

مسیرهای کوتاه‌ترین زمان برای یک ربات دیفرانسیلی

بهروز بیدآبادⁱ؛ امیرحسام زعیمⁱⁱ

چکیده

الگوریتم‌های کنترل ربات به دو مرحله تعیین مسیر و کنترل روی مسیر تقسیم می‌شوند. در این مقاله به مرحله تعیین مسیر بهینه حرکت یک ربات دیفرانسیلی؛ که روی سطحی بدون مانع حرکت نموده و هدف مشخصی را در نظر دارد، می‌پردازیم و هندسه حرکت و لاگرانژین سازگار با سیستم را مطالعه می‌کنیم. سپس ثابت می‌کنیم که این هندسه تعمیمی از هندسه فینسلری به نام هندسه لاگرانژی است و در نتیجه، مسیرهای دارای کوتاه‌ترین زمان گذر، ژئودزیک‌های این هندسه می‌باشند. در خاتمه مثالی در یک محیط واقعی آورده شده است؛ سپس این مثال با برنامه میپل اجرا و معادله مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای ربات دیفرانسیلی ارایه و رسم شده است.

کلمات کلیدی

دیفرانسیلی، ژئودزیک، مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر، لاگرانژین، معادلات ربات لاگرانژ

Time Optimal Trajectories for a Differential Drive Robot

B. Bidabad; A. H. Zaeim

ABSTRACT

Robot control algorithms are divided into two stages, namely, trajectory planning and path tracking. In this paper, we study trajectory planning for a differential drive robot, moving on a plane without obstacle toward a fixed target. We consider the geometry of motion and find the compatible Lagrangian related to this problem. We prove that the mentioned geometry is a generalization of Finsler geometry, named Lagrange geometry. Hence, time optimal trajectories are the geodesics of this geometry. Finally, we give a real world example of a differential drive robot. The differential equations of optimal path are found, and the trajectory is plotted by the Maple program.

KEYWORDS

Differential drive robot, geodesic, time optimal trajectories, Lagrangian, Lagrange equations.

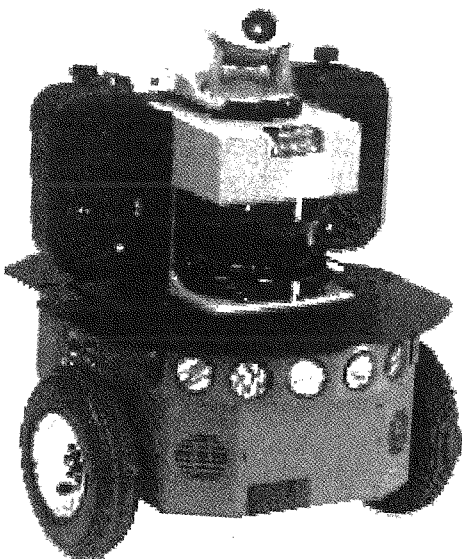
ⁱ استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر: Email: bidabad@aut.ac.ir

ⁱⁱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر: Email:h_zmath@yahoo.com

مسیرهای طی شده به وسیله ربات با توجه به این لاگرانژین جدید قابل محاسبه‌اند و می‌توان با استفاده از آن مسیرهای بهینه را از نظر کوتاه‌ترین زمان گذر به دست آورد. مزیت روش ارائه شده در این مقاله بیان مسأله و حل آن به روش هندسی است؛ به عبارت دیگر، این مسأله مکانیکی به صورت مسأله‌ای هندسی بیان شده و سپس لاگرانژین مربوط به آن محاسبه و ارایه می‌شود. در اینجا تابع سازگار یا هندسه حاکم بر مسأله را مشخص می‌کنیم که توسعه مسأله را بسیار ساده می‌کند. از مزایای دیگر این روش آن است که براحتی می‌توان آن را برای اهداف متحرک تعمیم داد. در پایان به بیان معادلاتی می‌پردازیم که مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای ربات دیفرانسیلی را؛ که به روشی مشخص به تعقیب هدف می‌پردازد، ارایه می‌کند. نتایج به دست آمده با کمی تغییر برای ربات‌های شبه اتومبیل نیز قابل بیان است. به عبارت دقیق‌تر در این‌گونه ربات‌ها شعاع انحنای مسیر دارای یک مقدار حداقل است که باید در معادلات وارد شود.

۲- ربات دیفرانسیلی^۲

در این بخش، خصوصیات مکانیکی یک ربات دیفرانسیلی بیان می‌شود. یک ربات دیفرانسیلی دو چرخ اصلی دارد که هرکدام به طور مجزا به یک موتور متصل هستند. چرخ سوم، یک چرخ گوی مانند است که قابلیت چرخش به هر طرف را دارد و تنها نقش آن حفظ تعادل ربات است (شکل (۱)). ربات‌های دیفرانسیلی به عنوان ربات‌های فوتبالیست یا ربات‌های خدمتکار قابل استفاده است.



شکل (۱): ربات دیفرانسیلی

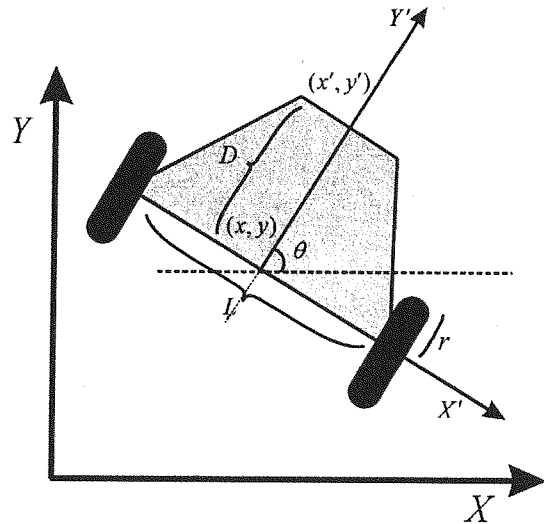
یافتن مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای یک ربات؛ که قیدهای بخصوصی برای حرکتش وجود دارد، یکی از مسائل مهم و مورد بحث در علم رباتیک است. این مسأله با مسأله حداکثر سودمندی در طول زمان ارتباط مستقیم دارد. به دلیل پیچیدگی دینامیک ربات پیدا کردن چنین مسیرهایی کار ساده‌ای نیست.

در سال‌های گذشته تحقیقات زیادی در مورد کنترل ربات‌های دیفرانسیلی انجام شده است. در اینجا به چند نمونه؛ که اهمیت بیشتری دارند و با این تحقیق در ارتباط هستند، اشاره می‌کنیم. در اکثر این تحقیقات، مسأله حرکت ربات از یک وضعیت (موقعیت و جهت) به وضعیت دیگر مورد بحث قرار گرفته است. در سال ۱۹۵۷ دوبینزا^[۴] ثابت کرد کوتاه‌ترین مسیر برای یک ربات دیفرانسیلی شبه اتومبیل؛ که فقط می‌تواند به سمت جلو حرکت کند، ترکیبی از دوایر با شعاع ثابت و خط‌های راست است. در سال ۱۹۹۰ این مسأله برای رباتی که می‌تواند به سمت جلو و عقب حرکت کند، توسعه شد [۵]. مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای یک ربات دیفرانسیلی؛ که می‌تواند به سمت جلو و عقب حرکت کند، در سال ۲۰۰۲ بررسی شد [۶]. در مراجع [۸]، [۱۰] یک الگوریتم کارا برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر برای یک ربات شبه اتومبیل؛ که محدودیت حداقل شعاع چرخش دارد، بیان شده است. در مرجع [۷] در سال ۱۹۹۵ روشی برای طراحی کوتاه‌ترین مسیر، در حالی که علاوه بر وجود مانع روی سطح محدودیتی برای انحنای مسیر نیز وجود دارد، ارایه شد. این روش هر دو دسته ربات‌های شبه اتومبیل و دیفرانسیلی را مورد مطالعه قرار داده است. بالاخره در [۱۱] مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای یک ربات دیفرانسیلی؛ که هدف متحرکی را تعقیب می‌کند بررسی شده است.

در این مقاله، ابتدا معادلات حرکت یک ربات دیفرانسیلی بررسی می‌شود. وقتی ربات در یک موقعیت با یک جهت اولیه قرار دارد، فقط می‌تواند در جهتی حرکت کند که چرخ‌ها به آن سمت قرار دارند؛ بنابراین این امکان وجود ندارد که روی یک خط مستقیم به سمت هدف حرکت کند؛ اما می‌توانیم با مشخص کردن انحنای مسیر در لحظه اول به گونه‌ای ربات را به سمت هدف هدایت کنیم که مسیر حرکت ربات بهینه باشد. با توجه به این محدودیت؛ که در انتخاب مسیر وجود دارد و پارامتر اضافه‌ای که در لحظه شروع حرکت به سیستم داده می‌شود، لاگرانژین سازگار با مسأله محاسبه می‌شود. زمان گذر از

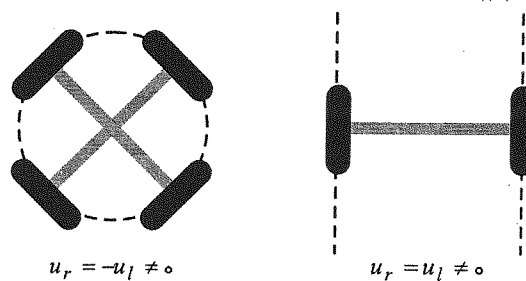
۳- معادلات سینماتیکی ربات دیفرانسیلی

فرض کنید در یک ربات دیفرانسیلی فاصله بین دو چرخ اصلی ربات برابر با L و شعاع هر چرخ برابر r باشد. نقطه وسط محور چرخ‌های ربات را به عنوان مبدأ مختصات ربات، محور x های آن را در امتداد محور چرخ‌ها و محور y های آن را قائم بر محور چرخ‌ها در نظر می‌گیریم و به ترتیب با X' و Y' نشان می‌دهیم. فاصله مبدأ مختصات ربات با جلو آن را با D نمایش می‌دهیم (شکل (۲)).



شکل (۲): مختصات یک ربات دیفرانسیلی

فرض کنید u_l و u_r به ترتیب سرعت زاویه‌ای چرخ‌های راست و چپ ربات باشند. مسیر حرکت ربات به وسیله این دو مقدار مشخص می‌شود. مثلاً اگر $u_l = u_r > 0$ باشد؛ یعنی ربات به سمت جلو و در جهتی که چرخ‌ها به سمت آن قرار دارند حرکت می‌کند و سرعت حرکت نیز $V = ru_r$ است؛ یا اگر $u_l = -u_r \neq 0$ باشد، آنگاه ربات حول مبدأ خود شروع به چرخش می‌کند؛ زیرا چرخ‌ها در جهت مخالف یکدیگر می‌چرخند. در این حالت مبدأ مختصات ربات سر جای خود باقی می‌ماند (شکل (۳)).



شکل (۳): سرعت زاویه‌ای و جهت حرکت ربات

وضعیت ربات در صفحه را با سه مختصه (x, y, θ) نشان می‌دهیم که (x, y) مختصات مبدأ ربات و $\theta \in [0, 2\pi]$ زاویه‌ای است که محور Y' با جهت مثبت محور X می‌سازد. در واقع θ جهت چرخ‌های ربات را نشان می‌دهد. مختصات نقطه جلو ربات با (x', y') و شرایط اولیه با اندیس صفر مشخص می‌شوند. با توجه به آنچه در مورد حرکت ربات گفته شد، روابط زیر را داریم [۱۲]:

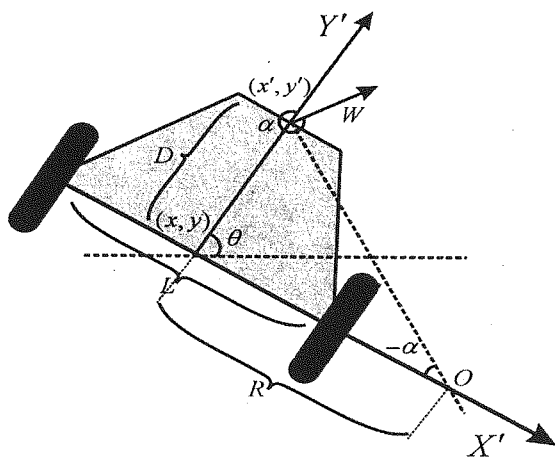
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{r}{2}(u_l + u_r) \cos \theta, \\ \dot{y} = \frac{r}{2}(u_l + u_r) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{r}{L}(u_r - u_l), \end{cases} \quad (1)$$

که در آن \dot{x} ، \dot{y} و $\dot{\theta}$ به ترتیب مشتقات اول x ، y و θ نسبت به زمان می‌باشند.

۴- بیان ریاضی مسأله و ارایه راه حل آن

فرض کنید بخواهیم ربات از موقعیت اولیه (x_0, y_0, θ_0) به هدف مورد نظر؛ که در نقطه (x_1, y_1) قرار دارد، برسد؛ یعنی باید جلو ربات از نقطه (x'_0, y'_0) به نقطه (x'_1, y'_1) برسد. در این مقاله هدف ما بررسی مسیر حرکت ربات (نقطه مرکز ربات) و یافتن مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای رسیدن جلو ربات به هدف است.

فرض کنید ربات در موقعیت (x, y, θ) قرار دارد و حرکت ربات به گونه‌ای است که نقطه (x', y') با سرعت W حرکت می‌کند؛ پس می‌توان سرعت زاویه‌ای چرخ‌های ربات را بررسی و معادلات (۱) را بازنویسی کرد.



شکل (۴): حرکت ربات در صفحه

زاویه‌ای را که W با جهت مثبت محور Y' و در جهت مثبت مثلثاتی می‌سازد با α نشان می‌دهیم. توجه کنید که $\alpha \in [0, 2\pi]$ بنابراین داریم:

$$R_{(x,y)} := \frac{D}{\tan(-\alpha)} : O \text{ حول نقطه } (x, y)$$

$$T_{(x,y)} := \frac{D}{\sin(-\alpha)} : O \text{ حول نقطه } (x', y')$$

حال سرعت زاویه‌ای (x', y') به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \frac{\|W\|}{T} = \frac{\|W\| \sin(-\alpha)}{D} \quad (2)$$

بنابراین داریم:

$$u_r = \frac{(R - \frac{L}{2})\omega}{r} = \frac{(\frac{D}{\tan(-\alpha)} - \frac{L}{2})\|W\| \sin(-\alpha)}{rD} = \frac{\|W\| \cos(-\alpha)}{r} - \frac{L\|W\| \sin(-\alpha)}{2rD} \quad (3)$$

$$u_t = \frac{(R + \frac{L}{2})\omega}{r} = \frac{(\frac{D}{\tan(-\alpha)} + \frac{L}{2})\|W\| \sin(-\alpha)}{rD} = \frac{\|W\| \cos(-\alpha)}{r} + \frac{L\|W\| \sin(-\alpha)}{2rD} \quad (4)$$

پس معادلات دیفرانسیل موقعیت ربات در نقطه دلخواه (x, y, θ) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{x} = \|W\| \cos \theta \cos(-\alpha), \\ \dot{y} = \|W\| \sin \theta \cos(-\alpha), \\ \dot{\theta} = \frac{\|W\| \sin(-\alpha)}{D}, \end{cases} \quad (5)$$

که در آن، علامت $\|\cdot\|$ بیانگر نرم استاندارد اقلیدسی صفحه است. توجه کنید با توجه به معادلات (5) داریم:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \|W\|^2 \cos^2 \alpha \quad (6)$$

حال اگر بردار سرعت نقطه (x, y) را با $V_{(x,y)}$ نشان دهیم

$$\|V_{(x,y)}\|^2 = \|W\|^2 \cos^2 \alpha$$

گزاره ۱- فرض کنید یک ربات دیفرانسیلی در موقعیت (x, y, θ) قرار دارد. اگر سرعت نقطه (x', y') و α زاویه‌ای باشد که W با Y' می‌سازد آنگاه $V_{(x,y)}$ یعنی سرعت ربات در نقطه (x, y) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\|V_{(x,y)}\|^2 = \|W\|^2 \cos^2 \alpha$$

۵- تعاریف اولیه هندسه لاگرانژی^۳

هندسه لاگرانژی در حقیقت، تعمیمی طبیعی از هندسه‌های

اقلیدسی، ریمانی و فینسلری است که در اثر نیاز بشر به پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیرها بوجود آمده است. اگر بخواهیم تفاوت این چهار هندسه را به زبانی ساده بیان کنیم باید تفاوت مفهوم کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در این چهار هندسه را بررسی کنیم. در هندسه اقلیدسی کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط راست است؛ در حالی که در هندسه ریمانی کوتاه‌ترین مسیرها به مکان دو نقطه بستگی دارد که خطوط مختلفی هستند که آنها را ژئودزیک می‌نامند. در هندسه فینسلری کوتاه‌ترین مسیر علاوه بر مکان نقاط به عوامل دیگری مانند سرعت متحرکی؛ که این فاصله را می‌پیماید نیز بستگی دارد و بالاخره در هندسه لاگرانژی مسأله کوتاه‌ترین فاصله علاوه بر مکان و سرعت به شتاب یا عوامل خارجی دیگر نیز بستگی دارد. برای توضیحات بیشتر در مورد این هندسه به [۲] یا [۱۴] مراجعه کنید.

نظریه فضاها لاگرانژی مرتبه ۱ بر اساس هندسه کلاف ۱-جت بیان می‌شود. فرض کنید X_n یک منیفلد n -بعدی و $\rho, \sigma: I \rightarrow X_n$ دو خم باشند به گونه‌ای که برای $x_0 \in X_n$ ، $x_0 = \rho(0) = \sigma(0)$ ، $(0 \in I)$ در نقطه x_0 از مرتبه ۱ مرتبند اگر برای هر $f \in C^\infty(U)$ که U یک زیرمجموعه باز X_n و شامل x_0 است، داشته باشیم:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \rho)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)(t)|_{t=0}$$

رابطه مرتبط بودن از مرتبه ۱، رابطه‌ای هم‌ارزی روی تمام خمهایی که از نقطه x_0 عبور می‌کنند قرار می‌دهد که آن را با $[\rho]_{x_0}$ نمایش می‌دهیم. به این کلاس هم‌ارزی یک فضای ۱-جت در نقطه x_0 می‌گوییم و مجموعه تمام فضاها ۱-جت در نقطه x_0 را با $Osc^1_{x_0}$ نمایش می‌دهیم. تعریف می‌کنیم

$$Osc^1 X_n := \bigcup_{x_0 \in X_n} Osc^1_{x_0} \quad (7)$$

و آن را کلاف ۱-جت روی منیفلد پایه X_n می‌نامیم. نگاشت زیر:

$$\pi: Osc^1 X_n \rightarrow X_n, \quad \pi([\rho]_{x_0}) = x_0$$

که یک نگاشت پوشاست را در نظر بگیرید. بنابراین $(Osc^1 X_n, \pi, X_n)$ یک کلاف برداری است. کلاف M -جت $(Osc^M X_n)$ را مانند کلاف ۱-جت تعریف می‌کنیم. در اینجا رابطه هم‌ارزی را از مرتبه M مرتبط بودن تعریف می‌کنیم به این معنی که برای هر $f \in C^\infty(U)$ و $x_0 \in U$ داشته باشیم:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \rho)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)(t)|_{t=0} \dots$$

$$\frac{d^M}{dt^M}(f \circ \rho)(t)|_{t=0} = \frac{d^M}{dt^M}(f \circ \sigma)(t)|_{t=0}.$$

فرض کنید $x = (x^i)$ یک دستگاه مختصات موضعی روی

حرکت این دو نقطه با هم یکی است. حال چرخ‌ها را وارد مسأله می‌کنیم. فرض کنید (x', y') با سرعت W حرکت کند. بوضوح سرعت نقطه (x, y) یعنی V دیگر برابر و هم جهت با W نیست. این مسأله حاکم شدن یک هندسه جدید بر حرکت نقطه (x, y) را نشان می‌دهد. فرض کنید $\|W\|=1$ باشد. در بخش ۵ مشخص کردیم بردارهای V چه رابطه‌ای با W دارند. متریک جدید سازگار با مسأله باید به صورتی تعریف شود که اندازه بردارهای V را برابر ۱ نشان دهد. در واقع، این متریک تغییر یافته متریک اقلیدسی است و این تغییرات ناشی از محدودیت‌هایی است که در حرکت ربات وجود دارد. از رابطه (۶) داریم:

$$\|V_{(x,y)}\|^2 = \cos^2 \alpha. \quad (11)$$

اکنون، تابع $L: R^4 \times R \rightarrow R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(x, y, V_{(x,y)}, t) := \frac{\|V_{(x,y)}\|}{|\cos \alpha(t)|}.$$

از آنجا که $\cos \alpha = \frac{V \cdot W}{\|V\| \|W\|}$ (شکل (۵)) برای محاسبه $\cos \alpha$ ابتدا باید بردار W محاسبه شود. چون مختصات نقطه

(x', y') برابر با $(x + D \cos \theta, y + D \sin \theta)$ است، پس

$$W = (x_1 - x - D \cos \theta, y_1 - y - D \sin \theta)$$

که در آن مختصات نقطه نوک ربات و (x_1, y_1) مختصات نقطه هدف است. حال، از آنجا که $\|W\|=1$ پس تابع

L به صورت $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\|V\|^2}{|V \cdot W|}$ در می‌آید. L در واقع

یک تابع اساسی روی فضای کاواگوچی مرتبه ۱ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L: Osc^1(R^2) \longrightarrow R$$

$$L(x, \dot{x}) := \frac{\|V\|^2}{|\dot{x}(x_1 - x - D \cos \theta) + \dot{y}(y_1 - y - D \sin \theta)|}$$

حال شرایط زرمولو را در مورد L بررسی می‌کنیم.

$$\Delta_1 L = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = L, \quad (12)$$

بنابراین، مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای ربات با معادلات اولر؛ که به صورت زیر هستند، محاسبه شوند.

$$E_1 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (13)$$

$$E_2 = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0.$$

به این ترتیب، با استفاده از گزاره ۱ قضیه زیر ثابت

X_n باشد. یک خم پارامتری روی X_n با نگاشتی مانند $C: [t_0, t] \rightarrow X_n$ که $x^i = x^i(t)$ به ازای $i=1, \dots, n$ مختصات یک نقطه روی خم است، داده می‌شود. مجموعه‌ای از مقادیر $(x^{(0)i}, x^{(1)i}, \dots, x^{(n)i})$ در طول خم بیانگر مشتقات مراتب بالاتر می‌باشند؛ جایی‌که $x^{(0)i} = x^i$ ، $x^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}$ و

$$x^{(\alpha)i} = \frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq M, 0 \leq i \leq n.$$

بنابراین

یک دستگاه مختصات موضعی برای $(x^{(0)i}, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i})$

$Osc^M X_n$ است. حال فرض کنید $K_n^M \equiv Osc^M X_n$ و

$L: K_n^M \setminus \{0\} \rightarrow R$ یک تابع هموار روی $K_n^M \setminus \{0\}$ و پیوسته

در $\{0\}$ باشد. K_n^M را یک فضای کاواگوچی مرتبه M و

L را یک لاگرانژین روی این فضا می‌نامیم. طول قوس برای

یک خم در فضای کاواگوچی مرتبه M برابر است با:

$$s := \int_{t_0}^t L(x^{(0)i}, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i}) dt \quad (8)$$

برای اینکه طول قوس نسبت به تغییر پارامتر t پایا باشد،

لازم است L در شرایط زیر که به شرایط زرمولو موسومند صدق کند:

$$\Delta_1 L := \sum_{\alpha=1}^M \alpha x^{(\alpha)i} L_{(\alpha)i} = L, \quad (9)$$

$$\Delta_N L := \sum_{\alpha=N}^M x^{(\alpha-N+1)i} L_{(\alpha)i} = 0.$$

در اینجا از نمادهای جمع‌بندی انیشتین استفاده کرده‌ایم و

$N=2, 3, \dots, M$ و $L_{(\alpha)i} := \frac{\partial L}{\partial x^{(\alpha)i}}$. این روابط در حالت

خاص هندسه فینسلر با تابع اساسی $F(x, \dot{x})$ به صورت

$x^i F_i = F$ و $\dot{x}^i F_i = 0$ نوشته می‌شوند. زمانی که تغییرات

طول قوس برابر صفر شود، خم، یک خم اکستریمال می‌شود؛ لذا

تحت شرایط زرمولو معادلات اولر به دست می‌آیند:

$$E_i := \sum_{\alpha=0}^M (-1)^\alpha (L_{(\alpha)i})^{(\alpha)} = 0. \quad (10)$$

جواب این دستگاه، معادله خم اکستریمال است.

۶- لاگرانژین سازگار با مسأله

در این بخش، به تعبیر هندسی حرکت ربات می‌پردازیم.

فرض کنید ربات ما یک جسم صلب باشد که می‌تواند به هر

طرف روی صفحه حرکت کند و چرخ‌ها هیچ محدودیتی در

حرکت آن ایجاد نکنند. در این صورت جهت و اندازه سرعت

نقاط (x, y) و (x', y') با هم یکی است؛ یعنی هندسه حاکم بر

```

a[1]:=diff(L,x(t)[3]):
a[2]:=diff(L,x(t)[4]):
> for j from 1 to 2 do:
  for i from 3 to 4 do:
    for k from 1 to 2 do:
      a[j]:=subs(x(t)[i]=diff(x[i-2](t),t),a[j]):
      a[j]:=subs(x(t)[k]=x[k](t),a[j]):
    od:
  od:
od:
> E[1]:=diff(nrm(x(t)),x(t)[1])-diff(a[1],t):
  E[2]:=diff(nrm(x(t)),x(t)[2])-diff(a[2],t):
> for j from 1 to 2 do:
  for i from 3 to 4 do:
    for k from 1 to 2 do:
      E[j]:=subs(x(t)[k]=x[k](t),E[j]):
      E[j]:=subs(x(t)[i]=diff(x[i-2](t),t),E[j]):
    od:
  od:
od:
> dsol:=dsolve({E[1]=0,E[2]=0,x[1](0)=0
,x[2](0)=0,D(x[1])(0)=-2,D(x[2])(0)=1
,{x[1](t),x[2](t)},numeric,method=rkf45
,output=listprocedure):
> c[1]:=subs(dsol,x[1](t))
c[2]:=subs(dsol,x[2](t)):
> TARGET:=pointplot([-1,10]);
  PATH:=plot([c[1](t),c[2](t),t=0..200]
,color=green,thickness=2);
display({TARGET,PATH});

```

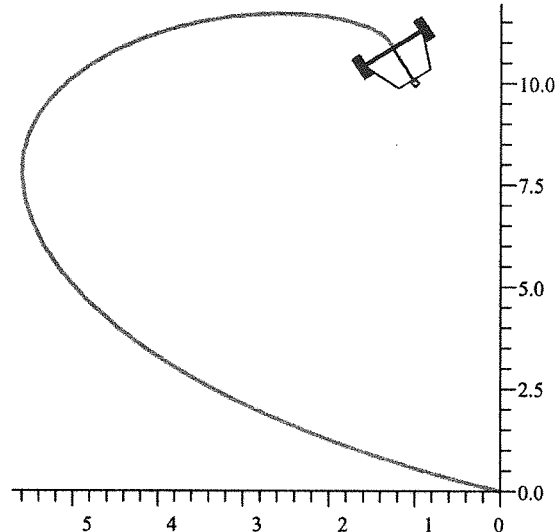
می‌شود:

قضیه-۱: فرض کنیم یک ربات دیفرانسیلی در نقطه (x_0, y_0) از صفحه‌ای بدون مانع و با سرعت اولیه $V_0 \neq 0$ در حال حرکت است. اگر بخواهیم این ربات به نقطه (x_1, y_1) از صفحه برسد، هندسه حرکت از نوع هندسه لاگرانژی است و مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای ربات با معادلات (۱۲) محاسبه می‌شوند.

اثبات: همان‌طور که در قبل بیان شد، لاگرانژین سازگار با مسأله را پیدا کردیم، پس مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای ربات دیفرانسیلی از طریق معادلات اویلر-لاگرانژ مرتبط با لاگرانژین محاسبه شده به دست می‌آیند.

۷- مثال

فرض کنید یک ربات دیفرانسیلی؛ که در آن $D=1$ ، با نقطه شروع اولیه $(0,0)$ و با سرعت اولیه $(-2,1)$ می‌خواهد به نقطه هدف $(-1,10)$ برسد. پس از حل معادلات اویلر لاگرانژ مسیر کوتاه‌ترین زمان گذر برای ربات به صورت زیر به دست می‌آید:



شکل (۵): مسیر بهینه حرکت ربات دیفرانسیلی در صفحه با شرایط اولیه داده شده در مثال

برنامه زیر در محیط نرم افزار Maple نوشته شده و برای رسم مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر ربات مفید است.

```

> restart;
with(plots):
> nrm := proc(x)
  x[3]^2+x[4]^2/abs(x[3]*(-1-x[1]-
  cos(arctan(x[4]/x[3]))))+x[4]*(10-x[2]-
  sin(arctan(x[4]/x[3])))^1.000001
end:
> L:=nrm(x(t)):

```

۸- نتیجه

در این مقاله، مسیرهای کوتاه‌ترین زمان گذر برای یک ربات دیفرانسیلی را؛ که با موقعیت اولیه (x_0, y_0, θ_0) و سرعت اولیه V_0 به سمت هدفی با مختصات (x_1, y_1) حرکت می‌کند، بررسی و معادلات چنین مسیرهایی را ارایه کردیم. ثابت کردیم که هندسه حرکت از نوع هندسه لاگرانژی است. نتایج به دست آمده با کمی تغییر و قرار دادن محدودیت‌هایی بر روی شعاع انحنای مسیر، برای ربات‌های شبه اتومبیل قابل استفاده است. همچنین می‌توانیم این تحقیقات را برای هدف متحرک تعمیم داده و در مورد ربات‌های فوتبالیست استفاده کرد.

۹- مراجع

- [۱] بهروز بیدآباد، «هندسه منیفلد/۱»، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، چاپ دوم ۱۳۸۱.
- [۲] امیرحسام زعیم، «مساله ناوبری زرمولو روی منیفلدهای ریمانی»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، پاییز ۱۳۸۵.
- [۳] D. Bao, C. Robles and Z. Shen, "Zermelo navigation on riemannian manifolds", Journal of Differential Geometry, vol. 66, pp. 391-449, (2004).

- 1 - Dubins
 2 - Differential drive robot
 3 - Lagrange
 4 - Kawaguchi
 5 - Zermelo

- L. E. Dubins, "On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal position and tangents", American J. of Mathematics, vol. 79, pp. 497-516, (1957). [۴]
- J. A. Reeds and L. A. Shepp, "Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards". Pacific Journal of Mathematics, vol. 145, pp. 367-393, (1990). [۵]
- D. J. Balkcom and M. T. Mason. "Time optimal trajectories for differential drive vehicles", International Journal of Robotics Research, vol. 21, pp. 199-217, (2002). [۶]
- A. Bicchi, G. Casalino and C. Santilli, "Planning Shortest Bounded-Curvature Paths for a Class of Nonholonomic Vehicles among Obstacles", IEEE International Conference On Robotics and Automation, pp. 1349-1354, (1995) [۷]
- G. Desaulniers and F. Soumis, "An efficient algorithm to find a shortest path for a car-like Robot". IEEE Trans. Robotics Automat, vol.11, pp. 819-828, (1995). [۸]
- Y. J. Fourquet and M. Renaud, "Time-optimal motions for a torque controlled wheeled mobile robot along specified paths", Proc. of IEEE International Conf. on Decision and Control, pp. 3587-3592, (1996) [۹]
- B. G. Reister and G. F. Pin, "Time-optimal trajectories for mobile robots with two independently driven wheels", Internat. J. Robotics Res, vol.13, pp. 38-54, (1994). [۱۰]
- Y. Zheng and P. Moore, "The design of time-optimal control for two-wheel driven carts tracking a moving target", in: Proc. of IEEE International Conf. on Decision and Control, pp. 3831-3836, (1995). [۱۱]
- D. A. Anisi, "Optimal motion control of a ground vehicle". Technical report, No.FOI-R-0961-SE, Swedish Defence Research Agency, (2004). [۱۲]
- T. Yajima and H. Nagahama "Kawaguchi space, Zermelo's condition and seismic ray path", Nonlinear Analysis, Article in press [۱۳]
- R. Miron, "The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and applications" Fundamental Theories of Physics series, 59, Kluwer Academic Publishers, (1994). [۱۴]
- T. Yajima and H. Nagahama "Kawaguchi space, Zermelo's condition and seismic ray path", Nonlinear Analysis, Article in press [۱۳]
- R. Miron, "The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and applications" Fundamental Theories of Physics series, 59, Kluwer Academic Publishers, (1994). [۱۴]