ترتیب کامفورت روی فضاهای توپولوژیک

محمد اکبری تتکابنی i

چکیده:

دراین مقاله سعی شده که مفهوم حد تحت ابرفیلترها از حالت گسسته به حالت توپولوژیک تعمیم یابد. با میسر نمودن این تعمیم، ترتیب کامفورت معرفی و بعضی از قضایایی که در حالت گسسته اثبات شده‌اند به حالت توپولوژیک بسط داده خواهد شد.

کلمات کلیدی:

ابرفیلتر، فشرده سازی استون-چخ، فشرده سازی، اعداد اوردینال، ترتیب کامفورت.

Comfort Order On Topological Spaces

M. Akbari Tootkaboni

ABSTRACT :

In this paper concept of ultrafilter limit from discrete to topological (state) have extended and by introduction "Comfort order" some know results have generalized, finally some conditions of discrete case to topological have discussed.

KEY WORD :

Ultrafilter, Stone-Cech Compactification, Compactification, Ordinal number, Comfort order.

۱- مقدمه:

در سال ۱۹۷۰، برنشتاین مفهوم $p-$ فشردگی را برای ابرفیلترهای آزاد روی ω ارایه کرد. سال بعد کامفورت ترتیب جزیی $\leq_c$ را روی $\omega^* = \beta\omega - \omega$ تعریف کرد به این شکل که $p \leq_c q$ اگر و تنها اگر فضای $q-$ فشرده، $p-$ فشرده باشد. به [۳] مراجعه شود.

در این مقاله ضمن بیان حد تحت ابرفیلترها در حالتی که ابرفیلترها روی فضای گسسته تعریف شده‌اند، این مفهوم به حالتی که فضا توپولوژیک است تعمیم داده می‌شود. در این صورت امکان تعریف ترتیب کامفورت روی فیلترهای فضای $S^{\mathcal{F}}$ ایجاد می‌گردد. در بخش سوم مقاله حاضر بعضی از نتایج در خصوص ترتیب کامفورت را به حالت توپولوژیک تعمیم داده می‌شود.

۲- اصطلاحات و تعاریف مقدماتی

فرض کنید $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $\mathcal{CB}(S)$ باشد آنگاه $S^{\mathcal{F}}=MM(\mathcal{F})$ (مجموعه همه میانگین‌های ضربی روی $\mathcal{F}$)، ضعیف * - فشرده و $\varepsilon(S)$ ضعیف *- چگال در $MM(\mathcal{F})$ است. اگر S یک فضای توپولوژیک باشد نگاشت ارزیابی $\varepsilon : S \to MM(\mathcal{F})$ ضعیف * - پیوسته است .

فرض کنید $\mathcal{F}$ ، یک C^* - زیر جبر یکدار از $\mathcal{CB}(S)$ باشد. اگر X فضای $MM(\mathcal{F})$ را با ضعیف * - توپولوژی نسبی نشان دهد و $\varepsilon : S \to X$ نگاشت ارزیابی را نمایش دهد، آنگاه نگاشت $f \to \hat{f} : \mathcal{F} \to \mathcal{CB}(X)$ یکریختی طولپا با وارون $\varepsilon^* : \mathcal{CB}(X) \to \mathcal{F}$ می‌باشد ، که در آن $f = \varepsilon^*(\hat{f})$. (برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۱] رجوع نمایید.)

i استادیار پایه یک دانشگاه شاهد- دانشکده علوم -گروه ریاضی Email: akbari@shahed.ac.ir

در این مقاله همه فضاها توپولوژیک ، بطور کامل منظم و هاسدورف فرض شده‌اند. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد انگاه $\beta(X)$ فشرده سازی استون_چخ X را نشان می دهد. باقیمانده استون_چخ X عبارتست از فضای $X^*=\beta(X)-X$. اگر $f: X\to Y$ تابعی پیوسته باشد آنگاه $\bar{f}:\beta(X)\to\beta(Y)$ توسیع استون _چخ f را نشان می‌دهد. برای زیر مجموعه $A\subseteq X$، $cl_X(A)$ و $Int_X(A)$ به ترتیب بستار و درون مجموعه A در X را نشان می‌دهند. برای پرهیز از سردرگمی، می‌توان بجای نماد $cl(A)$ از $(\bar{A})$ و بجای $Int(A)$ از (A°) استفاده کرد. فرض کنید $Z(X)$ خانواده همه صفر- مجموعه‌های توابع پیوسته از $C\mathcal{B}(X)$ را نشان دهد بعبارتی $Z(X)=\{f^{-1}\{0\}: f\in C\mathcal{B}(X)\}$. (برای اطلاع بیشتر می‌توانید به [۲] مراجعه نمایید.)

اکنون به تعریف اوردینال‌ها که توسط ج.ون نیومن در [۸] ارائه شده، پرداخته می‌شود. (برای اطلاع بیشتر می توانید به [۲] مراجعه نمایید.)

۱-۲ **تعریف** : مجموعه ξ یک (عدد) اوردینال (ون نیومن) است اگر در شرایط زیر صدق نماید:

۱) اگر $\zeta\in\xi$ آنگاه $\zeta\subset\xi$.

۲) اگر $\zeta,\mu\in\xi$ آنگاه یا $\mu=\zeta$ یا $\zeta\in\mu$ و یا $\mu\in\zeta$.

اگر A زیرمجموعه ناتهی از ξ باشد آنگاه $\zeta\in A$ هست که $\zeta\cap A=\varnothing$.

اعداد اوردینال با حروف کوچک یونانی نمایش می‌دهیم.

برخی از مهمترین خواص اوردینالها در زیر آمده است. برای اثبات خواننده را به [۲] ارجاع می‌دهیم.

۱) اعضا یک اوردینال، اوردینال هستند.

۲) اگر ξ و ζ اوردینال باشند آنگاه $\zeta\in\xi$ اگر و تنها اگر $\zeta\subsetneq\xi$.

۳) اشتراک دلخواه از اوردینال‌ها، یک اوردینال است.

٤) در خصوص اوردینال‌ها، با تعریف $\zeta<\xi$ اگر $\zeta\subsetneq\xi$ ، می‌توان سه گزاره $\zeta<\xi$ ، $\zeta\subsetneq\xi$ و $\zeta\in\xi$ را هم ارز در نظر گرفت.

۵) اگر ξ یک اوردینال باشد آنگاه $\xi\cup\{\xi\}$ یک اوردینال است و اگر ζ اوردینال دیگری باشد که $\zeta>\xi$ آنگاه $\zeta\geq\xi\cup\{\xi\}$.

٦) اجتماع دلخواه مجموعه A از اوردینال‌ها، خود یک اوردینال است. و در اینصورت $\cup A=\sup A$.

۷) اگر ξ و ζ اوردینال باشند آنگاه $\zeta>\xi$ یا $\zeta<\xi$.

یک اوردینال ξ اوردینال غیرحدی نامیده می‌شود اگر برای اوردینالی چون ζ داشته باشیم $\xi=\zeta\cup\{\zeta\}$ و در غیر اینصورت اوردینال حدی نامیده می‌شود. مجموعه تهی یک اوردینال حدی است و اوردینال حدی صفر نامیده می‌شود. ثابت می‌شود اوردینال حدی ناصفر وجود دارد.

یک عدد کاردینال α یک عدد اوردینال است که برای هر اوردینال $\zeta<\alpha$ هیچ تناظر یک به یک بین α,ζ موجود نباشد.

برای کاردینال α، α^+ کوچکترین کاردینال بزرگتر از α را نشان می‌دهد.

برای اطلاع بیشتر خواننده به کتاب [۲] برای تعاریف حسابی و تاریخچه درباره اعداد اوردینال‌ها ارجاع داده می‌شود.

فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه توانی X، با $P(X)$ و عدد کاردینال (عدد اصلی) آن با $|X|$ نمایش داده می‌شود.

۲-۲ **تعریف**: یک فیلتر $\mathcal{A}$ روی یک مجموعه X، مجموعه ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X است که بر طبق شرایط (a) و (b) می‌باشد:

(a) هر گاه $A,B\in\mathcal{A}$ آنگاه $A\cap B\in\mathcal{A}$

(b) اگر $A\subseteq B\subseteq X$ و $A\in\mathcal{A}$ آنگاه $B\in\mathcal{A}$.

(c) $\varnothing\notin\mathcal{A}$.

یک زیر مجموعه $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ یک پایه برای $\mathcal{A}$ است اگر هر عضو $\mathcal{A}$ شامل یک عضو از $\mathcal{B}$ باشد به گونه‌ای که $\mathcal{A}=\{A\subseteq X: \exists B\in\mathcal{B}\ \ st.\ \ B\subseteq A\}$.

یک فیلتر روی X ابر فیلتر است اگر مشمول هیچ فیلتر دیگری نباشد.

یک کاربرد اساسی از لم زورن منسوب به ا. تارسکی [۶] و [۵] نتیجه می‌دهد که هر فیلتر می‌تواند به یک ابر فیلتر توسیع داده شود. بعبارتی دیگر:

۳-۲ **قضیه** : هر خانواده از زیرمجموعه‌های یک مجموعه X با خاصیت مقطع متناهی می‌تواند به یک ابر فیلتر توسیع داده شود.

اگر $X=\alpha$ یک عدد کاردینال باشد، آنگاه $Z(X)=P(\alpha)$ بنابراین $\beta(\alpha)$ مجموعه همه ابر فیلترها

روی α است. بنابراین توپولوژی $\beta(\alpha)$ بصورت زیر مشخص می‌شود. $p \in cl(A)$ اگر و تنها اگر $A \in p$ برای هر $A \subseteq \alpha$ و $p \in \beta(\alpha)$. $\widehat{A}$ به جای $cl(A)$ بکار برده می‌شود که $A \subseteq \alpha$. بنابراین $\widehat{A} = \{p \in \beta(\alpha) : A \in p\}$ برای هر $A \subseteq \alpha$ نوشته می‌شود $A^* = \widehat{A} \bigcap (\beta(\alpha) - \alpha) = \widehat{A} \bigcap \alpha^*$.

عنصر $p \in \beta(\alpha)$ بطوریکه $p \notin \alpha$ ابر فیلتر آزاد نامیده می‌شود. عناصر α ابر فیلترهای ثابت نامیده می‌شوند.

اکنون به حد تحت ابرفیلترها روی فضای هاسدورف توجه شود.

۲-۴ تعریف : فرض کنید D فضایی گسسته باشد. فرض کنید $p \in \beta D$ ، $\prec x_s \succ_{s\in D}$ خانواده اندیس گذاری شده در یک فضای توپولوژیک X باشد و فرض کنید $y \in X$. آنگاه $p-\lim_{s\in D} x_s = y$ اگر و تنها اگر برای هر همسایگی U از y ، $\{s \in D : x_s \in U\} \in p$.

۲-۵ تعریف : فرض کنید Y, X فضاهایی توپولوژیک باشند و $A \subseteq X$ و $f: A \to Y$ تابعی دلخواه باشد. فرض کنید $x \in cl_X A$ و $y \in Y$. نوشته می‌شود $\lim_{a\to x} f(x) = y$ اگر و تنها اگر برای هر همسایگی V از y، همسایگی U از x موجود باشد به طوری که $f[A\cap U] \subseteq V$. واضح است که $\lim_{a\to x} f(x)$ یکتاست است.

۲-۶ قضیه : فرض کنید D فضایی گسسته و Y فضایی توپولوژیک است. فرض کنید $p\in\beta D$ و $y \in Y$. اگر $A \in p$ و $f: A\to Y$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه $p-\lim_{a\in A} f(a) = y$ اگر و تنها اگر $\lim_{a\to x} f(x) = y$.

اثبات : به فصل سوم [۴] رجوع کنید.

۲-۷ توجه : فرض کنید D فضایی گسسته باشد و $p\in\beta D$. ملاحظه کنید $\prec s \succ_{s\in D}$ بعنوان خانواده اندیس گذاری شده در βD است که $p-\lim_{s\in D} s = p$.

۲-۸ قضیه : فرض کنید D فضایی گسسته باشد و $p \in \beta D$. فرض کنید $\prec x_s \succ_{s\in D}$ خانواده اندیس گذاری شده در یک فضای توپولوژیک X باشد.

(a) اگر $p-\lim_{s\in D} x_s$ موجود باشد، آنگاه منحصر بفرد است.

(b) اگر X فضایی فشرده باشد، آنگاه $p-\lim_{s\in D} x_s$ موجود است.

اثبات : به فصل سوم [۴] رجوع کنید.

در این قسمت ، فرض کنید S فضایی توپولوژیک و $\mathcal{F}$ زیر جبری شامل توابع ثابت و مزدوج بسته از $CB(S)$ باشد. $Z(\mathcal{F}) = \{Z(f) : f\in\mathcal{F}\}$ قرار داده می‌شود که $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$.

۲-۹ تعریف : $\mathcal{A} \subseteq Z(\mathcal{F})$ یک فیلتر روی $\mathcal{F}$ یا بطور خلاصه تر یک فیلتر نامیده می‌شود اگر در شرایط (i) تا (iii) زیر صدق نماید :

(i) $\varnothing \notin \mathcal{A}$

(ii) اگر $A, B \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $A\cap B \in \mathcal{A}$.

(iii) اگر $A \in \mathcal{A}$, $B\in Z(\mathcal{F})$, $A\subseteq B$ و آنگاه $B\in\mathcal{A}$.

اگر فیلتر $\mathcal{A}$ نسبت به رابطهٔ شمول ماکسیمال باشد یک ابر فیلتر نامیده می‌شود .

$\mathcal{FS} = \{p :$ ابر فیلتر است $p\}$ قرار داده می‌شود و برای هر $A \in Z(\mathcal{F})$ ، $\hat{A} = \{p\in\mathcal{FS} : A\in p\}$ تعریف می‌گردد. براحتی می‌توان نشان داد که $\{(\widehat{A})^c : A\in Z(\mathcal{F})\}$ یک پایه برای توپولوژی روی $\mathcal{FS}$ است و $\mathcal{FS}$ تحت این توپولوژی فشرده است.

چنانچه رابطهٔ $\sim$ روی $\mathcal{FS}$ به گونه‌ای تعریف شود که: برای $p,q\in\mathcal{F}$ ، $p\sim q$ اگر و تنها اگر $\bigcap_{A\in p}\overline{\varepsilon(A)} = \bigcap_{B\in q}\overline{\varepsilon(B)}$.

نتیجه خواهد شد که $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی روی $\mathcal{FS}$ است. فرض کنید $[p]$ کلاس هم ارزی $p\in\mathcal{FS}$ باشد و فرض کنید $\mathcal{FS}/\sim$ فضای خارج قسمتی با توپولوژی خارج قسمتی باشد که $\pi : \mathcal{FS}\to \mathcal{FS}/\sim$ نگاشت خارج قسمتی است. برای هر $p\in\mathcal{FS}$ ، $\tilde{p} = \bigcap[p]$ تعریف و قرار داده می‌شود $\widetilde{A} = \{\tilde p : A\in p\}$ و برای هر $A\in Z(\mathcal{F})$ ، $\mathcal{R} = \{\tilde p : p\in\mathcal{FS}\}$.

$\{(\widetilde{A})^c : A\in Z(\mathcal{F})\}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{R}$ خواهد بود و $\mathcal{R}$ تحت این توپولوژی فضایی هاسدورف و فشرده است.

می‌توان نشان داد که $\mathcal{R}$ با $S^{\mathcal{F}}$ همیومورف هستند، بنابراین

۲-۱۰ لم : نگاشت $\varphi : S^{\mathcal{F}}\to\mathcal{R}$ تعریف شده به وسیله $\varphi(\mu)=\tilde p$ ، که $\bigcap_{A\in p}\overline{\varepsilon(A)} = \{\mu\}$ یک همئومورفیسم است .

اثبات : به [۷] رجوع نمایید.

۳- حد تحت فیلترهاروی فضاهای توپولوژیک و ترتیب کامفورت

در این قسمت نماد $\widetilde{p}-\lim$ معرفی می‌شود، این نماد برای حالتی که S فضایی گسسته است تعریف شده است، تعریف، به حالتی که S فضایی توپولوژیک است و $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد، تعمیم داده می‌شود.

۳-۱ تعریف : فرض کنید S فضای توپولوژیک هاسدورف و $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. فرض کنید X فضایی توپولوژیک و $\widetilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$. فرض کنید خانواده $\{x_s\}_{s\in S}$ بطور پیوسته اندیس گذاری شده باشد (یعنی تابع $S\to X: s\mapsto x_s$ پیوسته باشد) و $y\in X$. آنگاه نوشته می‌شود $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s = y$ اگر و تنها اگر برای هر همسایگی U از y ، $\widetilde{p}\in\left(\overline{x^{-1}(U)}\right)^\circ$.

۳-۲ تعریف : فرض کنید X,Y فضاهایی توپولوژیک هاسدورف باشند و $A\subseteq X$ و $f: A\to Y$ تابع باشد. فرض کنید $x\in cl_X A$, $y\in Y$. نوشته می‌شود $\lim_{a\to x} f(a)=y$ اگر و تنها اگر برای هر همسایگی V از y، همسایگی U از x بقسمی موجود باشد که $f(A\cap U)\subseteq V$.

۳-۳ قضیه : فرض کنید S فضای توپولوژیک هاسدورف و $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. فرض کنید $\widetilde{p}\in(\overline{A})^\circ$, $y\in Y$. هر گاه $f:A\to Y$ تابعی پیوسته باشد در این صورت $\widetilde{p}-\lim_{a\in A} f(a)=y$ اگر و تنها اگر $\lim_{a\to\widetilde{p}} f(a)=y$.

اثبات : فرض کنید $\widetilde{p}-\lim_{a\in A} f(a)=y$. اگر V همسایگی از y در این صورت $\widetilde{p}\in\left(\overline{f^{-1}(V)}\right)^\circ\subseteq\overline{A}$. بنابراین $B\in(\widetilde{p})^\circ$ هست که $\widetilde{p}\in(\overline{B})^\circ\subseteq\left(\overline{f^{-1}(V)}\right)^\circ\cap(\overline{A})^\circ$. حال اگر $U=\varepsilon^{-1}((\overline{B})^\circ)$ قرار داده، U در S باز است و خواهد شد $f(A\cap U)\subseteq V$.

بالعکس : فرض کنید $\lim_{a\to\widetilde{p}} f(a)=y$. اگر V همسایگی از y باشد همسایگی U از $\widetilde{p}$ در $\overline{A}$ هست که $f(A\cap U)\subseteq V$. حال با توجه به اینکه $A\cap U\subseteq f^{-1}(V)$ و لذا $\widetilde{p}\in(\overline{A})^\circ\cap U\subseteq\left(\overline{f^{-1}(V)}\right)^\circ$. درنتیجه حکم حاصل می‌شود.

۳-۴ توجه : فرض کنید S فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $\widetilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$. برای خانواده بطور پیوسته اندیس گذاری شده $\{s\}_{s\in S}$ در $S^{\mathcal{F}}$ داریم : $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} s=\widetilde{p}$.

۳-۵ قضیه : فرض کنید S فضای توپولوژیک هاسدورف و $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. فرض کنید $\{x_s\}_{s\in S}$ یک خانواده بطور پیوسته اندیس شده در فضای توپولوژیک X باشد. در این صورت

(۱) اگر $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s$ موجود باشد آنگاه یکتاست.

(۲) اگر X فضایی توپولوژیک فشرده ای باشد آنگاه $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s$ موجود است.

اثبات : (۱) اثبات واضح است.

(۲) فرض کنید $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s$ برای هر $y\in X$ موجود نباشد، مجموعه U_y را برای $y\in X$ بقسمی اختیار می‌شود که به ازای آن $\widetilde{p}\notin\overline{f^{-1}(U_y)}$. بنابراین $\{U_y : y\in X\}$ یک پوشش باز برای X است لذا $F\subseteq X$ متناهی هست که $X=\bigcup_{y\in F} U_y$. در نتیجه $S=\bigcup_{y\in F} f^{-1}(U_y)$ و لذا $y\in F$ هست که $\widetilde{p}\in\overline{f^{-1}(U_y)}$ و این تناقض است.

۳-۶ قضیه : فرض کنید $\widetilde{p},\mathcal{F},S$ همانهایی باشند که در قسمت های قبل معرفی شده‌اند. فرض کنید $\{x_s\}_{s\in S}$ یک خانواده بطور پیوسته اندیس گذاری شده در X باشد. فرض کنید X,Y نیز فضای توپولوژیک هاسدورف باشند و $f:X\to Y$ تابعی پیوسته باشد. اگر $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s$ موجود باشد انگاه $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} f(x_s)=f(\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s)$.

اثبات : U همسایگی از $f(\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s)=y$ و V همسایگی از $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} x_s$ را بقسمی اختیار کنید که $f(V)\subseteq U$. فرض کنید $A=x^{-1}(V)=\{s\in S: x_s\in V\}$. آنگاه $\widetilde{p}\in(\overline{A})^\circ$. از طرفی $A\subseteq\{s\in S: f(x_s)\in U\}=H$. بنابراین $\widetilde{p}\in(\overline{A})^\circ\subseteq(\overline{H})^\circ$ ، و این نتیجه می‌دهد $\widetilde{p}-\lim_{s\in S} f(x_s)=y$.

۳-۷ تعریف : فرض کنید S فضای توپولوژیک هاسدورف

و $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد. برای $\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$ ، X ، $\mathcal{F}_{\tilde{p}}$- فشرده می‌نامیم اگر برای هر تابع پیوسته $f:S\to X$ ، $\tilde{p}-\lim_{s\in S} f(s)$ موجود باشد. برای سهولت و با فرض ایجاد نشدن اشکالی ، X را به اختصار $\tilde{p}$-فشرده می‌نامیم.

هرگاه S فضایی گسسته باشد و $\mathcal{F}$ زیر جبری مزدوج بسته شامل توابع ثابت از $B(S)$ باشد. اگر X فضایی توپولوژیک و $x:S\to X$ تابعی دلخواه باشد بقسمی که به ازای $\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$, $y\in X$ ، $\tilde{p}-\lim_{s\in S} x(s)=y$ ، آنگاه بنابه تعریف برای هر همسایگی باز U از y ، $\tilde{p}\in \left(\overline{x^{-1}(U)}\right)^{\circ}$.
در نتیجه اگر $x^{-1}(U)\in Z(\mathcal{F})$ آنگاه $x^{-1}(U)\in\tilde{p}$.
بنابراین می‌توان گفت در حالتی که S گسسته باشد. $\tilde{p}-\lim_{s\in S}x(s)=y$ اگر وتنها اگر برای هر همسایگی U از y در X، $x^{-1}(U)\in\tilde{p}$ (اگر $x^{-1}(U)\in Z(\mathcal{F})$).

۳-۸ **تعریف** : برای $\tilde{q},\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$ ، ترتیب کامفورت $\le_c$ روی $S^{\mathcal{F}}$ بصورتی تعریف می‌شوند که $\tilde{p}\le_c\tilde{q}$ اگر هر فضای توپولوژیک هاسدورف X که $\tilde{q}$ - فشرده باشد آنگاه $\tilde{p}$ - فشرده باشد. اگر برای $\tilde{q},\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$ ، $\tilde{p}\le_c\tilde{q}$ و $\tilde{q}\le_c\tilde{p}$ گفته می‌شود $\tilde{p}\approx_c\tilde{q}$. همچنین می‌نویسیم $\tilde{p}<_c\tilde{q}$ اگر $\tilde{p}\le_c\tilde{q}$ و رابطه $\tilde{q}\le_c\tilde{p}$ برقرار نباشد.

به راحتی می‌توان مشاهده نمود که $\le_c$ رابطه ترتیب جزئی است.

۳-۹ **تعریف** : فرض کنید S فضای توپولوژیک و $\mathcal{F}$، C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. هرگاه $\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$ ، X فضایی کاملا منظم و هاسدورف و $\mathcal{U}$ C^* - زیر جبری یکدار از $CB(X)$ باشد آنگاه $(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$ عبارتست از مقطع همه Y هایی که $X\subseteq Y\subseteq X^{\mathcal{U}}$ و Y , $\tilde{p}$-فشرده است .

۳-۱۰ لم : فرض کنید X فضایی کاملا منظم و هاسدورف و $\mathcal{U}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(X)$ و $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. فرض کنید $\alpha=|S|$, $\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$ و $A_\circ(\tilde{p},X)=X$. به استقراء برای $\sigma<\alpha^+$ داده شده اگر σ یک اوردینال حدی ناصفر باشد، فرض کنید $A_\sigma(\tilde{p},X)=\bigcup_{\tau<\sigma}A_\tau(\tilde{p},X)$. اگر $\sigma=\tau+1$، فرض کنید $A_\sigma(\tilde{p},X)=\{\tilde{p}-\lim_{x\in S}f(x):$ $f:S\to A_\tau(\tilde{p},X)\subseteq X^{\mathcal{U}}$ پیوسته $\}$ باشد: آنگاه $(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)=\bigcup_{\sigma<\alpha^+}A_\sigma(\tilde{p},X)$.

اثبات : فرض کنید $Z=\bigcup_{\sigma<\alpha^+}A_\sigma(\tilde{p},X)$. برای دیدن اینکه $Z\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$ نشان داده می‌شود که برای هر $0\le\sigma\le\alpha^+$ ، $A_\sigma(\tilde{p},X)\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$. به استقراء عمل می‌گردد. واضح است که $A_\circ(\tilde{p},X)=X\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$.

حال فرض کنید برای اوردینال حدی و ناصفر $\sigma<\alpha^+$ ، و برای هر $\tau<\sigma$ ، $A_\tau(\tilde{p},X)\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$. در این صورت براحتی دیده می‌شود که $A_\sigma(\tilde{p},X)\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$. فرض کنید σ یک اوردینال غیر حدی ناصفر باشد و $x\in A_\sigma(\tilde{p},X)$. بنابراین τ چنان هست که $\sigma=\tau+1$. حال تابع پیوسته $f:S\to A_\tau(\tilde{p},X)$ بقسمی اختیار می‌شود که $x=\tilde{p}-\lim_{t\in S}f(t)$ چون $A_\tau(\tilde{p},X)\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$ و $(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$، $\tilde{p}$-فشرده است لذا نتیجه می‌شود $x\in(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$ و بنابراین $A_\sigma(\tilde{p},X)\subseteq(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)$.

بعکس نشان داده می‌شود $(\mathcal{F},\mathcal{U},\tilde{p})(X)\subseteq Z$. برای این منظور کافی است نشان داد Z، $\tilde{p}$-فشرده است . فرض کنید $f:S\to Z$ پیوسته باشد. برای هر $s\in S$ اوردینال $\sigma(s)<\alpha^+$ چنان هست که $f(s)\in A_{\sigma(s)}(\tilde{p},X)$. فرض کنید $\sigma=\sup\{\sigma(s):s\in S\}$. آنگاه $\sigma<\alpha^+$ و $f:S\to A_\sigma(\tilde{p},X)$ پیوسته خواهد بود و لذا $\tilde{p}-\lim_{s\in S}f(s)\in A_{\sigma+1}(\tilde{p},X)\subseteq Z$.

در قسمت قبل چنانچه $S=X$, $\mathcal{U}=\mathcal{F}$. برای $\tilde{p}\in S^{\mathcal{F}}$ ، $(\mathcal{F},\tilde{p})(S)$ عبارتست از مقطع همه Y هایی که $S\subseteq Y\subseteq S^{\mathcal{F}}$ و Y , $\tilde{p}$-فشرده است.

در این صورت قضیه ۱۱-۳ جالب خواهد بود.

۳-۱۱ **قضیه**: فرض کنید S فضای توپولوژیک کاملا منظم و هاسدورف باشد . فرض کنید $\mathcal{F}$ یک C^* - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد. هر گاه $\varepsilon:S\to S^{\mathcal{F}}$ نگاشت ارزیابی باشد و $|\varepsilon(S)|=\alpha\le|S|$. در این صورت برای هر

. $\left|(\mathcal{F},\tilde{\mathrm{p}})(S)\right| \le 2^{\alpha}$ ، $\tilde{p} \in S^{\mathcal{F}}$

اثبات : به استقراء روی $\sigma < \alpha^{+}$ نشان داده می‌شود که $\left|A_{\sigma}(\tilde{p},S)\right| \le 2^{\alpha}$ و بنابراین به کمک لم ۱۰-۲ نتیجه می‌دهد که $\left|(\mathcal{F},\tilde{\mathrm{p}})(S)\right| \le 2^{\alpha}.\left|\alpha^{+}\right| = 2^{\alpha}$ حاصل خواهد شد $\left|A_{\circ}(\tilde{p},S)\right| = \alpha$. برای $\sigma < \alpha^{+}$ داده شده می‌توان نتیجه گرفت که $\left|A_{\sigma}(\tilde{p},S)\right| \le 2^{\alpha}$. زیرا مجموعه نقاط $A_{\sigma}(\tilde{p},S)$ عبارتست از همه x هایی که به ازای تابع پیوسته‌ای مانند $f:S \to A_{\tau}(\tilde{p},S)$ موجود باشد که $x = \tilde{p} - \lim_{s\in S} f(s)$ ، $(\sigma = \tau + 1)$. پس هر نقطه به کمک یک تابع پیوسته مشخص می‌شود. لذا $\left|A_{\sigma}(\tilde{p},S)\right| = \left|C(S, A_{\tau}(\tilde{p},S))\right| \le (2^{\alpha})^{\alpha} = 2^{\alpha}$ و بنابراین $\left|A_{\sigma}(\tilde{p},S)\right| \le 2^{\alpha}$ برای اوردینال حدی τ با این خاصیت که $0 < \tau < \alpha^{+}$ نتیجه می‌دهد: $\left|A_{\tau}(\tilde{p},S)\right| \le 2^{\alpha}.\left|\tau\right| = 2^{\alpha}$.

۳-۱۲ **لم** : فرض کنید $\tilde{p},\mathcal{F},S$ همانهایی باشند که در قضیه قبل معرفی نموده‌ایم، فرض کنید X فضایی $\tilde{p}$-فشرده و Y فضایی هاسدورف باشد. فرض کنید Z زیر فضایی $\tilde{p}$-فشرده از Y و $f:X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f^{-1}(Z)$ $\tilde{p}$-فشرده است.

اثبات : فرض کنید $g:S \to f^{-1}(Z)$ تابعی پیوسته باشد، بنابراین $g:S \to f^{-1}(Z) \subseteq X$ تابعی پیوسته خواهد بود. چون X $\tilde{p}$-فشرده است لذا $x = \tilde{p} - \lim_{s\in S} g(s)$ در X موجود است و چون f پیوسته است بنابه قضایای قبل $\tilde{p} - \lim_{s\in S} f(g(s)) = f(\tilde{p} - \lim_{s\in S} g(s))$ در نتیجه $\tilde{p} - \lim_{s\in S} f(g(s)) = f(x)$. $fog: S \to Z$ پیوسته است و چون Z $\tilde{p}$-فشرده است بنابراین $f(x) \in Z$ و لذا $x \in f^{-1}(Z)$ و این حکم را نتیجه می‌دهد.

۳-۱۳ **قضیه**: فرض کنید S فضای توپولوژیک نامتناهی و $\mathcal{F}$ یک C^{*} - زیر جبر یکدار از $CB(S)$ باشد و فرض کنید $\tilde{p},\tilde{q} \in S^{\mathcal{F}} - S$. هرگاه X ، $\tilde{q}-$ فشرده باشد و هر تابع پیوسته $f:S \to X$ دارای توسیع پیوسته $\hat{f}:S^{\mathcal{F}} \to \beta X$ باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

(۱) $\tilde{p} \le_c \tilde{q}$.

(۲) $(\mathcal{F},\tilde{p})(S) \subseteq (\mathcal{F},\tilde{q})(S)$.

(۳) $\tilde{p} \in (\mathcal{F},\tilde{q})(S)$.

(۴) تابع پیوسته $f: S \to (\mathcal{F},\tilde{q})(S)$ بقسمی موجود است که $\hat{f}(\tilde{q}) = \tilde{p} \notin f(S)$.

(۵) $(\mathcal{F},\tilde{q})(S)$ ، $\tilde{p}-$ فشرده است.

اثبات : (۲) از (۱) نتیجه می‌شود. زیرا $(\mathcal{F},\tilde{q})(S)$، $\tilde{q}-$ فشرده است و بنابراین $\tilde{p}-$ فشرده خواهد شد.

چون

$$\tilde{\mathrm{p}} = \tilde{\mathrm{p}}\text{-}\lim_{s\in S} s \in A_1(\tilde{\mathrm{p}},S) \subseteq (\mathcal{F},\tilde{p})(S) \subseteq (\mathcal{F},\tilde{q})(S)$$

پس (۳) از (۲) نتیجه می‌شود.

(۴) از (۳) نتیجه می‌شود. فرض کنید $\alpha = \left|\varepsilon(S)\right|$. ابتدا $\sigma < \alpha^{+}$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که $\tilde{p} \in A_{\sigma+1}(\tilde{q},S)$. آنگاه به ازای تابع پیوسته‌ای مانند $f:S \to A_{\sigma}(\tilde{p},X)$ خواهیم داشت :

$$\tilde{p} = \tilde{q} - \lim_{s\in S} f(s) = \hat{f}(\tilde{q}).$$

(۳) از (۴) نتیجه می‌شود، زیرا $\tilde{p} = \tilde{q} - \lim_{s\in S} f(s) \in (\mathcal{F},\tilde{q})(S)$.

(۱) از (۳) نتیجه می‌شود. فرض کنید X ، $\tilde{q}-$ فشرده باشد و فرض کنید $f:S \to X$ تابع پیوسته باشد که دارای توسیع پیوسته $\hat{f}:S^{\mathcal{F}} \to \beta X$ باشد. بوسیله لم قبل $\hat{f}^{-1}(X)$ ، $\tilde{q}-$ فشرده است و بنابراین $\tilde{p} \in (\mathcal{F},\tilde{q})(S) \subseteq \hat{f}^{-1}(X)$ و لذا $\hat{f}(\tilde{p}) \in X$. پس

$$\tilde{p} - \lim_{s\in S} f(s) = \hat{f}(\tilde{p} - \lim_{s\in S} s) = \hat{f}(\tilde{p}) \in X.$$

(۵) از (۱) نتیجه می‌شود و (۲) از (۵) نتیجه می‌شود.

٤- مراجع

[۱] **J. Berglund, H. Junghenn, and P. Milnes,** *Analysis on semigroups,* **Wiley**, N. Y., 1989.

[۲] **W. Comfort and S. Negrepontis,** *The theory of ultrafilters,* **Springer – Verlag, Berlin,** 1974 .

[۳] **S. Garcia-Ferreira, N. Hindman and D. Strauss,** *Orderings of the Stone-Cech Remainder of Discrete Semigroup.* Topology and its applications **97** (1999), 127-148.

[۴] **N. Hindman and D. Strauss,** *Algebra in the Stone-Cech compactification Theory and Applications to Ramsey Theory,* **Walter de Gruyter, 1998.**

[۵] **A. Tarski,** *Sur la decomposition des ensembles en sous- ensembles Presque disjoints.* Fund. Math. 12 (1926), 188-205.

[۶] **A. Tarski,** *une contribution a la theorie de la mesure.* Fund. Math. 15 (1930), 42-50.

[۷] **M. A. Tootkaboni and A. Riazi,** Ultrafilter on semitopological semigroup, **Semigroup Forum, 70** (2005), no. 3, 317-328.

[۸] **J. von Neumann,** *Zur Einfuhrung der Transfiniten Zahlen* . Acta Litt. Sci. Szeged 1, (1923), 199-208.