مسیر بهینه در ناوبری تعقیب محض به عنوان ژئودزیک فینسلری

مهدی رفیعی راد [i]؛ بهروز بیدآباد [ii]

چکیده

در این مقاله به مطالعه ناوبری تحت قانون تعقیب محض می‌پردازیم. ابتدا این قانون حرکت را به شکل یک مساله هندسی بیان و متریک مرتبط با آن را محاسبه می‌کنیم؛ سپس، نشان می‌دهیم که متریک حاصل از نوع فینسلری است و در نتیجه، مسیرهای بهینه از نظر کوتاه ترین زمان گذر برای شیء تعقیب کننده در این قانون، ژئودزیک این متریک فینسلری هستند. روش ابداعی در این مقاله - یعنی روش بدست آوردن متریک مناسب برای مطالعه مسیرهای بهینه در قانون تعقیب محض- می‌تواند برای پیدا کردن متریک‌های مرتبط با قوانین دیگر حرکت نیز استفاده شود. در خاتمه، یک مثال عددی ارائه و مسیرهای بهینه با استفاده از برنامه میپل رسم می‌شود.

کلمات کلیدی

متریک فینسلری، هدایت، تعقیب محض، ناوبری، مسیر بهینه .

Optimal Path in Pure Pursuit Navigation as Finsler Geodesic

M. Rafie Rad ؛ B. Bidabad

ABSTRACT

In this paper, we study the Pure Pursuit navigation rule. We first express this navigation rule as a geometric problem and compute the related metric. Next, we show that, the obtained metric is a Finslerian one. Therefore the time optimal paths of the pursuer are geodesics of this Finsler metric. The introduced method in this paper– method of finding suitable metric for time optimal trajectories in Pure Pursuit navigation- can be used for finding the related metric of other navigation rules. Finally an example with maple code is given.

KEYWORDS

Finsler metric, guidance, pure pursuit, navigation, optimal path.

۱- مقدمه

در این مقاله مساله ناوبری با هدف متحرک تحت قانون تعقیب محض مطالعه شده است. در این قانون، شیء تعقیب کننده همواره طوری حرکت می‌کند که جهت حرکت آن به سمت هدف باشد. در اینجا نشان می‌دهیم که این مساله را می‌توان در قالب یک مساله در هندسه فینسلر یا به عبارت دیگر، یک متریک فینسلری بیان کرد. ذکر این نکته لازم است که، اهمیت این متریک جدید بیشتر از آنجا ناشی می‌شود که این متریک، به طور طبیعی و از راه حل مساله به صورت معکوس بدست آمده است و در نتیجه کاملترین، تعمیم برای حل این نوع مساله است؛ از این رو، مسیرهای بهینه برای موشک‌های زمین به هوایی که تحت قانون تعقیب محض حرکت می‌کنند، ژئودزیکهای این متریک هستند. در اینجا از

[i] دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی امیر کبیر، m_rafiee_rad@cic.aut.ac.ir، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر.

[ii] استادیار دانشگاه صنعتی امیر کبیر، bidabad@aut.ac.ir، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر.

دو دیدگاه مختلف مساله ناوبری مطالعه می‌شود، یکی از نظر هندسی؛ که خود یک مساله ریاضیات محض است و دیگری از نظر کاربردی؛ که به یک درک جدید از مسئله ناوبری منجر می‌شود. از دیدگاه ریاضیات محض، پدیده ناوبری در هندسه اخیرا پیشرفت‌های چشمگیری داشته است [۴] و همان طور که اشاره شد، فرایند هدایت از جهاتی تعمیم فرایند ناوبری است. علاوه بر آن، مورد دیگری که بر اهمیت این کار از دیدگاه ریاضیات محض می‌افزاید، یافتن کاربرد جدیدی از *هندسه فینسلر*[۳] در مهندسی است. دیدگاه دوم این مقاله مطالعه مساله ناوبری به عنوان مساله ای است که کاربردهای فراوانی در مهندسی و صنایع دارد. پس سعی شده است که تا جای ممکن از اصطلاحات فنی به جای تعاریف ریاضی محض استفاده شود. از نظر کاربردی، شیء هدایت شده می‌تواند یک خودرو، قایق، موشک یا یک شناور دریایی و ... باشد که تحت قانون تعقیب محض حرکت می‌کند. فرایند ناوبری بر اساس موقعیت و سرعت نسبی هدف نسبت به شیء هدایت شونده بنا شده است. در متون مربوط به این شاخه، انواع متنوعی از ناوبری وجود دارد که هر یک از آنها مزایا و معایب خاص خود را دارند. عمده کاربرد هدایت در تسلیحات است.

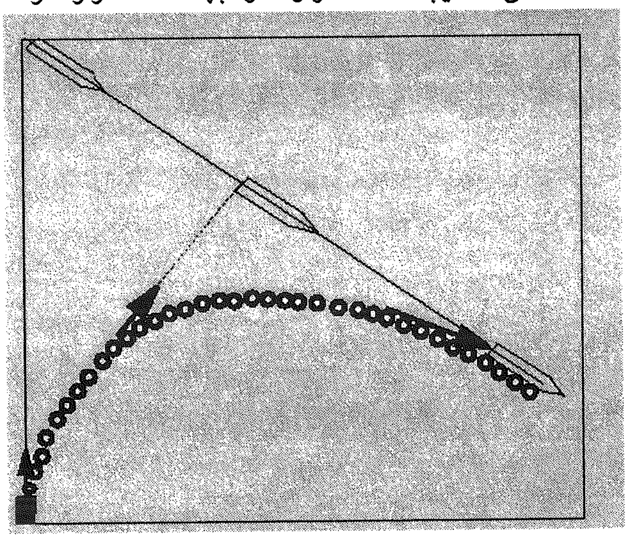
کاربرد هدایت از سال ۱۸۷۰ آغاز شده است، زمانی که *ورنر فون زیمنس* طرح پیشنهادی به نام قانون ناوبری تعقیب محض یا به اختصار قانون ناوبری (PP) خود را به وزارت جنگ پروس ارائه کرد. اساس این قانون بر این واقعیت استوار است که در هر لحظه جهت شیء تعقیب کننده به سمت هدف قرار دارد، (شکل (۱)). این روش تا سال ۱۹۱۶ مهم ترین روش هدایت تسلیحات در تاریخ بوده است. قانون ناوبری (PP)[۵] اولین بار در خلال جنگ جهانی دوم در دهه ۱۹۴۰ استفاده شد و از آن زمان تاکنون دانش مربوط به دستگاه های آشکار سازی اهداف و کنترل تسلیحات هدایت شونده پیشرفت‌های قابل ملاحظه ای کرده است که در نظریه کنترل مطالعه می‌شود. در مقالات هندسی، مسئله ناوبری در هندسه ریمانی به طور دقیق در مراجع [۵] و [۶] مطالعه شده است.

در این مقاله، ابتدا قانون مساله هدایت (PP) را تحت تاثیر یک عامل خارجی؛ مانند جریان باد در مساله ناوبری با هدف ساکن به کار می‌بریم. مساله جالب توجه این است که پس از انجام محاسبات، به متریک جدیدی از نوع متریک‌های فینسلری دست می‌یابیم. این متریک در متون هندسی به متریک ماتسوموتو[۶] موسوم است [۹]. در نتیجه، مسیرهای با کوتاه‌ترین زمان گذر، که شیء تعقیب کننده در این شرایط باید بپیماید تا به هدف برسد، ژئودزیک‌های این متریک فینسلر است.

تکنیک به کار رفته در این مقاله، مشابه کاری است که در مرجع [۵] انجام شده است با این تفاوت که اولاً، در این مقاله هدف مورد نظر، متحرک فرض شده است؛ ثانیاً، در آن مقاله اساس کار بر این واقعیت استوار بوده است که بردار سرعت در هر نقطه با یک بردار دیگر (سرعت باد) جمع می‌شود. در حالی که در قانون ناوبری (PP) که در این مقاله به کارمی‌رود، فرض می‌شود که بردار سرعت در هر نقطه با تصویر یک بردار دیگر (تصویر سرعت هدف) روی آن، جمع می‌شود.

۲- قانون ناوبری تعقیب محض[۷] [۸].

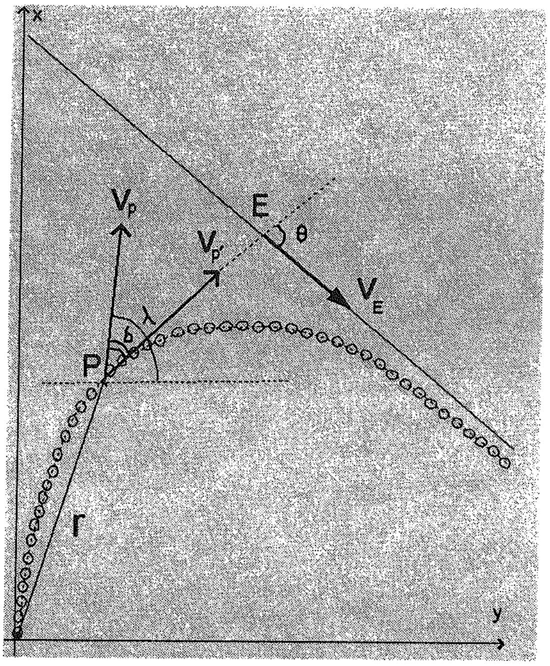
یک چارچوب[۸] مرجع زمینی را به عنوان چارچوب لخت در نظر می‌گیریم (شکل ۱). مسیر حرکت شیء تعقیب کننده در قانون هدایت (PP) به این صورت تعیین می‌شود که بردار سرعت شیء تعقیب کننده همواره در جهت هدف قرار دارد.



شکل (۱): نمودار مسیر هدف و تعقیب کننده درهدایت PP

یک رادار[۱۱] در لحظات معینی موقعیت و سرعت هدف را به شیء تعقیب کننده مخابره می‌کند و با توجه به این داده‌ها می‌توان در چارچوب قانون مشخصی، شیء تعقیب کننده را پس از دریافت داده‌های فوق هدایت کرد؛ بهمین دلیل مسیر حرکت تعقیب کننده در شکل (۱)به طورناپیوسته ترسیم شده است.

فرض کنیم در (شکل۲) P و E به ترتیب نماینده تعقیب کننده و هدف است و در هر لحظه، P و E به ترتیب دارای بردارهای سرعت v_P و v_E باشند. بردار موقعیت شئ P نسبت به چارچوب مرجع فوق را با نماد r نشان می‌دهیم. همچنین پاره خط PE را *خط دید*[۱۰] شی ء P می‌نامیم.



شکل (۲):نمودار موقعیت تعقیب کننده نسبت به هدف (δ، λ و θ به ترتیب زاویه های بین v_P وامتداد PE، v_P و محور افقی و v_E و امتداد PE می باشند.)

منظور از این قانون مشخص، برخورد شیء تعقیب کننده به هدف است. در حالت کلی بردار v_P با امتداد PE هم جهت نیست و انحرافی به اندازه زاویه δ دارد. هنگامی که از قانون تعقیب محض استفاده کنیم این زاویه برابر با صفر است و بردار v_P در جهت v_P' قرار خواهد گرفت. منحنی مماس بر ای این بردار در هر نقطه مسیر شیء تعقیب کننده را تعیین می‌کند. فرض کنیم پس از گذشت زمان Δt به اندازه Δr تغییر مکان داده باشد. اگر Δt به اندازه کافی کوچک باشد می‌توان فرض کرد که v_P و v_E در این مدت ثابت هستند. قاعده اول برای رسانیدن P به E این است که تغییر مکان P، یعنی Δr با تفاضل تغییر مکان‌های P و E در امتداد خط دید PE برابر باشد. یعنی $\Delta r = (v_P \cos\delta - v_E \cos\theta)\Delta t$. در نتیجه با تقسیم کردن طرفین رابطه اخیر بر Δt و حد گیری وقتی که Δt به صفر میل می‌کند، داریم:

$$\dot{r} = v_p \cos\delta - v_E \cos\theta \qquad (۱)$$

که در آن $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ فرض شده است. همچنین در امتداد عمود بر خط دید، تغییر مکان تقریبا" برابر با Δr است. قاعده دوم برای رساندن P به E عبارت است از:

$$r\Delta\lambda = (v_P \sin\delta - v_E \sin\theta)\Delta t \qquad (۲)$$

بار دیگر با تقسیم کردن طرفین بر Δt و حدگیری؛ وقتی که Δt به صفر میل کند، خواهیم داشت:

$$r\dot{\lambda} = (v_P \sin\delta - v_E \sin\theta) \qquad (۳)$$

که در آن $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ فرض شده است.

روابط (۱) و (۲) در واقع قانون مشخص رساندن P به E را تشکیل می‌دهند. به کمک رابطه (۱) و داده‌های رادار موقعیت بعدی P مشخص می‌شود و رابطه (۲) زاویه P را در آن موقعیت مشخص می‌کند. این قانون مشخص را اصطلاحا *قانون ناوبری* می‌نامیم. برای سادگی در اجرای هدایت، صورتهای ساده شده‌ای از این قانون موجود است. یکی از آنها که مورد بحث اصلی این مقاله قرار گرفته است قانون ناوبری *تعقیب محض* یا به اختصار،(PP) نام دارد. در این قانون، زاویه d صفر در نظر گرفته می‌شود. از این رو شیء تعقیب کننده، همواره رو به هدف قرار دارد؛ لذا با توجه به روابط (۱) و (۳)، قانون ناوبری (PP) بوسیله دو رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\dot{r} = v_p - v_E \cos\theta \qquad (۴)$$

$$r\dot{\lambda} = -v_E \sin\theta \qquad (۵)$$

این روابط به ترتیب قوانین اول و دوم ناوبری (PP) نامیده می‌شوند.

شایان ذکر است که در این فرایند بهینه سازی، مسیرهای هدف و تعقیب کننده ،دارای پارامتر یکسان دارند.

۳- تعبیرهندسی قانون اول ناوبری با استفاده از تغییر شکل اینديکاتریکس

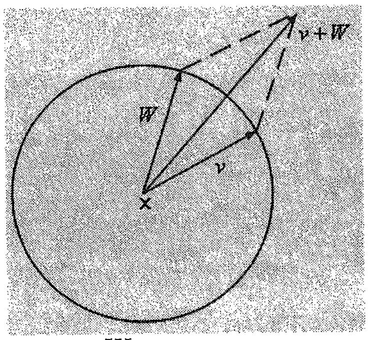
منظور از *اینديکاتریکس* در نقطه x مکان هندسی نقاطی است که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$I_x = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,y) = 1\}$$

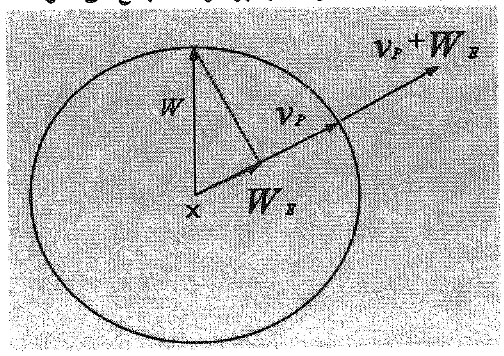
که در آن $d(x,y) = \|y - x\|$ فاصله نقطه x از y است و بر حسب متریک‌های فینسلری، ریمانی و یا اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود. در حالت خاص متریک اقلیدسی در صفحه، اینديکاتریکس در نقطه x یک دایره به مرکز x و شعاع واحد است.

در مقاله [۶] مساله به این صورت مطرح شده است که شیء P در یک صفحه با بردار سرعت v در حال حرکت است و در یک ناحیه معین جریان بادی؛ که آن را با بردار W نشان می‌دهیم، در هر نقطه x از این ناحیه بر شیء P اثر می کند. در اینجا مشاهده می‌شود که جریان باد در هر لحظه سرعت Wرا به سرعت v، اضافه می‌کند. شکل(۳-الف) را مشاهده کنید. در فاصله زمانی به اندازه کافی کوتاه، P دارای

بردار سرعت $v+W$ خواهد بود. بدین صورت، بدون در نظر گرفتن W ، P در هر واحد از زمان طول بردار v را می‌پیماید. اما اگر W جریان یابد، آنگاه بر خلاف حالت قبل، P دارای تغییر مکان $v+W$ است. با استفاده از این فرایند، در مقاله [۶] متریک فینسلری مناسبی از نوع *راندرز* محاسبه و ارائه شده است.



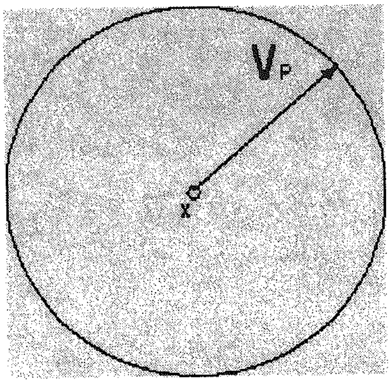
(الف) وقتی که سرعت با بردار W جمع می شوند.



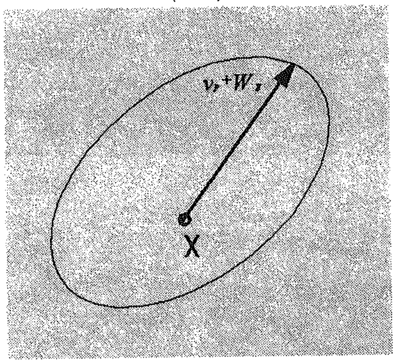
(ب) وقتی که سرعت با بردار تصویر W روی بردار سرعت جمع می شوند.

شکل (۳): تاثیر عامل خارجی روی بردارهای سرعت

در اینجا مطابق با قانون ناوبری(PP)، سرعت v_P در هر لحظه باید با بردار $W_E(x,v_P) = -\mathrm{Proj}_{v_P}W$ جمع شود. شکل (۳-ب) را مشاهده کنید. بدون وجود W، در هر واحد از زمان، P طول ثابت $\|v_P\|$ را طی می‌کند، پس ایندیکاتریکس حاصل از مکان هندسی انتهای بردار v_P در جهت‌های مختلف در واحد زمان، یک دایره است، (شکل ۴- الف). در حالی که با وجود بردار W_E فواصل طی شده بوسیله P در واحد زمان، مساوی $\|v_P+W_E\|$ بوده و ایندیکاتریکس حاصل، دیگر دایره نخواهد بود و تغییر شکل پیدا می‌کند، (شکل ۴- ب).



(الف)



(ب)

شکل (۴) : تغییر ایندیکاتریکس از دایره واحد به شکلی دیگر

تغییر شکل ایندیکاتریکس، حکایت از برقراری هندسه‌ای نااقلیدسی دارد، به این معنی که نرم‌های تعریف کننده دایره‌های تغییر شکل یافته، معرف متریک‌های متفاوتی با متریک‌های اقلیدسی هستند. در ادامه نشان می‌دهیم که این متریک‌ها در رده متریک‌های فینسلری قرار می‌گیرد. به بیان دیگر، ایندیگاتریکس مربوط به بردار سرعت در قانون اول هدایت (PP) را به دست آورده و از روی آن متریک مربوطه را محاسبه می‌کنیم.

۴- تعاریف اولیه در فضای فینسلر [۴]، [۶]

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n، بعدی باشد. برای تعاریف مقدماتی در مورد منیفلدها به زبان فارسی کتاب [۱] و در مورد منیفلدهای فینسلری مراجع [۲] و [۳] را ببینید. فضای مماس در $x \in M$ ، را با T_xM ، نمایش می‌دهیم و $TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$ را کلاف مماس روی M تعریف می‌کنیم. هر عضو TM به صورت زوج مرتب (x^i, y^i) نمایش داده شده است که در آن $x \in M, y \in T_xM$. دوگان T_xM را با $T^*{}_xM$ و کلاف دوگان M را با $T^*M := \bigcup_{x\in M} T^*_xM$ نمایش می‌دهیم. یک ساختار فینسلری روی M عبارت از یک تابع با خواص زیر است:

۱) F روی $TM_0 := TM \setminus 0$، دیفرانسیل پذیر است.

۲) به ازای هر $\lambda > 0$ ، داریم : $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$.

۳) ماتریس هسین تابع F؛ یعنی $g_{ij} := \dfrac{\partial^2(F^2)}{2\partial y^i \partial y^j}$ ، در TM_0 ، مثبت معین است. [۴] ، [۶].

در این صورت (M,F) را یک فضای فینسلری [10] می‌گوییم. با استفاده از این تابع یک نرم تعریف می‌شود و زمانی که این نرم به صورت ضرب داخلی روی فضای مماس نمایش داده شود،متریک فینسلری مورد نظر متریک ریمانی نامیده می‌شود. بنابراین یک متریک فینسلر تعمیم یک متریک ریمانی است.

فرض کنید: $\pi : TM \to M$ یک نگاشت تصویر طبیعی باشد ، داریم $\pi_* : TTM \to TM$؛ حال قرار می‌دهیم:

$$\ker \pi_{*_v} = \{z \in TTM \mid \pi_{*_v}(z) = 0\}.$$

یک فیبره برداری عمودی روی M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VTM = \bigcup_{v \in TM} \ker \pi_*.$$

یک التصاق غیر خطی یا توزیع افقی عبارت است از یک توزیع HTM،مکمل VTM روی TTM؛ پس وجود التصاق غیر خطی، امکان تجزیه زیر را تضمین می‌کند:

$$TTM = VTM \oplus HTM,$$

کلاف برگردان π^*TM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi^*TM = \{(u,v) \in TM \times TM \mid \pi(u) = \pi(v)\},$$

با استفاده از دستگاه مختصات موضعی (x^i, y^i) روی TM ، پایه موضعی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ روی TTM را داریم حال یک پایه موضعی وفق داده شده با تجزیه فوق را به صورت $\{X_i, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ در نظر می‌گیریم که:

$$X_i := \frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^k(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k} \in \chi(HTM),$$

و $\frac{\partial}{\partial y^i} \in \chi(VTM)$، که در آن $N_k^i(x,y)$ها توابعی روی TM هستند که ضرایب التصاق غیر خطی نامیده می‌شوند. همچنین $(dx^i, \delta y^i)$ را پایه دوگان پایه موضعی $\{X_i, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ در نظر می‌گیریم که در آن:

$$\delta y^i = dy^i + N_k^i(x,y)dx^k$$

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر، VTM کلاف برداری عمود، HTM یک التصاق غیرخطی روی TM و ∇ یک التصاق خطی روی VTM باشد. آنگاه زوج (∇ ، HTM) یک التصاق فینسلری [11] نامیده می‌شود.

. ژئودزیک ها [12] [۳] ،[۴] ، [۶]

هر متریک فینسلر F روی منیفلد M یک ساختار طول L_F روی خم‌های جهت دار در M تعریف می‌کند. فرض کنیم که $c:[a,b] \to M$ یک خم به طور قطعه‌ای هموار [13] روی M باشد. طول c به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_F(c) := \int_a^b F(c(t), c'(t))dt,$$

برای دو نقطه $p,q \in M$ تعریف می‌کنیم:

$$d_F(p,q) := \inf_c L_F(c),$$

به طوری که اینفیمم روی همه خم‌های هموار C از p تا q گرفته شده است. توجه کنید که d_F خواص تابع فاصله را داراست. فرض کنید دو نقطه $p,q \in M$ داده شده است، خم $\delta:[a,b] \to M$ از $p = \delta(a)$ تا $q = \delta(b)$ مینیمم گفته می‌شود؛ اگر : $L_F(\delta) = d_F(p,q)$.

تعریف : یک خم هموار $\delta(t)$ که در آن $t \in I = [a,b]$، ژئودزیک گفته می‌شود، اگر دارای سرعت ثابت داشته باشد؛ یعنی $(F(\delta(t), \delta'(t)) = cte)$ و به طور موضعی مینیمم باشد.

لم : خم هموار $\delta(t)$ روی منیفلد فینسلر (M,F) ژئودزیک است، اگر وتنها اگر در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند؛

$$\frac{d^2\delta^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{d\delta^j}{ds}\frac{d\delta^k}{ds} = 0,$$

که در آن s پارامتر طول قوس منحنی و $\Gamma^i_{jk}\frac{d\delta^j}{ds}\frac{d\delta^k}{ds} = 2G^i$ ها توابعی موضعی روی TM هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$G^i = \frac{1}{4}g^{il}(x,y)\{\frac{\partial^2(F^2(x,y))}{\partial x^k \partial y^l}.y^k - \frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x^l}\}.$$

G^i ها را ضرایب اسپری وابسته به F می‌نامند.

۵- متریک فینسلری در ناوبری (PP) و مسیرهای [14] با کوتاه ترین زمان گذر

در این قسمت، مساله پیدا کردن متریک فینسلری ظاهر شده درناوبری (PP) را در حالت کلی، برای یک منیفلد ریمانی (M,g) مورد مطالعه قرار می‌کنیم. نرم یک بردار $v \in T_xM$ را با $\|v\| = \sqrt{g_x(v,v)}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم ذره‌ای با سرعت یکه، ابتدای بردار v تا انتهای آن را می‌پیماید. واضح است که زمان لازم مساوی با $\|v\|$ است. چنانچه این ذره از ابتدا تا انتهای بردار $-v$ را بپیماید، زمان لازم تغییری نمی‌کند،

زیرا $\|-v\| = \|v\|$. اکنون کره یکه مماس T_xM را در نظر می‌گیریم که عبارت است از بردارهای مماس v که در رابطه $\|v\| = 1$ صدق می کنند. فرض کنیم W یک میدان برداری باشد به نحوی که داشته باشیم: $\|W\| < 1$. همچنین W بدین صورت روی حرکت ذرات اثر می‌کند که جابجایی و سرعت ذرات در رابطه زیر صدق کنند:

$$\dot{r} = v_p + W_E$$

در این صورت، برای ذرات با سرعت یکه u، رابطه زیر حاصل می‌شود :

$$v = u + W_E$$

اگر W وجود نداشته باشد، در این صورت زمان لازم برای گذر از مبدا بردار u به انتهای آن مساوی با ۱ (ثانیه) است. اما اکنون که W وجود دارد، در مدت زمان ۱ (ثانیه)، ذره مذکور بردار $u + W_E$ را می‌پیماید. بنابراین، نرم $\|\bullet\|$ دیگر بیانگر زمان لازم برای گذر از مبدا به انتهای بردارها نیست. اکنون می‌خواهیم با استفاده از تغییر اینديکاتریکسی؛ که در اینجا پدید می‌آید، نرم جدیدی چون F روی T_xM بسازیم. برای این کار کافی است در هر نقطه x به ازای $v = u + W_E(x,u)$ داشته باشیم $F(x,v) = 1$. فرض کنیم $\|u\| = 1$. با جایگزینی $u = v - W_E(x,v)$ در این رابطه و نیز با توجه به رابطه $g(v, W_E) = \|v\|\|W_E\|\cos\theta$ ، و قرار دادن $\eta = 1 - \|W_E\|^2$ می‌توان به رابطه زیر دست یافت:

$$\|v\|^2 - 2\|W_E\|\|v\|\cos\theta - \eta = 0$$

v هیچگاه صفر نیست، زیرا در غیر این صورت $\|W\| = 1$، که یک تناقض با فرض $\|W\| < 1$ است. بنابراین، $\|v\| > 0$. با حل این معادله درجه دوم نسبت به $\|v\|$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\|v\| = \|W_E\|\cos^2\theta + \sqrt{\|W_E\|^2\cos^2\theta + \eta}$$

قرار می‌دهیم $p = \|W\|\cos^2\theta$ و $q = \sqrt{\|W\|^2\cos^4\theta - \eta}$. مشاهده می‌شود:

$$1 = \frac{\|v\|}{p-q} = \|v\|\frac{p-q}{p^2-q^2}$$
$$= \frac{\sqrt{g(W_E,v)^2 + \|v\|^2\eta}}{\eta} - \frac{g(W_E,v)}{\eta}.$$

که در آن می‌توان $W_E(x,v) = -\mathrm{Proj}_v W$ را به عنوان یک برش از کلاف π^*TM در نظر گرفت. اکنون تعریف می‌کنیم :

$$F : TM \to \mathbb{R}$$
$$F(x,v) = \frac{\sqrt{g(W_E,v)^2 + \|v\|^2\eta}}{\eta} - \frac{g(W_E,v)}{\eta}, v \neq 0$$
$$F(x,0) = 0$$

F با تعریف بالا خوش تعریف است و به سادگی می‌توان بررسی کرد که با جایگذاری $v = u - W_E$ داریم $F(x,v) = 1$. همچنین واضح است که اگر W غیر صفر باشد آنگاه $F(x,v) \neq F(x,-v)$ که بیانگر تفاوت زمان گذر نسبت به بردارهای v و $-v$ است. پس از ساده کردن رابطه اخیر مشاهده می‌شود که F را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$F(x,v) = \frac{\|v\|^2}{\|v\| - g_x(W,v)} \tag{۶}$$

در متون هندسه فینسلری، F به متریک *ماتسوموتو* مشهور است [۹].

قضیه: فرض کنیم M یک رویه ۲-بعدی و W یک میدان برداری روی M باشد؛ به طوری که $\|W\| < 1$. اگر متحرک P، متحرک E را که با سرعت W در حال حرکت است مطابق با قانون ناوبری (PP) تعقیب نماید، آنگاه زمان گذر روی هر مسیربوسیله متریک فینسلری $F(x,v) = \frac{\|v\|^2}{\|v\| - g_x(W,v)}$ اندازه گیری می‌شود.

تا کنون توانستیم متریک ظاهر شده در ناوبری را مشخص کنیم. اکنون می‌توانیم به یاری حساب تغییرات، مسیرهایی که ذرات، نسبت به متریک فینسلری بدست آمده، در امتداد آنها کوتاه ترین زمان گذر را دارند؛ بیابیم؛ شکل(۱) این مسیرها در واقع ژئودزیک‌های این متریک (فینسلری) می‌باشند. اگر ضرایب اسپری مربوط به متریک F را با نماد G^k نشان دهیم، در این صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مشخص کننده این مسیرها عبارتند از :

$$\ddot{r}^k + 2G^k(r,\dot{r}) = 0 \tag{۷}$$

و اگر قانون ناوبری (PP) را در امتداد این مسیرها اعمال کنیم، با توجه به رابطه (۴)، معادله مسیرهای با کوتاهترین زمان گذر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\ddot{r}^k + 2G^k(r, v + W_E) = 0. \tag{۸}$$

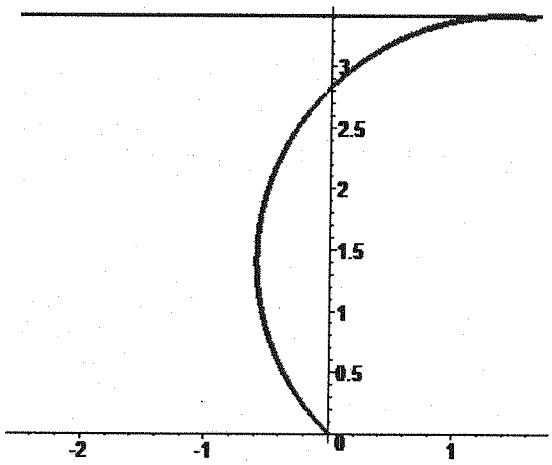
نتیجه-۱: متریک مطرح شده در قانون ناوبری (PP) یک متریک فینسلری است. لذا مسیرهای با کوتاهترین زمان گذر برای شیء تعقیب کننده ژئودزیکهای این متریک هستند.

نتیجه-۲: معادله مسیرهای با کوتاهترین زمان گذر از رابطه (۸) بدست می‌آید.

مثال: فرض کنیم هواپیمایی در ارتفاع تقریبی ۳۳۰۰ پایی (تقریبا ۱ کیلو متر) در امتداد افق در حال پرواز باشد. از مبدا مختصات موشکی با سرعت $-1\hat{i}+\hat{j}$ را به سمت هواپیما شلیک می‌کنیم. مسیر بهینه زمانی این موشک ژئودزیک یک متریک ماتسوموتو است که با برنامه زیر در محیط Maple رسم شده است:

```
> restart:
  with(plots):
  nrm := proc(X)

(X[3]^2+X[4]^2)/sqrt(X[3]^2+X[4]^2)-
((X[2])*X[3]*(1/2));
  end:
  for i from 1 to 2 do:
  E[i]:=diff(diff(nrm(x(t)),x(t)[i+2])
,t)-diff(nrm(x(t)),x(t)[i]):
  for j from 1 to 2 do
  E[i]:=subs(x(t)[j+2]=diff(x(t)[j],t)
,E[i]);
  od:
  od:
  for i from 1 to 2 do
  for j from 1 to 2 do
  E[i]:=subs(x(t)[j]=x[j](t),E[i]);
  od
  od:
  dsol:=dsolve({E[1],E[2],x[1](0)=0,x[
2](0)=0,D(x[1])(0)=-
1,D(x[2])(0)=1},{x[1](t),x[2](t)},type
=numeric,output=listprocedure):
  c[1]:=subs(dsol,x[1](t));c[2]:=subs(
dsol,x[2](t)):
  plot1:=plot([c[1](t),c[2](t),t=0..3.
5],color=black,thickness=4):
  target:=plot([s-1.5,3.42,s=-
1..3.2],color=red,thickness=2):
  display({plot1,target});
```



شکل (۵): نمودار مسیر بهینه حرکت موشک هنگام تعقیب هواپیما

۶- مراجع

[۱] بهروز بیدآباد، "هندسه منیفلد (۱)"، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، چاپ دوم ۱۳۸۱.

[۲] مهدی رفیعی راد، "تبدیلات همدیس منیفلدهای فینسلری فشرده"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تحت راهنمایی دکتر بهروز بیدآباد، آبان ۱۳۸۱

[۳] امیر حسام زعیم ، "مساله ناوبری زرملو روی منیفلد های ریمانی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تحت راهنمایی دکتر بهروز بیدآباد، آبان ۱۳۸۵

[٤] D. Bao, S.S. Chern, Z.Shen, "An Introduction to Riemann-Finsler Geometry", Springer-Verlag, 2000

[٥] D. Bao, C. Robles, Z.Shen, "Zermelo Navigation on Riemannian spaces", Journal of Differential Geometry, (6) , 377-435, 2004.

[٦] S.S. Chern, Z. Shen, " Riemann-Finsler Geometry", World Scientific, 2005.

[٧] H. SHIMADA., S.V SABAU "An Introduction to Matsumoto Metric" , Nonlinear Analysis , 165-168, (2005).

[٨] N. A. Shneydor, "Missile Guidance and Pursuit Kinematics, Dynamics and Control", Horwood Publishing Chichester , Horwood Publishing Chichester, 1998

[٩] .M. Matsumoto, "A slope of a mountain is a Finsler surface with respect to a time measure" J. Math. Kyoto. Univ , 29 17-25,(1989)

۷- زیرنویس ها

(۱) guidance
(۲) target
(۳) navigation
(۴) Finsler geometry
(۵) Pure pursuit
(۶) Matsumoto metric
(۷) Pure pursuit Guidance law
(۸) grounded frame reference
(۹) radar
(۱۰) Finsler space
(۱۱) Finsler connection
(۱۲) geodesics
(۱۳) piecewise differentiable
(۱۴) path