, q$ را محاسبه می‌کنیم، ستون متناظر با

$x'_{k_r l_r}$، در ماتریس ضرایب 3-a عبارت است از:

$$d_r = \begin{bmatrix} d_r^1 \\ \vdots \\ d_r^n \end{bmatrix}$$

و هزینه کاهش یافته متغیر $x'_{k_r l_r}$، برابر است با $c_r^\pi = -(z_r - c_r)$؛ پس داریم:

$$z_r - c_r = cB^{-1}d_r - c_r = \pi \begin{bmatrix} d_r^1 \\ \vdots \\ d_r^n \end{bmatrix} - c_r = \sum_{i \in N} \pi_i d_r^i - c_r$$

درنتیجه:

$$c_r^\pi = c_r - \sum_{i \in N} \pi_i d_r^i \qquad (۱۰)$$

بعد از این که $c_r^\pi \quad r = ۱,\dots,q,$ را حساب کردیم اگر $c_r^\pi = ۰ \quad r = ۱,\dots,q,$ بود که $\pi_i \quad i \in N$، پتانسیل گره‌ها هستند؛ در غیر این صورت π_i ها را طبق فرمول زیر تغییر می‌دهیم:

$$\bar{\pi} = \begin{cases} \pi_k + \sigma_1 & \text{if} \quad k \in T_1 \\ \pi_k + \sigma_2 & \text{if} \quad k \in T_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \pi_k + \sigma_q & \text{if} \quad k \in T_q \\ \pi_k & \text{if} \quad k \in T_{q+1} \end{cases}$$

$\sigma_h \, , \, h = ۱,\dots,r$ را با استفاده از روش زیر به‌دست می‌آوریم:

$$D^T \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^\pi \\ \vdots \\ c_q^\pi \end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

با این تغییر، متغیر $c_r^\pi = ۰ \quad r = ۱,\dots,q,$ و $\bar{\pi}_i$ پتانسیل گره‌ها می‌شود. از آنجا که یک مقدار ثابت به همه گره‌ها اضافه شده است، پس هزینه کاهش یافته از همه متغیرهای پایه‌ای $(i,j) \in T_h \, , \, h = ۱,۲,\dots,q$ برابر صفر خواهد بود. و هزینه کاهش یافته برای متغیرهای $x'_{k_r l_r} \, , \quad r = ۱,۲,\dots, \quad q$ نیز صفر می‌شود؛ زیرا:

$$\begin{aligned} c_r^{\bar{\pi}} &= c_r - \sum_{k \in N} d_r^k \bar{\pi}_k \\ &= c_r^\pi - \sum_{k \in T_1} d_r^k \sigma_1 - \cdots - \sum_{k \in T_1} d_r^k \sigma_q \\ &= c_r^\pi - \left(\sum_{k \in T_1} d_r^k + \cdots + \sum_{k \in T_1} d_r^k\right) \begin{pmatrix} \sigma 1 \\ \vdots \\ \sigma q \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

طبق (۵) ضرب سطر rام ماتریس D^T در بردار $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma q \end{pmatrix}$ برابر c_r^π خواهد شد.

۵-۳- شرط بهینگی

اگر $c_{ij}^\pi \geq ۰$ و $c_r^\pi \geq ۰$ برای همه متغیرهای x_{ij} و $x'_{k_r l_r}$ غیر پایه‌ای در کران پایین و $c_{ij}^\pi \leq 0$ و $c_r^\pi \leq 0$ برای همه x_{ij} و $x'_{k_r l_r}$ متغیرهای غیر پایه‌ای در کران بالاست. جواب جاری بهینه است؛ در غیر این صورت، یک متغیر غیر پایه‌ای براساس روش سیمپلکس شبکه [۷]،[۴]،[۱] انتخاب می‌کنیم؛ اگر این متغیر غیر پایه‌ای در کران پایین باشد جریان روی آن افزایش، در غیر این صورت کاهش می‌یابد.

۵-۴- انتخاب متغیر خارج‌شونده و محورگیری

فرض کنید متغیر وارد شونده در کران پایین باشد (اگر در کران بالا باشد به‌طور مشابه انجام می‌دهیم) باید جریان روی متغیر وارد شونده را θواحد افزایش دهیم و شرط شدنی را بررسی و دقت کنیم که متغیر وارد شونده از کران بالایش تجاوز نکند. اگر حالت اخیر رخ دهد؛ یعنی متغیر وارد شونده به کران بالا برسد، این متغیر غیر پایه‌ای باقی می‌ماند و مقدار متغیرهای پایه قبلی را اصلاح می‌کنیم؛ در غیر این صورت متغیر غیر پایه‌ای وارد پایه شده و یک متغیر پایه‌ای از پایه یکی از کران‌هایش خارج می‌شود. برای واضح شدن این مطلب، ۳ حالت را در نظرمی‌گیریم:

حالت ۱. متغیر وارد شونده $x_{ij} \, , i \in T_h \, , j \in T_h$ است.

در این حالت چون متغیر وارد شونده فقط بر یک درخت تأثیر دارد، می‌توانیم الگوریتم سیمپلکس شبکه را به کار ببریم. وقتی کمان (i,j) به درخت T_h اضافه شد یک دور یکتا در T_h به وجود می‌آید. مقدار θ را حول دور یکتای به وجود آمده می‌فرستیم و این مقدار را تا حد ممکن افزایش می‌دهیم تا

یکی از متغیرهای در دور، به یکی از کران‌هایش برسد که متغیر خارج شونده را تعیین می‌کند. متغیرهای در دور را متناظر اصلاح می‌کنیم یا خود x_{ij} به کران بالا برسد. در این حالت، این متغیر غیر پایه‌ای در کران بالا می‌ماند و متغیرهای پایه‌ای در دور، فقط به‌طور متناظر اصلاح می‌شود.

حالت ۲. متغیر وارد شونده x_{ij} است :

$h \neq l, j \in T_l, i \in T_h$

چون متغیر وارد شونده طبق فرض در کران پایین است پس باید جریان روی آن افزایش یابد؛ پس از نیازمندی درخت θ, T_h واحد کم $(b(T_h)-\theta)$ و به نیازمندی درخت θ, T_l واحد اضافه $(b(T_l)+\theta)$ می‌شود و نیازمندی بقیه درخت‌ها بدون تغییر می‌ماند. بنابراین ابتدا مقدار متغیرهای $x'_{k_1l_1}, x'_{k_2l_2}, \ldots, x'_{k_ql_q}$ را طبق رابطه (۹) به‌دست می‌آوریم:

$$D\begin{bmatrix} x'_{k_rl_r} \\ \vdots \\ x'_{k_ql_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(T_1) \\ \vdots \\ b(T_h)-\theta \\ b(T_l)+\theta \\ \vdots \\ b(T_q) \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

پس از به‌دست آوردن مقدار متغیرهای جدید، $x'_{k_1l_1}$ ، $x'_{k_2l_2}$ ، ....، $x'_{k_ql_q}$، مقدار θ واحد، x_{ij} را افزایش می‌دهیم تا x_{ij} با یکی از متغیرهای پایه‌ای به یکی از کران‌هایش برسد.

مانند حالت ۱، اگر متغیر وارد شونده x_{ij} به کران بالایش برسد این متغیر غیر پایه‌ای در کران بالا می‌ماند و متغیرهای پایه‌ای دیگر به‌طور متناظر تعدیل می‌شود؛ در غیر این صورت x_{ij} وارد پایه و یکی از متغیرهای پایه ای در یکی از کران‌هایش خارج می شود و متغیرهای پایه ای دیگر را به طور متناظر تعدیل می‌کنیم.

حالت ۳. متغیر وارد شونده $x'_{k_rl_r}, r=q+1,\ldots,p$ است.

طبق فرض، متغیر وارد شونده در کران پایین است و مقدار روی آن باید به اندازه $\theta \geq 0$ واحد افزایش می‌یابد. میزان تغییر نیازمندی درخت T_h به اندازه $\sum_{k\in T_h} d_r^k$ است؛ بنابراین اگر $\sum_{k\in T_h} d_r^k > 0$ باشد، پس نیازمندی درخت T_h به اندازه $\theta\sum_{k\in T_h} d_r^k$ کاهش می‌یابد؛ زیرا جریان خروجی بیشتر از ورودی است؛ یعنی:

$$b(T_h)-\theta\sum_{k\in T_h} d_r^k$$

و اگر $\sum_{k\in T_h} d_r^k < 0$؛ بنابراین نیازمندی درخت T_h به اندازه $-\theta\sum_{k\in T_h} d_r^k$ افزایش می‌یابد؛ یعنی $b(T_h)-\theta\sum_{k\in T_h} d_r^k$ می‌شود؛ زیرا جریان ورودی بیشتر از جریان خروجی است.

بنابراین برای به‌دست آوردن مقدار جدید از متغیرهای $x'_{k_1l_1}, x'_{k_2l_2}, \ldots, x'_{k_ql_q}$ معادله خطی زیر را حل می‌کنیم:

$$D\begin{bmatrix} x'_{l_1k_1} \\ \vdots \\ x'_{k_ql_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(T_1)-\theta\sum_{k\in T_1} d_r^k \\ \vdots \\ b(T_q)-\theta\sum_{k\in T_q} d_r^k \end{bmatrix}$$

و ادامه فرایند مانند حالت ۲ است .

۵-۵- پیچیدگی الگوریتم

پیچیدگی این الگوریتم، همان پیچیدگی سیمپلکس شبکه است؛ زیرا قدم‌های این الگوریتم مطابق با روش سمپلکس شبکه به‌دست آمده است.

۶- مثال عددی

در این قسمت، برای توضیح الگوریتم سمپلکس شبکه برای مسأله‌ای با روابط خطی بین کمان‌ها، یک مثال عددی مطرح می‌کنیم . شبکه نشان داده شده در شکل ۱، با p=2 را درنظر بگیرید. عدد کنار هر گره میزان عرضه و تقاضا و عدد روی هر کمان هزینه کمان، را نشان می‌دهد. N={۱و...و۱۱} و

$$A_1=\{(2,3),(2,4),(3,9)\}\ ,\ A_2=\{(2,6),(5,8),(6,10)\}$$
$$\overline{A}=A-(A_1\cup A_2)$$

ظرفیت هر کمان را برابر ۲۵ می‌گیریم. توجه کنید که کمان‌های A_1 با نقطه‌چین کمرنگ و کمان‌های A_2 با نقطه‌چین پررنگ نمایش داده شده‌اند.

کمان مرجع مجموعه A_1 را (۳و۲) می‌گیریم و رابطه خطی موجود در A_1 عبارت است:

$$x_{24}=2x_{23}+17 \qquad x_{39}=x_{32}+6$$

کمان مرجع مجموعه A_2 را (٦و۲) می‌گیریم؛ و رابطه خطی موجود در A_2 عبارت است:

$$x_{58}=x_{26}+3 \qquad x_{610}=2x_{26}$$

حال، $C_2, C_1, \lambda_1, \lambda_2$ و $d_1^i, d_2^i, L_1^i, L_2^i$، $i=1,\ldots,11$ را

محاسبه می‌کنیم:

$$C_۱ = ۱۱, C_۲ = ۱۵, \lambda_۱ = ۶۹\ \lambda_۲ = ۱۲ \Rightarrow \lambda = \lambda_۱ + \lambda_۲ = ۸۱$$

$$d_۱^۲ = ۳, d_۱^۳ = ۰, d_۱^۴ = -۲, d_۱^۹ = -۱$$

$$d_۱^۱ = d_۱^۵ = d_۱^۶ = d_۱^۷ = d_۱^۸ = d_۱^{۱۰} = d_۱^{۱۱} = ۰$$

$$L_۱^۹ = -۶, L_۱^۳ = ۶, L_۱^۴ = -۱۷\ \ L_۱^۲ = ۱۷$$

$$L_۱^۱ = L_۱^۵ = L_۱^۶ = L_۱^۷ = L_۱^۸ = L_۱^{۱۰} = L_۱^{۱۱} = ۰$$

$$d_۲^۲ = d_۲^۵ = d_۲^۶ = ۱, d_۲^۸ = -۱, d_۱^{۱۰} = -۲$$

$$d_۱^۱ = d_۲^۳ = d_۲^۴ = d_۲^۷ = d_۲^۹ = d_۲^{۱۰} = ۰$$

$$L_۲^۲ = ۰, L_۲^۵ = ۳, L_۲^۶ = ۰, L_۲^۸ = -۳, L_۲^{۱۰} = ۰$$

$$L_۲^۱ = L_۲^۳ = L_۲^۴ = L_۲^۷ = L_۲^۹ = L_۲^{۱۱} = ۰$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید لم ۲ برقرار است.

طبق رابطه (۳) و (۴) u_r و l_r، ۲و۱= r را محاسبه می‌کنیم:
$L_۱ = L_۲ = ۰$ ، $u_۱ = u_۲ = ۲۵$ (در این مثال کران پایین l_r، r =1,2 برابر صفر است پس به تغییر متغیر ندارد)، و طبق رابطه (٦)، $b'(i)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$b'(۳) = b'(۶) = b'(۷) = b'(۸) = b'(۱۱) = ۰$$

$$b'(۱) = ۱۴,\ b'(۲) = ۷,\ b'(۴) = ۱۳,\ b'(۵) = -۳$$

$$b'(۹) = -۱۹, b'(۱۰) = -۱۲$$

ملاحظه می‌کنید که $\sum_{i \in n} b'(i) = ۰$.

برای این مثال ۱ -جنگل خوب، که درخت پوشا در $\overline{G}$ است در شکل (۲) بیان شده است. طبق متد سیمپلکس $Z_{ij} - C_{ij}$ را برای هر کمان حساب می‌کنیم؛ در نتیجه، متغیر $x_{۲۳}$، متغیر واردشونده (حالت ۳) است.

θ واحد جریان را روی کمان(2,3) افزایش می‌دهیم، $b'(i) = b'(i) - d_۱^i \theta$ برای هر $i \in N$ قرار می‌دهیم؛ حال جریان روی هر کمان را بر حسب θ محاسبه می‌شود که با توجه به قیود کران، حداکثر مقدار θ برابر ۲ است که در این حالت متغیر $x_{۵۴}$ خارج شده است.

در تکرار بعد، پایه یک ۲- جنگل خوب در رابطه با متغیر $x_{۲۳}$ و مؤلفه‌های $T_۲$ و $T_۱$ است که درخت $T_۱$ شامل گره‌های {۱۱و۱۰و۷و٦و٥و۳و۲و۱} و درخت $T_۲$ شامل گره‌های {۹و۸و۴} است.

حال می‌خواهیم پتانسیل را برای هر گره به‌دست آوریم. ابتدا برای هر مؤلفه $T_۲$ و $T_۱$ از روش سیمپلکس استفاده کرده و π_iها را محاسبه می‌کنیم:

برای مؤلفه T_1 داریم:

$$\pi_۱ = ۰, \pi_۲ = -۷, \pi_۳ = -۸, \pi_۵ = -۱۲, \pi_۶ = -۱۶$$

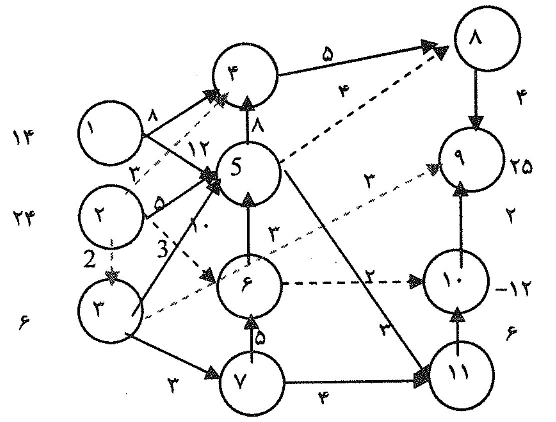
$$\pi_۷ = -۱۱, \pi_{۱۰} = ۲۱, \pi_{۱۱} = -۱۵$$

برای مؤلفه $T_۲$ داریم:

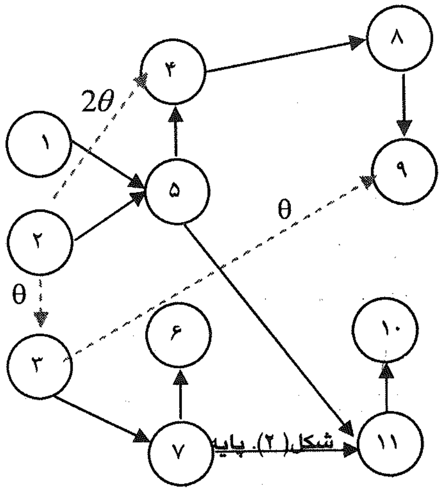
$$\pi_۴ = ۰, \pi_۸ = -۵, \pi_۹ = -۹$$

از رابطه (۱۰)، $C_۱^{\pi} = ۱$ به‌دست می‌آید؛ پس باید طبق رابطه(۱۱) به مقدار π_iها، $i \in T_۱$ ، $\sigma_۱ = \frac{۱}{۳}$ اضافه شود. حال $Z_{ij} - C_{ij}$ را برای تمام متغیرهای غیرپایه‌ای حساب می‌کنیم؛ در این حالت هیچ یک از متغیر پایه‌ای شرایط بهینگی را نقض نمی‌کند. پس جواب بهینه است(شکل ۳).

ازآنجای که،کمان (2,6) غیر پای‌ه‌ای است وکمان‌های غیر-پای‌ه‌ای در کران پایین هستند، بنابراین $x_{۵۸} = ۳$ و $x_{۶۱۰} = ۰$است.

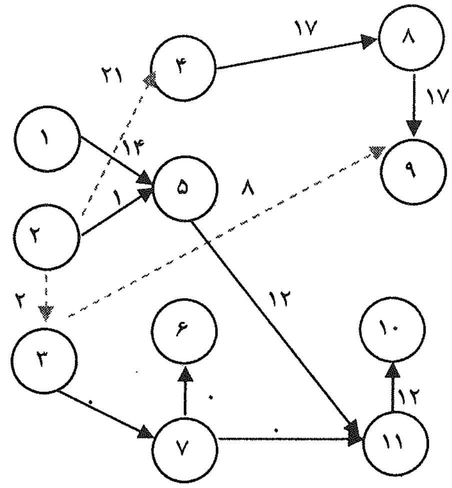


شکل (۱). شبکه اصلی



شکل(۲). پایه

کمان (5,4)خارج شونده و مجموعه A_1 وارد شونده



شکل(۳). جواب بهینه اعداد روی کمان‌ها جریان بهینه و $x_{58} = 3$
پس مقدار تا بع هدف برابراست با Z= ۵۳۷

۷- مراجع

[۱] Ahuja R. K.; Magnanti T. L.; Orlin J.B.; *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs,NJ, 1993.

[۲] Ahuja R. K.; Orlin J. B.; Sechi, G. M.; Zuddas; *Algorithms for the simple equal flow problem*, Management Science 45, 1440–1455 1999.

[۳] Ali A. I.; Kennington J.; Shetty B.; *The equal flow problem,* European Journal of Operational Research 36, 107–115,1988.

[۴] Bazaraa M.S.; Jarvis J.J.; Sherali H.D.; *Linear programming and network flows,* second ed., Wiley, New York, 1990.

[۵] Beck P.; Lasdon L.; Engquist M.; *A reduced gradient algorithm for nonlinear network problems,* ACM Transactions on Mathematical Software 9 57–70 1983.

[۶] Calvete H.I.; *Network simplex algorithm for the general equal flow problem*, European Journal of Operational Research ,150 ,585–600,2003.

[۷] Kenington J. L.; Helgason R. V.; *Algorithms for Network Programming,* Wiley, New York, 1980.

[۸] Marsten R .E.; Shepardson F.; *Exact solution of crew scheduling problems using the set partitioning model*: Recent successful applications, Networks 11 165–177,1981.