مدل سازی سطح زمین بر اساس اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار

جلیل رشیدی نیا[i]، لیلا محمد نیا[ii]

چکیده:

یکی از روش‌های درون یابی استفاده از توابع اسپلاین است.در این مقاله ،سطح زمین با استفاده از اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار درون یابی می‌شود.در آغاز فرمول ریاضی بررسی وسپس از این اسپلاین برای مدل سازی سطح زمین استفاده می‌شود. مدل یاد شده روی داده‌های یک‌بعدی و دو بعدی مربوط به منطقه‌ای در شهرستان خرم-آباد آزمایش گردید. نتایج حاصل از روش یاد شده روی دو دسته از داده‌ها نشان داد که روش اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار، دارای دقت خیلی خوب در برازش منحنی و دقت خوبی در مدل سازی سطوح می‌باشد.

واژه‌های کلیدی:

اسپلاین درجه سوم هموار طبیعی، توابع توانی تعمیم یافته، مدل سازی، درون یابی .

Earth Surface Modelling Using Natural Cubic Spline

Leyla Mohammadnia، Jalil Rashidinia

ABSTRACT

There are various mathematical models for modeling of surfaces especially for land surface. One of these models is spline method.

In this paper، natural smoothing cubic spline is used for interpolation of a land surface. we formulate the structure of natural smoothing cubic spline and also the spline interpolation، is used for modelling of land surface. Then by developing the method in one and two dimensions، for a region in Khoram Abad city. The results obtained by the above method show that the spline interpolation is almost accurate.

KEY WORD:

Natural Smoothing- Cubic Spline-Truncate Power Function-Modelling-Interpolation-

[i] استادیار دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران،Email: rashidinia@iust.ac.ir

[ii] کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه علم و صنعت ایران،Email: lmohamadnia@gmail.com

۱- مقدمه

سطح زمین را می‌توان به صورت یک سطح ریاضی پیوسته درنظر گرفت .برای بازسازی این سطح ابتدا لازم است تعدادی از نقاط سطح را با استفاده از روش‌های جمع آوری داده‌ها مانند روش نقشه برداری استخراج نمودوسپس با استفاده از نقاط استخراج شده وباکمک روش های درون یابی، سطح مورد نظررا مدل سازی کرد.روش‌های زیادی برای درون یابی وبازسازی سطوح به کار می‌روند. یکی از روش‌های درون یابی، استفاده از توابع اسپلاین است.خاصیت اصلی این توابع کمینه کردن انحنای عمومی سطح است .نتیجه این روش یک سطح پیوسته هموار است که بسته به نوع اسپلاین به کار رفته از خود نقاط نمونه برداری می‌گذرد و یا از بین آنها عبور می‌کند[۱] .

اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار‌بر پایه توابع چند جمله‌ای ساخته می‌شود. خانواده چند جمله ای هارا می توان به عنوان یک خانواده از توابع تقریبی در نظر گرفت. چندجمله‌ایهای قطعه‌ای که پیوستگی در نقاط اتصال راحفظ می کنند،اسپلاین های چند جمله‌ای نامیده می‌شوند. . چند جمله‌ای ها مزیت زیادی مانند تراکم و محاسبه آسان دارند[۲] .

اگر هدف، کاهش محاسبات و در عین حال به دست آوردن یک تقریب خوب و هموار باشد، اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار با بیشترین جذابیت وانتخاب ظاهر می‌شود.

اسپلاین طبیعی دارای کم ترین انرژی پیچشی در نقاط کنترل است. انرژی به صورت انتگرال رابطه (۱) روی فضای $\Re^2$ تعریف می‌شود.

$$I\left[f(x,y)\right] = \iint_{\Re^2} f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \qquad (۱)$$

در معادله‌ی (۱)، f معرف ارتفاع در مدل سه بعدی است.اگر معادله (۱) کمینه گردد، پیچش سطح در نقاط کنترل و تغییرات شیب در صفحات مماس به حداقل خود می‌رسند.

از طرف دیگر سطح اسپلاین به عنوان یک تقریب از سطح واقعی داده‌ها می‌بایست از نزدیکی نقاط کنترل عبور کند.دراین حالت سطح $f(x,y)$ طوری تعیین می‌شود که فاصله ی آن با نقاط کنترل کمینه می‌شود به عبارتی رابطه (۲) مینیمم می‌شود.

$$E_{TPS} = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\,(f(x_i,y_i)-z_i)^2 + \iint_{R^2} f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \qquad (۲)$$

پس اسپلاین یک جواب از مساله مینیمم سازی رابطه(۲) است.

در ادامه مقاله در بخش دوم اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار از نظر ریاضی تعریف می‌شودو در بخش سوم، روش روی نقاط مرتفع منطقه ای در خرم آباد پیاده سازی می‌شود وسپس نتایج حاصل مورد ارزیابی قرار می‌گیرند ودر بخش چهارم نتایج و پیشنهادات ارائه می‌گردند.

۲- مدل ریاضی اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار

تعریف۱)یک عضو $s \in S_{2m}(\Delta)$ اسپلاین طبیعی از مرتبه‌ی ۲ m با نقاط دنباله‌ی $\hat{\Delta}$ از نقاط داخلی نامیده می‌شود، اگر $s|I_0, s|I_n \in P_m(R)$ باشد.

دراینجا $\hat{\Delta} = \{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ یک دنباله‌ی اکیدا صعودی از گره‌های داده‌ای روی I=[a b] ، با $t_0 = a$ و $t_{n+1} = b$ است و $\hat{\Delta} = \{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ دنباله نقاط داخلی برای فضای اسپلاین است.

اگر $\hat{S}_{2m}(\Delta) = \{\ s \in s_{2m}(\Delta)\ ، s|I_0, s|I_n \in P_m(R)\ \}$ علامت فضای اسپلاین‌های طبیعی از مرتبه‌ی ۲ m باشد. هر $s \in \hat{s}_{2m}(\Delta)$ نمایش منحصر به فرد رابطه (۳)را دارد.

$$S(t) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j\, t^j + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{(t-t_i)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} \qquad (۳)$$

که شرایط گشتاوری m-1،...،k=0 و $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\,(t_i)^k = 0$ راحفظ می‌کند.

برای۲=m هالیدی نشان داد که یک اسپلاین درجه سوم هموار منحصر به فرد وجود دارد، که مساله مینیمم سازی (۲) را حل می‌کند.[۳]

برای بدست آوردن فرمول اسپلاین طبیعی درجه سوم کافی است در فرمول (۳) ، ۲=m قرارداده شود.

$$S(x) = \sum_{j=0}^{1} b_j\, x^j + \sum_{i=1}^{n} B_i (x-x_i)_+^3 \qquad (۴)$$

و $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\,(t_i)^k = 0$, k=0 و 1

اگر از تعریف توابع توانی تعمیم یافته استفاده وبا کمک حاصلضرب تنسوری فرمول (۴) تعمیم داده شودرابطه(۵) به دست می‌آید .

$$S(x,y) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1} b_{i,j}\, x^j\, y^i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\,(x-x_i)^{\alpha}\,(y-y_i)^{\beta}\ ,\ \alpha+\beta \le 3 \qquad (۵)$$

که شرایط گشتاوری $\alpha+\beta = 0,1 \quad ,\ j = 1,\dots,n,\quad \sum_{i=1}^{n} B_{i,j}\,(x_i)^{\alpha}\,(y_i)^{\beta} = 0$ راحفظ می‌کند.

اگر

$$C_{ji} = \begin{bmatrix} (x_j - x_i)^3 + (y_j - y_i)^3 + (x_j - x_i)^2 (y_j - y_i) + (x_j - x_i)(y_j - y_i)^2 \\ + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (x_i - x_j)(y - y_{j_i}) + (x_i - x_j) + (y_i - y_j) + 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$Z_j = S(x_j, y_j) = b_0 + b_1 x_j + b_2 y_j + \sum_{i=1}^{1} B_i C_{j,i}$$

که شرایط گشتاوری رابطه(۶)را حفظ می‌کند.

$$\sum_{j=1}^{n} B_i = 0, \sum_{j=1}^{n} B_i \ x_i = 0, \sum_{j=1}^{n} B_i \ y_i = 0, \ j = 1, \ldots, n \qquad (۶)$$

سیستم معادلات بالا یک سیستم خطی(۳+n) (۳+n) است.دستگاه معادلات حاصل به صورت زیر می‌باشد.

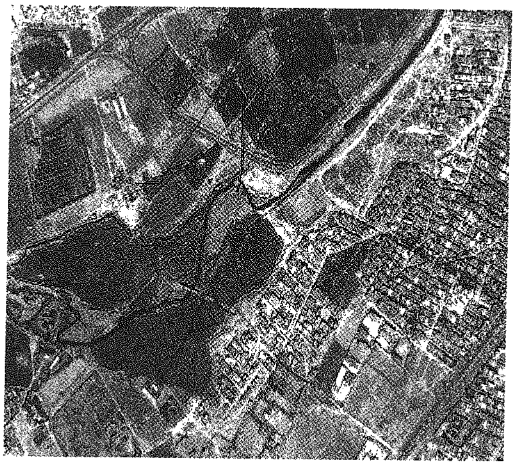
$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & c_{21} & \cdots & c_{n1} & 1 & x_1 & y_1 \\ c_{12} & 0 & \cdots & c_{n2} & 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & 0 & 1 & x_n & y_n \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \\ \hline b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (۷)$$

با تشکیل این سیستم به ازای نقاط معلوم اندازه گیری شده وحل به روش QR،کلیه ضرایب b_0, b_1, b_2 $B_1, \ldots, B_n$ یافت می‌شودومعادله سطح مشخص می‌شود.

۳- پیاده سازی و ارزیابی نتایج

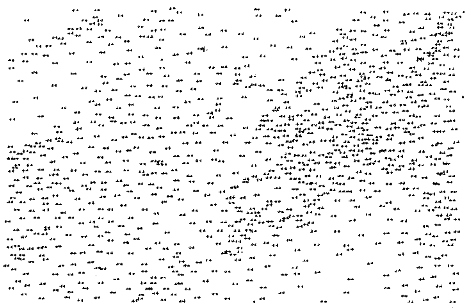
روش توضیح داده شده در بخش قبل پیاده‌سازی و مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. منطقه مورد مطالعه قسمتی از حومه شهر خرم آباد انتخاب گردید. کلیه مراحل با کمک برنامه MATLAB روی ناحیه پیاده‌سازی شد.

ابتدا پیاده‌سازی روی داده‌های یک بعدی انجام و کلیه نتایج حاصل مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد. سپس پیاده-سازی و ارزیابی روی داده‌های دو بعدی ناحیه مورد مطالعه صورت می‌گیرد.کلیه بررسی‌ها روی شبکه منظم از نقاط،انجام می‌شود. داده‌های فوق از روی عکس برداری هوایی با کمک روش نقشه برداری هوایی استخراج گردیده‌اند. تصاویر عکس برداری در مقیاس ۱:۱/۰۰۰۰ تهیه شده‌اند. در شکل (۱)تصویر منطقه مورد آزمون نشان داده شده است.



شکل (۱): تصویر منطقه مورد مطالعه

در شکل (۲) کلیه نقاط ارتفاعی استخراج شده از تصویر منطقه آزمون نشان داده شده است.



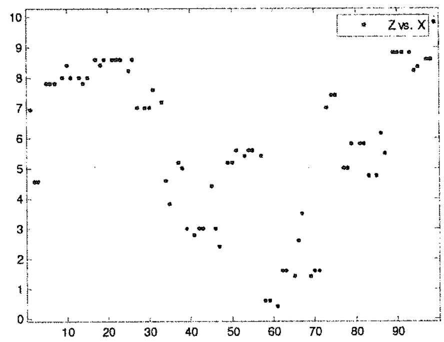
شکل(۲): نقاط ارتفاعی منطقه

همان طور که در شکل (۲) دیده می‌شود، پراکندگی نقاط مناسب می‌باشند. مساله پیش رو این است که باید براساس نقاط فوق که تصادفی انتخاب شده‌اند، سطح به روش یاد شده برازش گردد. برای این منظور ابتدا آنالیز در حالت یک بعدی و سپس آنالیز دو بعدی انجام می‌شود.

۳-۱- پیاده سازی روش اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار درفضای یک بعدی

در این قسمت ناحیه‌ای از منطقه مورد آزمون انتخاب گردید. این ناحیه شامل ۱۰۰ نقطه ارتفاعی می‌باشد که ۷۵ نقطه به عنوان نقطه کنترل (نقاط کنترل نقاطی هستند که در محاسبات درون یابی شرکت دارند) و ۲۵ نقطه به عنوان نقاط آزمایش (نقاط آزمایش نقاطی هستند که در محاسبات درون یابی شرکت ندارند) انتخاب گردید.

در شکل (۳) پراکندگی نقاط کنترل نشان داده شده است.



شکل(۳): نقاط کنترل روی پروفیل انتخاب شده

با پیاده‌سازی روش اسپلاین‌های طبیعی روی داده‌های انتخابی(نقاط کنترل)، ارتفاع محاسبه شده (Zc) بر اساس روش یاد شده مطابق جدول (۱) محاسبه گردید. که پس از محاسبه باقیمانده‌ها (dZc) مقدار خطای جذر مربع باقیمانده‌ها (RMSE) از رابطه ۸ محاسبه گردید.

$$RMSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(Z_i - Zc_i)^2}}{n-1} \qquad (۸)$$

و مقدار RMSE برابر ۹.۸۳۶۸ بدست آمد.

جدول (۱): مختصات نقاط کنترل برای روش اسپلاین‌های طبیعی

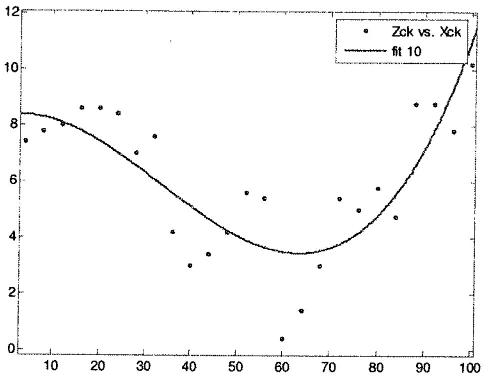
X	Z	Zc	dZ	RMS
۱	۶.۹۳	۲۰	-۱۳.۰۷	۹.۸۳۶۸
۲	۴.۵۵	۸۰	-۷۵.۴۵	
۳	۴.۵۵	۸۰	-۷۵.۴۵	
۵	۷.۸	۲۰۸	-۲۰۰.۲	
۶	۷.۸	۷۶	-۶۸.۲	
۷	۷.۸	-۴	۱۱.۸	
۹	۸	۱۳۶	-۱۲۸	
۱۰	۸.۴۰۱	-۲۴	۳۲.۴۰۱	
۱۱	۸	-۱۰۴	۱۱۲	
۱۳	۸	۶۸	-۶۰	
۱۴	۷.۸	۶۸	-۶۰.۲	
۱۵	۸	۱۲	-۴	
۱۷	۸.۶۰۱	۰	۸.۶۰۱	
۱۸	۸.۴۰۱	-۴۰	۴۸.۴۰۱	
۱۹	۸.۶۰۱	۱۰۸	۹۹.۳۹۹	
۲۱	۸.۶۰۱	-۴	۱۲.۶۰۱	
۲۲	۸.۶۰۱	-۳۲	۴۰.۶۰۱	
۲۳	۸.۶۰۱	۸	۰.۶۰۱	
۲۵	۸.۲۰۱	۶۴	-۵۵.۷۹۹	
۲۶	۸.۶۰۱	۲۰	-۱۱.۳۹۹	
۲۷	۷	۲۰	-۱۳	
۲۹	۷	-۲۴	۳۱	
۳۰	۷	-۸	۱۵	
۳۱	۷,۶۰۱	-۸	۱۵,۶۰۱	
۳۳	۷,۲۰۱	-۲۸	۳۵,۲۰۱	
۳۴	۴,۶۰۱	-۴۴	۷۸,۶۰۱	
۳۵	۳,۸	۴	-۰,۲	
۳۷	۵,۲۰۱	-۲۴	۲۹,۲۰۱	
۳۸	۵	-۸	۱۳	
۳۹	۳	-۵۶	۵۹	
۴۱	۲,۸	-۶۰	۶۲,۸	
۴۲	۳	-۳۲	۳۵	
۴۳	۳	-۶۴	۶۷	
۴۵	۴,۴۰۱	-۶۰	۶۴,۴۰۱	
۴۶	۳	-۷۶	۷۹	
۴۷	۲,۴۰۱	-۶۴	۶۶,۴۰۱	
۴۹	۵,۲۰۱	-۵۲	۵۷,۲۰۱	
۵۰	۵,۲۰۱	-۹۶	۱۰۱,۲	
۵۱	۵,۶۰۱	-۶۰	۶۵,۶۰۱	
۵۳	۵,۴۰۱	-۸۸	۹۳,۴۰۱	
۵۴	۵,۶۰۱	-۹۶	۱۰۱,۶	
۵۵	۵,۶۰۱	-۸۴	۸۹,۶۰۱	
۵۷	۵,۴۰۱	-۴۸	۵۳,۴۰۱	
۵۸	۰,۶۰۱	-۸۴	۸۴,۶۰۱	
۵۹	۰,۶۰۱	-۷۲	۷۲,۶۰۱	
۶۱	۰,۴۰۱	-۷۶	۷۶,۴۰۱	
۶۲	۱,۶۰۱	-۴۸	۴۹,۶۰۱	
۶۳	۱,۶۰۱	-۷۲	۷۳,۶۰۱	
۶۵	۱,۴۰۱	-۸۸	۸۹,۴۰۱	
۶۶	۲,۶۰۱	-۸۸	۹۰,۶۰۱	
۶۷	۳,۵	-۱۱۲	۱۱۵,۵	
۶۹	۱,۴۰۱	-۶۸	۶۹,۴۰۱	
۷۰	۱,۶۰۱	-۱۳۲	۱۳۳,۶	
۷۱	۱,۶۰۱	-۱۰۴	۱۰۵,۶	
۷۳	۷	-۴۴	۵۱	
۷۴	۷,۴۰۱	-۱۵۶	۱۶۳,۴	
۷۵	۷,۴۰۱	-۵۶	۶۳,۴۰۱	
۷۷	۵	-۸	۱۳	
۷۸	۵	-۶۰	۶۵	
۷۹	۵,۸	۸۸	-۸۲,۲	
۸۱	۵,۸	-۸۸	۹۳,۸	
۸۲	۵,۸	-۶۸	۷۳,۸	
۸۳	۴,۷۵	۴۰	-۳۵,۲۵	
۸۵	۴,۷۵	۶۴	-۵۹,۲۵	
۸۶	۶,۱۵۱	-۵۶	۶۲,۱۵۱	
۸۷	۵,۵	۷۶	-۷۰,۵	
۸۹	۸,۸	-۸۸	۹۶,۸	
۹۰	۸,۸	۱۶	-۷,۲	
۹۱	۸,۸	۱۱۲	-۱۰۳,۲	
۹۳	۸,۸	۲۸۸	-۲۷۹,۲	
۹۴	۸,۲۲	۷۶	-۶۷,۷۸	
۹۵	۸,۳۴۱	۱۷۶	-۱۶۷,۶۶	
۹۷	۸,۵۸۱	۲۰۸	-۱۹۹,۴۲	
۹۸	۸,۵۸۱	-۵۶	۶۴,۵۸۱	
۹۹	۹,۸۲	۱۳۲	-۱۲۲,۱۸	

همین آنالیز نیز برای ۲۵ نقطه آزمایش انجام شد که نتایج حاصل در جدول (۲) آمده است. در این جدول مختصات این نقاط (ستونهای ۱ و ۲) و نتایج حاصل در ستونهای بعدی نشان داده شده است. مطابق جدول (۲) مقدار RMSE برابر ۱،۵۳۲ است.

جدول(۲): مختصات نقاط آزمایش و نتایج حاصل از روش اسپلاین‌های طبیعی

Xck	Zck	dZ	RMS
۴	۷،۴۰۱	−۰،۰۰۷۹۹	۱،۵۳۲
۸	۷،۸	−۰،۰۳۷۲	
۱۲	۸	۰،۰۶۲۱۱	
۱۶	۸،۶۰۱	−۰،۰۸۲۷۳	
۲۰	۸،۶۰۱	−۰،۰۹۹۰۵	
۲۴	۸،۴۰۱	−۰،۱۱۰۸	
۲۸	۷	−۰،۱۱۸۸۲	
۳۲	۷،۶۰۱	−۰،۱۲۲۲۶	
۳۶	۴۰۲۰۱	−۰،۱۲۱۴۱	
۴۰	۳	−۰،۰۱۱۶۲۶	
۴۴	۳،۴۰۱	−۰،۱۰۶۸۲	
۴۸	۴،۲۰۱	−۰،۰۹۳۰۸	
۵۲	۵،۶۰۱	−۰،۰۷۵۰۵	
۵۶	۵،۴۰۱	−۰،۰۵۲۷۳	
۶۰	۰،۴۰۱	−۰،۰۲۶۱۱	
۶۴	۱،۴۰۱	۰،۰۰۴۸۰۴	
۶۸	۳	۰،۰۴۰۰۱۲	
۷۲	۵،۴۰۱	۰،۰۷۹۵۱۵	
۷۶	۵	۰،۱۲۳۳۱	
۸۰	۵،۸	۰،۱۷۱۴	
۸۴	۴،۷۵	۰،۲۲۳۷۹	
۸۸	۸،۸	۰،۲۸۰۴۷	
۹۲	۸،۸	۰،۳۴۱۴۴	
۹۶	۷،۸۲	۰،۴۰۶۷۱	
۱۰۰	۱۰،۲۱۳	۰،۴۷۶۲۷	

در شکل(۴) منحنی عبور داده شده از نقاط آزمایش نشان داده شده است.



شکل (۴): ناحیه باز سازی شده برای نقاط آزمایش به ازای ارتفاع حاصل از روش اسپلاین‌های طبیعی

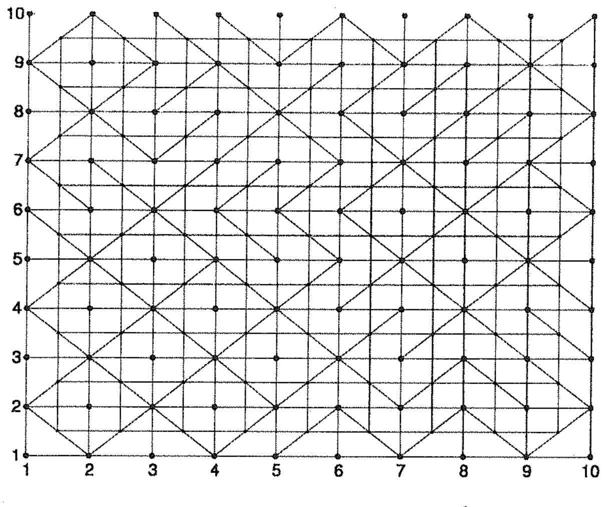
در جدول (۳) خلاصه نتایج یاد شده آمده است.

جدول (۳): خلاصه نتایج در حا لت یک بعدی

تعداد نقاط کنترل	RMSE نقاط کنترل	تعداد نقاط آزمایش	RMSE نقاط آزمایش
۷۵	۹،۸۳۶۸	۲۵	۱،۵۳۲

۳-۲- پیاده سازی روش اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار درفضای دو بعدی

برای آنالیز دو بعدی یک شبکه منظم ۱۰×۱۰ از نقاط انتخاب گردید و بررسی روی آن انجام شد. در شکل (۵) شبکه نشان داده شده است.



شکل(۵): شبکه ۱۰×۱۰ منظم ازنقاط

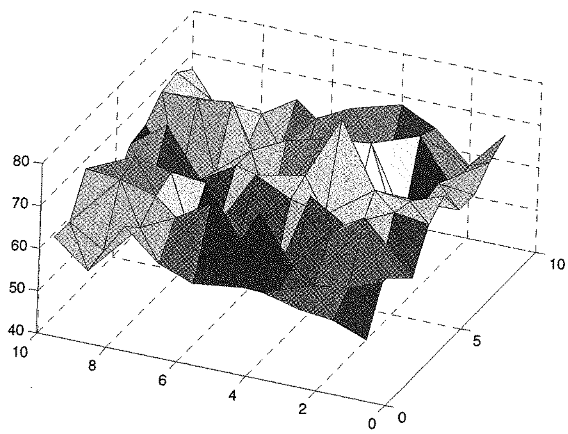
دوباره، همه آنالیزها روی این شبکه صورت گرفت. نتایج حاصل در جدول (۴) آمده است.

جدول (۴): نتایج حاصل از روش اسپلاین‌های طبیعی روی شبکه منظم ۱۰×۱۰

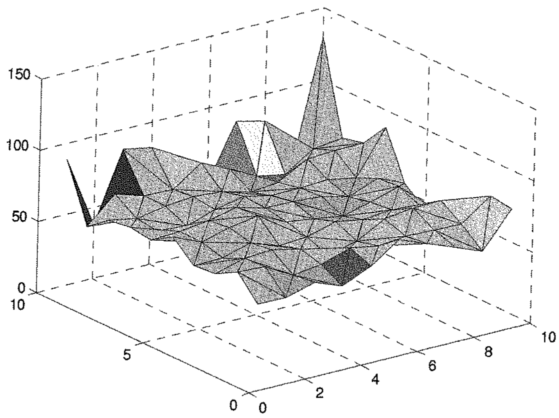
X	Y	Z	Zc	dZ	RMS
۱	۱	۵۰	۵۰٫۸۲۷	-۰٫۸۲۶۹	۱۰٫۰۲۸
۱	۲	۶۰	۶۶٫۰۰۷	-۶٫۰۰۷	
۱٫۹۸	۳	۶۰	۵۸٫۰۱۶	۱٫۹۸۳۶	
-۲٫۴	۴	۵۴	۵۶٫۴	-۲٫۴۰۰۳	
۱	۵	۶۳	۶۹٫۱۱۴	-۶٫۱۱۴	
۱	۶	۶۶	۶۰٫۵۵۱	۵٫۴۴۹۲	
۱	۷	۵۹	۶۲٫۳۳۸	-۳٫۳۳۸۱	
۱	۸	۵۹	۵۹٫۹۸۳	-۰٫۹۸۳۲	
۱	۹	۶۳	۴۸٫۵۴۶	۱۴٫۴۵۴	
۱	۱۰	۶۶	۸۸٫۶۷۸	-۲۲٫۶۷۸	
۲	۱	۵۳	۵۰٫۱۸۹	۲٫۸۱۰۶	
۲	۲	۵۷	۶۵٫۱۰۲	-۸٫۱۰۱۷	
۲	۳	۷۰	۶۳٫۳۱۴	۶٫۶۸۶۳	
۲	۴	۵۲	۵۶٫۵۷۷	-۴٫۵۷۶۸	
۲	۵	۶۴	۶۱٫۱۱۶	۲٫۸۸۳۶	
۲	۶	۶۳	۶۱٫۰۱۹	۱٫۹۸۰۸	
۲	۷	۵۹	۵۴٫۴۹۵	۴٫۵۰۴۹	
۲	۸	۶۰	۵۶٫۲۳۹	۳٫۷۶۱	
۲	۹	۵۵	۶۶٫۱۶۹	-۱۱٫۱۶۹	
۲	۱۰	۵۷	۳۷٫۸۰۸	۱۹٫۱۹۲	
۳	۱	۵۴	۵۶٫۳۹۶	-۲٫۳۹۶	
۳	۲	۵۶	۵۴٫۲۳۱	۱٫۷۶۹۱	
۳	۳	۶۴	۶۵٫۰۶۱	-۱٫۰۶۰۶	
۳	۴	۶۳	۶۲٫۴۱۴	۰٫۵۸۵۷	
۳	۵	۵۷	۶۶٫۱۹۶	-۹٫۱۹۵۹	
۳	۶	۶۴	۶۳٫۹۹۲	۰٫۰۰۷۶۴۵	
۳	۷	۵۷	۵۲٫۸۶۳	۴٫۱۳۶۶	
۳	۸	۵۰	۵۹٫۷۶۱	-۹٫۷۶۰۵	
۳	۹	۶۶	۵۹٫۷۶۴	۶٫۲۳۵۷	
۳	۱۰	۶۴	۸۵٫۴۶۳	-۲۱٫۴۶۳	
۴	۱	۵۶	۴۸٫۳۰۴	۷٫۶۹۵۶	
۴	۲	۵۳	۵۶٫۶۷۸	-۳٫۶۷۸۲	
۴	۳	۵۵	۶۰٫۲۱	-۵٫۰۲۱۳	
۴	۴	۶۸	۵۶٫۱۴۴	۱۱٫۸۵۶	
۴	۵	۶۰	۶۹٫۶۵۱	-۹٫۶۵۱۲	
۴	۶	۷۹	۶۸٫۱۹۴	۱۰٫۸۰۶	
۴	۷	۵۲	۵۹٫۸۶۴	-۷٫۸۶۳۹	
۴	۸	۶۶	۶۱٫۸۱۸	۴٫۱۸۲۱	
۴	۹	۵۳	۵۹٫۷۰۶	-۶٫۷۰۵۶	
۴	۱۰	۶۸	۸۱٫۶۴۷	-۱۳٫۴۶۷	
۵	۱	۵۷	۵۷٫۹۰۸	-۰٫۹۰۸۴	
۵	۲	۵۲	۶۳٫۱۹	-۱۱٫۱۹	
۵	۳	۶۶	۵۰٫۹۲۱	۱۵٫۰۷۹	
۵	۴	۴۶	۵۶٫۵۹۳	-۱۰٫۵۹۳	
۵	۵	۶۲	۶۰٫۶۰۷	۱٫۳۹۳۳	
۵	۶	۶۴	۶۲٫۸۹۳	۱٫۱۰۶۹	
۵	۷	۶۹	۶۳٫۶۴۶	۵٫۳۵۴۴	
۵	۸	۵۶	۶۰٫۱۲	-۴٫۱۲۰۳	
۵	۹	۶۹	۷۳٫۲۳	-۴٫۲۲۹۸	
۵	۱۰	۶۲	۱۴٫۳۹۹	۴۷٫۶۰۱	
۶	۱	۵۵	۷۱٫۷۱۹	-۱۶٫۷۱۹	
۶	۲	۷۰	۵۹٫۵۵۹	۱۰٫۴۴۱	
۶	۳	۵۲	۵۵٫۸۳۲	-۳٫۸۳۱۸	
۶	۴	۵۵	۶۲٫۷۳۳	-۷٫۷۳۳۲	
۶	۵	۶۶	۵۷٫۴۲۱	۸٫۵۷۹	
۶	۶	۵۳	۶۲٫۷۷	-۹٫۷۶۹۹	
۶	۷	۶۷	۵۹٫۷۰۷	۷٫۲۹۲۷	
۶	۸	۵۷	۵۴٫۹۱	۲٫۰۹	
۶	۹	۶۵	۶۳٫۷۹۱	۱٫۲۰۹	
۶	۱۰	۵۸	۴۶٫۵۵۴	۱۱٫۴۴۶	
۷	۱	۵۸	۶۴٫۰۲	-۶٫۰۲۰۲	
۷	۲	۶۵	۶۱٫۳۳	۳٫۶۷	
۷	۳	۵۸	۶۶٫۴۵۲	-۸٫۴۵۲۲	
۷	۴	۶۶	۵۸٫۸۲۴	۷٫۱۷۵۶	
۷	۵	۵۳	۵۴٫۸۲۷	-۱٫۸۲۷۳	
۷	۶	۶۳	۶۱٫۰۶۴	۱٫۹۳۶۱	
۷	۷	۶۳	۶۰٫۰۷۴	۲٫۹۲۶۴	
۷	۸	۵۳	۵۷٫۲۴۴	-۴٫۲۴۴۴	
۷	۹	۵۶	۵۳٫۹۱۴	۲٫۰۸۶۲	
۷	۱۰	۶۴	۸۵٫۰۳۴	-۲۱٫۰۳۴	
۸	۱	۶۵	۵۶٫۳۲۸	۸٫۶۷۲۱	
۸	۲	۶۱	۶۱٫۵۲۴	-۰٫۵۲۴۱۳	
۸	۳	۶۵	۶۹٫۷۱۳	-۴٫۷۱۲۵	
۸	۴	۶۷	۶۱٫۰۷۶	۵٫۹۲۴۴	
۸	۵	۵۴	۵۹٫۴۵۹	-۵٫۴۵۹۲	
۸	۶	۵۸	۵۵٫۷۰۴	۲٫۲۹۶۱	
۸	۷	۵۵	۶۰٫۷۹۸	-۵٫۷۹۸۱	
۸	۸	۶۹	۶۸٫۲	۰٫۸۰۰۱۲	
۸	۹	۵۴	۵۰٫۴۹۷	۳٫۵۰۲۶	
۸	۱۰	۵۹	۸۱٫۰۶۲	-۲۲٫۰۶۲	
۹	۱	۵۳	۴۸٫۶۹۹	۴٫۳۰۱۳	
۹	۲	۵۴	۶۱٫۰۱۲	-۷٫۰۱۱۸	
۹	۳	۶۷	۶۹٫۳۹۹	-۲٫۳۹۸۵	
۹	۴	۶۹	۵۹٫۱۶۳	۹٫۸۳۶۸	
۹	۵	۵۷	۶۵٫۴۷۵	-۸٫۴۷۴۵	
۹	۶	۶۹	۶۳٫۸۲۲	۵٫۱۷۷۷	
۹	۷	۵۱	۵۷٫۳۲	-۶٫۳۱۹۸	
۹	۸	۶۸	۶۹٫۵۵۲	-۱٫۵۵۲۵	
۹	۹	۶۴	۶۳٫۶۲۵	۰٫۳۷۴۷۵	
۹	۱۰	۵۳	۴۶٫۴۵	۶٫۵۵۰۴	
۱۰	۱	۵۹	۷۳٫۵۸۶	-۱۵٫۵۸۶	

۱۰	۲	۵۹	۷۵،۲۹۹	-۱۶،۲۹۹	
۱۰	۳	۶۸	۵۱،۲۱۴	۱۶،۷۸۶	
۱۰	۴	۵۷	۴۶،۲۸۱	۱۰،۷۱۹	
۱۰	۵	۵۶	۴۳،۰۳۲	۱۲،۹۶۸	
۱۰	۶	۶۳	۵۵،۶۷۴	۷،۳۲۵۷	
۱۰	۷	۶۴	۸۷،۶۹۸	-۲۳،۶۹۸	
۱۰	۸	۶۸	۶۹،۵۱۳	-۱،۵۱۳۵	
۱۰	۹	۶۹	۶۵،۷۲۳	۳،۲۷۷۲	
۱۰	۱۰	۶۶	۱۲۹،۳۸	-۶۳،۳۸۲	

در شکل(۶) سطح واقعی و در شکل(۷) سطح باز سازی شده با روش اسپلاین های طبیعی برای شبکه منظم ۱۰×۱۰ نشان داده شده است.



شکل(۶) : سطح واقعی شبکه ۱۰×۱۰



شکل (۷): سطح بازسازی شده شبکه ۱۰ × ۱۰ با روش اسپلاین طبیعی

در جدول (۵)خلاصه نتایج در حالت دو بعدی روی شبکه مورد آزمون آمده است.

جدول (۵) : خلاصه نتایج در حالت دو بعدی

روش	تعداد نقاط کنترل	RMSE نقاط کنترل
اسپلاین‌های طبیعی	۱۰۰	۱۰،۰۲۸

٤- نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله از داده‌های ارتفاعی منطقه‌ای واقع در شهر خرم‌آباد استفاده شد که خلاصه نتایج حاصل عبارتنداز:

۱. روش اسپلاین طبیعی برای بازسازی منحنی دارای دقت خوبی است.

۲. روش اسپلاین طبیعی برای بازسازی سطوح واز آن جمله سطح زمین مناسب است.

پیشنهاد می‌شود مطالعاتی بر روی دیگر روش‌های حل معادله اسپلاین طبیعی درجه سوم هموار،مانندروش‌های تکراری مطرح شده توسط فرانک ، صورت گیرد[۴]. زیرا این روش در مناطق چگال و غیر چگال با میزان خطایی مشابه پاسخ گو است. تغییر در مختصات، حذف و یا جابجایی یک نقطه در روش حل یادشده در این مقاله منجر به تکرار محاسبات می‌گردد زیرا یک نقطه در تمامی نقاط دیگر تأثیر گذار است. بنابراین تحقیق بر روی روشی که ویرایش نقاط سبب انجام محاسبات کمتر گردد، بسیار مفید خواهد بود.

۵-مراجع

[۱] Schoenberg، I.J، Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions ، Part A; On the Problem of Smoothing of Graduation، A First Class of Analytic Approximation Formulae، Quart.Appl.Math.4. (1946a)، pp 45-99.

[۲] Hrushikesh N.Mhaskar and Devidas V.Pai ، Fundamentals of Approximation Theory، Alph Science International Ltd (2000)، pp 231-244.

[۳] Schoenberg، I.J، Spline Interplation and Best Quadrature Formulae، Bull.Amer.Math.Soc.70، (1946a)، pp143-148

[۴] Cheorghe Micula and Sanda Micula، Handbook of Splines،Kluwer Academic Publishers (1999) ،pp82-86.