ترفیع ابرفرمها و ابرمیدانهای برداری به ابرفضای مماس

مرتضی میرمحمد رضایی [i] ؛ اسماعیل عزیزپور [ii]

چکیده

یک ابر اسپری متعارف در ابر فضای فینسلری که از حل ابر معادله‌ی اویلر- لاگرانژ به دست آمده در [۹] تعریف شده است. با استفاده از آن ابتدا ترفیع فرمهاو میدانهای برداری به ابر فضای مماس تعریف می‌گردد سپس الصاق خطی بروالد به کمک این ابزارها تعریف خواهد شد .

کلمات کلیدی

ترفیع افقی فرمها و میدانهای برداری، ابر متریک ریمان - فینسلر، ابر اسپری .

Lift of Superforms and Supervector fields To tangent superspace

M.M. Rezaii and E. Azizpour

ABSTRACT

The notion of the canonical superspray in Finsler superspace is introduced in [9].

Using this concept , we introduce the notion of 1-forms and supervector fields, for supermanifolds. As an application of these objects, we define a linear connection of Berwald type on supermanifold .

KEYWORDS

Horizontal endomorphism, Horizontal lift of supervector fields and 1-forms, Riemann-Finsler supermetric, superspray.

[i] - دانشیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر ، دانشگاه صنعتی امیر کبیر: Email: mmreza@aut.ac.ir

[ii] استادیار گروه ریاضی دانشکده علوم پایه ، دانشگاه گیلان Email : eazizpour@guilan.ac.ir

۱- مقدمه

روش‌های هندسه دیفرانسیل نقش مهمی در پیدا کردن روابط بین فعل و انفعالات میدان‌های فیزیکی به شکل ریاضی دارد. در ۳۰ سال اخیر علاقه زیادی به ساختار ابرهندسه دیفرانسیل با هدف کاربردی در نظریه میدانهای ابرتقارنها (نظریه خمینه های مدرج و نظریه ابرخمینه ها) وجود داشته است. جزئیات بیشتری از این نظریه را از نقطه نظر هندسی و توپولوژیکی می‌توان در مراجع [۳] و [۶] و همچنین [۴] و [۸] پیداکرد .

در سال ۱۹۹۰ آقای بجانکو در مقاله‌ی [۲] از نقطه نظر جدیدی روی هندسه دیفرانسیل ابرخمینه‌ها بحث کرده است. او ابتدا ساختار یک الصاق غیر خطی را معرفی کرد. سپس با استفاده از آن مفهوم ابر مشتق همورد را از نگاه دویت ([۴]) به ابر خمینه ها با در نظر گرفتن حالت خاصی از ابر کلاف‌های برداری با تارهای مخصوص پارامتری شده توسط متغیرهای غیر جابجایی توسیع داد. این کار اولین تلاش برای معرفی ساختار ابر فضای فینسلری بود . در سال ۱۹۹۴ میلادی ([۱۰]) تعمیم طبیعی یک ساختار فینسلری روی خمینه‌ها را بر روی ابر خمینه‌ها ابتدا با معرفی الصاقهای غیر خطی بر روی ابر کلافهای برداری آغاز کرد [۱۰]. او همچنین نشان داد که چنین کلافهایی شامل حالت خاصی از توسیع ابر متقارن فضاهای فینسلری و لاگرانژی می‌باشد [۱۰].

یکی از مفاهیم اساسی در هندسه دیفرانسیل مفهوم اسپری می‌باشد . در دو مقاله‌ی[۵] و [۹] تعریف یک ابر اسپری و ارتباط آن با الصاق غیر خطی مورد بحث قرار گرفته است . همچنین در [۹] با استفاده از ابر تابع فینسلری، یک جواب برای معادله‌ی اویلر لاگرانژ پیدا شده است . در این مقاله با استفاده از ابر اسپری متعارف تعریف شده در [۹] نشان داده می‌شود که روی یک ابر خمینه فینسلری خود ریختی به نام خود ریختی بارسل وجود دارد که با استفاده از آن می‌توان ترفیع عمودی و افقی فرمها و میدانهای برداری را تعریف کرد .

۲- ترفیع عمودی فرمهاو میدانهای برداری به ابر کلاف مماس

در این بخش ترفیع عمودی فرمهاو میدان‌های برداری به ابر کلاف مماس مورد مطالعه قرار گرفته می‌شوند . قبل از آن، ابتدا تعریف مختصری از ابر خمینه از نگاه آقای دویت ارائه می‌شود . ایده‌ی اصلی در این روش بر مبنای توسیع فضای شامل مقادیر جابجایی و غیر جابجایی است .به طوردقیقتر با در نظر گرفتن جبر خارجی B که یک جبر جابجایی Z - مدرج است، در این فضا به دست *خواهد* آمد:

$$ab = (-1)^{ab}\, ba \qquad \forall\ a \in B_a,\ \ b \in B_b$$

$$B = B_\circ \oplus B_1,\quad B_a . B_b \subset B_{ab} \qquad \forall\ a,b \in Z_2$$

بنابراین بعد از معرفی فضای $B^{m,n} = B_\circ^m \times B^n$، به راحتی می‌توان یک ابر خمینه از بعد (m , n) را به عنوان یک فضای توپولوژیک به همراه یک اطلس از مختصات‌های با مقادیر در $B^{m,n}$ که تابع تبدیل آنها در یک شرط دیفرانسیل پذیری مشخص صدق می‌کند معرفی کرد (برای توضیحات بیشتر به کتاب [۴] مراجعه شود).

۲-۱- ترفیع عمودی ابر توابع و میدانهای برداری

فرض کنید TM، ابرکلاف مماس با تابع تصویر $\pi : TM \to M$ باشد . اگر M دارای بعد (m , n) و مختصات $(x;\eta)$ باشد در این صورت TM دارای بعد $(m_2\ n)$ مختصات $(x , y;\eta,\theta)$ می‌باشد .

اگر f یک ابر تابع روی Mباشد f^V به عنوان ابر تابعی روی TMبه نام ارتقاء عمودی f به صورت :

$$f^V = fo\pi \tag{۱}$$

تعریف می‌شود . بنابراین برای دو ابر تابع fو g نتیجه خواهد شد

$$(fg)^V = (f)^V (g)^V .$$

فرض کنید $\tilde{X} \in \chi(TM)$ ، به طوری که برای هر fروی M ، $\tilde{X}(f^V) = \circ$. در این صورت گفته می‌شود که $\tilde{X}$ یک ابر میدان برداری عمود می‌باشد . اگر نمایش موضعی برای $\tilde{X}$ در یک سیستم مختصات موضعی u از Mدارای نمایش موضعی به‌صورت

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \tilde{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} + \tilde{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$$ باشد.

در این صورت برای هر f روی Mاز

$$\tilde{X}(f^V) = \circ$$

نتیجه می‌شود :

$$\tilde{X}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \tilde{X}^\alpha \frac{\partial f}{\partial \eta_\alpha} = \circ. \tag{۲}$$

با انتخاب مناسب fنتیجه می‌شود که $\tilde{X}$ یک ترفیع عمودی می‌باشد اگر و فقط اگر $\tilde{X}^\beta = \circ$ و $\tilde{X}^J = \circ$. همانند حالت معمولی در خمینه‌ها می‌توان نشان داد که اگر Xدارای نمایش

موضعی به صورت $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}$ باشد، در این صورت ترفیع عمودی X^V دارای شکلی به صورت زیر می‌باشد:

$$X^V = X^i \frac{\partial}{\partial y_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$$

قضیه: فرض کنید Y , X میدانهای برداری روی M باشند، در این صورت

$$\left[X^V,\ Y^V\right] = \circ .$$

اگر ω یک ۱- فرم روی M باشد آن را می‌توان به عنوان یک ۱- فرم روی TM در نظر گرفت که با $i\omega$ نمایش داده می‌شود. اگر ω در یک سیستم مختصات موضعی u از M دارای نمایش موضعی $\omega = \omega_i dx_i + \omega_\alpha d\eta_\alpha$ باشد در این صورت $i\omega$ دارای نمایش موضعی طبق رابطه (۳)

$$i\omega = \omega_i y_i + \omega_\alpha \theta_\alpha \qquad (۳)$$

نسبت به مختصات القایی در π^{T} (u) می‌باشد.

قضیه: فرض کنید Y, X میدانهای برداری روی TM باشند، به طوری که برای هر f روی M رابطه $X(i(df)) = Y(i(df))$ برقرار باشد، در این صورت $X = Y$.

برهان: برهان شبیه حالت معمولی در خمینه‌ها می‌باشد.

۲-۲- ترفیع کامل ابر توابع

اگر f یک ابر تابع روی M باشد، ارتقاء کامل آن به صورت $f^c = i(df)$ تعریف می‌شود که در یک سیستم مختصات موضعی $(x, y\,;\,\eta, \theta)$ دارای نمایش:

$$f^c = \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i - (-1)^{|f|} \frac{\partial f}{\partial \eta_\alpha} \theta_\alpha \qquad (۴)$$

می‌باشد. اگر f و g دو ابر تابع روی M و X^V نیز یک ابر میدان برداری عمود روی TM باشد، در این صورت:

$$X^V f^c = (Xf)^V,\quad (gf)^c = g^c f^V + g^V f^c .$$

۲-۳- ترفیع کامل ابر میدان برداری

اگر X یک ابر میدان برداری روی M باشد ترفیع کامل آن یک ابر میدان برداری X^c روی TM به صورت $X^c f^c = (Xf)^c$ تعریف می‌شود، که در آن f تابعی دلخواه می‌باشد. در یک مختصات موضعی اگر

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha},$$

آنگاه X^c ترفیع کامل آن دارای شکل زیر می‌باشد:

$$X^c = \sum_{i=1}^{m}\left(X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial X^i}{\partial x_j} + \sum_{\tau=1}^{n} \theta_\tau \frac{\partial X^i}{\partial \eta_\tau}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(X^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} + \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial X^\alpha}{\partial x_j} + \sum_{\tau=1}^{n} \theta_\tau \frac{\partial X^\alpha}{\partial \eta_\tau}\right)\frac{\partial}{\partial \theta_\tau}\right) \qquad (۵)$$

قضیه : برای هر ابر تابع f روی M، ۱- فرمی $\omega \in \Omega$ (M) و میدانهای برداری $X, Y \in \chi(M)$ حاصل خواهد شد:

۱. $(X+Y)^c = X^c + Y^c$

۲. $\left[X^V, Y^c\right] = [X, Y]^V$

۳. $(fX)^c = f^c X^V + (-1)^{|f|} f^V X^c$

۴. $\left[X^c, Y^c\right] = [X, Y]^c$

۵. $X^c f^V = (Xf)^V$

۶. $\omega^V (X)^c = (\omega(X))^V$

برهان : فرض کنید f ابر تابع دلخواه روی M باشد، آنگاه :

$$\left[X^V, Y^c\right] f^c = \left(X(Yf)\right)^V - (-1)^{|X||Y|}\left(Y(Xf)\right)^V = \left([X, Y] f\right)^V$$

۳- خود ریختی بارسل

۳-۱- الصاق غیر خطی

هندسه‌ی الصاقهای غیر خطی در ابر فضاهای برداری در [۱۰] مطالعه شده است. برای تعریف مختصری از آن، فرض کنید $\varepsilon = (E, \pi_E, M)$ یک ابر کلاف برداری باشد که تار آن F و $\pi^T : T\varepsilon \to TM$ می‌باشد. در این صورت $V\varepsilon = (VE, \tau_V, E)$ زیر کلاف برداری از (TE, τ_E, E) می‌باشد.

تعریف. N یک الصاق غیر خطی در زیر کلاف برداری ε خوانده می‌شود اگر N یک شکافنده روی دنباله‌ی دقیق زیر باشد:

$$\circ \to V\varepsilon \xrightarrow{i} T\varepsilon \to T\varepsilon / V\varepsilon \to \circ \qquad (۶)$$

یعنی N یک مورفیسم مانند $N: T\varepsilon \to V\varepsilon$ می‌باشد به طوری که $N o i$ همانی روی $V\varepsilon$ است. تغییرات مختصاتی ضرایب الصاق غیر خطی N در مراجع [۵] و [۱۰] آمده است.

در ابر خمینه مماس، پایه‌ی موضعی سازگار با یک الصاق غیرخطی N عبارتست از: $\left(\frac{\delta}{\delta x_i}, \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}\right)$ که در آن

$$\frac{\delta}{\delta x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y_j} - N_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \qquad (۷)$$

$$\frac{\delta}{\delta \eta_\alpha} := \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} - N_\alpha^i \frac{\partial}{\partial y_i} - N_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} \qquad (۸)$$

تعریف: یک خود ریختی عمودی روی TM عبارتست از یک ابر میدان تانسوری $J:\chi(TM)\to\chi(TM)$ که در شرایط $J^2=\circ$ ، $\operatorname{Im} J = \operatorname{Ker} J$ صدق می‌کند.

یک ابر میدان برداری لیوویل C روی $\chi(TM)$ عبارتست از:

$$C = y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \qquad (۹)$$

تعریف: یک مورفیسم $h:\chi(TM)\to\chi(TM)$ را یک خودریختی افقی روی M گویند هرگاه:

۱. $h^2 = h$

و

۲. $Ker\ h = \chi^v(TM)$

فرض کنید h یک خودریختی افقی باشد، در این صورت $[J,h]$، انحناء h نامیده می‌شود.

تعریف: یک مورفیسم $F:\chi(TM)\to\chi(TM)$ یک ساختار تقریبا مختلط روی M نامند اگر $F^2=-id$

تعریف: یک میدان ابر برداری S روی TM یک ابر اسپری نامیده می‌شود اگر:

$$J(S) = y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \qquad (۱۰)$$

بنابراین یک ابر اسپری به طور یکتا به فرم

$$S = y_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} - 2G^k(x,y;\eta,\theta)\frac{\partial}{\partial y_k} - 2G^\alpha(x,y;\eta,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \qquad (۱۱)$$

نوشته می‌شود [۵]. هنگامیکه ضرایب G^i , G^α در S همگن از درجه‌ی ۲ باشند این ابر اسپری را یک ابر اسپری همگن نامند.

حال فرض کنید (M , A) یک ابر خمینه (m , n) بعدی و (TM , TA) ابر خمینه مماس روی آن باشد، همچنین فرض کنید $TM_\circ = TM\setminus\{\circ\}$ که $(TM , TA)-\{\circ\} = (TM_\circ , T_\circ A)$ و $T_\circ A = TA|_{TM_\circ}$.

تعریف: یک ابر فضای لاگرانژی تعمیم یافته یا به طور خلاصه یک $GLS-$فضا عبارتست از زوج $GL^{m,n} = ((M,A), g(x,y;\eta,\theta))$ که در آن $g(x,y;\eta,\theta)$ ابر میدان تانسوری روی $(TM , TA)-\{\circ\}$ بوده و ماتریس نمایش آن یک ماتریس از رتبه‌ی (m,n) می‌باشد.

تعریف: یک ابر فضای لاگرانژی، LS− فضا به عنوان یک حالت خاص از LS− فضا می‌باشد که ابر میدان تانسوری $g(x,y;\eta,\theta)$ به صورت رابطه (۱۲) تعریف شده است:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j}, \quad g_{i\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial \theta_\beta}, \quad g_{\alpha j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_\alpha \partial y_j}, \quad g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta}. \qquad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) L، یک ابر تابع دیفرانسیل پذیر، یک ابر لاگرانژی نامیده می‌شود. حال می‌توان یک توسیع ابر متقارن از فضای فینسلری ارائه کرد.

تعریف: یک متر فینسلری روی (M , A) عبارتست از تابع F که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) تحدید تابع F به $TM\setminus\{\circ\}$ یک G^∞ بوده و F یک تابع ابر هموار روی $TM-\{\circ\}$ می‌باشد.

(۲) $F(x,\lambda y;\eta,\lambda\theta) = \lambda F(x,y;\eta,\theta)$ که λ عدد حقیقی مثبت می‌باشد.

(۳) تحدید F به زیر فضای زوج $TM-\{\circ\}$ یک تابع با مقدار مثبت باشد.

(۴) اگر قرار داده شود

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_i \partial y_j}, \quad g_{i\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_i \partial \theta_\beta}, \quad g_{\alpha j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \theta_\alpha \partial y_j}, \quad g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta},$$

در این صورت $g = \begin{bmatrix} g_{ij} & g_{i\beta} \\ g_{\alpha j} & g_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ معکوس پذیر بوده و زوج (M , F) یک ابر خمینه فینسلری نامیده می‌شود. بدیهی است که ابر فضاهای فینسلری حالت خاصی از ابر فضاهای لاگرانژی با $L = F^2$ می‌باشند.

اینک تانسور J روی ابر خمینه (TM , TA) به صورت $J = \frac{\partial}{\partial y_i}\otimes dx^i + \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}\otimes d\eta^\alpha$ تعریف می‌شود.

به یک تابع لاگرانژی $L\in TM$، یک سیستم $((TM,TA),\omega,L)$ نسبت داده می‌شود که به وسیله‌ی یک میدان برداری $X\in\chi(TM)$ در نظر گرفته می‌شود و شرایط معادله (۱۳) را برآورده می‌سازد.

$$i_X \omega = -dL \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳)، $\omega = dd_J L$ در نظر گرفته شده است .

قضیه: ابر میدان برداری معرفی شده در رابطه (۱۳) ، معروف به ابر میدان برداری اویلر- لاگرانژ، یک ابر اسپری می‌باشد .

قضیه: روی هر ابر خمینه فینسلری $((M, A), F)$، یک ابر اسپری همگن :

$$S = y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \theta_\beta \frac{\partial}{\partial \eta_\beta} - 2G^j(x, y; \eta, \theta)\frac{\partial}{\partial y_j} - 2G^\beta(x, y; \eta, \theta)\frac{\partial}{\partial \theta_\beta}$$

وجودداردکه:

$$G^j = \frac{1}{4} g^{jm}\left(y^k \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial y_m} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta_\alpha \partial y_m}\theta_\alpha - \frac{\partial F^2}{\partial x_m}\right) - \frac{1}{4} g^{m\beta}\left(y^j \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_j \partial \theta_\gamma} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta_\mu \partial \theta_\gamma}\theta_\mu + \frac{\partial F^2}{\partial \eta_\gamma}\right),$$

$$G^\beta = \frac{1}{4} g^{\beta m}\left(y^k \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial y_m} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta_\alpha \partial y_m}\theta_\alpha - \frac{\partial F^2}{\partial x_m}\right) + \frac{1}{4} g^{\beta\gamma}\left(y^j \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_j \partial \theta_\gamma} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta_\mu \partial \theta_\gamma}\theta_\mu + \frac{\partial F^2}{\partial \eta_\gamma}\right)$$

این ابر اسپری، ابر اسپری متعارف از یک ابر متریک فینسلری نامیده می‌شود .

۳-۲- خود ریختی بارسل

در این بخش خود ریختی بارسل در حالت ابر تقارنی تعریف می‌گردد .

قضیه :۱. هر ابر اسپری S یک خود ریختی افقی مانند h به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$h = \frac{1}{2}\left(id + [J, S]\right) \tag{۱۴}$$

که در آن id تابع همانی روی $T(TM)$ می‌باشد . ترفیع افقی یک ابر میدان برداری مانند X روی M عبارتست از:

$$X^h := hX^c = \frac{1}{2}\left(X^c + [X^v, S]\right)$$

۲. یک ابر اسپری نسبت داده شده به h عبارتست از :

$$S_h = \frac{1}{2}\left(S + [C, S]\right)$$

۳. تاب [۹] h صفر می‌باشد .

برهان : فرض کنید X یک ابر میدان برداری همگن روی M باشد . در این صورت $h(X^v) = 0$. یعنی اینکه $X^v(TM) \subset Ker\, h$. حال اگر $Y \in Ker\, h$ به راحتی می‌توان نشان داد که $Ker\, h \subset X^v(TM)$ و در نتیجه $X^v(TM) = Ker\, h$. از طرف دیگر $\bar{h}(X^c) = h(X^c)$ بنابراین $\bar{h} = h$.

با محاسبات ساده می‌توان قسمت‌های دوم و سوم از قضیه را ثابت کرد .

لم : اگر h خود ریختی افقی باشد در این صورت یک ساختار تقریبا مختلط F روی TM وجود دارد به طوری که :

$$F \circ J = h \quad , \quad F \circ h = -J$$

برهان : اگر شرایط لم در نظر گرفته شود، در این صورت به سادگی می‌توان دید که F ابر فضای افقی و عمودی را جابجا خواهد کرد اگر و فقط اگر

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i} + N_i^j \frac{\delta}{\delta x_j} + N_i^\alpha \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha} ,$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\delta}{\delta x_i}$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + N_\alpha^i \frac{\delta}{\delta x_i} + N_\alpha^\beta \frac{\delta}{\delta \eta_\beta} ,$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}\right) = \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha}$$

تعریف : نسبت به ابر متریک G روی TM یک فرم کاهلری به شکل رابطه (۱۵) تعریف می‌گردد :

$$K(X, Y) = G(X, JY) - G(JX, Y) \tag{۱۵}$$

قضیه : فرض کنید h خودریختی افقی تعریف شده توسط (۱۴) باشد . در این صورت $i_v\omega = K$.

برهان : با استفاده از شکل موضعی $i_v\omega$ در یک مختصات موضعی $(x, y; \eta, \theta)$ می‌توان نشان داد که $\omega(X, vY) = -(-1)^{XY}\omega(vX, Y)$ ، بنابراین

$$(i_v\omega)(X, Y) = G(vX, JY) - (-1)^{XY} G(vY, JX)$$

و $(i_v\omega)(X, Y) = K(X, Y)$

قضیه : فرض کنید L تابع لاگرانژی منظم و N یک الصاق لاگرانژی باشد، یک خودریختی افقی یکتای h روی m وجوددارد(به نام خودریختی بارسل) به طوری که :

۱. $d_h L = 0$.

۲. h بدون تاب می‌باشد .

۳. $[h, C] = 0$.

علاوه بر آن ضابطه‌ی خودریختی بارسل به صورت $h = \frac{1}{2}(id + [J, S])$ در نظر گرفته شده است که S ابر اسپری متعارف از متریک فینسلری می‌باشد .

برهان : $h \stackrel{1}{=} -(id+[J,S])$ یک خودریختی افقی بدون تاب می‌باشد . بنابراین کافیست نشان داده شود که $d_h L = 0$.

فرض کنید S ابر اسپری متعارف از متریک فینسلری بوده و X ابر میدان برداری دلخواه روی TM باشد . در این صورت $(i_S\omega)(X)=\omega(S,X)$ و

$$(i_S\omega)(X) = G(S,JX) - G(JS,X) = -g(vC, vX) = -g(vC, JFX) = -\omega(C, FX)$$

حال اگر ابر میدان برداری X دارای نمایش موضعی $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde X^i \frac{\partial}{\partial y_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha} + \tilde X^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}$ باشد، در این صورت :

$$(i_v dL)(X) = \frac{\partial L}{\partial y_i}\left(N^i_k X^k - X^\alpha N^i_\alpha + \tilde X^i\right) - (-1)^{|L|}\frac{\partial L}{\partial\theta_\alpha}\left(N^\alpha_i X^i + X^\beta N^\alpha_\beta + (-1)^{|X|}\tilde X^\alpha\right).$$

از اینکه S ابر اسپری متعارف از متریک فینسلری می‌باشد نتیجه می‌شود که $d_h L = 0$.

۴- ترفیع ۱- فرمی ها به ابر کلاف مماس

۴-۱- ترفیع عمودی ۱- فرمی ها

فرض کنید $\tilde\omega \in \Omega(TM)$ به طوری که برای هر $X\in\chi(M)$ ، $\tilde\omega(X^v)=0$. در این صورت $\tilde\omega$ یک ۱-فرمی روی TM نامیده می‌شود . اگر $\tilde\omega = \tilde\omega_i dx_i + \tilde\omega_i dy_i + \tilde\omega_\alpha d\eta_\alpha + \tilde\omega_\alpha d\theta_\alpha$، یک شرط لازم و کافی برای اینکه $\tilde\omega$ یک ۱- فرمی روی TM باشد عبارتست از اینکه $\tilde\omega_i = 0$, $\tilde\omega_\alpha = 0$.

فرض کنید f و g دو ابر تابع باشند . در این صورت طبق تعریف :

$$(df)^v = d(f^v), \quad (gdf)^v = g^v (df)^{\chi v} = g^v (df^v)$$

همچنین فرض کنید $\omega \in \Omega(M)$ باشد . ترفیع عمودی ۱- فرمی ω^v از ۱- فرمی ω تعریف می‌گردد :

$$\omega^v = \omega^v_i (dx_i)^v + \omega^v_\alpha (d\eta_\alpha)^v$$

که در آن مولفه‌های ۱- فرمی ω در مجموعه باز دلخواه $\pi^{-1}(u)$ می‌باشد . بنابراین نسبت به مختصات موضعی $(x_i, y_i; \eta_\alpha, \theta_\alpha)$ در TM ترفیع عمودی ۱- فرمی ω^v از ۱- فرمی $\omega = \omega_i (dx_i) + \omega_\alpha d\eta_\alpha$ به شکل زیر می‌باشد :

$$\omega^v = \omega_i (dx_i) + \omega_\alpha d\eta_\alpha \qquad (۱۶)$$

۴-۲- ترفیع کامل یک ۱- فرم

اگر روشهای استفاده شده در حالت معمولی برای خمینه‌ها استفاده گردد به سادگی می‌توان ثابت کرد که :

قضیه: فرض کنید θ و $\tilde\omega$ دو یک فرمی روی (TM) باشند به طوری که برای هر $X\in\chi(M)$ نتیجه شود $\tilde\omega(X^c) = \theta(X^c)$، در این صورت $\tilde\omega = \theta$.

تعریف: اگر X یک ابر میدان برداری روی M باشد، ترفیع کامل یک ۱- فرم ω روی M به TM عبارتست از :

$$\omega^c(X^c) = (\omega(X))^c$$

بنابراین در یک مختصات موضعی می‌توان نشان داد که اگر $\omega = \omega_i dx_i + \omega_\alpha d\eta_\alpha$ باشد ترفیع کامل آن عبارتست از :

$$\omega^c = \left(y_j \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} + \theta_\alpha \frac{\partial\omega_i}{\partial\eta_\alpha}\right)dx_i + \omega_i dy_i + \left(y_j\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_j} + \theta_\gamma \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\eta_\gamma}\right)d\eta_\alpha + \omega_\alpha d\theta_\alpha \qquad (۱۷)$$

۴-۳- ترفیع افقی یک ابر میدان برداری و یک ۱- فرمی

فرض کنید $h \stackrel{1}{=} -(id+[J,S])$ خودریختی بارسل بوده و $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}$ یک ابر میدان برداری روی M باشد.ترفیع افقی آن به TM به صورت $X^h := hX^c \stackrel{1}{=} -(X^c + [X^v, s])$ تعریف می‌گردد . شکل موضعی آن عبارتست از

$$X^h = X^i \frac{\delta}{\delta x_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha}$$

بنابراین:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h = \frac{\partial}{\partial x_i} - N^j_i \frac{\partial}{\partial y_j} - N^\beta_i \frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \qquad (۱۸)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\right)^h = \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha} - N^j_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j} - N^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}. \qquad (۱۹)$$

به همین ترتیب اگر $\omega = \omega_i (dx_i) + \omega_\alpha d\eta_\alpha$ باشد، ترفیع افقی آن عبارتست از :

$$\omega^h = \left(\omega_j N^j_i + \omega_\alpha N^\alpha_i\right)dx_i + \omega_i dy_i + \left(-\omega_i N^i_\alpha + \omega_\beta N^\beta_\alpha\right)d\eta_\alpha + \omega_\alpha d\theta_\alpha \qquad (۲۰)$$

۵- ترفیع افقی یک الصاق خطی

فرض کنید ∇ یک الصاق خطی روی ابر خمینه M باشد . اگر h خودریختی بارسل فوق باشد، به کمک این خودریختی

یک الصاق خطی برای هر $X , Y \in M$، روی ابر خمینه TM می‌توان تعریف کرد . بنابراین اگر تعریف گردد .

$$\nabla^h_{X^v} Y^v = 0 , \quad \nabla^h_{X^h} Y^v = \left[X^h , Y^v \right],$$

$$\nabla^h_{X^v} Y^h = 0 , \quad \nabla^h_{X^h} Y^h = (\nabla_X Y)^h ,$$

در این صورت ∇^h یک الصاق خطی روی ابر خمینه TM می‌باشد .

از اینکه این الصاق حافظ زیر فضاهای افقی و عمودی می‌باشد با محاسبات ساده ولی نسبتا طولانی می‌توان نشان داد که (∇^h , h) یک الصاق خطی فینسلری روی ابر خمینه TM می‌باشد [۱۳] .

حال فرض کنید $(x_i , y_i ; \eta_\alpha , \theta_\alpha)$ یک سیستم مختصاتی در TM بوده و

$$S = y_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} - 2G^k (y ; \theta) \frac{\partial}{\partial y_k} -2G^\alpha (y ; \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$$

نیز ابر اسپری نسبت داده شده به خودریختی بارسل h باشد . مشتقات مرتبه‌ی دوم از G^i و G^α نسبت به y و θمنجر به ابر توابع متعددی خواهد شد که به جز توابع زیر مابقی آنها را متحد با صفر فرض شوند:

$$\Gamma^k_{ji} := \frac{\partial^2 G^k}{\partial y_j \partial y_i} , \quad \Gamma^k_{i\alpha} := \frac{\partial^2 G^k}{\partial y_i \partial \theta_\alpha} , \quad \Gamma^\gamma_{\alpha i} := \frac{\partial^2 G^\gamma}{\partial \theta_\alpha \partial y_i} , \quad \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} := \frac{\partial^2 G^\gamma}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} \qquad (۲۱)$$

اگر ابر اسپری فوق یک ابر اسپری آفین [۹] باشد، ابر توابع فوق توابعی تنها از x و η می‌باشند . به راحتی می‌توان نشان داد که آنها در قانون انتقال صدق می‌کنند . در نتیجه یک الصاق خطی ∇ روی ابر خمینه M وجود دارد به طوری که ضرایب کریستوفل آن مطابق (۲۱) تعریف شده است . این الصاق خطی ، الصاق از نوع بروالد نامیده می‌شود .

۶- مراجع

[۱] P.L. Antonelli , *Handbook of Finsler Geometry (2 volume set)* , Kluwer Academic Publishers,2004 .

[۲] A.Bejancu , *A New Viewpoint on Differential Geometry of supermanifolds ,I,II* (Timisoara , Romania:Timisoara University Press) Ellis Horwood Limited , 1990

[۳] F.A. Berzin , *The Method of Second Quantization* , Academic Press , New York , 1966

[۴] B. Dewit , *Supermanifolds* , (Cambridge: Cambridge University Press) 2nd edn , 1992 .

[۵] E.Esrafilian and E . Azizpour , *Nonlinear connections and Supersprays in Supermanifolds* , Rep . Math . Phys . 54(2004) 365-372 .

[۶] D . Leites , *Introduction to the Theory of Supermanifolds* , Russian .Math . Surveys . 35(1980)1-64 .

[۷] R.Miron and M . Anastasiei , *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications* , Kluwer Academic Publishers , 1994.

[۸] A.Rogers, *A global Theory of Supermanifolds*,J. Math. Phys.21, 1352(1980).

[۹] M.M. Rezaii and E. Azizpour, *On a Superspray in Lagrange Superspaces*,Rep. Math. Phys. 56(2005) 257-269 .

[۱۰] M.M.Rezaii, B. Najafi and E. Azizpour " Finsler structure on the tangent superbundle" Differential Geometry – Dynamical Systems, Vol. 8, 2006, pp. 223-

[۱۱] K. Yano and S. Ishihara, *Tangent ant Cotangent Bundles* ,Marcel Dekker, Inc.New York (1973) .

[۱۲] S.I.Vacaru, Supersting in higher order extension of Finsler superspaces NUC. Phys. B494 1997 no. 3 590-

[۱۳] S. I. Vacaru, *Nonlinear Connections in Superbundles and Locally Anisotropic Supergravity*,E-print:gr-qc/9604016 .