نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد در دو بعد فضایی ناجابجا و یک بعد زمانی

زینب عموزاد خلیلی[i]

چکیده

در این پژوهش، هامیلتونی یک نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد در ۲+۱ بعد و در فضای ناجابجا مورد نظر است . با نوشتن متغیرهای ناجابجایی برحسب متغیرهای جابجایی، فرم هامیلتونی بر حسب متغیرهای جابجایی بدست می‌آید . می‌توان مسئله ویژه مقداری را برای این عملگر حل کرد. سپس این مسئله برای نوسانگر کوانتومی همسانگرد ناجابجا حل می‌گردد. به راحتی نشان داده می‌شود که جوابهای نوسانگر کوانتومی دو بعدی ناجابجایی، شکل تعمیم یافته جوابهای نوسانگر کوانتومی جابجایی است و همانگونه که انتظار می‌رود، هرگاه پارامتر ناجابجایی به سمت صفر میل کند، به مسئله نوسانگر کوانتومی جابجایی رسیده می‌شود .

کلمات کلیدی

ناجابجایی، نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد، نوسانگر کوانتومی همسانگرد

Noncommutative Tow Dimensional Anisotropic Quantum Oscillator

Z. Amouzad Khalili

ABSTRACT

In this research A two-dimensional anisotropic quantum oscillator is considered . By replacing the noncommutative variables in terms of the commutative variables , the corresponding Hamiltonian in terms of the commutative variables is obtained . The eigen value problem for this operator can be solved. It reveals obviously that the solution of the noncommutative quantum oscillator is the modified form of commutative quantum oscillator, in addition, the isotropic case as an independent problem has been studied. If the noncommutativity parameter approach to zero , the commutative quantum oscillator problem obtained as expected.

KEYWORDS

Noncommutativity, Anisotropic quantum oscillator, Isotropic quantum oscillator.

۱- مقدمه

فرض‌های اولیه درباره وجود فضاهای ناجابجایی از سال ۱۹۳۰ به وجود آمد. اما بررسی‌های جدی از سال ۱۹۹۸ شروع شده است ونوشته‌های بسیاری در زمینه های مکانیک کوانتومی ناجابجایی، تئوری میدان ناجابجایی، و تئوری ریسمان ناجابجایی تهیه شد. تئوری میدان ناجابجایی به خاطر ارتباط آن با نظریه ریسمان بسیار معمول شده است[۱].در واقع فضاهای ناجابجایی تعمیمی از فضای جابجایی اند و روابط وفرمولها ی فضای ناجابجا فرم تعمیم یافته همان روابط در فضای جابجا هستند[۲].

[i] کارشناسی ارشدرشته فیزیک نظری، دانش آموخته دانشکده فیزیک وعلوم هسته‌ای، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
Email:zamoozad@gmail.com

در این مقاله، با در نظر گرفتن ناجابجایی در صفحه، فرض می‌شود مختصات فضا ناجابجا هستند. بنابراین جبر هایزنبرگ-ویل [۳] به صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\theta_{ij},$$
$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2 \ ,$$
$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0, \tag{۱}$$

که θ_{ij} ها عناصر ماتریس حقیقی و پادمتقارن هستند .در اینجا فرض می‌شود که θ_{ij} کوچک یعنی ناجابجایی کوچک باشد . متغیرها در این فضا با علامت کلاه مشخص شده‌اند .

نوسانگرها در مکانیک کوانتومی از اهمیت زیادی برخوردارند، زیرا هر اختلال کوچک وارد بر سیستم در حالت تعادل، باعث نوسانهای کوچکی می‌شود که در نهایت به مدهای بهنجار یعنی همان نوسانگرهای مستقل قابل تجزیه اند. بنابراین فهم دقیق خواص نوسانگر کوانتومی زمینه خوبی برای درک مفاهیم اصلی مکانیک کوانتومی ایجاد می‌کند.

افراد زیادی به بررسی مساله نوسانگر کوانتومی در فضای ناجابجایی پرداخته‌اند و طیف ویژه مقادیر و ویژه توابع را برای این مساله به روش‌های متفاوت بدست آورده‌اند[۴].

در بخش ۲ این مقاله، فرم هامیلتونی ناجابجایی بر حسب مختصات فضای جابجایی بدست آمده که منجر به تعریف ثابتهای موثری می‌شود. در بخش۳، به حل معادله ویژه مقداری عملگر هامیلتونی نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد در دو بعد ناجابجایی پرداخته می‌شود. در بخش ۴ ، مقادیر ویژه و توابع ویژه را برای نوسانگر کوانتومی همسانگرد ناجابجا حل و بسط جوابها بر حسب توانهای θ بررسی می‌گردد.

۲- هامیلتونی نوسانگر کوانتومی ناجابجایی بر حسب مختصات جابجایی

نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد نوسانگری است که در آن فرکانس نوسان ذره در ابعاد مختلف فضا، متفاوت است. هامیلتونی این نوسانگر به صورت رابطه ۲ نوشته می‌شود

(۲)

$$H = \frac{1}{2M}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \frac{M}{2}(\omega_1^2 X_1^{\,2} + \omega_2^2 X_2^{\,2}).$$

برای بدست آوردن طیف ویژه مقادیر و ویژه توابع این عملگر، معادله ویژه مقداری $H\phi_{n_1n_2}(x_1, x_2) = e_{n_1n_2}\phi_{n_1n_2}(x_1, x_2)$ به راحتی قابل حل است . طیف ویژه مقادیر این عملگرطبق رابطه(۳)

$$e_{n_1n_2} = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2. \tag{۳}$$

و ویژه توابع بر اساس رابطه (۴) بدست می‌آیند.

$$\phi_{n_1n_2} = \frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar}\right)^{(n_1+1/2)/2}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar}\right)^{(n_2+1/2)/2}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)}\pi n_1!n_2!}} \exp\left[-\frac{M}{2\hbar}\left(\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2\right)\right] H_{n_1}\left((\frac{M\omega_1}{\hbar})^{1/2}x_1\right)H_{n_2}\left((\frac{M\omega_2}{\hbar})^{1/2}x_2\right). \tag{۴}$$

که در رابطه (۴) H_{n_1} و H_{n_2} چند جمله ایهای هرمیت هستند. با برابر گرفتن فرکانس نوسان در ابعاد مختلف، جوابهای مساله همسانگرد بدست می‌آید.

از آنجا که فرمولهای تعریف شده در فضای جابجایی را می‌توان به فضاهای ناجابجا تعمیم داد، فرم هامیلتونی نوسانگر دوبعدی ناهمسانگرد در فضای ناجابجایی به صورت رابطه (۵) نوشته می‌شود :

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\left(\hat{P}_1^{\,2} + \hat{P}_2^{\,2}\right) + \frac{M}{2}(\omega_1^2 \hat{X}_1^{\,2} + \omega_2^2 \hat{X}_2^{\,2}). \tag{۵}$$

روابطی که بین متغیرها در فضای ناجابجایی و جابجایی تعریف می‌شوند باید به طور همزمان در جبر هایزنبرگ-ویل در فضای معمولی و فضای ناجابجایی صدق کنند. کامل ترین فرم برای مختصات ناجابجایی به صورت رابطه (۶) است [۵].

$$\hat{X}_i = x_i + \frac{i\theta}{2}\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad \hat{P}_i = P_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{۶}$$

که در آن از $\theta_{ij} = \theta\varepsilon_{ij}$ استفاده شده است.

با داشتن رابطه(۶) می‌توان هامیلتونی معادله (۵)را بر حسب متغیرهای فضای جابجایی نوشت و به کمک جبر حاکم بر فضای جابجایی،مسئله را حل کرد . فرم هامیلتونی بر حسب متغیرهای فضای جابجایی به صورت رابطه(۷)

است :

$$\hat{H} =$$

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2M}+\frac{M\omega_2^2\theta^2}{8}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\left(\frac{\hbar^2}{2M}+\frac{M\omega_1^2\theta^2}{8}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$
$$+\frac{M}{2}(\omega_1^2 x_1^2+\omega_2^2 x_2^2)$$

(۷)

$$+\frac{iM\theta}{2}(\omega_1^2 x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-\omega_2^2 x_2\frac{\partial}{\partial x_1}).$$

این هامیلتونی هرمیتی است بنابراین انتظار می‌رود کـه ویـژه مقادیر حقیقی باشـند . صـورت معادلـه (۷) القـا مـی‌کنـد کـه ثابتهای موثری بر اساس رابطه(۸) تعریف شوند:

$$\hbar_{eff_i}=\sqrt{\hbar^2+\frac{M^2\omega_i^2\theta^2}{4}},\qquad i=1,2 \quad (۸)$$

ملاحظه می‌شود که ثابت های پلانک موثر بدست آمده در اثر ناجابجایی از ثابت پلانک بزرگتر است . ثابت‌های مـوثر نـوع دوم، جرم‌های موثر هستند. اگر رابطه(۹) تعریف شود :

$$\frac{\hbar^2}{2M}+\frac{M\omega_i^2\theta^2}{8}=\frac{\hbar^2}{2M_{eff_i}}. \quad (۹)$$

جرم‌های موثر به صورت رابطه (۱۰) نتیجه می‌شوند :

$$M_{eff_i}=M\left(1+\frac{M^2\omega_i^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)^{-1}. \quad (۱۰)$$

این رابطه بیان می‌کند کـه خاصـیت ناجابجـایی فـضا باعـث ایجاد جرم‌های موثری کوچکتر از جـرم واقعـی ذره نوسـان کننده می‌شود.

۳- انرژی و حالت‌های متناظر برای حالت ناهمسانگرد

حال به حل معادله ویژه مقداری نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد ناجابجایی پرداخته می‌شود. باید معادله (۱۱) را حل کرد:

$$\hat{H}\Psi_{n_1n_2}(x_1,x_2)=E_{n_1n_2}\Psi_{n_1n_2}(x_1,x_2). \quad (۱۱)$$

با توجه به فرم پیچیده هامیلتونی(۷) حل دقیق معادله (۱۱) بسیار پیچیده است. بنابراین از روش تقریبی استفاده می‌شود . روشی انتخابی، روش حل اختلال مستقل از زمان یا روش ریلی-شرودینگر است به این ترتیب که هامیلتونی به صورت دو جمله $\hat{H}=\hat{H}_0+\theta V'$ ، در نظر گرفته می‌شود :

$$\hat{H}_0=-\frac{\hbar_{eff_2}^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar_{eff_1}^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{M}{2}(\omega_1^2x_1^2+\omega_2^2x_2^2), \quad (۱۲)$$

$$V'=\frac{iM}{2}(\omega_1^2x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-\omega_2^2x_2\frac{\partial}{\partial x_1}), \quad (۱۳)$$

در روش ریلی-شرودینگر حل معادله (۱۴) جایگزین حل معادله (۱۱) می‌شود.

$$(\hat{H}_0+\theta V')\Psi_{n_1n_2}(x_1,x_2)=E_{n_1n_2}\Psi_{n_1n_2}(x_1,x_2). \quad (۱۴)$$

کـه θ پـارامتری حقیقـی و پیوسـته اسـت و کوچـک فـرض می‌شود.

برای حل معادله (۱۴)، ابتدا باید معادله (۱۵) را حل نمود و ویژه مقادیر و ویژه توابع بدست آورده شوند :

$$\hat{H}_0\Phi_{n_1n_2}(x_1,x_2)=E^{(0)}_{n_1n_2}\Phi_{n_1n_2}(x_1,x_2). \quad (۱۵)$$

با جایگذاری عملگر $\hat{H}_0$ ، معادله (۱۶) نتیجه می‌شود.

$$\left(-\frac{\hbar_{eff_2}^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar_{eff_1}^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{M}{2}(\omega_1^2x_1^2+\omega_2^2x_2^2)\right)$$
$$\Phi_{n_1n_2}(x_1,x_2)=E^{(0)}_{n_1n_2}\Phi_{n_1n_2}(x_1,x_2). \quad (۱۶)$$

با حل دقیق معادله (۱۶)، ویژه توابع بـه‌صورت رابطـه (۱۷) بدست می‌آیند[۶]:

$$\Phi_{n_1n_2}(x_1,x_2)=\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar_{eff_2}}\right)^{(n_1+1/2)/2}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar_{eff_1}}\right)^{(n_2+1/2)/2}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)}\pi n_1!n_2!}}$$
$$\times\exp\left[-\frac{M}{2}\left(\frac{\omega_1}{\hbar_{eff_2}}x_1^2+\frac{\omega_2}{\hbar_{eff_1}}x_2^2\right)\right]$$
$$\times H_{n_1}\left((\frac{M\omega_1}{\hbar_{eff_2}})^{1/2}x_1\right)H_{n_2}\left((\frac{M\omega_2}{\hbar_{eff_1}})^{1/2}x_2\right).$$

(۱۷)

که در رابطه(۱۷) H_{n_1} و H_{n_2} چند جمله ایهای هرمیت هستند . مقدار ویژه معادله(۱۶) برابر است با:

$$E^{(0)}_{n_1n_2}=(n_1+\frac{1}{2})\hbar_{eff_2}\omega_1+(n_2+\frac{1}{2})\hbar_{eff_1}\omega_2. \quad (۱۸)$$

به آسانی دیده می‌شود که برای حالت ناهمسانگرد، طیف انرژی غیر تبهگن است. ملاحظه می‌شود که ثابت‌های موثر

پلانک $\hbar_{eff_1}$ و $\hbar_{eff_2}$ به خاطر یاد متقارن بودن پارامتر ناجابجایی یعنی θ_{ij} به ترتیب به فرکانس‌های ω_2 و ω_1 جفت می‌شوند. این است.

در روش ریلی- شرودینگر، انتقال مرتبه اول انرژی دراثر پتانسیل اختلالی $V=\theta V'$ طبق رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود [۶]:

(۱۹)
$$\theta E^{(1)}_{m_1n_2}=\left\langle \Phi_{n_1n_2}\middle|V\middle|\Phi_{n_1n_2}\right\rangle=\int dx_1dx_2\Phi^*_{n_1n_2}V\Phi_{n_1n_2}$$

برای ویژه تابع (۱۷)و پتانسیل اختلالی (۱۳)با استفاده از رابطه (۲۰)،

(۲۰)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-x^2}xH_{n_1}(x)H_{n_2}(x)$$
$$=\sqrt{\pi}2^{n_1-1}n_1!\delta_{n_2,n_1-1}+\sqrt{\pi}2^{n_1}(n_1+1)!\delta_{n_2,n_1+1}.$$

جواب به صورت رابطه (۲۱) بدست می‌آید:

(۲۱)
$$E^{(1)}_{n_1,n_2}=0$$

که نشان می‌دهد انتقال مرتبه اول انرژی روی همه ترازها صفر است . این جواب بدیهی به نظر می‌رسد زیرا که پتانسیل اختلالی Vو هامیلتونین $\hat{H}_0$ با هم جابجا نمی‌شوند بنابراین ویژه توابع مشترک ندارند، یعنی ویژه پایه‌هایی که در فضای $\hat{H}_0$تعریف می‌شوند ویژه پایه‌های فضای عملگری V نخواهند بود و $V_{n_1n_2,n_1n_2}$ها که عناصر روی قطر عملگر V در فضای عملگری $\hat{H}_0$ هستند صفر خواهند شد .

حال انتقال مرتبه دوم انرژی به کمک روش ریلی- شرودینگر محاسبه می‌شود . این انتقال به صورت رابطه (۲۲) است

(۲۲)
$$\theta^2E^{(2)}_{n_1n_2}=\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\frac{\left|\left\langle\phi_{m_1m_2}\middle|V\middle|\phi_{n_1n_2}\right\rangle\right|^2}{E^{(0)}_{n_1n_2}-E^{(0)}_{m_1m_2}}.$$

به کمک روابط (۲۳) :

(۲۳)
$$\frac{dH_n(x)}{dx}=2nH_{n-1}(x),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)=2^nn!\pi^{1/2}\delta_{n,m},$$

رابطه (۲۴) بدست می‌آید

(۲۴)
$$\left\langle\Phi_{n_1n_2}\middle|V\middle|\Phi_{m_1m_2}\right\rangle=\frac{i}{2}\left(\frac{M\omega_1}{\hbar_{eff_2}}\right)^{(n_1+m_1+1)/2}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar_{eff_1}}\right)^{(n_2+m_2+1)/2}$$
$$\times\left(\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}}\right)^{1/2}(\hbar_{eff_2}\omega_1A_1-\hbar_{eff_1}\omega_2A_2).$$

که در آن A_2, A_1 بصورت رابطه (۲۵) می‌باشند :

$$A_1=\left(\frac{\delta_{m_1,n_1-1}}{2}+(n_1+1)\delta_{m_1,n_1+1}\right)\left((n_2+1)\delta_{m_2,n_2+1}-\frac{\delta_{m_2,n_2-1}}{2}\right),$$

$$A_2=\left(\frac{\delta_{m_2,n_2-1}}{2}+(n_2+1)\delta_{m_2n_2+1}\right)\left((n_1+1)\delta_{m_1,n_1+1}-\frac{\delta_{m_1,n_1-1}}{2}\right).$$

(۲۵)

بنابراین جواب رابطه (۲۲) برابر است با

$$E^{(2)}_{n_1n_2}=\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}}\right)\right.$$
$$\times\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar_{eff_2}}\right)^{n_1+m_1+1}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar_{eff_1}}\right)^{n_2+m_2+1}}{(n_1-m_1)\hbar_{eff_2}\omega_1+(n_2-m_2)\hbar_{eff_1}\omega_2}$$
$$\left.\times\left[(\hbar_{eff_2}\omega_1-\hbar_{eff_1}\omega_2)^2B_1+(\hbar_{eff_2}\omega_1+\hbar_{eff_1}\omega_2)^2B_2\right]\right\}.$$

(۲۶)

که در آن کمیتهای B_2,B_1 به صورت رلبطه (۲۷) تعریف می‌شوند

(۲۷)

$$B_1=\left(\frac{\delta_{m_1,n_1-1}\delta_{m_2,n_2-1}}{16}+(n_1+1)^2(n_2+1)^2\delta_{m_1,n_1+1}\delta_{m_2,n_2+1}\right),$$

$$B_2=\left(\frac{(n_2+1)^2}{4}\delta_{m_1,n_1-1}\delta_{m_2,n_2+1}+\frac{(n_1+1)^2}{4}\delta_{m_1,n_1+1}\delta_{m_2,n_2-1}\right).$$

بنابراین ویژه مقدار انرژی حاصل از روش اختلال غیر تبهگن به صورت رابطه (۲۸) است

(۲۸)
$$E_{n_1n_2}=E^{(0)}_{n_1n_2}+\theta E^{(1)}_{n_1n_2}+\theta^2E^{(2)}_{n_1n_2}.$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده، طیف انرژی به صورت رابطه (۲۹) بدست می‌آید

(۲۹)

$$
\begin{aligned}
E_{n_1n_2} &= (n_1+\frac{1}{2})\hbar_{eff_2}\omega_1+(n_2+\frac{1}{2})\hbar_{eff_1}\omega_2 \\
&+\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\Bigg\{\frac{\theta^2}{4}\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}} \\
&\times\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar_{eff_2}}\right)^{n_1+m_1+1}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar_{eff_1}}\right)^{n_2+m_2+1}}{(n_1-m_1)\hbar_{eff_2}\omega_1+(n_2-m_2)\hbar_{eff_2}\omega_2} \\
&\times\left[(\hbar_{eff_2}\omega_1-\hbar_{eff_2}\omega_2)^2B_1+(\hbar_{eff_2}\omega_1+\hbar_{eff_2}\omega_2)^2B_2\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

ویژه تابع معادله (۱۴) با روش انتخابی، تا تقریب مرتبه اول اختلال به صورت رابطه (۳۰) بدست می‌آید:

$$
\Psi_{n_1n_2}=\Phi_{n_1n_2}+\theta\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\frac{\langle\Phi_{m_1m_2}|V'|\Phi_{n_1n_2}\rangle}{E^{(0)}_{n_1n_2}-E^{(0)}_{m_1m_2}}\Phi_{m_1m_2} \qquad (۳۰)
$$

که به فرم رابطه (۳۱) است.

$$
\begin{aligned}
\Psi_{n_1n_2} &= \Phi_{n_1n_2}-i\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\frac{\theta}{2}\left(\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}}\right)^{1/2} \\
&\times\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar_{eff_2}}\right)^{(n_1+m_1+1)/2}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar_{eff_1}}\right)^{(n_2+m_2+1)/2}}{(n_1-m_1)\hbar_{eff_2}\omega_1+(n_2-m_2)\hbar_{eff_1}\omega_2} \\
&\times(\hbar_{eff_2}\omega_1A_1-\hbar_{eff_1}\omega_2A_2)\Phi_{m_1m_2}.
\end{aligned} \qquad (۳۱)
$$

از آنجایی که جهت‌های ۱ و۲ هیچ برتری به هم ندارند، انتظار می‌رود که جابجا شدن آنها تغییری درویژه مقادیر و ویژه توابع ایجادنکند. طرف راست معادله (۲۹) به وضوح نشان می‌دهد که با جابجایی اندیس های ۱ و ۲ ویژه مقادیر ناوردا باقی می‌مانند. در جمله دوم رابطه (۳۱) ، $\theta\equiv\theta_{12}\equiv-\theta_{21}$، بنابراین با جابجایی اندیسهای ۱و۲ ویژه تابع(۳۱) همانگونه که انتظار می‌رفت متقارن است.

اکنون، ویژه مقدار انرژی بر حسب توانهای θبسط داده می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
E_{n_1n_2} &= (n_1+\frac{1}{2})\hbar\omega_1+(n_2+\frac{1}{2})\hbar\omega_2 \\
&+\theta^2\Bigg\{(n_1+\frac{1}{2})\frac{M^2\omega_2^2}{8\hbar}\omega_1+(n_2+\frac{1}{2})\frac{M^2\omega_1^2}{8\hbar}\omega_2+\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\Bigg[\frac{1}{4}\left(\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}}\right)\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar}\right)^{n_1+m_1+1}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar}\right)^{n_2+m_2+1}}{(n_1-m_1)\hbar\omega_1+(n_2-m_2)\hbar\omega_2} \\
&\qquad\times\hbar^2\left[(\omega_1-\omega_2)^2B_1+(\omega_1+\omega_2)^2B_2\right]\Bigg]\Bigg\} \\
&+\theta^4\Bigg\{-(n_1+\frac{1}{2})\frac{M^4\omega_2^4}{128\hbar^3}\omega_1-(n_2+\frac{1}{2})\frac{M^4\omega_1^4}{128\hbar^3}\omega_2+\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\Bigg[\frac{1}{4}\left(\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}}\right)\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar}\right)^{n_1+m_1+1}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar}\right)^{n_2+m_2+1}}{(n_1-m_1)\hbar\omega_1+(n_2-m_2)\hbar\omega_2} \\
&\qquad\times\hbar^2\left[(\omega_1-\omega_2)^2B_1+(\omega_1+\omega_2)^2B_2\right](\frac{-M^2}{8\hbar^2}) \\
&\qquad\times\left[\omega_2^2(n_1+m_1+1)+\omega_1^2(n_2+m_2+1)+\omega_1\omega_2\frac{\omega_2(n_1-m_1)+\omega_1(n_2-m_2)}{\omega_1(n_1-m_1)+\omega_2(n_2-m_2)}+2\omega_1\omega_2\right]\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned} \qquad (۳۲)
$$

ملاحظه می‌شود که اولین اثر ناجابجایی در انرژی به صورت θ^2 ظاهر می‌شود.

حال تابع موج، بر حسب توانهای θبسط داده می‌شوند:

$$\Phi^{(0)}_{n_1n_2}=\frac{\left(\frac{M\omega_1}{\hbar}\right)^{(n_1+1/2)/2}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar}\right)^{(n_2+1/2)/2}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)}\pi n_1!n_2!}}\exp\left[-\frac{M}{2\hbar}\left(\omega_1x_1^2+\omega_2x_2^2\right)\right]H_{n_1}\left((\frac{M\omega_1}{\hbar})^{1/2}x_1\right)H_{n_2}\left((\frac{M\omega_2}{\hbar})^{1/2}x_2\right). \quad (۳۳)$$

بنابراین رابطه (۳۱) برحسب توان های θ بصورت رابطه (۳۴) در می‌آید

$$\Psi_{n_1n_2}=\Phi^{(0)}_{n_1n_2}$$
$$-\frac{i}{2}\theta\left\{\sum_{\substack{m_1\neq n_1\\ m_2\neq n_2}}\left(\frac{n_1!n_2!2^{(n_1+n_2)}}{m_1!m_2!2^{(m_1+m_2)}}\right)^{1/2}\left(\frac{M\omega_1}{\hbar}\right)^{n_1+m_1+1}\left(\frac{M\omega_2}{\hbar}\right)^{n_2+m_2+1}\frac{\omega_1A_1-\omega_2A_2}{(n_1-m_1)\omega_1+(n_2-m_2)\omega_2}\Phi^{(0)}_{m_1m_2}\right\}$$
$$+\theta^2\left\{\left[(n_1+\frac{1}{2})\omega_2^2+(n_2+\frac{1}{2})\omega_1^2-\frac{M\omega_1\omega_2}{\hbar}(\omega_2x_1^2+\omega_1x_2^2)\right](-\frac{M^2}{16\hbar^2})\Phi^{(0)}_{n_1n_2}\right.$$
$$-\frac{1}{8}(\frac{M}{\hbar})^{5/2}\left[\omega_2^2\omega_1^{1/2}n_1x_1\frac{H_{n_1-1}\left((\frac{M\omega_1}{\hbar})^{1/2}x_1\right)}{H_{n_1}\left((\frac{M\omega_1}{\hbar})^{1/2}x_1\right)}\right.$$
$$\left.\left.+\omega_1^2\omega_2^{1/2}n_2x_2\frac{H_{n_2-1}\left((\frac{M\omega_2}{\hbar})^{1/2}x_2\right)}{H_{n_2}\left((\frac{M\omega_2}{\hbar})^{1/2}x_2\right)}\right]\Phi^{(0)}_{n_1n_2}\right\}.$$

(۳۴)

در حالی که اولین تصحیح روی انرژی از مرتبه θ^2 است، ویژه تابع از مرتبه θ تصحیح گرفته است.

٤- نوسانگر کوانتومی همسانگرد در دو بعد ناجابجایی

نوسانگر کوانتومی همسانگرد نوسانگری است که فرکانس نوسان ذره نوسان کننده در همه ابعاد آن یکسان باشد. بنابراین در مسئله هامیلتونی (۷) با جایگذاری $\omega_1=\omega_2=\omega$ به هامیلتونی نوسانگر همسانگرد ناجابجایی تبدیل خواهد شد

(۳۵)
$$\hat{H}=-\frac{\hbar_{eff}^2}{2M}(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})+\frac{M\omega^2}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{iM\theta\omega^2}{2}(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}),$$

که در آن $\hbar_{eff}$ به صورت رابطه (۳۶) تعریف می‌شود:

(۳۶)
$$\hbar_{eff}=\sqrt{\hbar^2+\left(\frac{M\omega\theta}{2}\right)^2}.$$

برای بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه توابع این عملگر باید معادله ویژه مقداری (۱۱)حل شود. در هامیلتونی (۳۵) جمله ناشی از ناجابجایی به گونه ای است که مسئله را می‌توان به صورت دقیق حل کرد. اگر هامیلتونی به دو قسمت به صورت زیر تقسیم شوند:

(۳۷)
$$\hat{H}_0=-\frac{\hbar_{eff}^2}{2M}(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})+\frac{M\omega^2}{2}(x_1^2+x_2^2),$$

(۳۸)
$$V=\frac{iM\theta\omega^2}{2}(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}),$$

ازآنجا که این دو عملگر با هم جابجا می‌شوند پس ویژه توابع مشترکی دارند که از حاصلضرب ویژه توابع هریک از آنها بدست می‌آید . ویژه توابع هریک از عملگرهای (۳۷) و (۳۸) معلوم است. بنابراین ویژه تابع عملگر(۳۵)، به صورت رابطه (۳۹) نوشته می‌شود:

(۳۹)
$$\overline{\Psi}_{n_1n_2}(x_1,x_2)=\overline{\Phi}_{n_1n_2}Y^l_{(\frac{n_1+n_2}{2})}$$

که $\overline{\Phi}_{n_1n_2}$همان عبارت $\Phi_{n_1n_2}$است به شرطی که نوسانگر

همسانگرد باشد یعنی $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. همچنین $Y^l_{(\frac{n_1+n_2}{2})}$ هماهنگهای کروی هستند که ویژه توابع L_z هستند که در مسئله دوبعدی به صورت رابطه(۴۰) تعریف می‌شوند:

$$Y^l_{(\frac{n_1+n_2}{2})}(x_1,x_2) = (-1)^l P^l_{(\frac{n_1+n_2}{2})}(0) \times\sqrt{\frac{(n_1+n_2+1)}{4\pi}\frac{(\frac{n_1+n_2}{2}-l)!}{(\frac{n_1+n_2}{2}+l)!}} \times\exp\left[il\tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})\right]. \tag{۴۰}$$

طیف ویژه مقادیر نیز به صورت رابطه (۴۱) بدست می‌آید:

$$\overline{E}_{n_1n_2l} = (n_1+n_2+1)\hbar_{eff}\omega - \frac{M\omega^2\theta^2}{2}l \tag{۴۱}$$

به ازای هر (n_1+n_2)، از ویژه مقدار عملگر (۳۷)، (n_1+n_2+1) ویژه تابع وجود دارد که نشان دهنده تبهگنی است. ولی با اضافه شدن عملگر (۳۸) ودر نتیجه آن جمع شدن ویژه مقدار این دو عملگر، تبهگنی از بین می‌رود، چون l مجموعه اعدادی است که یک واحد با هم اختلاف دارند به شرطی که از $-\frac{n_1+n_2}{2}$ شروع شوند و به $\frac{n_1+n_2}{2}$ ختم شوند.

اکنون ویژه تابع انرژی را بر حسب توانهای θ (با فرض کوچک بودن θ نسبت به $\frac{2\hbar}{M\omega}$) بسط داده می‌شود. اگر قرارداده شود

$$\overline{\Phi}^{(0)}_{n_1n_2} = \frac{\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{(n_1+n_2+1)/2}}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)}\pi n_1!n_2!}}\exp\left[-\frac{M\omega}{2\hbar}\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]H_{n_1}\left((\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}x_1\right)H_{n_2}\left((\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}x_2\right), \tag{۴۲}$$

رابطه (۴۳) بدست می‌آید:

$$\overline{\Psi}_{n_1n_2l} = Y^l_{(\frac{n_1+n_2}{2})}\overline{\Phi}^{(0)}_{n_1n_2} + \theta^2\left\{Y^l_{(\frac{n_1+n_2}{2})}\overline{\Phi}^{(0)}_{n_1n_2}\left[\frac{M^2\omega^2}{16\hbar^2}[-(n_1+n_2+1)+\frac{M\omega}{\hbar}(x_1^2+x_2^2)] - \frac{1}{8}(\frac{M\omega}{\hbar})^{5/2}n_1x_1\frac{H_{n_1-1}\left((\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}x_1\right)}{H_{n_1}\left((\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}x_1\right)} - \frac{1}{8}(\frac{M\omega}{\hbar})^{5/2}n_2x_2\frac{H_{n_2-1}\left((\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}x_2\right)}{H_{n_2}\left((\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}x_2\right)}\right]\right\}. \tag{۴۳}$$

بسط ویژه مقادیر بر حسب توانهای θ برابر است با

$$\overline{E}_{n_1n_2l} = (n_1+n_2+1)\hbar\omega - \frac{1}{2}\theta M\omega^2 l + \theta^2(n_1+n_2+1)\frac{M^2\omega^3}{8\hbar} - \theta^4(n_1+n_2+1)\frac{M^4\omega^5}{128\hbar^3}. \tag{۴۴}$$

۵- نتیجه

نوسانگر کوانتومی در فضای ناجابجایی منجر به تعریف ثابت موثر $\hbar_{eff}$ و M_{eff} می‌شود به قسمی که $\hbar_{eff} > \hbar$ و $M_{eff} < M$. از جوابهای بدست آمده یعنی طیف ویژه مقادیر و ویژه توابع می‌توان جواب‌های فضای جابجایی را با به صفربردن پارامتر ناجابجایی θ بدست آورد . همانگونه که انتظار می‌رود، جوابها، حل درستی از مسئله نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد در فضای جابجا هستند. به عبارت دیگر خاصیت نا جابجایی تصحیحاتی به جوابهای فضای جابجا اضافه می‌کند.

۶- مراجع

[۱] N. Seiberg and E. Witten, JHEP, 9909 (1999) 032 and references therein.

[۲] C. Chu, P. Ho, Nucl.phy. B550,151(1999) :B568, 447 (2000); V. Schomeruse , JHEP, 9906,030(1999);

[۳] K. Li and S. Dulat , arXiv: 0708.3954. (2007).

[۴] A. Kijanka. P. Kosinski, arXiv: 0407246v1. (2004).

[۵] K. Bolonek ,P. Kosinski. Phys.Lett. B547 (2002) 51-54.

[۶] J. J. Sakura , Modern Quantum Mechanics, Addison-Wesley, 1996.