استفاده از پیش شرط سازهای چند مرحله‌ای روی شبکه‌های بدون ساختار در مسائل مقدار مرزی بیضوی

مینا باقرپورفرد[i]؛ سید محمد حسینی[ii]

چکیده

این مقاله شامل دو بخش است؛ در بخش اول به شبیه سازی دو پیش شرط ساز چند مرحله‌ای به نام‌های "پایه سلسله مراتبی(HB)" و"BPX(Bramble,Pasciak,Xu)" برای مسائل مقدار مرزی خطی بیضوی روی دامنه چند ضلعی با شرایط مرزی دیریکله پرداخته می‌شود که مبتنی بر ایده چند شبکه‌ای(Multigrid) است.

از طرفی این شبیه سازیها به صورت موازی هم انجام شده است که علاوه بر صرفه جویی در زمان مشکل کمبود حافظه به صورت مجتمع در یک کامپیوتر را نیز بر طرف می‌کند.

اما چون این پیش شرط سازها مبتنی بر گسسته سازی چند مرحله‌ای (Multi Level)روی دامنه با شبکه بندیهای ساخت یافته هستند، تکنیکی مبتنی بر لم فضای فرضی ارائه می‌شود که هر مثلث بندی دلخواه بدون ساختار و شبه یک نواخت از دامنه در یک مثلث بندی ساخت یافته کمکی از مربعی که شامل آن است نشانده می‌شود و پیش شرط سازهای مذکور برای شبکه کمکی به دست آورده می‌شوند. سپس، باتعریف اپراتوری که تناظری یک به یک بین نقاط گره ای شبکه اولیه و شبکه کمکی ایجاد می‌کند پیش شرط سازهای پایه‌های سلسله مراتبی (HB) وBPX برای شبکه اولیه ساخته شده که به ترتیب artHB و artBPX نامیده می‌شوند.

کلمات کلیدی:

مسائل مقدار مرزی بیضوی مرتبه دوم، روش المان متناهی، پیش شرط ساز چند مرحله‌ای، لم فضای فرضی، شبکه بدون ساختار.

Using Multi Level Preconditioners on Unstructured Grids in Elliptic Boundary Value Problems

M. Bagherpoorfard, S. M. Hosseini

ABSTRACT

This paper consists of two parts. First it talks about simulation of two Multi level preconditioners under the names of HB(Hierarchical basis) and BPX (Bramble,Pasciak,Xu) for linear elliptic boundary value problems on polygon domain with Dirichlet boundary condition that is based on Multigrid idea. On the other hand , this simulation has been done in parallel computing that in addition to saving time it solves the problem of memory allocation . Since these preconditioners are based on domain with structured mesh, a technique is introduced based on fictitious space lemma from which each arbitrary quasi-uniform unstructured triangulation of domain is embedded in auxiliary structured mesh on a square that contains it and then the aforementioned preconditioners for auxiliary mesh is obtained. Finally by defining an operator which makes a one-to-one correspondence between the nodal points of initial mesh on the one hand and

[i] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت مدرس

[ii] سید محمد حسینی؛ استاد دانشگاه تربیت مدرس: دانشگاه تربیت مدرس، بخش ریاضی، صندوق پستی، ۱۷۵-۱۴۱۱۵، تهران-ایران

Corresponding author: hossei_m@modares.ac.ir(S. M. Hosseini).

those of auxiliary mesh on the other hand, hierarchical basis and BPX preconditioners are constructed for initial mesh that are named "art HB" and "artBPX" respectively.

KEYWORDS:

second order elliptic boundary value problems, finite element method, multi level preconditioners, fictitious space lemma, unstructured triangulation.

۱- مقدمه

امروزه حل عددی مسائل مقدار مرزی بیضوی مرتبه دوم در بسیاری از شاخه های علوم کاربردی و مهندسی‌های صنعتی مطرح است.

در بسیاری موارد از حل تقریبی این مسائل به روش المان متناهی سیستم‌های بزرگ معادلات خطی بدست می‌آیند که عدد حالت آنها $O(1/h^2)$ (h همان طول گام گسسته سازی است) می‌باشد. در حل این سیستم‌ها به روش تکراری گرادیان مزدوج که سرعت همگرایی آن به عدد حالت وابسته است پیش شرط سازها نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

در بخش اول این مقاله دو پیش شرط ساز مبتنی بر ایده چند مرحله ای معرفی می‌شوند که اهمیت آنها مربوط به مرتبه عدد حالت سیستم پیش شرط سازی شده توسط آنها ست که در مورد HB $O((\log(1/h))^2)$ و در مورد BPX $O(C)$ (C عدد ثابت) است.

ابتدا مسائل مقدار مرزی بیضوی مرتبه دوم با فرم زیر روی دامنه چند ضلعی $\Omega \subset R^2$ در نظر گرفته می‌شوند [۱]و[۲]:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + au = f & in \quad \Omega \\ u = 0 & on \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad (۱)$$

فرض می شود ماتریس $[a_{ij}]$ متقارن و معین مثبت، $a(x)$ روی Ω نا منفی و f تابع پیوسته باشد.

چون Ω یک دامنه چند ضلعی است می‌توان یک مثلث بندی ساخت یافته درشت (Coarse) $\tau_1 = \bigcup_l \tau_1^l$ باطول شبکه h_1 از آن تعریف کرد که τ_1^l بیان گر مثلثی منحصر به فرد، τ_1 خود مثلث بندی و N_1 مجموعهٔ رئوس همه مثلث‌ها در τ_1 با تعداد n_1 گره است.

با وصل کردن نقاط وسط اضلاع مثلث‌ها به هم و در نتیجه تقسیم هر مثلث به چهار مثلث به مثلث بندی یک نواخت و ظریف تر $\tau_2 = \bigcup_l \tau_2^l$ باطول شبکه $h_2 = 2^{-1}h_1$ می‌رسیم، به طور مشابه N_2 مجموعه گره‌ها در τ_2 با تعداد n_2 گره بوده که شامل گره‌های τ_1 و نقاط وسط اضلاع مثلث‌های آن است.

با تکرار متوالی این تظریف یک دنباله از مثلث بندیهای ظریف تر $\{\tau_k : k = 2...J\}$ باطول شبکه $h_k = 2^{-1}h_{k-1}$، مجموعه نقاط گره‌ای N_k و تعداد نقاط گره‌ای n_k تولید می‌شود، واضح است که $N_k \subset N_{k+1}$ و در نتیجه:

$$N_1 \subset N_2 \subset . \; . \; . \subset N_J \, .$$

متناظر با τ_kها دنباله ای از زیر فضاهای المان متناهی تو در توی $\{\mu_k : k = 2...J\}$ تولید می‌شود، هر μ_k فضای توابع پیوسته روی Ω در نظر گرفته می‌شود که نسبت به τ_k قطعه‌ای خطی بوده و روی $\partial\Omega$ صفر باشند[٥]، با توجه به نحوه به دست آوردن τ_{k+1} از τ_k، توابعی که نسبت به τ_k قطعه‌ای خطی هستند نسبت به τ_{k+1} نیز قطعه‌ای خطی بوده، بنابراین داریم:

$$\mu_k \subset \mu_{k+1} \qquad , \qquad k = 1,...,J-1$$

و در نتیجه:

$$\mu_1 \subset \mu_2 \subset . \; . \; . \subset \mu_J$$

حال با گسسته سازی المان متناهی به دنبال یافتن جواب تقریبی U روی J امین زیر فضا ($U \in \mu_J$) برای مسأله تغییراتی زیر وابسته به (۱) می‌باشیم:

$$A(u,\phi) = f(\phi) \qquad \forall \phi \in \mu_J \qquad (۲)$$

با تعریف $\{\psi_i\}_{i=1}^{n_J}$ به عنوان مجموعه توابع پایه گره‌ای برای زیرفضای μ_J، دستگاه زیر را نمایش ماتریسی (۲) نسبت به این مجموعه از توابع پایه گره‌ای در نظر می‌گیریم[٤]:

$$AU = f \qquad , \; U \in \mu_J \qquad (۳)$$

سپس پیش شرط سازهای مورد نظر، برای حل این دستگاه به روش تکراری گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده استفاده می‌شوند.

اما چنان چه گفته شد این پیش شرط سازها روی دامنه با شبکه بندی‌هایی که قابلیت چند مرحله‌ای شدن را داشته باشند قابل استفاده هستند .

در بخش دوم ، تکنیکی ارائه می‌شود که با استفاده از آن می‌توان پیش شرط سازهای چند مرحله‌ای را برای مسائل مقدار مرزی بیضوی دو بعدی با فرم زیر پیاده سازی کرد:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u = f & in \quad \Omega \\ u = 0 & on \quad \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + \delta u = 0 & on \quad \Gamma_1 \end{cases}$$

Ω می‌تواند دامنه‌ای دلخواه(نه لزوماً چند ضلعی) با مثلث بندی‌های دلخواه بدون ساختار و شبه یک نواخت باشد.
قابل ذکر است که این تکنیک مبتنی بر لم فضای فرضی بوده که حالت خاصی از روش فضای کمکی است.

افرادی همچون G.Globisch و S. V. Nepomnyas در حال کار کردن بر روی این موضوع و تولید بسته‌های نرم افزاری مرتبط با آن هستند. [۷]،[۱۲] و [۱۵].

۲- پیش شرط ساز های چند مرحله ای پایه سلسله مراتبی (HB) و BPX

۲-۱- پیش شرط ساز چند مرحله ای پایه سلسله مراتبی (HB)

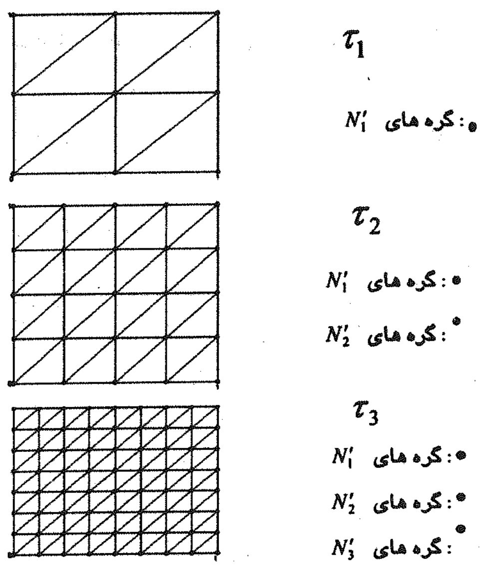
۲-۱-۱- تعریف پایه های سلسله مراتبی برای μ_J

ابتدا زیر فضاهای V_k از μ_k را تعریف می‌کنیم :
$V_1=\mu_1$ و برای، $k=2\ .\ .\ .\ J$، V_k زیرفضایی شامل توابعی از μ_k در نظر گرفته می‌شود که در گره‌های سطح $(k-1)$ ام صفر باشند[۱]و[۳].
اگر متناظر با زیر فضاهای V_k تعریف کنیم:

$$N'_1=N_1 \quad \text{و} \quad n'_1=n_1$$

$$N'_k=N_k-N_{k-1} \qquad k=2,\dots,J$$

(N_k مجموعه‌ای است شامل گره‌هایی از τ_k که در τ_{k-1} نباشند با تعداد $n'_k=n_k-n_{k-1}$ گره) آنگاه V_k فضای تولید شده توسط پایه‌های گره‌ای نظیر به گره‌های N'_k است.
شکل (۱) نقاط گره ای در N'_k را روی مربع واحد با مثلث بندی ساخت یافته تا سه مرحله نشان می‌دهد:



شکل (۱)

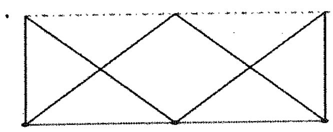
اکنون با استفاده از زیر فضاهای V_k توابع پایه سلسله مراتبی برای μ_J تعریف می‌شوند[۵]:

مجموعه توابع پایه سلسله مراتبی برای μ_1 همان توابع پایه گره‌ای برای μ_1 است و برای μ_k $(k=2,\dots,J)$ به طور باز گشتی اجتماع مجموعه توابع پایه سلسله مراتبی برای μ_{k-1} و مجموعه توابع پایه گره‌ای برای V_k، بوده که بنابر رابطه بازگشتی به صورت اجتماع پایه‌های گره‌ای زیر فضاهای V_1 تا V_k است.

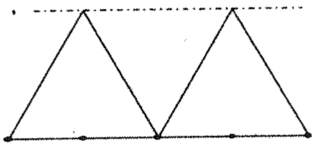
با توجه به تعریف زیر فضاهای V_k، μ_k به صورت جمع مستقیم زیر فضاهای V_1 تا V_k است: $\mu_k=V_1\oplus\ \dots\ \oplus V_k$
با تکرار روش بازگشتی فوق برای $k=J$ پایه‌های سلسله مراتبی برای μ_J به دست آورده می‌شوند که به صورت اجتماع پایه‌های گره‌ای زیر فضاهای V_1 تا V_J است و μ_k به صورت جمع مستقیم زیر فضاهای V_1 تا V_J است :

$$\mu_J=V_1\oplus\ \dots\ \oplus V_J$$

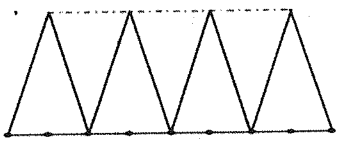
شکل‌های (۲) و (۳) به ترتیب توابع پایه گره ای برای V_1 تا V_3 و توابع پایه سلسله مراتبی برای μ_1 تا μ_3 را در حالت یک بعدی به طور موضعی نشان می‌دهند:



توابع پایه گره ای V_1

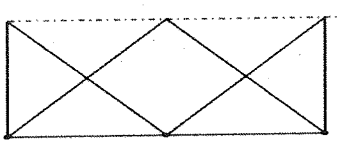


توابع پایه گره ای V_2

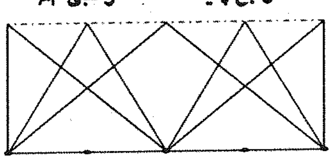


توابع پایه گره ای V_3

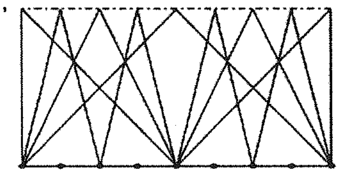
شکل (۲):توابع پایه گره ای



توابع پایه سلسله مراتبی μ_1



توابع پایه سلسله مراتبی μ_2



توابع پایه سلسله مراتبی μ_3

شکل (۳) توابع پایه سلسله مراتبی

۲-۱-۲- سیستم پیش شرط سازی شده توسط پایه های سلسله مراتبی

تاکنون دو نوع پایه برای فضای μ_J معرفی شده است، یکی پایه‌های گره‌ای و دیگری پایه‌های سلسله مراتبی (که به صورت اجتماع پایه‌های گره‌ای زیر فضاهای V_1 تا V_k است) و هر تابع از μ_J دارای دو نمایش، یکی نسبت به پایه‌های سلسله مراتبی و دیگری نسبت به پایه‌های گره‌ای است.

حال به جای حل دستگاه (۳) ، سیستم پیش شرط سازی شده توسط پایه‌های سلسله مراتبی زیر قابل حل است:

$$S^T ASU = S^T f \tag{۴}$$

$\beta_{HB} A = S^T AS$ ماتریس گسسته سازی شده توسط پایه‌های سلسله مراتبی نامیده می‌شود که درآن S ماتریس تبدیل نمایش توابع در μ_J نسبت به پایه‌های سلسله مراتبی بر حسب نمایش آنها نسبت به پایه‌های گره‌ای است[۱].

قضیه ۱- اگر $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ به ترتیب کوچکترین وبزرگترین مقدارویژه $\beta_{HB} A = S^T AS$ باشند آنگاه:

$$\lambda_{\min} \geq C_1(1+(\log(1/h_J))^2)^{-1}$$
$$\lambda_{\max} \leq C_2$$

C_1 و C_2 ثابت های مثبت و مستقل از J و h_J هستند[۳] .

نتیجه ۱-

$$k(\beta_{HB} A) \leq \frac{C_2}{C_1}(1+(\log(1/h_J))^2)$$

که k بیان گر عدد حالت است[۳].

با توجه به این نتیجه، عدد حالت این سیستم پیش شرط سازی شده، در مقایسه با ماتریس به دست آمده از گسسته سازی المان متناهی که در آن از پایه‌های گره‌ای معمولی استفاده شده و عدد حالت آن $O(1/h_J^2)$ است، از مرتبه لگاریتمی است که بیان‌گر افزایش سرعت همگرایی در مقایسه با روش معمولی است[۱].

۲-۲- پیش شرط ساز B.P.X

۲-۲-۱- تعریف پیش شرط ساز B.P.X

اگر $\{\phi_k^l\}_{l=1}^{n_k}$ مجموعه توابع پایه گره‌ای برای زیرفضای μ_k، $k=1,\ldots,J$ باشد آنگاه هره ϕ_k^l تابع پایه‌ای متناظر با lامین گره از مثلث بندی τ_k است که روی این گره یک و روی سایر گره‌ها صفر است.

اپراتور خطی $\beta:\mu_J \longrightarrow \mu_J$ با تعریف زیر، پیش شرط ساز چند مرحله‌ای B.P.X نامیده می‌شود:

$$\beta(v)=\sum_{k=1}^{J}\sum_{l=1}^{n}(v,\phi_k^l)\ \phi_k^l$$

$$=(v,\phi_1^1)\ \phi_1^1+\ldots+(v,\phi_1^n)\ \phi_1^n+ \longrightarrow \text{ترکیب خطي پایه هاي سطح یکم}$$
$$(v,\phi_2^1)\ \phi_2^1+\ldots+(v,\phi_2^n)\ \phi_2^n+ \longrightarrow \text{ترکیب خطي پایه هاي سطح دوم}$$
$$\vdots$$
$$+$$
$$(v,\phi_J^1)\ \phi_J^1+\ldots+(v,\phi_J^n)\ \phi_J^n+ \longrightarrow \text{ترکیب خطي پایه هاي سطح } J \text{ ام}$$

(۵)

(.,.) بیان گر ضرب داخلی L_2 روی Ω است.

چنان چه دیده می‌شود، این اپراتور ترکیب خطی از پایه‌های گره‌ای زیرفضای μ_1 ($\{\phi_1^l\}$) تا μ_J ($\{\phi_J^l\}$) یا به عبارتی ترکیب خطی از پایه‌های سطح یکم تا سطح Jام است [۲].

حال به جای حل دستگاه (۵) می‌توان از سیستم پیش شرط سازی شده زیر استفاده کرد:

$$\beta AU = \beta f \tag{۶}$$

کار اصلی در استفاده از این سیستم پیش شرط سازی شده، به دست آوردن نمایش ماتریسی β است که هم به صورت موازی و هم به صورت سری انجام پذیر است و در بخش بعد به نحوه محاسبه آن پرداخته می‌شود:

۲-۲-۲- نمایش ماتریسی پیش شرط ساز BPX

برای بدست آوردن نمایش ماتریسی این پیش شرط ساز(بر حسب پایه‌های گره‌ای) بایستی آن را روی پایه‌های گره‌ای زیرفضای μ_J اثر داده و حاصل به صورت ترکیب خطی از این پایه های گره‌ای به دست آورده شود.

بدست آوردن ستون مربوط به هر پایه در نمایش ماتریسی β، دو محاسبه اصلی را در بر دارد؛ یکی محاسبه ضرایب ترکیب خطی سطوح ۱ تا J و دیگری تبدیل ترکیب خطی (۵) به یک ترکیب خطی فقط بر حسب پایه های گره ای μ_J ($\{\phi_J^l\}_{l=1}^{n_J}$).

نکته زیر به انجام این دو محاسبه به روش سری کمک خواهد کرد:

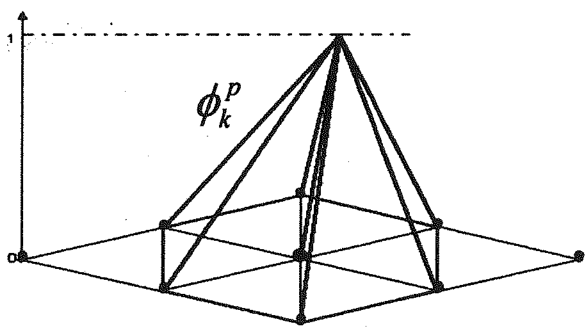
با توجه به تو در تو بودن μ_kها ($\mu_k \subset \mu_{k+1}$) توابع پایه گره‌ای μ_k، $k=1,\ldots,J-1$، به μ_{k+1} نیز متعلق هستند، بنابراین این توابع را می‌توان به صورت ترکیب خطی از توابع پایه

گره‌ای سطح $k+1$ام نوشت.

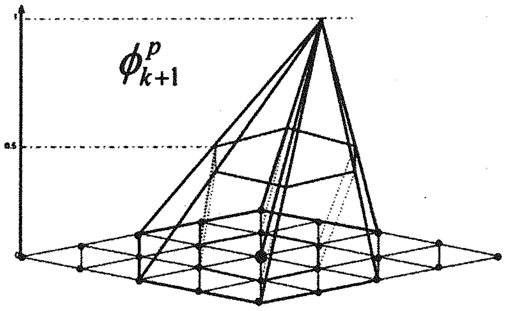
برای مثال p امین گره دلخواه از سطح kام همراه با تابع پایه ای گره ای نظیر به آن (ϕ_k^p) در نظر گرفته می‌شود، اگر این گره معادل با qامین گره از سطح $k+1$ام باشد، با توجه به این که مثلث بندی سطح $k+1$ام از وصل کردن نقاط وسط اضلاع مثلث‌های سطح kام به دست می‌آید، مقدار تابع ϕ_k^p در این گره یک، در گره‌های مجاور آن ۱/۲ و در بقیه گره‌ها صفر است، بنابراین ϕ_k^p را می‌توان به صورت ترکیب خطی زیر از توابع پایه گره‌ای μ_{k+1} نوشت

$$\phi_k^p = \phi_{k+1}^q + \frac{1}{2}\{\text{مجموع توابع پایه‌ای گره‌ای مجاور q امین گره}\} \qquad (۷)$$

این مطلب در یک مثلث بندی بندی یک نواخت روی مربع واحد نشان داده شده است:



● p_امین گره از سطح kام



●: q_امین گره از سطح $k+1$ام و

p_امین گره از سطح kام

شکل (۴)

برای محاسبه ضرایب ترکیب‌های خطی، ابتدا این ضرایب را برای سطح Jام محاسبه کرده، سپس ضرایب سطح $J-1$ام که به صورت $(\phi_J^{l_k}, \phi_{J-1}^{l})$ می‌باشند با توجه به (۷) و خاصیت خطی ضرب داخلی L_2 از روی ضرایب سطح Jام محاسبه می‌شوند، به همین ترتیب برای $k = J-1,...,1$ می‌توان ضرایب ترکیب خطی پایه‌های سطح kام را از روی ضرایب ترکیب خطی سطح $k+1$ام که در گام قبل محاسبه می‌شوند به دست آورد و به این ترتیب ضرایب ترکیب خطی همه سطوح از روی ضرایب ترکیب خطی سطح Jام به دست آورده می‌شوند(در این مرحله بنا بر ایده چند شبکه‌ای محاسبات از ظریف ترین سطح به درشت ترین سطح انجام می‌گیرد).

پس از محاسبه ضرایب ترکیب خطی، باید عبارت (۵) به یک ترکیب خطی فقط بر حسب پایه‌های سطح Jام تبدیل شود، با توجه به (۷)، با بسط دادن متوالی ϕ_k^l، $l=1,...,n_k$، بر حسب $\{\phi_{k+1}^l\}_{l=1}^{n_{k+1}}$، $k=1,...,J-1$، ترکیب خطی سطح kام به یک ترکیب خطی بر حسب پایه های گره ای μ_{k+1} تبدیل خواهد شد که با جمع آن با ترکیب خطی سطح $k+1$ام عبارت (۵) به ترکیب خطی از پایه‌های سطح $k+1$ تا J تبدیل خواهد شد و با تکرار متوالی تا $J-1$ ترکیب خطی (۵) فقط بر حسب پایه‌های سطح Jام، $\{\phi_J^l\}_{l=1}^{n_J}$، تبدیل خواهد شد(در این مرحله نیز بنا بر ایده چند شبکه‌ای محاسبات از درشت‌ترین سطح به ظریف ترین سطح انجام می‌گیرد).

مشکل اساسی در پیاده سازی این پیش شرط ساز به روش سری، زمان محاسبات طولانی(بیشتر از ۵-۶ ساعت) و کمبود حافظه برای $J \geq 6$ است، اما نکته‌ای که سبب برجسته شدن این پیش شرط ساز می شود این است که ضرایب ترکیب‌های خطی سطح یک تا J در (۵) به طور مستقیم هم قابل محاسبه هستند بنابراین می‌توان محاسبات هر سطح (یا چند سطح) را به طور مستقل توسط چند کامپیوتر، به طور هم زمان انجام داد و در آخر، نتایج به یک کامپیوتر مادر منتقل شوند.

قضیه ۲- اگر $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدارویژه βA در(۶)باشد آنگاه:

$$\lambda_{\min} \geq C_1$$
$$\lambda_{\max} \leq C_2$$

C_1 و C_2 ثابت‌های مثبت و مستقل از J و h_J هستند[۳].

نتیجه ۲- $k(\beta A) \leq \frac{C_2}{C_1}$

با توجه به این نتیجه، عدد حالت این سیستم پیش شرط سازی شده مستقل از تعداد سطوح تظریف است که بیان گر افزایش سرعت همگرایی در مقایسه با روش معمولی و حتی در مقایسه با پیش شرط ساز (HB) است [۳].

اهمیت نتایج (۱)و(۲) در نتیجه عددی زیر دیده می‌شود:

۲-۳- نتایج عددی بخش ۲

مثال۱: معادله پواسن با شرایط مرزی دیریکله روی مربع واحد مفروض است:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1 & in \;\; \Omega=(0,1)\times(0,1) \\ u=0 & on \;\; \partial\Omega \end{cases} \qquad (۸)$$

پیش شرط سازهای بیان شده روی دستگاه $Au=f$ ناشی از گسسته سازی المان متناهی (۸) اعمال می‌شوند؛

درجدول (۱) عدد حالت مربوط به ماتریس A با عدد حالت ماتریس پیش شرط سازی شده توسط پایه‌های سلسله مراتبی، β_{HB}، و $B.P.X$ (β) مقایسه می‌شود و در جدول ۲ تعداد تکرارهای روش تکراری گرادیان مزدوج در حل این دستگاه با زمانی که این دستگاه توسط پیش شرط سازهای فوق پیش شرط سازی می‌شود مقایسه می‌شود:

جدول (۱): مقایسه عدد حالت

J	A	$\beta_{HB}A$	βA
۲	۵/۸۲۸۴	۴/۵۶۱۶	۲/۱۴۵۹
۳	۲۵/۲۷۴۱	۱۰/۵۹۳۸	۴/۳۵۳۱
۴	۱۰۳/۰۸۶۹	۱۹/۵۲۵۸	۶/۸۵۳۲
۵	۴۱۴/۳۴۵۱	۳۱/۸۴۵۸	۹/۵۴۸۲
۶	۱۶۵۹/۴	۴۷/۱۴۳۰	۱۰/۲۶۱۱

جدول (۲):مقایسه تعداد تکرارها در روش گرادیان مزدوج

J	A	$\beta_{HB}A$	βA
۲	۳	۴	۴
۳	۱۳	۱۵	۹
۴	۲۶	۲۳	۱۳
۵	۷۴	۳۱	۱۵
۶	۱۴۹	۳۵	۱۷

با مقایسه عددهای حالت در جدول (۱) و تعداد تکرارهای روش گرادیان مزدوج در جدول (۲) مشاهده می‌شود که با ظریف‌تر شدن شبکه بندی که معادل با افزایش J است سرعت رشد عدد حالت و در نتیجه افزایش تعداد تکرارها در جدول (۲) در مورد βA بسیار ناچیز بوده و در مورد $\beta_{HB}A$ در مقایسه با A قابل ملاحظه است که این موارد بنابر نتایج (۱) و (۲) قابل پیش بینی بود.

شبیه سازی این پیش شرط سازها با برنامه نویسی توسط نرم افزار MATLAB انجام شده است.

کد گذاری پیش شرط ساز BPX هم به روش سری و هم به روش موازی انجام شده است و به دلیل در دسترس نبودن کامپیوترهای موازی نتایج فوق از روش سری به دست آمده‌اند و محاسبات برای J های بزرگتر با مشکل کمبود حافظه مواجه می‌شود.

۳- تکنیکی برای استفاده از پیش شرط ساز های چند مرحله ای روی شبکه های بدون ساختار:

چنان چه دیده شد پیش شرط سازهای چند مرحله‌ای $B.P.X$ و پایه‌های سلسله مراتبی (HB) برای مسائل مقدار مرزی بیضوی دو بعدی روی دامنه Ω با شبکه بندی ساخت یافته معرفی شدند. در این بخش تکنیکی ارائه می‌شود که با استفاده از آن بتوان پیش شرط سازهای چند مرحله‌ای را برای شبکه بندی‌های دلخواه بدون ساختار و شبه یک نواخت پیاده سازی کرد[۶]و[۷].

قابل ذکر است که این تکنیک مبتنی بر لم فضای فرضی بوده که حالت خاصی از روش فضای کمکی است[۸]و[۹].

۳-۱- معرفی مسأله:

فرض می‌شود $\Omega\subset R^2$ دامنه کراندار با مرز لیپ شیتس باشد و مسأله مقدار مرزی بیضوی زیرمفروض است:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_0u=f & in \;\; \Omega \\ u=0 & on \;\; \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial N}+\delta u=0 & on \;\; \Gamma_1 \end{cases} \qquad (۹)$$

که : $\frac{\partial u}{\partial N}=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}Cos(n,x_i)$

n بیان گر بردار نرمال خارجی به $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1$ (مرز دامنه Ω) می‌باشد و a_{ij}، f و δ توابع پیوسته هستند.

مسأله تغییراتی نظیر به (۱۴) به صورت زیر است :

$$u\in V: a(u,v)=l(v), \forall v\in V \qquad (۱۰)$$

زیرفضای V از فضای سوبولف $H^1(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V=\{u\in H^1(\Omega): u=0 \;\;,\;\; on \;\; \Gamma_0\}$$

و فرم دوخطی $a(u,v)$ و تابعک خطی $l(v)$ دارای تعریف زیر هستند:

$$a(u,v)=\int_\Omega(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0uv)dx+\int_{\Gamma_1}\delta \;\; u \;\; vdx$$

$$l(v)=\int_\Omega fVdx$$

و فرض می‌شود که ضرایب a_{ij} و a_0 و f به گونه‌ای باشند که فرم دوخطی $a(u,v)$ متقارن، V- بیضوی و پیوسته روی V باشد و همچنین تابعک خطی $l(v)$ نیز روی V پیوسته باشد.

با این مفروضات مسأله تغییراتی(۱۰) دارای جواب یکتا است که حل عددی آن دنبال می‌شود[۴].

مثلث بندی دلخواه $\Omega^h=\bigcup_{i=1}^{M}\tau_i$ از دامنه Ω در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود که این مثلث بندی شبه یک نواخت

باشد یعنی:
اگر

$r_i = \tau_i$ شعاع کوچک ترین دایره محیطی

$\rho_i = \tau_i$ شعاع بزرگ ترین دایره محاطی

$h_i = diam \ \ \tau_i = Max\{|x-y| \ \ , \forall x,y \in \tau_i\}$

$h = Max_{i=1,...,M} \ h_i$

آنگاه مقادیرثابت مثبت ℓ، ℓ_1 و ℓ_2 که مستقل از h هستند چنان چه وجود داشته باشند که:

$$l_1 h \le r_\tau \le l_2 h \ \ \& \ \ \frac{r_\tau}{\rho_\tau} \le l \ \ ; \ \ (\forall \tau)(\tau \in T_h)$$

که ρ_i, r_i بترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی بـرای مثلث τ_i هستند[۶].

Γ^h مرز مثلث بندی Ω^h می‌باشد که Γ را با خطای $O(h^2)$ تقریب می‌زند و قسمتی از Γ^h که تقریبی برای Γ_0 است با Γ_0^h و قسمتی که تقریبی برای Γ_1 است با Γ_1^h نمایش داده می‌شود[۱۰].

زیرفضای متناهی البعد μ از V، فضای توابع قطعه‌ای خطی پیوسته نسبت به Ω^h در نظر گرفته می‌شود که روی Γ_0^h صفر بوده و روی $\Omega \setminus \Omega^h$ نیز صفر باشند.

جواب مسأله تغییراتی زیر یک جواب تقریبی (حل عددی) برای (۱۰) مبتنی بر گسسته سازی المان متناهی هستند :

$$U \in \mu : a(U,V) = l(V) \quad , \quad \forall V \in \mu \qquad (۱۱)$$

هر تابع $V \in \mu$ در تناظر با یک بردار $\underline{V} \in R^N$ است که مؤلفه‌های آن مقادیر تابع V در گره‌های نظیر از مثلث بندی Ω^h هستند (N تعداد گره های Ω^h است) و به عبارتی دیگر اگر $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ پایه های گره‌ای برای μ باشند هر تابع $V \in \mu$ به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها ست که ضرایب این ترکیب خطی بردار $\underline{V}$ را تشکیل می‌دهند.

رابطه(۱۱) دارای نمایش ماتریسی زیر است:

$$A\underline{U} = \underline{f} \qquad (۱۲)$$

که:

$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$

$\underline{f}_j = l(\phi_j)$

و در نتیجه :

$a(u,v) = (A\underline{u}, \underline{v}) \quad , \quad \forall u,v \in \mu$

$l(v) = (\underline{f}, \underline{v}) \quad , \quad \forall v \in \mu$

($\underline{u}$ و $\underline{v}$ نمایش بردارهای نظیر به $u,v \in \mu$ بوده و (.,.) بیان گر ضرب اسکالر اقلیدسی است)

هدف ساخت پیش شرط ساز متقارن و معین مثبت C^{-1} برای دستگاه (۱۲) است به طوری که رابطه طیفی زیر برقرار باشد:

$$c_1(Cu,u) \le (Au,u) \le c_2(Cu,u) \quad , \quad \forall u \in R^N \qquad (۱۳)$$

که c_1 و c_2 ثابت‌های مثبت و مستقل از h هستند.

رابطه طیفی (۱۳) طبق نسبت ریلی معادل است با این که $\kappa(C^{-1}A) \le \frac{C_2}{C_1}$ که κ بیان گر عدد حالت است.

درتکنیک مورد نظر این پیش شرط ساز با بکارگیری روش فضای فرضی در دو مرحله ساخته می‌شود؛ در مرحله اول از مثلث بندی بدون ساختار شبه یک نواخت Ω^h به یک شبکه ساخت یافته کمکی (غیرسلسله مراتبی) رسیده که با استفاده از آن تناظری یک به یک بین نقاط گره‌ای Ω^h وشبکه کمکی برقرار می‌کنیم و در مرحله دوم شبکه سلسله مراتبی برای مربع شامل دامنه اصلی Ω معرفی می‌شود و پیش شرط سازهای چند مرحله‌ای پایه‌های سلسله مراتبی (HB) و BPX برای مسأله کمکی ساخته می‌شوند و با استفاده از تناظر به دست آمده در مرحله قبل پیش شرط سازهای فوق برای مسأله اصلی به دست می‌آیند.

در بخش بعد لم فضای فرضی بیان می‌شود[۱۱].

۳-۲- بیان لم فضای فرضی

فرض می‌شود H_0 و H فضاهای هیلبرت با ضرب‌های داخلی $(.,.)_{H_0}$ و $(.,.)_H$ باشند و عملگرهای متقارن، معین مثبت و پیوسته A_0 و A به ترتیب روی فضاهای H_0 و H تعریف شده باشند:

$$A_0 : H_0 \to H_0 \qquad , \qquad A : H \to H$$

وعملگرخطی $R : H \to H_0$ مفروض باشد، به طوری که:

$$(A_0 Rv, Rv)_{H_0} \le c_R (Av, v)_H \quad , \quad \forall v \in H$$

وعملگر T چنان وجود داشته باشد که:

$$T : H_0 \to H \qquad , \qquad RTu_0 = u_0$$

$$c_T (ATu_0, Tu_0)_H \le (A_0 u_0, u_0)_{H_0} \quad , \quad \forall u_0 \in H_0$$

که c_R و c_T ثابتهای مثبت هستند، آنگاه:

$$c_T (A_0^{-1} u_0, u_0)_{H_0} \le (RA^{-1}R^* u_0, u_0)_{H_0} \le C_R (A_0^{-1} u_0, u_0)_{H_0}, \forall u_0 \in H_0$$

که R^* عملگر الحاقی R نسبت به ضرب‌های داخلی $(.,.)_{H_0}$ و $(.,.)_H$ است:

$$R^* : H_0 \to H$$

$$(R^* u_0, v)_H = (u_0, Rv)_{H_0}$$

پیش شرط ساز مورد نظر ما دارای فرم کلی $RA^{-1}R^*$ است که پیش شرط ساز فضای کمکی به جای A، عملگرA بجای A_0 و $H_h(\Omega^h)$ بجای H_0 قرار می‌گیرند که شرایط مورد نیاز در لم فوق را دارا هستند و سایر عملگرها و فضاهای کمکی برای

بکارگیری این لم در بخش بعد ساخته می‌شوند[۶]و[۷]:

۳-۳- ساخت مسأله کمکی

برای ساخت مسأله کمکی ، دامنه Ω در مربع Π نشانده می‌شود و فرض می‌شود K_i بیان گر اجتماع مثلث‌هایی از Ω باشد که رأس z_i را در اشتراک دارند ، d_i ماکسیمم شعاع دایره محاطی در K_i و N تعداد گره‌های Ω^h باشد.

شبکه کمکی Π^h با طول گام $\bar{h}$ به طوری که:

$$\bar{h} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \min_{i=1,\dots,N}(d_i) \qquad (۱۴)$$

ساخته می‌شود و فرض می‌شود که $\bar{h}=l.2^{-J}$ که l طول ضلع مربع Π و J عدد صحیح مثبتی است که به طور مناسب انتخاب شده باشد ($J=(\log(l/\bar{h})/\log(2))+1$).

گره‌های Π^h توسط:

$$Z_{ij}=(x_i,y_j) \quad , \quad i,j=1,\dots,L$$

وسلول‌های آن توسط:

$$D_{ij}=\{(x,y): x_i \le x < x_{i+1}, y_j \le y < y_{j+1}\}$$

نمایش داده می‌شوند و در نتیجه:

$$\Pi^h=\bigcup_{i,j=1}^{L-1} D_{ij}$$

که بااستفاده از قطرهای این سلولها، شبکه Π^h مثلث بندی می‌شود.

قابل ذکر است که شرط (۱۴) ایجاب می‌کند که در هر سلول شبکه Π^h بیش از یک گره از Ω^h قرار نگیرد.

Q^h کوچک ترین شکل شامل سلول‌های D_{ij} و Ω^h در نظر گرفته می‌شود و S^h مجموعه گره‌های مرزی آن که به دو زیر مجموعه S_1^h و S_0^h تقسیم می‌شود:

اگر $\bar{D}_{ij}\bigcap\Gamma_0 \ne \phi$ باشد همه گره‌های $D_{ij}\bigcap S^h$ در S_0^h قرار می‌گیرند و $S_1^h=S^h \setminus S_0^h$.

$H_h(Q^h)$ فضای توابع پیوسته حقیقی است که روی مثلث‌های Q^h خطی بوده و در گره‌های S_0^h صفر باشند.

عملگرتصویر

$$\Re: H_h(Q^h) \to H_h(\Omega^h) \qquad (۱۵)$$

وعملگر

$$\Lambda: H_h(\Omega^h) \to H_h(Q^h)$$

به صورت زیر تعریف می‌شوند:

عملگر $\Re$ به ازای هر تابع شبکه $U^h \in H_h(Q^h)$ یک تابع $u^h \in H_h(\Omega^h)$ به این صورت نظیر می‌کند که اگر z_l یک رأس در مثلث بندی Ω^h باشد و $z_l \in D_{ij}$ آنگاه:

$$u^h(z_l)=(\Re U^h)(z_l)=U^h(Z_{ij})$$

و اگر $z_l \in \Gamma_0^h$ آنگاه $u^h(z_l)=0$.

حال

$$R: H_h(\Pi^h) \to H_h(\Omega^h)$$

به عنوان عملگر توسیع $\Re$در نظر گرفته می‌شودکه اگر گره‌های Π^hبه دو قسمت تقسیم شوند؛ یک دسته گره‌های Q^hهمراه با گره‌های مرزی S^h ودسته دیگر بقیه گره‌هاآنگاه R دارای نمایش ماتریسی زیر است:

$$R=(\Re,0)$$

که $\Re$نمایش ماتریسی عملگر $\Re$ و 0ماتریس صفر نظیر به گره‌های باقی مانده است.

عملگر Λ به ازای هر تابع $u^h \in H_h(\Omega^h)$ یک تابع $U^h \in H_h(Q^h)$ نظیر می‌کند به طوری که U^h در گره های $Z_{ij} \in S_0^h$ صفر بوده و در Z_{ij} هایی که رأسی از Ω^h مانند z_l در D_{ij} وجود داشته باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U^h(Z_{ij})=(\Lambda U^h)(Z_{ij})=U^h(z_l)$$

ودر بقیه گره‌ها نزدیک ترین رأس z_l از Ω^h انتخاب شده و $U^h(Z_{ij})=u^h(z_l)$ و اگر بیش از یک رأس جزء نزدیک ترین رأس به Z_{ij} باشد می‌توان هر کدام از آن‌ها را انتخاب کرد.

بنابر قضیه وجود تابع شبکه عملگر توسیع $T: H_h(\Omega^h) \to H_h(\Pi^h)$ موجود و بطور یک نواخت کراندار است[۲].

درنهایت عملگر کمکی A_Q روی $H_h(Q^h)$به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A_Q U,V)=\int_{Q^h}((\nabla U^h,\nabla V^h)+U^h V^h)\ dxdy \quad , \quad \forall U^h,V^h \in H_h(Q^h) \qquad (۱۶)$$

(∇Uو∇V نمایش برداری U^h و V^h بوده) که یک عملگر متقارن، معین مثبت وپیوسته روی $H_h(Q^h)$ است، که این در حقیقت همان مسأله کمکی است.

۳-٤- کاربرد لم فضای فرضی

قضیه ۳- مقادیرثابت ومثبت C_1 و C_2 مستقل ازh وجود دارند به طوری که:

$$C_2(A^{-1}u,u) \le (\Re A_Q^{-1}\Re^* u,u) \le C_1(A^{-1}u,u) \quad , \quad \forall u \in R^N$$

که A و $\Re$ و A_Q به ترتیب عملگرهای بیان شده در (۱۲) ، (۱۵) و (۱۶) بوده و $\Re^*$، ترانهاده $\Re$ می‌باشد [۷]و[۱۲].

در اینجا Π^h به عنوان یک شبکه سلسله مراتبی نگاه خواهد شد و $H_h(\Pi^h)$ فضای توابع قطعه‌ای خطی نسبت به مثلث بندی Π^h است که روی صفر باشند؛

دنباله‌ای از شبکه‌های
$\Pi_0^h, \Pi_1^h, \ldots, \Pi_J^h = \Pi^h$
با طول گام‌های $h_0 = l, h_1 = 2^{-1}l, \ldots, h_J = \overline{h} = 2^{-J}l$ در نظر گرفته می‌شود.

این شبکه‌ها نیز مانند Π^h مثلث بندی شده و دنباله فضاهای المان متناهی متناظر با آنها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$W_0^h \subset W_1^h \subset \ldots W_J^h = H_h(\Pi^h)$$

هر تابع $U^h \in H_h(Q^h)$ در تناظر با یک تابع $\widetilde{U}^h \in H_h(\Pi^h)$ است

$$\widetilde{U}^h(Z_{ij}) = \begin{cases} U^h(Z_{ij}) & , \quad Z_{ij} \in Q^h \\ 0 & , \quad Z_{ij} \in \Pi^h \setminus Q^h \end{cases}$$

اگر پیش شرط سازهای پایه‌های سلسله مراتبی (HB) و پیش شرط ساز چند مرحله‌ای BPX که آنها را با نماد C_Π^{-1} نشان می‌دهیم برای شبکه کمکی Π^h به دست آورده شوند با توجه به تناظر فوق خواهیم داشت:

$$C_\Pi^{-1}\widetilde{U}^h = C_Q^{-1}U^h$$

که C_Q^{-1} بیان گر تحدید پیش شرط ساز C_Π^{-1} روی Q^h است [۷]و[۱۰].

عملگر $R_N : H_h(\Pi^h) \to H_h(Q^h)$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(R_N U^h)(Z_{ij}) = \begin{cases} U^h(Z_{ij}) & , \quad \forall \; Z_{ij} \in Q^h \\ 0 & , \quad Z_{ij} \end{cases}$$

و دارای نمایش ماتریسی $(I,0)$ است که I ماتریس همانی نظیر به گره‌های Q^h همراه با گره‌های S^h بوده و 0 ماتریس نظیر به گره‌های $\Pi^h \setminus Q^h$ و قضیه زیر برقرار است [۷]،[۱۰]و[۱۳]؛

قضیه ۴- مقادیرثابت ومثبت C_3 و C_4 مستقل ازh وجود دارند به طوری که:

$$C_4(A_Q^{-1}U,U) \le (R_N C_\Pi^{-1} R_N^* U,U) \le C_3(A_Q^{-1}U,U) \quad , \quad \forall U \in Q^h$$

[۷]،[۱۰]و[۱۳].

قضیه ۵- مقادیرثابت ومثبت C_5 و C_6 مستقل ازh وجود دارند به طوری که:

$$C_6(A^{-1}U,U) \le (\Re C_Q^{-1} \Re^* U,U) \le C_5(A^{-1}U,U) \quad , \forall U \in R^N$$

[۷]،[۱۴]و[۱۵].

نتیجه ۳- مقادیرثابت ومثبت C_7 و C_8 مستقل ازh وجود دارند به طوری که:

$$C_8(A^{-1}U,U) \le (RC_\Pi^{-1}R^*U,U) \le C_7(A^{-1}U,U) \quad , \quad \forall U \in R^N$$

بنابر نتیجه (۳) رابطه طیفی (۱۳)به طور معکوس برای $C^{-1} = RC_\Pi^{-1}R^*$ برقرار است.

در حالتی که C_Π^{-1} پیش شرط ساز چند مرحله‌ای BPX باشد، $RC_\Pi^{-1}R^*$ پیش شرط ساز ساختگی BPX نامیده می‌شود و با نماد $artBPX$ نمایش داده می‌شود که بنابر قضیه (۲) در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$k((RC_\Pi^{-1}R^*)A) \le C_0$$

که C_0 ثابت مثبت و مستقل از J و h_J است[۶]،[۳].

هم چنین در حالتی که C_Π^{-1} پیش شرط سازهای پایه‌های سلسله مراتبی (HB)باشد، $RC_\Pi^{-1}R^*$ پیش شرط ساز ساختگی پایه‌های سلسله مراتبی یا پیش شرط ساز ساختگی Ys (Yserentant) نامیده می‌شود و با نماد $artYs$ یا $artHB$ نمایش داده می‌شود که بنابر قضیه (۱)در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$k((RC_\Pi^{-1}R^*)A) \le C_{00}(1+J)^2$$

که C_{00} ثابت مثبت و مستقل از J و h_J است[۶]،[۳].

۳-۵- نتایج عددی بخش ۳

در این بخش تکنیک فوق بر روی چهار مسأله پیاده سازی شده است:

نتایج مسأله اول بخشی از نتایج بیان شده در [۶] می‌باشد که به وسیله *HP 9000/889 K460 workstation* با یک حافظه بالا (*1 GB*) روی یک 7 MFlop به کمک نرم افزارهای موجود در زمینه چند مرحله‌ای محاسبه شده است و شبیه سازی‌های سه مسأله بعد به دلیل عدم دست رسی به این نرم افزارها توسط نرم افزار MATLAB صورت گرفته است که توسط مولفین این مقاله نوشته شده و از مراحل زیر تشکیل می‌شود :

۱_ماتریس ناشی از گسسته سازی عناصر متناهی روی شبکه بدون ساختار

۲_تعیین طول گامhبه طوری که در هر سلول از شبکه کمکی بیش از یک گره از شبکه اولیه قرار نگیرد

۳_ساخت اپراتوری که یک تناظر یک به یک بین نقاط گره ای شبکه اولیه و نقاط گره ای شبکه کمکی ایجاد کند

۴_ساخت پیش شرط سازهای HB , BPX برای شبکه کمکی

نتایج این مثال‌ها در جداول زیر به طور خلاصه گزارش می‌شوند، در این جدول ها Nبیان گر تعداد گره‌های شبکه بندی دلخواه L^2 ،Ω^h تعداد گره‌های شبکه بندی ساخت یافته از مربع شامل دامنه Ω و J عدد صحیح مثبتی است که از رابطه (۱۴)به دست می‌آید.

ستون A تعداد تکرارها در حل دستگاه به دست آمده از

گسسته سازی المان متناهی مسأله روی شبکه بندی دلخواه به روش گرادیان مزدوج را نشان می‌دهد، ستون *artBPX* بیان گر تعداد تکرارها در روش گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده توسط پیش شرط ساز *BPX* و ستون *artHB* بیان‌گر تعداد تکرارها در روش گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده توسط پیش شرط ساز *HB* است.

مثال ۲

$$-\mathrm{div}(a(x)\ \mathrm{grad}(u(x))) = 0 \quad , \text{in} \quad \Omega = SFB$$

که در آن

$$a(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega \\ 1, x \in S \\ 10^3, x \in F \\ 10^6, x \in B \end{cases}$$

$$u = x_1 + x_2 + 1 \ , \text{on} \quad \Gamma_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \ , \ \text{on}\ \Gamma_1 = \partial\Omega / \Gamma_0$$

Γ_0: قسمت خارجی $\partial\Omega$ در شکل (۵)

Γ_1: قسمت داخلی $\partial\Omega$ در شکل (۵)

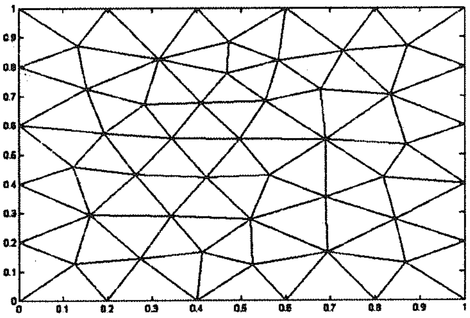
شکل(۵)

جدول (۳)

N	L	J	artBPX	artHB
۵۰	۱۰۸۹	۵	۷	۸
۱۵۷	۴۲۲۵	۶	۱۲	۱۴
۵۳۶	۱۶۶۴۱	۷	۱۳	۱۸
۱۹۵۴	۶۶۰۴۹	۷	۱۷	۲۴
۷۴۳۰	۲۶۳۱۶۹	۸	۲۷	۳۷

مثال ۳

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 1 & , \ in \quad \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ U = 0 & , \ on \quad \partial\Omega \end{cases}$$



شکل (۶):شبکه بندی بدون ساختارروی مربع واحد

جدول (۴):تعداد تکرار ها در روش گرادیان مزدوج روی مربع واحد با شرایط مرزی دیریکله

N	*L*	*J*	*A*	*artBPX*	*artHB*
۲۷	۸۱	۳	۱۸	۸	۱۱
۵۴	۲۸۹	۴	۳۳	۹	۱۲
۸۹	۱۰۸۹	۵	۴۶	۱۱	۱۳
۱۷۷	۱۰۸۹	۵	۶۸	۱۲	۱۵
۲۳۱	۱۰۸۹	۵	۷۷	۱۴	۱۶
۷۲۷	۴۲۲۵	۶	۱۴۱	۱۵	۱۸

مثال ۴

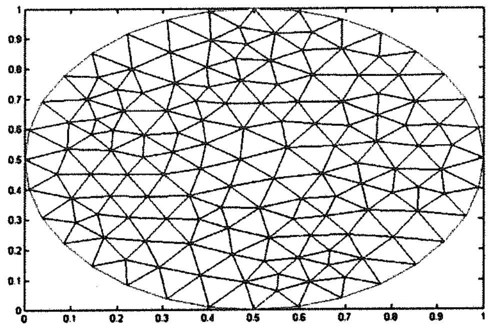
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0 & , \ in \quad \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ U = 0 & , \ on \quad y = 1 \\ U = 1 & , \ on \quad x = 1 \\ U = 0 & , \ on \quad x = 0 \ , \ y = 0 \end{cases}$$

جدول (۵):تعداد تکرار ها در روش گرادیان مزدوج روی مربع واحد با شرایط مرزی مختلط

N	*L*	*J*	*A*	*artBPX*	*artHB*
۲۷	۸۱	۳	۳	۹	۱۲
۵۴	۲۸۹	۴	۴۵	۱۱	۱۴
۸۹	۱۰۸۹	۵	۶۶	۱۳	۱۵
۱۷۷	۱۰۸۹	۵	۹۰	۱۴	۱۹
۲۳۱	۱۰۸۹	۵	۱۱۹	۱۶	۲۲
۷۲۷	۴۲۲۵	۶	۲۱۶	۱۸	۲۶

مثال ۵

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 1 & , \ in \quad \Omega = \{x^2 + y^2 < 1\} \\ U = 0 & , \ on \quad \partial\Omega \end{cases}$$



شکل (۷):شبکه بندی بدون ساختار روی دایره واحد

جدول (۶):تعداد تکرار ها در روش گرادیان مزدوج روی دایره واحد با شرایط مرزی دیریکله

N	L	J	A	artBPX	artHB
۲۵	۸۱	۳	۵	۵	۴
۴۱	۲۸۹	۴	۱۲	۹	۹
۶۲	۲۸۹	۴	۳۵	۱۱	۱۲
۱۴۴	۱۰۸۹	۵	۶۳	۱۲	۱۶
۱۸۵	۱۰۸۹	۵	۷۴	۱۳	۱۷
۵۳۹	۴۲۲۵	۶	۹۹	۱۵	۱۹

با مقایسه تعداد تکرارها در ستون‌های *artBPX* و *artHB* با تعداد تکرارها در ستون *A* در جداول فوق، کارایی این تکنیک در ساخت پیش شرط سازهای چند مرحله‌ای به منظور افزایش سرعت همگرایی در روش تکراری گرادیان مزدوج روشن‌تر می‌شود که بنابر تئوری‌های گفته شده قابل پیش بینی بود.

در این قسمت نیز محاسبات مربوط به ساخت پیش شرط سازها به صورت موازی امکان پذیر است .

قابل ذکر است که این تکنیک با تئوری‌های مشابه برای حالت سه بعدی نیز قابل استفاده بوده که انجام این کار مستلزم وجود نرم افزارهایی است که قابلیت تولید شبکه‌های سه بعدی را داشته باشند.

٤- منابع

[۱] H. Yserentant, On the Multi Level Splitting of Finite Element Spaces. Numerische Mathematik, 49, pp 379-412, 1986.

[۲] J. H. Bramble, J. E. Pasciak and J. Xu, Parallel multilevel preconditioners. Mathematics of Computation, 55 pp 1-22 1990.

[۳] S. C. Berenner and L. R. Scott, The mathematical Theory of Finite Element Methods. Second Edition, United States of America , Springer Verlag New York, Inc, 2002.

[۴] B. D. Reddy,.Introduction Functional Analysis. United States of America , Springer Verlag New York, Inc, 1998.

[۵] R. E. Bank and J. Xu, The Hierarchical Basis Multigrid Method and Incomplete LU decomposition. Contemporary Mathematics, 180, pp. 163-174, 1994.

[۶] G. Golbisch, S. V. Nepomnyaschikh, The hierarchical preconditioning having unstructured grids. Tu Chemnitz -Zwickau, 1997.

[۷] S. V. Nepomnyaschikh, Preconditioning Operators on Unstructured Grids. Weierstraß Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, 1995.

[۸] J. Xu, The Auxiliary Space Method and Optimal Multigrid Preconditioning Techniques for Unstructured Grids. submitted to Computing, 1994.

[۹] M. Ainsworth, J. Levesley, M. Marletta and W. A. Light, Wavelets, Multileval Methods and Elliptic PDEs. Oxford University, New York, Inc, 1997.

[۱۰] L. A. Oganesyan and L. A. Rukhovets, Variational Difference Methods for Solving Elliptic Equations. Izdat. Akad. Nauk Arm. SSR, 1979.

[۱۱] S. V. Nepomnyaschikh, Mesh Theorems of Traces, Normalization of Function Traces and Their Inversion. Sov. J. Numer. Anal. Math. Model., 6, pp 223-242, 1991.

[۱۲] G. Golbisch, The hierarchical preconditioning on Unstructured Three- Dimensional Grids with Locally Refined Region . Jornal of Computing And Applied Maehematics, 150, pp. 265-282, 2003.

[۱۳] G. P. Astrachanzev, Fictitious Domain Method for the Second_Order Elliptic Equation with Natural Boundary Conditions. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz, 18, pp.118-125, 1978.

[۱۴] P. Oswald, Multilevel Finite Element Approximation, Theory and Application. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[۱۵] S. V. Nepomnyaschikh, Optimal Multilevel Extension Operators. TU Chemnitz Zwickau, 1995.