

## تحلیل کمانش و ارتعاشات میکروورق نانوکامپوزیتی کوبله‌ی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور به طور همزمان براساس تئوری گرادیان کرنشی تعمیم‌یافته

مهدی محمدی‌مهر<sup>\*</sup>، مجتبی محرابی، احسان شعبانی نژاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

**چکیده:** در مطالعه حاضر، تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد میکرو ورق کامپوزیتی کوبله‌ی تقویت شده با نانو لوله‌ها تحت تأثیر

تنش اولیه و واقع بر بستر اورتوتروپیک بر اساس تئوری تغییرشکل برشی سینوسی و در حضور میدان‌های فیزیکی مختلف بررسی شده است. روابط مربوط به تنش که شامل ترم‌های مکانیکی، الکتریکی، مغناطیسی و حرارتی هستند، توسط تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته محاسبه شده و معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده‌اند. با حل معادلات حاکم بر حرکت، تأثیر عوامل مختلف از قبیل ضریب مقیاس کوچک طول ماده، نسبت طول به ضخامت و عرض، ثابت‌های بستر اورتوتروپیک، تغییرات دما و کسر حجمی نانو لوله‌ها بررسی شده‌اند. نتایج حاصل از تحقیق نشان می‌دهد که افزایش ضریب مقیاس کوچک طول ماده، ثابت‌های بستر الاستیک، حضور نانولوله‌ها و میدان‌های فیزیکی مختلف علاوه بر آن که فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش بحرانی سیستم را افزایش می‌دهند، منجر به تأخیر پدیده رزونانس نیز می‌شوند. این در حالی است که افزایش دما به سبب تأثیری که در کاهش سفتی میکرو سازه دارد، منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش بحرانی می‌شود. می‌توان بیان نمود که نتایج کار حاضر می‌تواند برای سیستم‌های مکانیکی-الکتریکی استفاده شده و زمینه کاملی برای مطالعات آتی ارائه دهد.

**تاریخچه داوری:**

دریافت: ۱۷ تیر ۱۳۹۶

بازنگری: ۲۳ مهر ۱۳۹۶

پذیرش: ۷ آذر ۱۳۹۶

ارائه آنلاین: ۱۴ آذر ۱۳۹۶

**کلمات کلیدی:**

کمانش و ارتعاشات

تئوری تغییر شکل سینوسی

تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته

وابسته به دما

بستر اورتوتروپیک

### ۱- مقدمه

در کاربردهای مهندسی، اغلب به تلفیق خواص مواد نیاز است. در صنایع هوافضا، دریایی و زیر آب، حمل و نقل، نفت و پتروشیمی امکان استفاده از یک نوع ماده که همه خواص مورد نظر را داشته باشد، مهم است. به عنوان مثال، در صنایع هوافضا به موادی نیاز است که ضمن داشتن استحکام بالا، سبک باشند و مقاومت سایشی خوبی نیز داشته باشند. بنابراین از آن جا که نمی‌توان ماده‌ای یافت که همه خواص مورد نظر را دارا باشد، مواد جدیدی به نام کامپوزیت‌ها ساخته شدند. این مواد از دو یا چند ماده مجزا تشکیل شده‌اند. واژه نانوکامپوزیت، به کامپوزیت‌هایی اطلاق می‌شود که حداقل یکی از اجزاء آن در مقیاس نانو یعنی کمتر از ۱۰۰ نانومتر باشد. نانوکامپوزیت‌ها نسبت به کامپوزیت‌های متداول خواص ویژه و مطلوب‌تری را از خود نشان می‌دهند این امر به این دلیل می‌باشد که نیروهای بین سطح مشترک تقویت کننده و زمینه در یک نانوکامپوزیت، به علت ابعاد نانومتری ذرات تقویت کننده، نسبت به اندازه این نیروها در یک کامپوزیت معمولی قوی‌تر می‌باشند. نانو لوله‌ها از تقویت کننده‌هایی هستند که به دلیل خواص مکانیکی منحصر به فرد، امروزه بسیار مورد توجه صنایع مختلف قرار گرفته‌اند.

با پیشرفت‌های گسترده در علوم مهندسی، نیاز هر چه بیشتر به بهینه‌سازی توسط نانو کامپوزیت‌ها بیش از پیش احساس می‌شود. یکی از

هدف‌های مهم و اصلی در این زمینه، افزایش امکانات فضاپیماها و کاهش وزن سامانه‌های فضایی است. ساخت فضاپیماهای سبک، قوی و مقاوم در برابر تشعشعات فضایی با چنین موادی امکان‌پذیر شده است. مطالعات انجام‌شده روی ساختارهای ریز مواد مهندسی، تقویت آن‌ها با استفاده از نانولوله‌ها و بررسی تأثیر شرایط فیزیکی گوناگون، نقش مهمی در ساخت وسایل مهندسی در صنایع بسیار پیشرفته‌ی زیردریایی، هوایی و فضایی دارد. نانولوله‌های کربنی<sup>۱</sup> سبب افزایش و بهبود خواص فیزیکی و مکانیکی پلیمرها شده و خصوصیات الکتریکی و حرارتی رزین‌ها را ارتقا می‌دهند و به سبب آن که مقاوم‌تر از فولاد و سبک‌تر از آلومینیوم هستند، اکثر صنایع را به دلیل پارامتر استحکام به وزن بالا به خود جذب نموده است. نانو لوله‌های نیتريد بور<sup>۲</sup> علاوه بر خواص مشابه با نانولوله‌های کربنی مانند پایداری شیمیایی، خواص مکانیکی و هدایت حرارتی بالا، مقاومت بیشتری در برابر اکسیداسیون در دماهای بالاتر دارند.

تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه سازه‌های کامپوزیتی در ابعاد مختلف ماکرو، میکرو و نانو انجام گرفته که در این قسمت به چند مورد از آن‌ها اشاره می‌شود: لی و همکاران [۱] به تحلیل کمانش یک ورق کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک‌لایه<sup>۳</sup>، پرداختند. آن‌ها خواص مکانیکی

1 Carbon Nano Tubes (CNTs)

2 Boron Nitride Nano Tubes (BNNTs)

3 Single-Walled Carbon NanoTubes (SWCNTs)

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

تغییر شکل برشی مطالعه کردند. آن‌ها جهت شبیه‌سازی رژیم جریان سیال از عدد بدون بعد کودسن استفاده کرده و تأثیر عوامل گوناگون از قبیل سرعت جریان، پارامتر مقیاس کوچک طول ماده، خواص ماده و تغییرات دما را بر فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی جریان مطالعه نمودند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش عدد توان مدرج تابعی، رفتار سازه و منحنی‌های به دست آمده از آن به رفتار ماده ایزوتروپیک نزدیک می‌شوند. همچنین نشان داده شد که با کاهش اختلاف دمای سیستم و افزایش بار محوری، فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی جریان بیشتر می‌شوند. نصیحت‌گذار و همکاران [۱۰] به تحلیل کماتش پنل‌های کامپوزیتی پیزوالکتریک تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در دو حالت بارهای محوری و فشاری پرداخته و ضمن بررسی اثرات تراکم حجمی نانو لوله‌ها، نوع بارگذاری و ابعاد هندسی نشان دادند که افزایش کسر حجمی نانو لوله‌های تقویت کننده منجر به افزایش بار کماتش بحرانی سازه نیز می‌شود. آراجو و همکاران [۱۱] با استفاده از مدل المان محدود به تحلیل دینامیکی ورق‌های ساندویچی ساخته شده از هسته از جنس مواد نرم و رویه‌های کامپوزیتی پیزو الکتریک پرداختند. آن‌ها حالت‌های مختلف استفاده از هسته‌های نرم و رویه‌های کامپوزیتی پیزو الکتریک که در نقش سنسورها و حسگرها عمل نموده بر رفتار دینامیکی و کنترل اتوماتیک سازه بررسی کردند. جانگ و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد ورق‌های نانو کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک جداره را بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ورق‌های کامپوزیتی بررسی نموده و با استفاده از روش حل المانی ریتز به مقایسه شکل مودهای ارتعاشی ناشی از تقویت نانوسازه در نظر گرفته شده با انواع مختلف توزیع‌های نانو لوله‌های به صورت تقویت کننده پرداختند. عارفی و زنگور [۱۳] تحلیل خمشی نانو ورق‌های کلاسیک ساندویچی با رویه‌های پیزو الکتریک و پیزو مغناطیس را در حضور بارهای الکتریکی- حرارتی- مغناطیسی و مکانیکی بر اساس تئوری غیر محلی الاستیسیته مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند که افزایش شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی منجر به افزایش سفتی نانو سازه و در نتیجه کاهش خیز آن می‌شود.

در کار حاضر از آن جایی که تحقیقات بر روی دو نوع نانولوله کربنی و نیتريد بور نشان می‌دهد که نانولوله‌های کربنی عایق الکتریسیته و دارای خاصیت پیزو مغناطیسی بوده و نانولوله‌های نیتريد بور عایق مغناطیسی و دارای خاصیت پیزو الکتریک می‌باشند، یک میکرو ورق کوبله شده‌ای که به طور همزمان تحت میدان مغناطیسی و الکتریکی بوده، انتخاب شده است. برای بررسی تأثیر میدان‌ها و همچنین محاسبه تغییراتشان، میکرو ورق بالایی با نانولوله کربنی و میکرو ورق پایینی با نانولوله نیتريد بور تقویت شده است. ماده زمینه هر دو میکرو ورق پلیمر بوده که مستقل از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌باشد. به بیان دیگر میکرو ورق بالایی با نانولوله کربنی تقویت شده و می‌توان فرض کرد تنها تحت میدان مغناطیسی بوده و رفتار این میدان را بر روی سازه نشان می‌دهد. همچنین میکرو ورق پایینی

معادل ورق کامپوزیتی را با روش‌های موری تاناکا و اختلاط تخمین زده و با یکدیگر مقایسه کرده و نشان دادند خواص مادی معادل در دمای سیصد درجه کلون و به ازای کسرهای حجمی مختلف در هر دو روش تقریباً یکسان می‌باشد. وون و لای [۲] به بررسی ارتعاشات آزاد نانو لوله‌ی کربنی تک‌لایه جاسازی‌شده با شرایط مرزی مختلف مبتنی بر نظریه‌ی غیرمحلی تیر تیموشنکو و روش حداقل مربعات<sup>۱</sup> پرداخته و به این نتیجه رسیدند که پارامترهایی از جمله سختی وینکلر به طور قابل توجهی روی ارتعاشات آزاد نانو لوله‌های کربنی تک‌لایه جاسازی‌شده تأثیر می‌گذارند. مورمو و همکاران [۳] رفتار مکانیکی نانو لوله‌های دولایه کربنی را در حضور میدان مغناطیسی با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته بررسی کرده و نشان دادند فرکانس‌های طبیعی سیستم در حضور میدان مغناطیسی افزایش خواهند یافت. شوشتری و رضوی [۴] ارتعاشات غیرخطی صفحات نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک را بررسی کرده و نشان دادند که بیشترین میزان غیر خطی بودن فرکانس برای شرایط مرزی مدار باز اتفاق می‌افتد. گارسیا [۵] به تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد ورق مورب تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی پرداخت و تأثیر پارامترهای مختلفی چون زاویه ورق، نسبت ضخامت به پهنا و کسر حجمی نانو لوله‌های تقویت کننده را با استفاده از روش تحلیلی و همچنین روش عددی اجزا محدود به کمک نرم افزار انسیس<sup>۲</sup> بررسی نمود. جانگ و لی [۶] به مقایسه اثرات میدان‌های مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی بر رفتار ارتعاشی و کماتش پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداختند. نتایج به دست آمده از کار آن‌ها نشان داد که میدان مغناطیسی نسبت به میدان الکتریکی تأثیر به مراتب بالاتری بر فرکانس‌های طبیعی و بار کماتش بحرانی سازه دارد. چن و همکاران [۷] به تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر تیموشنکو متخلخل ساندویچی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که همان‌گونه که ضریب تخلخل ماده سازنده سازه افزایش می‌یابد، نسبت فرکانس‌های غیر خطی تیر تیموشنکو برای توزیع‌های مختلف تخلخل کاهش پیدا می‌کند. خانجانی و همکاران [۸] به بررسی اثرات عوامل مختلفی از قبیل ضخامت هسته، شعاع انحنا و طول سازه بر پاسخ دینامیکی پنل‌های استوانه‌ای ساندویچی کامپوزیتی پرداختند. در مطالعه آن‌ها از تئوری مرتبه بالاتر پنل‌های ساندویچی<sup>۳</sup> برای هسته و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی<sup>۴</sup> برای رویه‌های پنل در نظر گرفته شده استفاده شد و دو روش تحلیلی ناویر و عددی نیومارک برای حل معادلات مکانی و زمانی به کار گرفته شدند. نتایج به دست آمده از کار آن‌ها نشان داد که اثرات ضریب برشی برای سازه در نظر گرفته شده از نسبت طول به ضخامت بیشتر و از نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل سازه کمتر است. انصاری و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانوپوسته‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی حامل جریان سیال را در شرایط حرارتی محیطی مختلف با استفاده از تئوری مرتبه اول

- 1 Differential Quadrature Method (DQM)
- 2 ANSYS
- 3 High-order Sandwich Plate Theory (HSAPT)
- 4 First Order Shear Deformation Theory (FSDT)

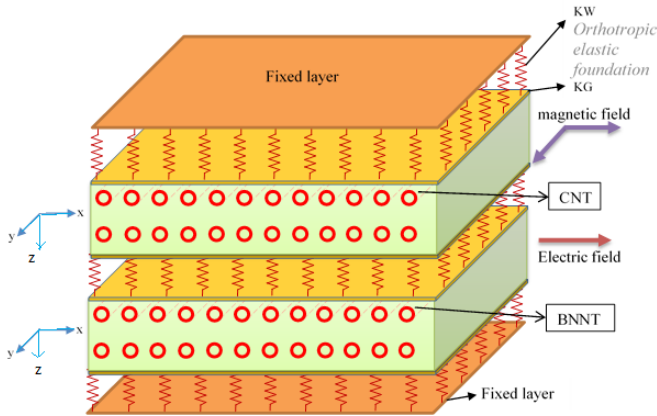


Fig. 1. Schematic of double-bonded micro composite plate reinforced by Carbon and boron-nitride nanotubes

شکل ۱: شمای شماتیکی از میکرو ورق کامپوزیتی کوبله شده و تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور.

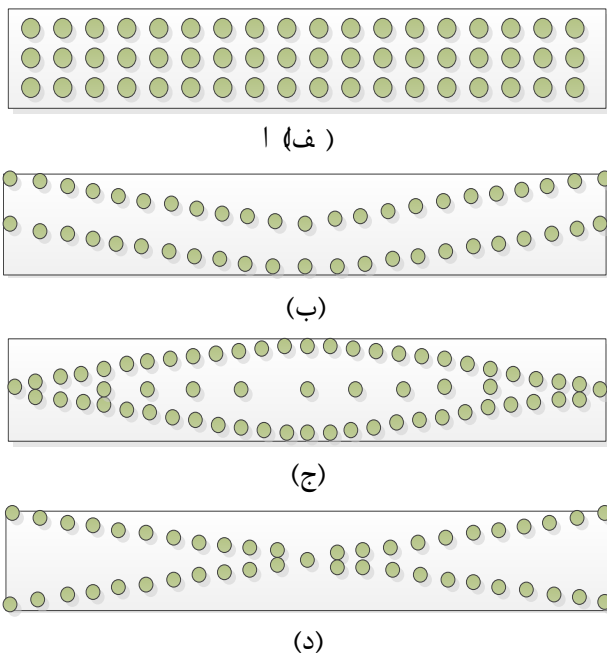


Fig. 2. Various distribution of carbon nanotubes at face sheets of double-bonded micro plate a) uniform b) FG-V c) FG-O d) FG-X

شکل ۲: انواع توزیع نانولوله‌های کربنی در رویه‌های کامپوزیتی میکرو ورق‌های کوبله شده (الف) حالت یکنواخت (UD) (ب) مدرج تابعی (FG-V) (ج) مدرج تابعی (FG-O) و (د) مدرج تابعی (FG-X)

شده‌اند که خواص آن‌ها در جدول ۱ مطابق با مراجع [۸ و ۷] و جدول ۲ مطابق با مراجع [۹ و ۱۰] ثبت شده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m = (3.51 - 0.0047T) \text{ GPa} \\ \alpha_m = 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6} / \text{K} \\ \rho_m = 1150 \text{ kg/m}^3; \nu_m = 0.34 \end{array} \right. \quad (1)$$

به منظور خواص مؤثر مکانیکی و حرارتی معادل از تئوری اختلاط کامپوزیتی استفاده شده که در روابط (۲) و (۳) تعریف شده‌اند [۱۷-۱۴]:

با نانو لوله نیتريدبور تقویت شده که تنها رفتار میدان الکتریکی را بر روی سازه نشان می‌دهد. در تبیین نوآوری‌های کار حاضر می‌توان گفت که در این مطالعه میکرو ورق کامپوزیتی کوبله شده تحت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به طور همزمان قرار گرفته و ماده زمینه مستقل از هر دو میدان بوده و برای بررسی تأثیر میدان‌ها بر روی رفتار سازه از نانولوله‌های مختلف کربنی و نیتريد بور استفاده شده است. این در حالی است که در غالب مطالعات پیشین انجام گرفته تأثیر همزمان میدان‌های فیزیکی الکتریکی و مغناطیسی کمتر مورد بررسی واقع شده و نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور در سیستم کوبله شده مطالعه حاضر به صورت ویژه بررسی شده‌اند. همچنین در این مقاله از تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته استفاده شده که به ندرت در مقالات مشابه برای هندسه‌های ساده‌تر از قبیل انواع تیرها شامل تئوری تیر تیموشنکو مشاهده می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی هندسی

در این تحقیق، به تحلیل کمانش و ارتعاشات میکرو ورق نانو کامپوزیتی کوبله‌ی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور به طور همزمان براساس تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته پرداخته می‌شود که فرضیات و محدودیت‌ها به صورت زیر بیان می‌شوند:

- نسبت طول و عرض به ضخامت کمتر از ۱۰ در نظر گرفته شده است.
- برای نسبت‌های طول به ضخامت کمتر از ۱۰ از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر مانند تئوری تغییر شکل سینوسی برای دقت بهتر جواب‌ها استفاده شده است.
- برای در نظر گرفتن اثرات مقیاس از کاملترین تئوری ارائه شده، تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته استفاده شده است.
- خواص ماده وابسته به دما در نظر گرفته شده است.
- فرض می‌شود که نانو لوله‌ها به صورت کامپوزیتی باشند. لذا خواص در راستای نانو لوله و عمود بر آن متفاوت می‌باشد.
- شرایط مرزی مساله، تکیه گاه ساده در نظر گرفته می‌شود.
- میکرو سازه تحت تأثیر تنش اولیه می‌باشد.

میکرو ورق‌های کوبله شده مورد بررسی به صورت مستطیلی، با طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  تحت میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی واقع بر بستر الاستیک اورتوتروپیک می‌باشند. شکل‌های ۱ و ۲ شمای شماتیکی از این میکرو ورق‌ها را به همراه توزیع‌های مختلف انواع نانو لوله‌ها درون زمینه کامپوزیتی را نشان می‌دهد.

مواد کامپوزیتی هوشمند از دو فاز زمینه و تقویت‌کننده تشکیل شده‌اند. ماده زمینه از جنس PmpV انتخاب شده است که خواص مکانیکی و حرارتی آن به صورت توابع وابسته به دما در رابطه (۱) آورده شده‌اند [۸]. همچنین نانو لوله‌های کربنی تک‌لایه و نانو لوله‌های نیتريد بور تک‌لایه به عنوان تقویت‌کننده‌های ساختار کامپوزیتی درون زمینه هوشمند ادغام

جدول ۱: خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی نانو لوله‌های کربنی تک‌لایه (۱۰,۱۰) (۱۷۵)  $(v_{12}^{CNT}=+0.175)$   
 Table 1. Mechanical, thermal and magnetic properties of single-layered carbon nanotubes (10,10) ( $v_{12}^{CNT}=0.175$ )

$\mu(N_s^2/C^2)$	$\alpha_{22}^{CNT} (10^{-6}/K)$	$\alpha_{11}^{CNT} (10^{-6}/K)$	$G_{12}^{CNT} (TPa)$	$E_{22}^{CNT} (TPa)$	$E_{11}^{CNT} (TPa)$	دما (K)
-/۲۵	۵/۱۶۸۲	۳/۴۵۸۴	۱/۹۴۴۵	۷/۰۸۰۰	۵/۶۴۶۶	۳۰۰
-/۲۵	۵/۰۱۸۹	۴/۵۳۶۱	۱/۹۶۴۳	۶/۹۳۴۸	۵/۵۳۰۸	۵۰۰
-/۲۵	۴/۸۹۴۳	۴/۶۶۷۷	۱/۹۶۴۴	۶/۸۶۴۱	۵/۴۷۴۴	۷۰۰

جدول ۲: خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی نانو لوله‌های نیتريد بور تک‌لایه (۵,۵) (۳۴)  $(v_{12}^{BNNT}=0.34)$   
 Table 2. Mechanical, thermal and electric properties of single-layered boron-nitride nanotubes (5,5) ( $v_{12}^{BNNT}=0.34$ )

$\eta^{BNNT} (10^{-6}F/m)$	$\alpha_{22}^{CNT} (10^{-6}/K)$	$\alpha_{11}^{CNT} (10^{-6}/K)$	$G_{12}^{CNT} (TPa)$	$E_{11}^{BNNT} = E_{22}^{BNNT} (TPa)$
۱/۱۰۶	۱/۲	۰/۶	۰/۶۷۲	۱/۷۹۹

جدول ۳: ضرایب  $\eta_i$  بهبود خواص مکانیکی مواد کامپوزیتی در ابعاد میکرو و نانو

Table 3.  $\eta_i$  Coefficient of mechanical properties of composite materials in micro and nano scale

$\eta_3$	$\eta_2$	$\eta_1$	کسر حجمی نانو لوله‌ها
۰/۹۳۴	۰/۹۳۴	۰/۱۴۹	۰/۱۱
۰/۹۴۱	۰/۹۴۱	۰/۱۵۰	۰/۱۴
۱/۳۸۱	۱/۳۸۱	۰/۱۴۹	۰/۱۷

$\nu_{12}^{BNNT}, \nu_{12}^{CNT}, G_{12}^{BNNT}, G_{12}^{CNT}, E_{22}^{BNNT}, E_{22}^{CNT}, E_{11}^{BNNT}, E_{11}^{CNT}, V_{BNNT}, V_{CNT}, \alpha_{11}^{BNNT}, \alpha_{11}^{CNT}$  به ترتیب مدول یانگ در راستاهای مختلف، مدول برشی، ضریب پواسون، ضریب انبساط حرارتی و کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور تک‌لایه هستند. همچنین مقادیر  $\eta_1, \eta_2$  و  $\eta_3$  مطابق مراجع [۷، ۱۰ و ۱۱] در جدول ۳ ثبت شده است.

### ۳- معادلات میدان جابه‌جایی و استخراج معادلات ریاضی

به دلیل اینکه نسبت طول و عرض به ضخامت کمتر از ۱۰ بوده و برای دقت بیشتر در محاسبات از تئوری تغییر شکل برشی سینوسی<sup>۱</sup> برای تعیین معادلات میدان جابه‌جایی استفاده شده که به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\begin{cases} u^{(i)}(x, y, z, t) = u_0^{(i)}(x, y, t) - z \frac{\partial w_0^{(i)}(x, y, t)}{\partial x} + \Phi(z)\theta_x^{(i)}(x, y, t) \\ v^{(i)}(x, y, z, t) = v_0^{(i)}(x, y, t) - z \frac{\partial w_0^{(i)}(x, y, t)}{\partial y} + \Phi(z)\theta_y^{(i)}(x, y, t) \\ w^{(i)}(x, y, z, t) = w_0^{(i)}(x, y, t) \end{cases} \quad (4)$$

$$\left( \Phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right)_{i=1,2}$$

در رابطه فوق،  $u_0^{(i)}, v_0^{(i)}, w_0^{(i)}, \theta_x^{(i)}$  و  $\theta_y^{(i)}$  به ترتیب مولفه‌های

$$V_{XNT}(z) = \begin{cases} V_{XNT}^* & (UD) \\ (1 + \frac{2z}{h})V_{XNT}^* & (FG - V) \\ V_{XNT}^* = \frac{w_{XNT}}{w_{XNT} + (\frac{\rho_{XNT}}{\rho_m})(1 - w_{XNT})} \\ 2(1 - \frac{|2z|}{h})V_{XNT}^* & (FG - O) \\ XNT \rightarrow: \begin{cases} CNT \\ BNNT \end{cases} \\ 2\frac{|2z|}{h}V_{XNT}^* & (FG - X) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} E_{11} = \eta_1 V_{XNT} E_{11}^{XNT} + V_m E_m \\ \frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{XNT}}{E_{22}^{XNT}} + \frac{V_m}{E_m} \\ \frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{XNT}}{G_{12}^{XNT}} + \frac{V_m}{G_m} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \rho = V_{XNT} \rho_{XNT} + V_m \rho_m \\ \nu_{12} = V_{XNT} \nu_{12}^{XNT} + V_m \nu_m \\ \alpha_{11} = V_{XNT} \alpha_{11}^{XNT} + V_m \alpha_m \\ \alpha_{22} = V_{XNT} \alpha_{22}^{XNT} + V_m \alpha_m \end{cases} \quad XNT \rightarrow: \begin{cases} CNT \\ BNNT \end{cases}$$

در رابطه (۲)،  $w_{BNNT}$  و  $w_{CNT}$  کسر جرمی نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور،  $\rho_m$ ،  $\rho_{BNNT}$  و  $\rho_{CNT}$  بیان‌گر چگالی ماده زمینه و نانو لوله‌های تقویت‌کننده می‌باشند.  $UD$ ،  $FG - V$ ،  $FG - O$  و  $FG - X$  حالت‌های قرارگیری نانو لوله‌ها می‌باشند. در رابطه (۳)،  $E_m$ ،  $\nu_m$  و  $\alpha_m$  به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب پواسون، ضریب انبساط حرارتی و کسر حجمی برای ماده زمینه می‌باشند. همچنین  $E_{11}^{CNT}$

$$\left\{ \begin{aligned} D_x &= \lambda_1 E_x + p_1 \Delta T \\ E_x &= -\frac{\partial \tilde{\varphi}_E(x, z, t)}{\partial x} \\ \tilde{\varphi}_E &= -\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_E(x, t) \\ B_i &= \mu_i H_i + \eta_i \Delta T \\ H_i &= -\frac{\partial \tilde{\varphi}_H(x, y, z, t)}{\partial x_i} \quad (i=1,2) \\ \tilde{\varphi}_H &= -\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_H(x, y, t) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

در روابط بالا،  $u_i$  نشان دهنده مولفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای طول، عرض و ضخامت هر لایه میکرو ورق،  $G$  مدول برشی،  $\delta$  دلتای کرونگر هستند. همچنین  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  پارامترهای اضافه جنس و  $l_1, l_2$  با عنوان پارامترهای مقیاس کوچک طول ماده شناخته شده، که مقادیر آن‌ها با استفاده از نتایج به دست آمده از آزمایش‌های تجربی تعیین شده و با استناد به منابع موجود برای مواد در ابعاد میکرو و نانو با استفاده از رابطه (۱۱) برای تئوری‌های کلاسیک، تنش کوپل اصلاح شده تعمیم یافته ۲ و گرادبان کرنشی اصلاح شده تعمیم یافته مشخص می‌شوند. در رابطه (۱۲)  $\lambda_1, p_1$  و  $\tilde{\varphi}_E$  به ترتیب نشان دهنده ثابت دی‌الکتریک، ثابت پایروالکتریک و پتانسیل الکتریکی در راستای طولی و  $\eta_i, \mu_i$  و  $\tilde{\varphi}_H$  به ترتیب نشان دهنده ثابت مغناطیس، ثابت پایرومغناطیس و پتانسیل مغناطیسی در راستای طولی و عرضی به‌ازای  $i = \{1, 2\}$  می‌باشند. لازم به ذکر است که در پروژه حاضر، میدان مغناطیسی در دو راستای طولی و عرضی میکرو ورق بالایی و میدان الکتریکی به صورت یک بعدی و تنها در راستای طولی میکرو ورق پایینی فرض شده‌اند. مؤلفه‌های تنش کلاسیک برای این سازه به صورت روابط (۱۳) و (۱۴) می‌باشد.

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{aligned} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x - \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_{22} \Delta T \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}; Q_{55} = G_{13}; Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

در رابطه فوق، ماتریس  $Q$ ، ماتریس سفتی ماده کامپوزیتی است

میدان جابه‌جایی در راستای طول، عرض و ضخامت و ترم چرخش در راستای طولی و عرضی می‌باشند. همچنین  $i = \{1, 2\}$  بیان‌گر میکرو ورق بالایی و پایینی می‌باشد.

برای دستیابی به معادلات حاکم بر حرکت میکرو ورق‌های کوپله شده کامپوزیتی و تقویت شده با نانو لوله واقع بر بستر اورتوتروپیک، پس از تعیین معادلات میدان جابه‌جایی از اصل همیلتون استفاده شده است. در این روش، انرژی پتانسیل کل ( $\Pi$ )، از مجموع انرژی پتانسیل کرنشی ( $U$ )، انرژی جنبشی ( $T$ ) و انرژی ناشی از کار نیروهای خارجی ( $V$ ) به صورت رابطه (۵) حاصل می‌شود [۱۸]:

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt \right) = 0 \quad (5)$$

در این رابطه،  $t$  واحد زمان و در محدوده صفر و  $t_1$  و  $\delta$  نشان دهنده عملگر حساب تغییرات است.

به منظور تعیین معادلات انرژی پتانسیل کرنشی میکروسازه از تئوری گرادبان کرنشی تعمیم‌یافته استفاده شده که یکی از جامع‌ترین تئوری‌ها برای محاسبه انرژی پتانسیل کرنشی می‌باشد. این تئوری با در نظر گرفتن اثر میدان مغناطیسی در میکرو ورق بالایی و میدان الکتریکی در میکرو ورق پایینی و پس از اعمال حساب تغییرات به صورت رابطه (۶) بیان شده است [۱۹ و ۲۰]:

$$\delta U = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \tau_{ijk} \delta \xi_{ijk} - \gamma_1 D_i \delta E_i - \gamma_2 B_i \delta H_i) dV \quad (6)$$

در این رابطه ضرایب  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  برای میکرو ورق بالایی برابر صفر و یک و همچنین برای میکرو ورق پایینی برابر یک و صفر هستند. به علاوه پارامترهای  $\varepsilon_{ij}, \xi_{ijk}, \sigma_{ij}, \tau_{ijk}, D_i, B_i, E_i, H_i$  به ترتیب بیان‌گر تانسور کرنش، تانسور گرادبان کرنشی مرتبه بالاتر، مؤلفه‌های تنش کلاسیک، تانسور تنش مرتبه بالاتر، جابه‌جایی الکتریکی و مغناطیسی، میدان الکتریکی و مغناطیسی بوده که به صورت مجموعه روابط (۷) تا (۱۲) تعیین شده‌اند [۱۹ و ۲۰]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} = Q_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

$$\xi_{ijk} = \xi_{ikj} = \varepsilon_{jk,i} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j})_{,i} \quad (9)$$

$$\tau_{ijk} = \frac{1}{2} a_1 (\xi_{kpp} \delta_{ij} + 2 \xi_{ppi} \delta_{jk} + \xi_{jpp} \delta_{ik}) + 2 a_2 \xi_{ipp} \delta_{jk} \quad (10)$$

$$+ a_3 (\xi_{ppk} \delta_{ij} + \xi_{ppj} \delta_{ik}) + 2 a_4 \xi_{ijk} + a_5 (\xi_{jki} + \xi_{kji}) \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= G(l_2^2 - \frac{4}{15} l_1^2); a_2 = G(l_0^2 - \frac{l_1^2}{15} - \frac{l_2^2}{2}); \\ a_3 &= -G(\frac{4}{15} l_1^2 + \frac{l_2^2}{2}); a_4 = G(\frac{l_1^2}{3} + l_2^2); a_5 = G(\frac{2}{3} l_1^2 - l_2^2) \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} CT &\Rightarrow l_0 = l_1 = l_2 = 0 \\ MGCST &\Rightarrow l_0 = l_1 = 0, l_2 = 17.6 (\mu m) \\ MGSST &\Rightarrow l_0 = l_1 = l_2 = 17.6 (\mu m) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 F_1^{elastic} &= K_{w1} w^{(1)} - K_{G\xi} (\cos^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \\
 & 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2}) - \\
 & K_{G\eta} (\sin^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2}) \\
 F_2^{elastic} &= K_{w2} w^{(2)} - K_{G\xi} (\cos^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \\
 & 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2}) - \\
 & K_{G\eta} (\sin^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2}) \quad (19) \\
 F_3^{elastic} &= K_{w3} (w^{(1)} - w^{(2)}) - \\
 & K_{G\xi} \left( \cos^2 \theta (\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2}) + 2 \cos \theta \sin \theta (\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x \partial y}) + \right. \\
 & \left. \sin^2 \theta (\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2}) \right) \\
 & - K_{G\eta} \left( \sin^2 \theta (\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2}) - 2 \cos \theta \sin \theta (\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x \partial y}) \right. \\
 & \left. + \cos^2 \theta (\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2}) \right)
 \end{aligned}$$

در این رابطه،  $K_w$ ،  $K_{G\xi}$ ،  $K_{G\eta}$  و  $\theta$  به ترتیب ضریب فنری وینکلر، ضرایب برشی پاسترناک در دو راستای محلی  $\xi$  و  $\eta$  و زاویه  $\xi$  با جهت مثبت  $x$  هستند. علاوه بر این نیروی حاصل از تنش اولیه  $N_x^{prestressload}$  طبق رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود [۲۴].

$$N_x^{prestressload} = -\int_0^a N_{0x} w_{0,xx} dx ; N_{0x} = \sigma_{0x} A \quad (20)$$

در این رابطه  $\sigma_{0x}$  و  $A$  تنش اولیه و مساحت متناظر عمود بر راستای محوری است. تنش کششی مثبت در نظر گرفته شده که در نتیجه آن در رابطه یک منفی ظاهر می‌شود. سرانجام تغییرات کار نیروهای خارجی به صورت رابطه (۲۱) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \delta V &= \int_A F_1^{elastic} \delta w_0^{(1)} + F_2^{elastic} (\delta w_0^{(1)} - \delta w_0^{(2)}) + \\
 & F_3^{elastic} \delta w_0^{(2)} + N_x^{prestressload} \delta w_0^{(1)} + N_x^{prestressload} \delta w_0^{(2)} dA \\
 & \left[ \begin{aligned}
 & K_{w1} w^{(1)} + K_{w3} (w_0^{(1)} - w_0^{(2)}) + \\
 & (-K_{G\xi} \cos^2 \theta - K_{G\eta} \sin^2 \theta) (2w_{0,xx}^{(1)} - w_{0,xx}^{(2)}) \\
 & + (-2K_{G\xi} \cos \theta \sin \theta + 2K_{G\eta} \cos \theta \sin \theta) (2w_{0,xy}^{(1)} - w_{0,xy}^{(2)}) \\
 & - N_{0x} w_{0,xx}^{(1)} + (-K_{G\xi} \sin^2 \theta - K_{G\eta} \cos^2 \theta) (2w_{0,yy}^{(1)} - w_{0,yy}^{(2)})
 \end{aligned} \right] \delta w_0^{(1)} \\
 & \left[ \begin{aligned}
 & K_{w2} w^{(2)} + K_{w3} (w_0^{(2)} - w_0^{(1)}) + \\
 & (-K_{G\xi} \cos^2 \theta - K_{G\eta} \sin^2 \theta) (2w_{0,xx}^{(2)} - w_{0,xx}^{(1)}) \\
 & + (-2K_{G\xi} \cos \theta \sin \theta + 2K_{G\eta} \cos \theta \sin \theta) (2w_{0,xy}^{(2)} - w_{0,xy}^{(1)}) \\
 & - N_{0x} w_{0,xx}^{(2)} + (-K_{G\xi} \sin^2 \theta - K_{G\eta} \cos^2 \theta) (2w_{0,yy}^{(2)} - w_{0,yy}^{(1)})
 \end{aligned} \right] \delta w_0^{(2)} dA \quad (21)
 \end{aligned}$$

سرانجام با استفاده از روابط (۶)، (۱۶) و (۲۱) و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۵)، معادلات حاکم بر حرکت میکروسازه در نظر گرفته شده به دست می‌آیند که روابط مربوط به آن‌ها در پیوست مقاله حاضر تعریف شده است.

که مؤلفه‌های آن به صورت رابطه (۱۴) تعریف شده‌اند [۱۴]. همچنین،  $\alpha_{11}$ ،  $\alpha_{22}$  و  $\Delta T$  به ترتیب ضرایب انبساط حرارتی و تغییرات دمایی  $(\Delta T = T - T_0)$  هستند.

معادلات انرژی جنبشی میکرو ورق‌های کوبله شده و تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور مطابق با مراجع [۱۸] و [۲۱] به صورت رابطه (۱۵) قابل تعریف است:

$$\begin{cases} T = T^{(1)} + T^{(2)} = \\ \frac{1}{2} \int_V \left\{ \rho^i \left[ \left( \frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^{(i)}}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dV ; (i=1,2) \end{cases} \quad (15)$$

در این رابطه،  $\rho^{(1)}$ ،  $\rho^{(2)}$  و  $T^{(1)}$  و  $T^{(2)}$  به ترتیب چگالی و انرژی جنبشی میکرو ورق بالایی و پایینی هستند. معادله انرژی جنبشی با اعمال اصل حساب تغییرات و تعیین ترم‌های اینرسی که در رابطه (۱۷) بیان شده به صورت رابطه (۱۶) قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned}
 \delta T &= -\int_A \left\{ \begin{aligned}
 & [I_0^i u_{0,tt}^{(i)} - I_1^i w_{0,xtt}^{(i)} + R_1^i \theta_{x,xt}^{(i)}] \delta u_0^{(i)} + \\
 & [I_0^i v_{0,tt}^{(i)} - I_1^i w_{0,ytt}^{(i)} + R_1^i \theta_{y,tt}^{(i)}] \delta v_0^{(i)} + \\
 & [I_1^i u_{0,xtt}^{(i)} - I_2^i w_{0,xtt}^{(i)} + IR_1^i \theta_{x,xt}^{(i)} + I_0^i w_{0,tt}^{(i)}] \delta w_0^{(i)} \\
 & [I_1^i v_{0,ytt}^{(i)} - I_2^i w_{0,ytt}^{(i)} + IR_1^i \theta_{y,ytt}^{(i)} + I_0^i w_{0,tt}^{(i)}] \delta w_0^{(i)} \\
 & + [R_1^i u_{0,tt}^{(i)} - IR_1^i w_{0,xtt}^{(i)} + R_2^i \theta_{x,tt}^{(i)}] \delta \theta_x^{(i)} + \\
 & [R_1^i v_{0,tt}^{(i)} - IR_1^i w_{0,ytt}^{(i)} + R_2^i \theta_{y,tt}^{(i)}] \delta \theta_y^{(i)}
 \end{aligned} \right\} dA \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$(I_0^i, I_1^i, I_2^i, R_1^i, R_2^i, IR_1^i) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^i (1, z, z^2, \Phi(z), \Phi^2(z), z\Phi(z)) dz \Rightarrow i=(1,2) \quad (17)$$

در مطالعه حاضر، فرض شده که میکرو ورق‌های کوبله شده بر بستر الاستیک اورتوتروپیک واقع بوده و همچنین تنش اولیه در راستای محوری طولی و عرضی بر سیستم اعمال شده باشد. بنابراین انرژی ناشی از کار نیروهای خارجی به صورت مجموع انرژی‌های ناشی از بستر اورتوتروپیک و تنش اولیه مطابق رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 V &= V_{foundation} + V_{prestressload} = \\
 & \frac{1}{2} \int_A \left[ F_i^{elastic} w_i - N_{0x} \left( \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] dA \quad (18)
 \end{aligned}$$

نیروی ناشی از بستر الاستیک اورتوتروپیک  $F_i^{elastic}$  و  $F_r^{elastic}$  به صورت رابطه (۱۹) تعریف شده است [۲۲-۲۵]:

#### ۴- حل تحلیلی معادلات حاکم بر حرکت

بر اساس روش حل تحلیلی ناپیر متغیرهای میدان جابه‌جایی، مغناطیسی و الکتریکی مطابق با رابطه (۲۲) به صورت بسط سری فوریه تابعی از زمان، جابه‌جایی طولی و عرضی هر لایه حدس زده می‌شوند [۲۸-۲۶]:

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \\ v_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \\ w_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \\ \theta_x(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{xmn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \\ \theta_y(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \\ \phi_H(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{Hmn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \\ \phi_E(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{Emn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)،  $U_{mn}$ ،  $V_{mn}$ ،  $W_{mn}$ ،  $\theta_{xmn}$ ،  $\theta_{ymn}$ ،  $\phi_{Hmn}$  و  $\phi_{Emn}$  ضرایب مجهول سری فوریه هستند. همچنین  $n$ ،  $m$  و  $\omega$  به ترتیب به عدد موج تابع حدس زده شده توسط سری فوریه در راستاهای مختلف و فرکانس طبیعی اشاره دارند.

با حدس متغیرهای میدان جابه‌جایی و جایگذاری آن‌ها در معادلات حاکم بر حرکت و تبدیل آن به یک مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی سیستم مطابق با رابطه (۲۳) و بارکمانش بحرانی مطابق رابطه (۲۴) محاسبه می‌شوند.

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (23)$$

$$[K] - N_{x0} [N] = 0 \quad ; \quad \alpha_{buck} = \frac{N_{y0}}{N_{x0}} \quad (24)$$

#### ۵- بحث و نتایج عددی

در این قسمت، نتایج عددی به دست آمده از تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش میکرو ورق کامپوزیتی کوبله شده و تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور بر اساس تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته ارائه شده‌اند. البته لازم به ذکر است مطالعاتی در زمینه تحلیل کمانش و ارتعاشات میکرو ورق توسط نانو لوله‌های کربنی یا نیتريد بور توسط دیگر محققان انصاری و همکاران [۲۹ و ۳۰] کیانی [۳۱]، دانشمند و همکاران [۳۲] و طادی بنی و همکاران [۳۳ و ۳۴] انجام شده است. رابطه (۲۵) فرکانس و بار کمانش بحرانی بی‌بعد را نشان می‌دهد [۳۵]. همچنین مقادیر عددی در نظر گرفته شده با توجه به مرجع [۱۹] عبارتند از:

$$l = 1 \text{ m} ; l_0 = l_1 = l_2 = l ; h = 4l ; a = 10h ; b = a ; k_w = 10 \text{ (GN/m}^3\text{)} ; k_G = 10 \text{ (kN/m)} ; T_0 = 300\text{K} ; \Delta T = 50 ;$$

$$\begin{cases} \tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} ; \quad \tilde{N}_{cr} = N_{cr} \frac{a^2}{100h^3 E_m} \\ \rho_m = 1150 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ E_m = 2.1 \text{ (GPa)} \end{cases} \quad (25)$$

در مقاله حاضر تئوری تعمیم یافته هریک از دو تئوری گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده به صورت MGSST و MGCST نمایش داده شده‌اند. همان طور که در مقالات چاپ شده در این زمینه مشهود است تئوری‌های تعمیم یافته در بر گیرنده دو تئوری گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده هستند که به صورت ترکیبی از ضرایب مقیاس کوچک طول ماده و در قالب ضرایب بیان شده‌اند. در واقع می‌توان گفت که تئوری تعمیم یافته گرادیان کرنشی کامل‌تر از تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد که در تحقیقات جدید به نوعی نحوه بیان آن تغییر یافته است و همان طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود مقادیر هر ۲ ستون از جدول بسیار به هم نزدیک هستند و خطای ناچیز ایجاد شده مربوط به خطای حل به روش‌های مختلف بوده است. این در حالی است که در شکل ۳، دو تئوری تنش کوپل اصلاح شده تعمیم یافته و گرادیان کرنشی تعمیم یافته مورد مقایسه قرار گرفته‌اند و با توجه به اینکه ماتریس سختی در تئوری گرادیان کرنشی بزرگتر می‌باشد بدیهی است که مقادیر فرکانس طبیعی نیز برای آن‌ها بیشتر باشد. با تعیین فرکانس‌های طبیعی، نتایج به دست آمده از کار حاضر با مطالعات انجام گرفته در مراجع [۲۷ و ۲۸] مورد مقایسه قرار گرفته و مطابق جدول ۴ مشاهده می‌شود که تطابق بسیار خوبی بین نتایج موجود برقرار است.

با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ اثرات ضریب مقیاس کوچک طول ماده در تئوری‌های مختلف برای فرکانس و بارکمانش بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است. همان طور که مشاهده می‌شود این اثرات در تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تعمیم یافته در مقایسه با دیگر تئوری‌ها بیشتر بوده و همچنین تئوری کلاسیک مستقل از این ضریب می‌باشد. این امر را روابط ریاضی ثبت شده در بخش انرژی پتانسیل کرنشی نیز تأیید می‌کنند. با توجه به آن، تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده تعمیم یافته با وجود سه ضریب  $l_1$ ،  $l_2$  و  $l_3$  در روابط، بیشترین تأثیرپذیری را از ضریب مقیاس کوچک طول دارد. در حالی که در تئوری کلاسیک روابط مذکور فاقد ضریب مقیاس

جدول ۴: مقایسه فرکانس‌های طبیعی یک میکروورق کامپوزیتی بر حسب (MHz)  
Table 4. Comparison of natural frequencies of micro composite plat versus MHz

مطالعه حاضر	مرجع [۲۷]	مرجع [۲۸]	نسبت طول به ضخامت
MGCST	MCST	FSST	
۰٫۴۰۹۸	۰٫۴۱۳۲	۰٫۴۰۴۲	۱۰
۰٫۱۰۴۴	۰٫۱۰۴۶	۰٫۱۰۴۰	۲۰
۰٫۰۴۶۶	۰٫۰۴۶۶	۰٫۰۴۶۵	۳۰

فرکانس و بار کمانش بحرانی بی‌بعد می‌شود.

اثرات تغییر دما بر رفتار ارتعاشی و کمانش سیستم در شکل‌های ۵ و ۶ قابل ملاحظه است. لازم به ذکر است دمای اولیه ۳۰۰ کلوین و تغییر دما در

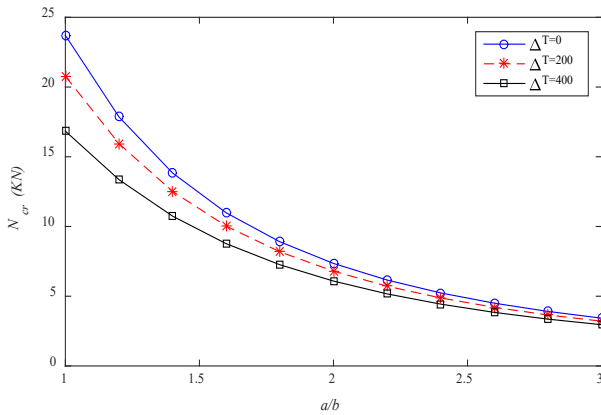


Fig. 6. Effect of length-to-width ratio of micro plate on the dimensionless critical buckling load versus temperature changes  
شکل ۶: تأثیر نسبت طول به عرض میکرو ورق بر بار کمانش بحرانی به ازای مقادیر مختلف تغییر دما

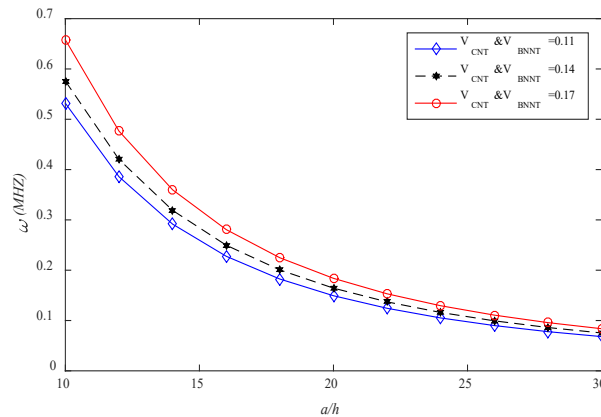


Fig. 7. Effect of length-to-thickness ratio of micro plate on the dimensionless natural frequencies versus temperature changes  
شکل ۷: تأثیر نسبت طول به ضخامت میکرو ورق بر فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف تغییر دما

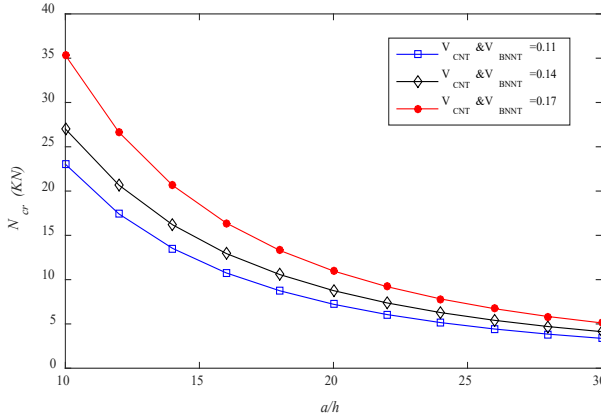


Fig. 8. Effect of length-to-thickness ratio of micro plate on the dimensionless critical buckling load versus temperature changes  
شکل ۸: تأثیر نسبت طول به ضخامت میکرو ورق بر بار کمانش بحرانی به ازای مقادیر مختلف تغییر دما

کوچک طول می‌باشد. با ملاحظه شکل‌های مذکور می‌توان دریافت که تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده تعمیم یافته باعث افزایش بیشتر سفتی سازه نسبت به دیگر تئوری‌ها شده است، لذا این افزایش باعث افزایش

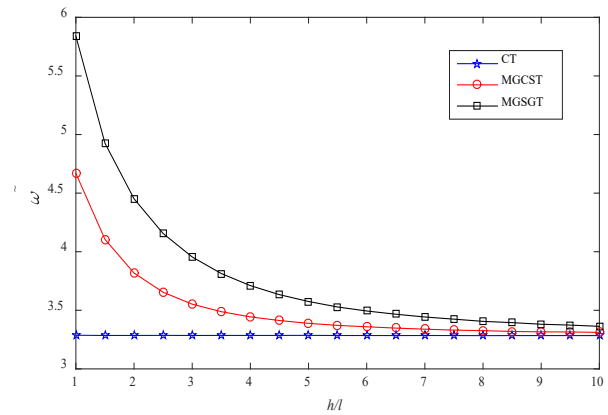


Fig. 3. Effect of mass scale length parameter on the dimensionless natural frequencies

شکل ۳: اثر ضریب مقیاس کوچک طول بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد

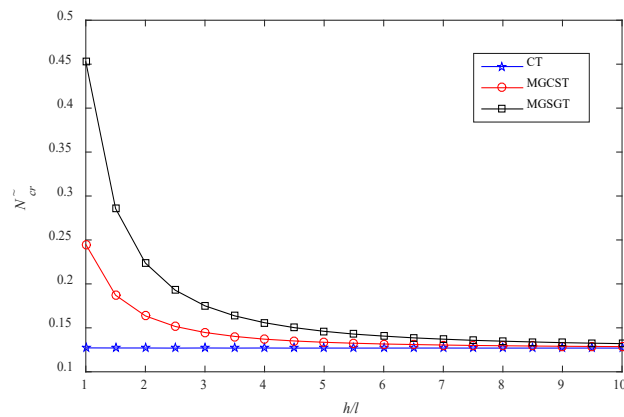


Fig. 4. Effect of mass scale length parameter on the dimensionless critical buckling load

شکل ۴: اثر ضریب مقیاس کوچک طول بر بار کمانش بحرانی بی‌بعد

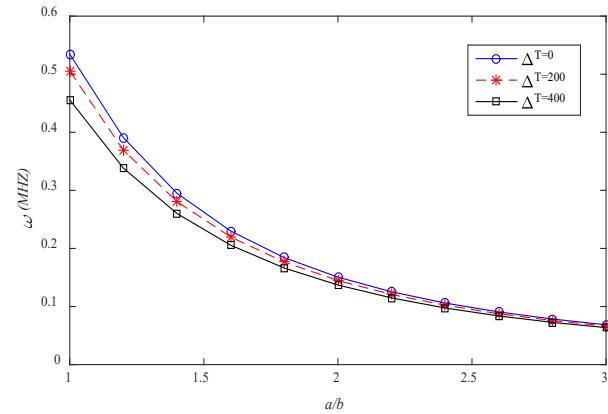


Fig. 5. Effect of length-to-width ratio of micro plate on the dimensionless natural frequencies versus temperature changes  
شکل ۵: تأثیر نسبت طول به عرض میکرو ورق بر فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف تغییر دما



سفتی ماده کامپوزیتی افزایش یافته و در نتیجه افزایش فرکانس و بار کمانش بحرانی سازه را به همراه دارد.

خواص مواد در نظر گرفته شده در مطالعه حاضر تابع دما می‌باشد. به همین دلیل رفتار ارتعاشی و کمانش میکرو ورق کوپله شده و تقویت شده با نانو لوله‌ها در دماهای مختلف در شکل‌های ۹ و ۱۰ مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است توزیع دما در میکرو ورق کامپوزیتی به طور یکنواخت فرض شده است. باید گفت نانو لوله‌ها در رفتار ماده کامپوزیتی تأثیر به‌سزایی دارند. به همین دلیل در هر دما رفتار سازه به ازای درصد حجمی‌های مختلف نانو لوله‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. همان طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود با افزایش دما به دلیل کاهش خواص مکانیکی اجزای سازنده به خصوص نانو لوله‌ها سفتی سازه کاهش یافته و مطابق با انتظار فرکانس و بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ تأثیر ثابت فنری وینکلر بستر الاستیک را بر روی پارامتر فرکانس بی‌بعد و همچنین بار کمانش بحرانی بی‌بعد میکرو ورق کامپوزیتی کوپله شده نشان می‌دهد. واضح است که با در نظر گرفتن ثابت وینکلر و افزایش آن سفتی ساختار کامپوزیتی افزایش یافته و در نتیجه

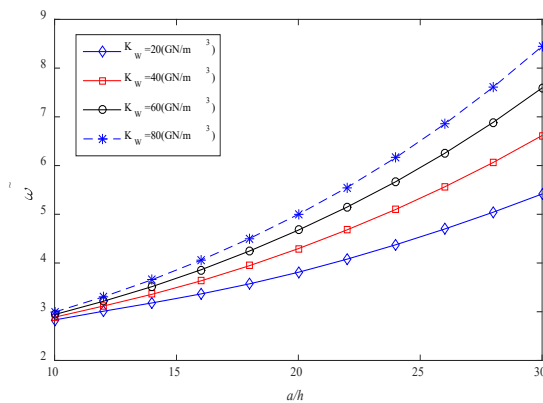


Fig. 11. Effect of Winkler constant elastic foundation on the dimensionless natural frequencies versus length-to-thickness ratio  
شکل ۱۱: بررسی تأثیر ثابت وینکلر بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب تغییرات نسبت طول به ضخامت

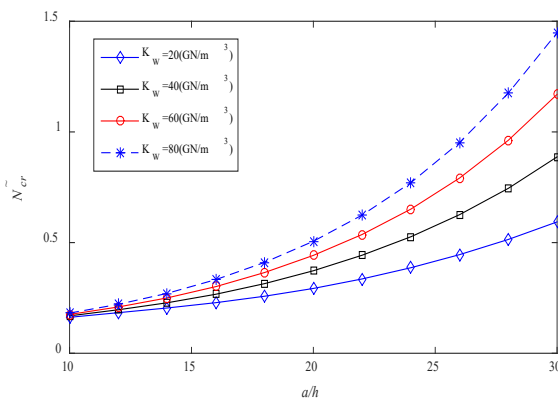


Fig. 12. Effect of Winkler constant elastic foundation on the dimensionless critical buckling load versus length-to-thickness ratio  
شکل ۱۲: بررسی تأثیر ثابت وینکلر بستر الاستیک بر بار کمانش بحرانی بی‌بعد بر حسب تغییرات نسبت طول به ضخامت

میکرو ورق کامپوزیتی به طور یکنواخت فرض شده است. همان طور که این شکل‌ها نشان می‌دهد با افزایش دما به دلیل کاهش خواص مکانیکی اجزای سازنده مواد کامپوزیتی، سفتی کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی سازه کاهش می‌یابد. همچنین در شکل‌های مذکور تغییرات نسبت طول به عرض میکرو ورق ( $a/b$ )، مورد بررسی قرار گرفته است. این شکل‌ها نشان می‌دهد با افزایش این نسبت، ساختار به تدریج طویل‌تر شده و در نتیجه سفتی آن کاهش می‌یابد که این امر کاهش فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی را به همراه خواهد داشت.

تأثیر نانو لوله‌ها به عنوان تقویت کننده‌های ماده کامپوزیتی، بر فرکانس و بار کمانش بحرانی در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. همان طور که در بخش شبیه سازی هندسی توضیح داده شد میکرو ورق بالایی به وسیله نانو لوله‌های کربنی و میکرو ورق پایینی به وسیله نانو لوله‌های نیتريد بور تقویت شده است. که در شکل‌های مذکور درصد حجمی این نانو لوله‌ها با یکدیگر برابر فرض شده است. نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور از خواص مکانیکی بسیار بالایی نسبت به ماده زمینه برخوردار می‌باشند به همین دلیل همان طور که شکل‌ها نشان می‌دهد با افزایش درصد حجمی نانو لوله‌ها

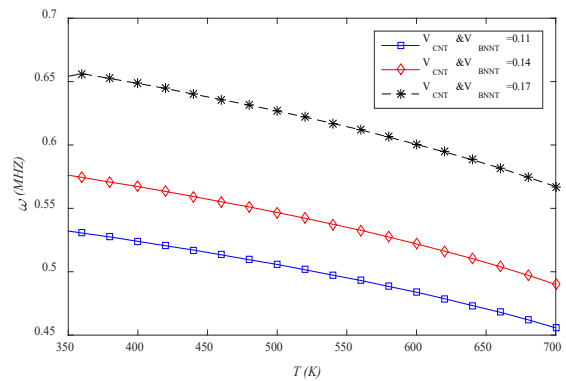


Fig. 9. Effect of temperature changes on the dimensionless natural frequencies versus volume fraction of nanotubes

شکل ۹: بررسی تأثیر تغییرات دما بر فرکانس طبیعی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله‌ها

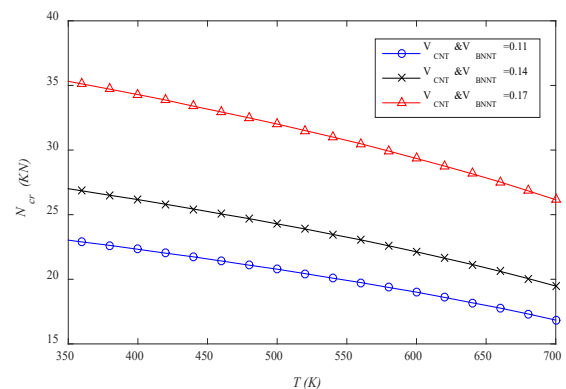


Fig. 10. Effect of temperature changes on the dimensionless critical buckling load versus volume fraction of nanotubes

شکل ۱۰: بررسی تأثیر تغییرات دما بر بار کمانش بحرانی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله‌ها

ضخامت با ضریب فنری وینکلر و خاصیت کشسانی بستر در راستای طول و عرض میکرو ورق با ضریب برشی پاسترناک بیان می‌شود. اثرات ثابت پاسترناک بستر الاستیک بر روی فرکانس میکرو ورق کویله شده کامپوزیتی و پارامتر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. افزایش این ضریب هم مانند ضریب وینکلر با افزایش سفتی ساختار کامپوزیتی، فرکانس و پارامتر بار کمانش بحرانی را افزایش می‌دهد. بستر در

فرکانس و بار کمانش بحرانی بدون بعد افزایش می‌یابد. در واقع بستر الاستیک نشان دهنده خاصیت کشسانی محیط اطراف میکرو ورق‌ها بوده و با در نظر گرفتن آن، پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

برای بستر الاستیک علاوه بر ثابت وینکلر (ضریب فنری وینکلر) ثابت دیگری به نام ثابت پاسترناک (ضریب برشی پاسترناک) در نظر گرفته می‌شود. نقش این ضرایب به‌گونه‌ای می‌باشد که خاصیت کشسانی بستر در راستای

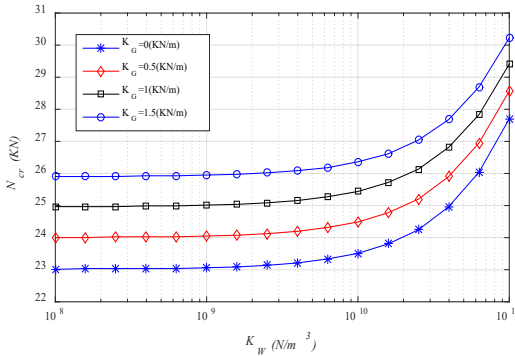


Fig. 16. Effect of various Pasternak constant on the critical buckling load versus Winkler spring constant

شکل ۱۶: بررسی تأثیر مقادیر مختلف ثابت پاسترناک بر بار کمانش بحرانی بر حسب ثابت فنری وینکلر

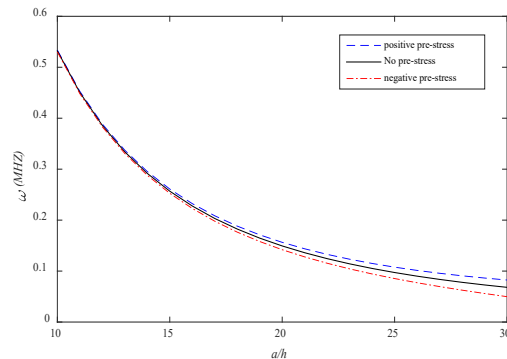


Fig. 17. Effect of initial stress in x-direction on the natural frequency versus length-to-thickness ratio ( $\sigma_0 = 10^{13} \text{ (N/m}^2\text{)} \rightarrow N_x = 1.15 \text{ (kN)}$ )

شکل ۱۷: تأثیر تنش اولیه در راستای طول بر فرکانس طبیعی بر حسب نسبت طول به ضخامت  $\sigma = 10^{13} \text{ (N/m}^2\text{)} \rightarrow N_x = 1.15 \text{ (kN)}$

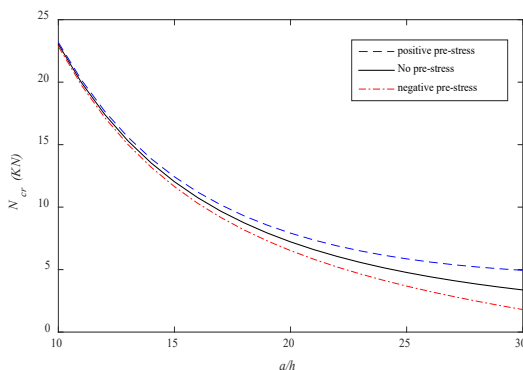


Fig. 18. Effect of initial stress in x-direction on the critical buckling load versus length-to-thickness ratio ( $\sigma_0 = 10^{13} \text{ (N/m}^2\text{)} \rightarrow N_x = 1.15 \text{ (kN)}$ )

شکل ۱۸: تأثیر تنش اولیه در راستای طول بر بار کمانش بحرانی بر حسب نسبت طول به ضخامت  $\sigma = 10^{13} \text{ (N/m}^2\text{)} \rightarrow N_x = 1.15 \text{ (kN)}$

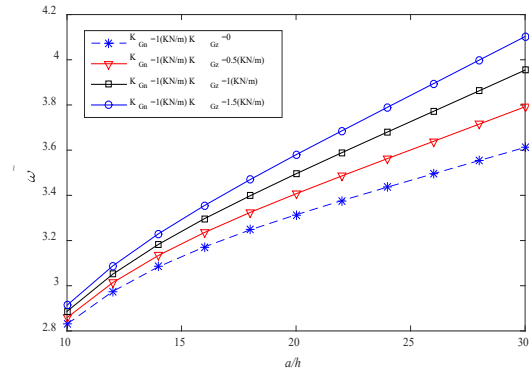


Fig. 13. Effect of Pasternak constant elastic foundation on the dimensionless natural frequencies versus length-to-thickness ratio

شکل ۱۳: بررسی تأثیر ثابت پاسترناک بستر الاستیک بر روی فرکانس بی‌بعد بر حسب تغییرات نسبت طول به ضخامت

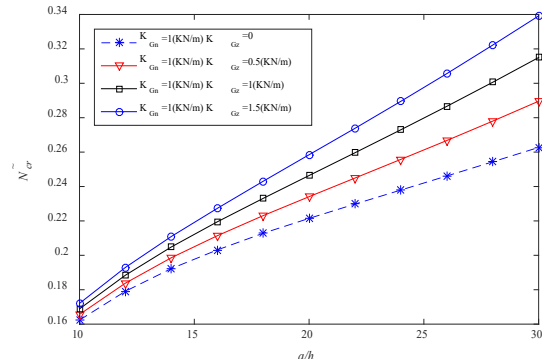


Fig. 14. Effect of Pasternak constant elastic foundation on the dimensionless critical buckling load versus length-to-thickness ratio

شکل ۱۴: بررسی تأثیر ضریب پاسترناک بستر بر بار کمانش بحرانی بی‌بعد بر حسب تغییرات نسبت طول به ضخامت

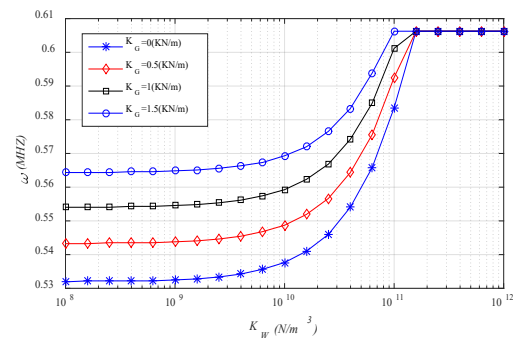


Fig. 15. Effect of various Pasternak constant on the natural frequencies versus Winkler spring constant

شکل ۱۵: بررسی تأثیر مقادیر مختلف ثابت پاسترناک بر فرکانس طبیعی بر حسب ثابت فنری وینکلر

راستای طولی و عرضی بار کمانش در نظر گرفته می‌شود. به جهت محاسبه بار کمانش بحرانی سازه، بار کمانش در راستای عرضی، ضریبی از بار کمانش در راستای طولی در نظر گرفته شده است. شکل ۱۹ تأثیر نسبت بار کمانشی در دو راستای طولی و عرضی ( $\alpha_{buck} = N_{y0}/N_{x0}$ ) را بر بار کمانش بحرانی سیستم مورد بررسی قرار می‌دهد. با توجه به شکل هر چه این نسبت افزایش یابد کمانش سیستم به کمانش تک‌محوره نزدیک‌تر شده، که این موضوع باعث کاهش بار کمانش بحرانی سیستم می‌شود.

همان طور که گفته شد در مطالعه حاضر میکرو ورق بالایی با نانو لوله کربنی و میکرو ورق پایینی با نانو لوله نیتريد بور تقویت شده است. برای مقایسه این دو نوع نانو لوله و تأثیر میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی آن‌ها، هر میکرو ورق یک مرتبه با نانو لوله کربنی و یک مرتبه با نانو لوله نیتريد بور تقویت شده است. در جدول ۵ از راست به چپ هر دو میکرو ورق با نانو لوله کربنی، هر دو میکرو ورق با نانو لوله نیتريد بور، میکرو ورق بالایی با نانو لوله کربنی و پایینی با نیتريد بور و در ستون آخر میکرو ورق بالایی با نانو لوله نیتريد بور و پایینی با نانو لوله کربنی تقویت شده است. لازم به ذکر است هر کجا میکرو ورق با نانو لوله کربنی تقویت شده بدین معناست که میکرو ورق تحت میدان مغناطیسی قرار دارد برای نانو لوله نیتريدبور میکرو ورق تحت میدان الکتریکی قرار دارد. با توجه به این جدول به دلیل این که خواص مکانیکی نانو لوله‌های کربنی بیشتر از نانو لوله‌های نیتريد بور می‌باشد، سفتی سازه و در نتیجه فرکانس و بار کمانش بحرانی سازه کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بیشتر از سازه کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های نیتريد بور می‌باشد. البته باید گفت در میکرو ورق کامپوزیتی کوپله شده‌ای که به وسیله نانو لوله‌های متفاوت تقویت شده، باید برش و یا اعوجاج سازه نیز مورد تحلیل قرار گیرد.

## ۶- نتیجه گیری

در مطالعه حاضر، تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد میکرو ورق نانو کامپوزیتی کوپله‌ی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور تحت

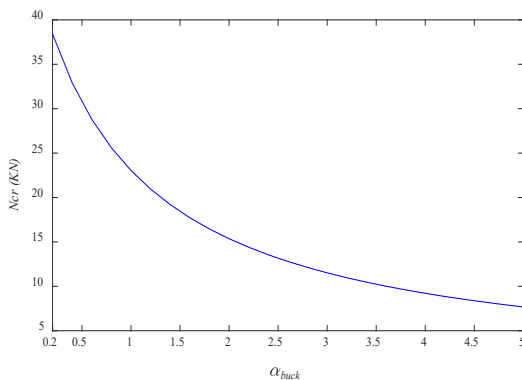


Fig. 19. Effect of axial buckling loads coefficient in x and y-directions on the critical buckling load of double-bonded micro composite plate

شکل ۱۹: بررسی تأثیر ضریب نسبت بارهای کمانشی در دو راستای طولی و عرضی بر بار کمانش بحرانی میکرو ورق کامپوزیتی کوپله شده

مطالعه حاضر الاستیک اورتوتروپیک در نظر گرفته شده است. برای تحلیل راحت‌تر ساختار از یک دستگاه مختصات محلی ( $\eta - \xi$ ) استفاده شده است. برای بیان این دستگاه پارامتری تحت عنوان زاویه‌ی بین محور  $\xi$  از دستگاه محلی و محور طولی ( $x$ ) از دستگاه مختصات کلی ( $x - y$ ) بیان می‌شود. این پارامتر به وسیله ( $\theta$ ) نشان داده می‌شود. همان طور که در شکل‌ها ملاحظه می‌شود افزایش ضریب برشی پاسترناک در یک راستا با ثابت نگه داشتن این ضریب در راستای دیگر نیز باعث افزایش سفتی سازه و در نتیجه افزایش فرکانس و بار کمانش بحرانی بی‌بعد می‌شود.

شکل‌های ۱۵ و ۱۶ به بررسی اثرات ثوابت بستر الاستیک (ثابت وینکلر و ثابت پاسترناک) بر روی فرکانس سیستم و بار کمانش بحرانی پرداخته است. به نحوی که تأثیر ثوابت در یک منحنی، با هم آورده شده و به همین دلیل می‌تواند به راحتی مورد مقایسه قرار گیرد. برای مقایسه بهتر دو ثابت بستر الاستیک نسبت به یکدیگر، ضریب برشی پاسترناک در دو راستای  $\xi$  و  $\eta$  به طور یکسان و برابر فرض شده است ( $K_{G\xi} = K_{G\eta} = K_G$ ). با توجه به منحنی‌ها افزایش ثابت وینکلر تا مقادیر کمتر از  $(10 \text{ GN/m}^3)$  بر روی فرکانس و بار کمانش بحرانی بی‌بعد تأثیر زیادی ندارد. تأثیر افزایش این ثابت از  $(10 \text{ GN/m}^3)$  تا  $(10000 \text{ GN/m}^3)$  بر فرکانس و بار کمانش بحرانی مشهود می‌باشد. به همین دلیل می‌توان گفت اگر هدف، کنترل فرکانس و بار کمانش بحرانی با استفاده از ضریب فنری بستر باشد، بهترین بازه برای در نظر گرفتن ثابت وینکلر همین بازه می‌باشد. همان طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود به طور کلی افزایش ضریب برشی پاسترناک نسبت به ضریب فنری وینکلر در سفتی سازه و در نتیجه افزایش فرکانس و بار کمانش بحرانی تأثیر بیشتری دارد. نتیجه‌ی دیگری که از منحنی‌ها برداشت می‌شود، این است که به ازای مقادیر زیاد ضریب فنری وینکلر (در مطالعه حاضر بیشتر از  $(2 \times 10^{11} \text{ GN/m}^3)$ ) رفتار ارتعاشی و کمانش سازه مستقل از بستر الاستیک است.

در مطالعه حاضر میکرو ورق کامپوزیتی کوپله شده، تحت تنش اولیه در راستای طول قرار دارد. این تنش اولیه به نحوی می‌باشد که تنش اولیه کششی و فشاری به ترتیب به عنوان تنش اولیه مثبت و منفی معرفی می‌شود. با توجه به شکل‌های ۱۷ و ۱۸ وجود تنش اولیه فشاری باعث کاهش سفتی سازه و در نتیجه کاهش فرکانس و بار کمانش بحرانی می‌شود. این در حالی است که تنش اولیه کششی، افزایش سفتی سازه را به همراه داشته و افزایش سفتی سازه باعث افزایش فرکانس و بار کمانش بحرانی می‌شود. با وجود این که در این تحلیل طول و عرض میکرو ورق برابر فرض شده با ملاحظه شکل‌های مذکور می‌توان دریافت با افزایش نسبت طول به ضخامت تأثیر بار تنش اولیه بر فرکانس و بار کمانش بحرانی سازه افزایش می‌یابد این امر به گونه‌ای می‌باشد که به ازای مقادیر کم نسبت طول به ضخامت در میکرو ورق ( $a/h = 10$ ) وجود تنش اولیه تأثیری بر رفتار ارتعاشی و کمانش میکرو ورق کوپله شده ندارد.

به دلیل آنکه سیستم مورد تحلیل میکرو ورق می‌باشد، برای آن در دو

جدول ۵: مقایسه تأثیر نانو لوله‌های تقویت کننده کربنی و نیتريد بور بر روی فرکانس و بار کمانش بحرانی  
Table 5. Comparison of BNNTs and CNTs effects on the natural frequencies and critical buckling load

تحلیل بر روی	رویه‌ها تقویت شده با <i>CNT – CNT</i>	رویه‌ها تقویت شده با <i>BNNT – BNNT</i>	رویه‌ها تقویت شده با <i>BNNT – CNT</i>	رویه‌ها تقویت شده با <i>CNT – BNNT</i>
فرکانس (Hz)	۷۱۲۲۴۹,۰	۵۳۲۱۶۲,۰	۵۳۲۲۰۸,۰	۵۳۲۲۰۸,۰
بار کمانش بحرانی (N)	۴۱۸۵۱,۴	۲۳۰۳۲,۱	۲۳۰۳۶,۱	۲۳۰۳۶,۱

مختلف کربنی و نیتريد بور استفاده شد.

۲. سفتی سازه و در نتیجه فرکانس و بار کمانش بحرانی سازه کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بیشتر از سازه کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های نیتريد بور است. در واقع با تأثیر همزمان نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور می‌توان با کنترل میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی از پدیده تشدید در این سازه‌ها جلوگیری نمود.

۳. در سیستم حاضر، میکرو ورق بالایی به وسیله نانو لوله‌های کربنی و میکرو ورق پایینی با نانو لوله‌های نیتريد بور با درصد حجمی یکسان تقویت شدند. این نوع نانو لوله‌ها از خواص مکانیکی بسیار بالا و منحصر به فردی برخوردارند. به همین دلیل با افزایش درصد حجمی نانو لوله‌ها، بار کمانش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی میکرو سازه افزایش می‌یابد.

۴. حضور بستر الاستیک اورتوتروپیک به سبب تأثیری که در افزایش سفتی میکرو سازه داشت منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش بحرانی شد. در واقع می‌توان گفت که بستر الاستیک نشان دهنده خاصیت کشسانی محیط اطراف هر یک از میکرو ورق‌ها بوده و با در نظر گرفتن آن، پایداری سیستم نیز افزایش یافته است. همچنین نشان داده شد که افزایش ضریب برشی پاسترناک نسبت به ضریب فنری وینکلر اثر بیشتری در سفتی سازه و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش بحرانی آن خواهد داشت.

۵. تغییرات دمایی تأثیر کمتری بر رفتار ارتعاشی و کمانش میکرو ورق‌های کامپوزیتی تک‌لایه و ساندویچی کوپله شده تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور داشت. همچنین نشان داده شد که با افزایش دما به دلیل کاهش خواص مکانیکی اجزا سازنده مواد کامپوزیتی، سفتی میکرو سازه کاهش یافته و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش بحرانی میکرو سازه نیز کاهش می‌یابد.

۶. وجود تنش اولیه فشاری باعث کاهش سفتی میکرو سازه و تنش اولیه کششی با افزایش سفتی سازه منجر به افزایش فرکانس و بار کمانش بحرانی می‌شود. در حقیقت تنش اولیه به صورت عاملی خارجی می‌باشد که بار کمانش باید بر آن غلبه کند و یا با آن جمع گردد. بدیهی است بار کمانش به صورت فشاری می‌باشد در نتیجه تنش اولیه فشاری باعث کاهش بار کمانش بحرانی و تنش اولیه کششی باعث افزایش بار کمانش بحرانی سازه می‌شود.

۷. با افزایش نسبت طول به ضخامت میکرو سازه، تأثیر بار تنش اولیه بر فرکانس و بار کمانش بحرانی افزایش یافت، به گونه‌ای که به ازای

تأثیر تنش اولیه و واقع بر بستر اورتوتروپیک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی و در حضور میدان‌های فیزیکی مختلف مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی بررسی می‌شود. خواص ماده زمینه و نانو لوله‌های تقویت کننده وابسته به دما در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر این میکرو ورق‌های کوپله شده در محیط الاستیک اورتوتروپیک با مدل‌های فنری وینکلر و پاسترناک شبیه‌سازی شده است. روابط مربوط به تنش که شامل ترم‌های مکانیکی، الکتریکی، مغناطیسی و حرارتی هستند، توسط تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته محاسبه شده و معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل به دست می‌آیند. با حل معادلات حاکم بر حرکت میکرو ورق نانو کامپوزیتی کوپله شده، تأثیر عوامل مختلف از قبیل ضریب مقیاس کوچک طول ماده، نسبت طول به ضخامت، نسبت طول به عرض، ثابت‌های بستر الاستیک اورتوتروپیک، تغییرات دما و کسر حجمی نانو لوله‌های تقویت کننده بررسی می‌شوند.

تأثیر فرضیات بر نتایج مقاله به طور مختصر به صورت زیر ارائه می‌شود:  
الف- همان‌طور که اشاره شد به کارگیری تئوری‌های تغییر شکل برشی و اثر مقیاس مرتبه بالاتر مانند تئوری تغییر شکل سینوسی و تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته باعث ایجاد نتایج بهتری نسبت به تئوری‌های دیگر می‌شود.

ب- خواص مادی وابسته به دما نتایج واقعی‌تری نسبت به مدل‌های دیگر می‌دهد.

ج- در واقعیت خواص در راستای نانولوله و عمود بر آن متفاوت است. لذا فرض کامپوزیتی آن‌ها باعث شده دقت محاسبات بالاتر رود.

خلاصه‌ای از مهم‌ترین نتایج به دست آمده به صورت زیر بیان می‌شود:  
۱. در کار حاضر از آن جایی که تحقیقات بر روی دو نوع نانولوله کربنی و نیتريد بور نشان می‌دهد که نانولوله‌های کربنی عایق الکتریسیته و دارای خاصیت پیزو مغناطیسی بوده و نانولوله‌های نیتريد بور عایق مغناطیسی و دارای خاصیت پیزو الکتریک می‌باشند، یک میکرو ورق کوپله شده‌ای که تحت میدان مغناطیسی و الکتریکی به طور هم‌زمان می‌باشد، انتخاب شد. برای بررسی تأثیر میدان‌ها و همچنین محاسبه تغییراتشان، میکرو ورق بالایی با نانولوله کربنی و میکرو ورق پایینی با نانولوله نیتريد بور تقویت شد. نوآوری کار حاضر، مطالعه میکرو ورق کامپوزیتی کوپله شده تحت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به طور هم‌زمان مورد بررسی قرار گرفت، ماده زمینه مستقل از هر دو میدان بود و برای بررسی تأثیر میدان‌ها بر روی رفتار سازه از نانولوله‌های

انرژی جنبشی، کرنشی و کار ناشی از نیروهای خارجی  
دمای اولیه، تغییرات دما  
بار کمانش بحرانی دارای بعد (N) و بدون بعد  
تئوری‌های کلاسیک، تنش کوپل تعمیم یافته  
و گرادیان کرنشی تعمیم یافته

$$V, U, T$$

$$T_0, \Delta T$$

$$N_{cr}^-, N_{cr}$$

$$MGSGT,$$

$$MGCST, CT$$

### علائم یونانی

چگالی ماده زمینه، نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور ( $\text{kg/m}^3$ )

$$\rho_{BNTT}, \rho_{CNT}, \rho_m$$

ضریب پواسون، ضرایب انبساط حرارتی در راستای طول و عرض

$$\alpha_{22}, \alpha_{11}, \nu$$

تانسور کرنش، تانسور گرادیان کرنشی مرتبه بالاتر، مولفه‌های تنش کلاسیک، تانسور تنش مرتبه بالاتر

$$\tau_{ijk}, \sigma_{ij}, \xi_{ijk}, \varepsilon_{ij}$$

فرکانس طبیعی دارای بعد (Hz) و بدون بعد

$$\omega^-, \omega$$

چرخش در دوراستای  $x$  و  $y$

$$\varphi_y, \varphi_x$$

انرژی پتانسیل کل

$$\Pi$$

### بالانویس

میکرو ورق بالایی یا پایینی، میکرو ورق بالایی یا پایینی

$$i, f$$

مقادیر پایین نسبت طول به ضخامت در هر یک از میکرو ورق‌های کوپله شده نتیجه گرفته شد وجود بار تنش اولیه تاثیری بر رفتار ارتعاشی و کمانش ندارد.

۸. با افزایش نسبت طول به عرض میکرو ورق‌ها، سازه به تدریج طویل‌تر شده و در نتیجه سفتی آن کاهش می‌یابد که این امر کاهش فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی را به همراه خواهد داشت. این نسبت در تغییرات دمایی مختلف نیز مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد سازه برای تمام تغییرات دمایی، همان رفتار را دارد.

۹. تأثیر ضریب مقیاس کوچک طول ماده در تئوری گرادیان کرنشی تعمیم یافته در مقایسه با دیگر تئوری‌ها مانند تئوری تنش کوپل تعمیم یافته بیشتر بود. افزایش سفتی سازه در اثر افزایش ضریب مقیاس کوچک طول در مقادیر پایین نسبت ضخامت به ضریب مورد بررسی بسیار مشهود بوده و به ازای مقادیر  $h/l \leq 4$ ، تغییرات جزئی این نسبت افزایش یا کاهش قابل ملاحظه فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش بحرانی را به دنبال داشت. این در حالی بود که با افزایش نسبت مذکور، حساسیت پاسخ ارتعاشی و کمانش میکرو ورق‌های کوپله شده به ضریب مقیاس کوچک طول ماده کمتر شده تا جایی که به ازای مقادیر  $h/l > 10$  هر یک از تئوری‌ها به یکدیگر همگرا شدند.

### تشکر و قدردانی:

نویسندگان مقاله حاضر ضمن تشکر از نظرات مفید و مؤثر داوران محترم، از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۵۷۴۶۰۲/۱۶ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌کنند.

### فهرست علائم و اختصارات

#### علائم انگلیسی

مساحت ( $\text{m}^2$ )، ضخامت (m)، طول (m)، عرض (m) جابه‌جایی در راستای طول، عرض و ضخامت	$b, a, h, A$
مدول یانگ، مدول برشی ( $\text{N/m}^2$ )	$w_0, v_0, u_0$ $G, E$
ثابت‌های فنری وینکلر و برشی پاسترناک در دوراستای محلی $\xi$ و $\eta$	$K_{G\eta}, K_{G\xi}, K_w$
کسر حجمی ماده زمینه کامپوزیتی، نانولوله‌های کربنی و نانولوله‌های نیتريد بور، کسر جرمی نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور	$w_{BNTT}, w_{CNT},$ $V_{BNTT}, V_{CNT}, V_m$
ضرایب مقیاس کوچک طول ماده	$l_0, l_1, l_2$
جابه‌جایی الکتریکی، جابه‌جایی مغناطیسی، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی	$H_i, E_i, B_i, D_i$

### پیوست

معادلات حاکم بر حرکت میکروسازه در نظر گرفته شده در فصل حاضر به صورت روابط (الف) تا (ج) تعریف شده‌اند:

جدول ۶: ضرایب موجود در معادلات حاکم بر حرکت

Table 6. Various coefficients in the governing equations of motions

ضریب	ضریب	ضریب	ضریب
$\alpha_1 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$	$\alpha_4 = 0.5a_1 + a_5$	$\alpha_7 = 0.5a_5$	$\alpha_{10} = 2a_2$
$\alpha_2 = a_1 + 2a_2$	$\alpha_5 = 0.5a_3 + a_4$	$\alpha_8 = 0.5a_1$	$\alpha_{11} = 0.5a_5 + a_4$
$\alpha_3 = 0.5a_1 + a_3$	$\alpha_6 = 0.5a_3$	$\alpha_9 = 2(a_2 + a_4)$	$\alpha_{12} = a_4$

در جدول بالا  $a_1$  تا  $a_8$  پارامترهای اضافه جنس می‌باشند که در رابطه (۱۱) توضیح داده شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 & \delta w_0^{(i)} : \\
 & -B_{11}^{(i)} u_{0,xxxx}^{(i)} - (2B_{66}^{(i)} - B_{21}^{(i)}) u_{0,yy}^{(i)} + \alpha_1 s^{(1)i} u_{0,xxxx}^{(i)} + \\
 & (3\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_9) s^{(1)i} u_{0,xyyy}^{(i)} - \\
 & (B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)}) v_{0,xy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_4 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12} + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(1)i} u_{0,yyyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_4) s^{(1)i} v_{0,xyxy}^{(i)} - \\
 & B_{22}^{(i)} v_{0,yyy}^{(i)} + \alpha_1 s^{(1)i} v_{0,yyyy}^{(i)} + D_{11}^{(i)} w_{0,xxx}^{(i)} \\
 & + (3\alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_9 + \alpha_2 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12}) s^{(1)i} v_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (D_{22}^{(i)} + \alpha_9 s^{(0)i}) w_{0,yyy}^{(i)} + \alpha_1 s^{(ZR)i} \theta_{x,xxxx}^{(i)} - \alpha_1 s^{(2)i} w_{0,xxxx}^{(i)} \\
 & - \alpha_1 s^{(2)i} w_{0,yyyy}^{(i)} + \\
 & (D_{12}^{(i)} + 4D_{66}^{(i)} + 2\alpha_{10} s^{(0)i} + D_{21}^{(i)} + 4\alpha_{12} s^{(0)i}) w_{0,xyy}^{(i)} - \\
 & (2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + 4\alpha_7 + \alpha_9) s^{(2)i} w_{0,xyxy}^{(i)} + \\
 & \alpha_1 s^{(ZR)i} \theta_{y,yyyy}^{(i)} \\
 & - (\alpha_9 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_2 + 4\alpha_6 + 4\alpha_{12}) s^{(2)i} w_{0,xyyyy}^{(i)} + \\
 & (K_{w1}^{(i)} + K_{w3}^{(i)}) w_0^{(i)} - 2(K_{G\xi}^{(i)} \cos^2 \theta + K_{G\eta}^{(i)} \sin^2 \theta) w_{0,xx}^{(i)} - \\
 & N_x^{prestress} w_{0,xx}^{(i)} - 4(K_{G\xi}^{(i)} - K_{G\eta}^{(i)}) \cos \theta \sin \theta w_{0,xy}^{(i)} - \\
 & 2(K_{G\xi}^{(i)} \sin^2 \theta + K_{G\eta}^{(i)} \cos^2 \theta) w_{0,yy}^{(i)} + \\
 & (-b_{11}^{(i)} + \alpha_3 s^{(ZR)p} i - \alpha_4 s^{(Rp)i} - \alpha_9 s^{(Rp)i}) \theta_{x,xxx}^{(i)} + K_{w3}^{(i)} w_0^{(i)} \\
 & - (2b_{66}^{(i)} + b_{21}^{(i)} + \alpha_8 s^{(Rp)i} + \alpha_{10} s^{(Rp)i} + \\
 & 2\alpha_{11} s^{(Rp)i} - \alpha_8 s^{(ZRpp)i} - 2\alpha_6 s^{(ZRpp)i}) \theta_{x,yyy}^{(i)} - \\
 & (b_{22}^{(i)} - \alpha_3 s^{(ZRpp)i} + \alpha_4 s^{(Rp)i} + \alpha_9 s^{(Rp)i}) \theta_{y,yyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_4 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12} + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(ZR)i} \theta_{x,yyyy}^{(i)} + \\
 & (3\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_9) s^{(ZR)i} \theta_{x,xyyy}^{(i)} \\
 & + M_{111}^{Ti} + M_{122}^{Ti} + M_{211}^{Ti} + M_{222}^{Ti} \\
 & - (2b_{66}^{(i)} + b_{12}^{(i)} - 2\alpha_6 s^{(ZRpp)i} - \alpha_8 s^{(ZRpp)i} + \alpha_8 s^{(Rp)i} + \\
 & \alpha_{10} s^{(Rp)i} + 2\alpha_{11} s^{(Rp)i}) \theta_{y,xyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_4) s^{(ZR)i} \theta_{y,xyxy}^{(i)} \\
 & + (3\alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_9 + \alpha_2 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12}) s^{(ZR)i} \theta_{y,xyyy}^{(i)} \\
 & + (K_{G\xi}^{(i)} \cos^2 \theta + K_{G\eta}^{(i)} \sin^2 \theta) w_{0,xx}^{(i)} + \\
 & 2(K_{G\xi}^{(i)} - K_{G\eta}^{(i)}) \cos \theta \sin \theta w_{0,xy}^{(i)} \\
 & + (K_{G\xi}^{(i)} \sin^2 \theta + K_{G\eta}^{(i)} \cos^2 \theta) w_{0,yy}^{(i)} + IR_1^{(i)} \theta_{x,xtt}^{(i)} + \\
 & IR_1^{(i)} \theta_{y,ytt}^{(i)} + I_1^{(i)} u_{0,xtt}^{(i)} - I_0^{(i)} w_{0,tt}^{(i)} + I_1^{(i)} v_{0,ytt}^{(i)} \\
 & - I_2^{(i)} w_{0,xtt}^{(i)} - I_2^{(i)} w_{0,ytt}^{(i)} = 0
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 & \delta u_0^{(i)} : \\
 & -A_{11}^{(i)} u_{0,xx}^{(i)} - A_{66}^{(i)} u_{0,yy}^{(i)} + \alpha_1 s^{(0)i} u_{0,xxxx}^{(i)} + \\
 & (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9) s^{(0)i} u_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(0)i} u_{0,yyyy}^{(i)} - (A_{12}^{(i)} + A_{66}^{(i)}) v_{0,xy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_4) s^{(0)i} v_{0,xyxy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(0)i} v_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (2B_{66}^{(i)} + B_{12}^{(i)}) w_{0,yyy}^{(i)} + B_{11}^{(i)} w_{0,xxx}^{(i)} - \alpha_1 s^{(1)i} w_{0,xxxx}^{(i)} \\
 & - (\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_6) s^{(1)i} w_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & - (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12}) s^{(1)i} w_{0,xyyyy}^{(i)} \\
 & + (-a_{11}^{(i)} + \alpha_3 s^{(Rpp)i}) \theta_{x,xx}^{(i)} + (-a_{66}^{(i)} + \alpha_6 s^{(Rpp)i}) \theta_{x,yy}^{(i)} \\
 & + \alpha_1 s^{(R)i} \theta_{x,xxxx}^{(i)} + (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9) s^{(R)i} \theta_{x,xyyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(R)i} \theta_{x,yyyy}^{(i)} + \alpha_6 s^{(Rpp)i} \theta_{x,yy}^{(i)} + \\
 & R_1^{(i)} \theta_{x,tt}^{(i)} + (-a_{12}^{(i)} - a_{66}^{(i)} + \alpha_6 s^{(Rpp)i} + \\
 & \alpha_8 s^{(Rpp)i}) \theta_{y,xy}^{(i)} + I_0^{(i)} u_{0,tt}^{(i)} - I_1^{(i)} w_{0,xtt}^{(i)} \\
 & + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_4) s^{(R)i} \theta_{y,xyxy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(R)i} \theta_{y,xyyy}^{(i)} \\
 & + N_{111}^{Ti} + N_{122}^{Ti} = 0
 \end{aligned}$$

(الف)

$$\begin{aligned}
 & \delta v_0^{(i)} : \\
 & (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(0)i} u_{0,xyxy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(0)i} u_{0,xyyy}^{(i)} - \\
 & (A_{66}^{(i)} + A_{21}^{(i)}) u_{0,xy}^{(i)} - A_{66}^{(i)} v_{0,xx}^{(i)} - A_{22}^{(i)} v_{0,yy}^{(i)} \\
 & + (2\alpha_3 + \alpha_9 + 2\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(0)i} v_{0,xyxy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_5 + \alpha_7) s^{(0)i} v_{0,xxxx}^{(i)} + \alpha_1 s^{(0)i} v_{0,yyyy}^{(i)} + \\
 & (2B_{66}^{(i)} + B_{21}^{(i)}) w_{0,xyy}^{(i)} - \alpha_1 s^{(1)i} w_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & - (\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(1)i} w_{0,xyxy}^{(i)} - \\
 & (3\alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_9 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12} + \alpha_2) s^{(1)i} w_{0,xyyyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_5 + \alpha_7) s^{(R)i} \theta_{y,xxxx}^{(i)} \\
 & + (\alpha_8 s^{(Rpp)i} - a_{66}^{(i)} + \alpha_6 s^{(Rpp)i} - a_{21}^{(i)}) \theta_{x,xy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(R)i} \theta_{x,xyxy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(R)i} \theta_{x,xyyy}^{(i)} \\
 & + (-a_{66}^{(i)} + \alpha_6 s^{(Rpp)i}) \theta_{y,xx}^{(i)} + (\alpha_3 s^{(Rpp)i} - a_{22}^{(i)}) \theta_{y,yy}^{(i)} + \\
 & (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_9 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(R)i} \theta_{y,xyxy}^{(i)} + \\
 & R_1^{(i)} \theta_{y,tt}^{(i)} + B_{22}^{(i)} w_{0,yyy}^{(i)} + \alpha_1 s^{(R)i} \theta_{y,yyyy}^{(i)} + \\
 & N_{211}^{Ti} + N_{222}^{Ti} - I_1^{(i)} w_{0,ytt}^{(i)} + I_0^{(i)} v_{0,tt}^{(i)} = 0
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 & -(3\alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_9 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12} + \alpha_2) s^{(ZR)i} w_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & -\alpha_1 s^{(ZR)i} w_{0,yyyy}^{(i)} + (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_9 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(RR)i} \theta_{y,xyyy}^{(i)} \\
 & + (-\alpha_6 s^{(R_p R_p)i} - \alpha_{11} s^{(R_p R_p)i} - \alpha_{10} s^{(R_p R_p)i} - 2\alpha_9 s^{(R_p R_p)i} \\
 & -d_{66}^{(i)} - 2\alpha_8 s^{(R_p R_p)i} + 2\alpha_{12} s^{(RR_{pp})i} + 2\alpha_6 s^{(RR_{pp})i} - d_{21}^{(i)}) \theta_{x,xy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(RR)i} \theta_{x,xyy}^{(i)} + \\
 & (-d_{22}^{(i)} + 2\alpha_3 s^{(RR_{pp})i} - 2\alpha_4 s^{(R_p R_p)i} - \alpha_5 s^{(R_p R_p)i} \\
 & -\alpha_7 s^{(R_p R_p)i} - \alpha_9 s^{(R_p R_p)i}) \theta_{y,yy}^{(i)} \\
 & + (-d_{66}^{(i)} + 2\alpha_6 s^{(RR_{pp})i} - 2\alpha_{11} s^{(R_p R_p)i}) \theta_{y,xx}^{(i)} + \\
 & (\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(RR)i} \theta_{x,xyyy}^{(i)} + \\
 & \alpha_1 s^{(RR)i} \theta_{y,yyyy}^{(i)} + R_{211}^{Ti} + R_{222}^{Ti} \\
 & + \left(\frac{1}{2} g_{44}^{(i)} + \alpha_6 s^{(R_{pp} R_{pp})i} + \alpha_{11} s^{(R_{pp} R_{pp})i}\right) \theta_y^{(i)} + \\
 & R_1^{(i)} v_{0,tt}^{(i)} + R_2^{(i)} \theta_{y,tt}^{(i)} - IR_1^{(i)} w_{0,yt}^{(i)} = 0
 \end{aligned}$$

ضرایب به کار گرفته شده در معادلات حاکم در روابط (ح) تا (ر) و جدول ۶ بیان شده است.

$$(A_{ij}^f, B_{ij}^f, D_{ij}^f) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) Q_{ij}^f dz \quad \rightarrow: f = \{1, 2\} \quad (ح)$$

$$(a_{ij}^f, b_{ij}^f, d_{ij}^f) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, \Phi(z)) \Phi(z) Q_{ij}^f dz \quad (خ)$$

$$(g_{44}^f, g_{55}^f) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{44}^f, Q_{55}^f) 2 \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} dz \quad (د)$$

$$(N_{ijk}^{Tf}, M_{ijk}^{Tf}, R_{ijk}^{Tf}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, \Phi(z)) Q_{ij}^f \alpha_{kk}^f \Delta T dz \quad (۲۶ذ)$$

$$\left( \begin{array}{l}
 S_{ij}^{(0)f}, S_{ij}^{(1)f}, S_{ij}^{(R)f}, S_{ij}^{(R_p)f}, S_{ij}^{(R_{pp})f} \\
 S_{ij}^{(2)f}, S_{ij}^{(ZR)f}, S_{ij}^{(Z_{RR})f}, S_{ij}^{(RR)f} \\
 S_{ij}^{(RR_{pp})f}, S_{ij}^{(R_p R_p)f}, S_{ij}^{(R_{pp} R_{pp})f}
 \end{array} \right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \begin{array}{l}
 1, z, \Phi(z), \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2}, z^2, z\Phi(z), z \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2}, \Phi^2(z) \\
 \Phi(z) \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2}, \left(\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z}\right)^2, \left(\frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2}\right)^2
 \end{array} \right) Q_{ij}^f dz \quad (ب)$$

در روابط بالا  $f = \{1, 2\}$  نشان دهنده میکرو ورق بالایی (اولی) و پایینی (دومی) می باشد. همچنین نشان دهنده درایه های ماتریس سختی برای میکرو ورق بالایی و پایینی می باشد.

### مراجع

[1] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method, *Composite Structures*, 98 (2013) 160-168.

$$\begin{aligned}
 \delta \theta_x^{(i)}: & \\
 & + \alpha_1 s^{(R)i} u_{0,xxxx}^{(i)} + (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9) s^{(R)i} u_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(R)i} u_{0,yyyy}^{(i)} + (-a_{11}^{(i)} + \alpha_6 s^{(R_{pp})i}) u_{0,xx}^{(i)} \\
 & + (\alpha_6 s^{(R_{pp})i} - a_{66}^{(i)}) u_{0,yy}^{(i)} + (\alpha_8 s^{(R_{pp})i} + \alpha_6 s^{(R_{pp})i} - \\
 & a_{12}^{(i)} - a_{66}^{(i)}) v_{0,xy}^{(i)} + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_4) s^{(R)i} v_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(R)i} v_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (b_{11}^{(i)} + \alpha_4 s^{(Z_{RR})i} + \alpha_9 s^{(Z_{RR})i} - \alpha_6 s^{(Z_{RR})i}) w_{0,xxx}^{(i)} \\
 & - \alpha_1 s^{(ZR)i} w_{0,xxxx}^{(i)} - (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + 2\alpha_6 + 2\alpha_{12}) s^{(ZR)i} w_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & + \alpha_1 s^{(RR)i} \theta_{x,xxxx}^{(i)} + (2\alpha_6 s^{(RR_{pp})i} - 2\alpha_{11} s^{(R_p R_p)i} - d_{66}^{(i)}) \theta_{x,yy}^{(i)} \\
 & + (2b_{66}^{(i)} \alpha_8 s^{(R_p)i} + 2\alpha_9 s^{(R_p)i} + b_{12}^{(i)} + \alpha_{10} s^{(R_p)i} + 2\alpha_{12} s^{(R_p)i} \\
 & - \alpha_8 s^{(Z_{RR})i} - 2\alpha_6 s^{(Z_{RR})i}) w_{0,xyy}^{(i)} + R_{111}^{Ti} + R_{122}^{Ti} \\
 & - (\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_9) s^{(ZR)i} w_{0,xyyy}^{(i)} \\
 & + (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9) s^{(RR)i} \theta_{x,xyyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(RR)i} \theta_{x,yyyy}^{(i)} + (\alpha_{11} s^{(R_{pp} R_{pp})i} + \alpha_2 s^{(R_{pp} R_{pp})i} + \\
 & \frac{1}{2} g_{55}^{(i)}) \theta_x^{(i)} + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_4) s^{(RR)i} \theta_{y,xyyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_3 s^{(RR_{pp})i} - 2\alpha_4 s^{(R_p R_p)i} - \alpha_5 s^{(R_p R_p)i} - \alpha_7 s^{(R_p R_p)i} - \\
 & d_{11} - \alpha_9 s^{(R_p R_p)i} + \alpha_3 s^{(RR_{pp})i}) \theta_{x,xx}^{(i)} \\
 & + (-\alpha_6 s^{(R_p R_p)i} - 2\alpha_8 s^{(R_p R_p)i} - 2\alpha_9 s^{(R_p R_p)i} - \alpha_{10} s^{(R_p R_p)i} \\
 & - \alpha_{11} s^{(R_p R_p)i} - 2\alpha_6 s^{(RR_{pp})i} + 2\alpha_8 s^{(RR_{pp})i} - d_{12}^{(i)} - d_{66}^{(i)}) \theta_{y,xy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(RR)i} \theta_{y,xyyy}^{(i)} \\
 & + R_2^{(i)} \theta_{x,tt}^{(i)} + R_1^{(i)} u_{0,tt}^{(i)} - IR_1^{(i)} w_{0,xtt}^{(i)} = 0
 \end{aligned} \quad (ت)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \phi_H^{(1)}: & \\
 & \tilde{\mu}_1 \phi_{H,xx}^{(1)} + \tilde{\mu}_2 \phi_{H,yy}^{(1)} = 0 \quad (ث) \\
 \delta \phi_E^{(1)}: & \\
 & \tilde{\lambda} \phi_{E,xx}^{(1)} = 0 \quad (ج)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \theta_y^{(i)}: & \\
 & (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(R)i} u_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(R)i} u_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (-a_{66}^{(i)} - a_{21}^{(i)} + \alpha_8 s^{(R_{pp})i} + \alpha_6 s^{(R_{pp})i}) u_{0,xy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_6 s^{(R_{pp})i} - a_{66}^{(i)}) v_{0,xx}^{(i)} + (\alpha_3 s^{(R_{pp})i} - a_{22}^{(i)}) v_{0,yy}^{(i)} \\
 & + (2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_9 + \alpha_6 + \alpha_{12}) s^{(R)i} v_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_5 + \alpha_7) s^{(R)i} v_{0,xxxx}^{(i)} + \alpha_1 s^{(R)i} v_{0,yyyy}^{(i)} + \\
 & (2b_{66}^{(i)} + b_{21}^{(i)} + 2\alpha_9 s^{(R_p)i} + \alpha_8 s^{(R_p)i} + 2\alpha_{12} s^{(R_p)i} \\
 & + \alpha_{10} s^{(R_p)i} - \alpha_8 s^{(Z_{RR})i} - \alpha_6 s^{(Z_{RR})i}) w_{0,xyy}^{(i)} \\
 & + (\alpha_4 s^{(R_p)i} + \alpha_9 s^{(R_p)i} - \alpha_3 s^{(Z_{RR})i} + b_{22}^{(i)}) w_{0,yyy}^{(i)} \\
 & - (\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3) s^{(ZR)i} w_{0,xyyy}^{(i)} + \\
 & (\alpha_5 + \alpha_7) s^{(RR)i} \theta_{y,xxxx}^{(i)}
 \end{aligned} \quad (چ)$$

- Structures*, 120 (2015) 189-199.
- [13] M. Arefi, A.M. Zenkour, Thermo-electro-magneto-mechanical bending behavior of size-dependent sandwich piezomagnetic nanoplates, *Mechanics Research Communications*, 84 (2017) 27-42.
- [14] P. Zhu, Z.X. Lei, K.M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, 94(4) (2012) 1450-1460.
- [15] M. Mohammadimehr, S. Okhravi, S. Akhavan Alavi, Free vibration analysis of magneto-electro-elastic cylindrical composite panel reinforced by various distributions of CNTs with considering open and closed circuits boundary conditions based on FSDT, *Journal of Vibration and Control*, 24(8) (2018) 1551-1569.
- [16] A. Ghorbanpour Arani, A.R. Shajari, S. Amir, A. Loghman, Electro-thermo-mechanical nonlinear nonlocal vibration and instability of embedded micro-tube reinforced by BNNT, conveying fluid, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 45 (2012) 109-121.
- [17] M. Mohammadimehr, M. Mohandes, M. Moradi, Size dependent effect on the buckling and vibration analysis of double-bonded nanocomposite piezoelectric plate reinforced by boron nitride nanotube based on modified couple stress theory, *Journal of vibration and control*, 22(7) (2016) 1790-1807.
- [18] M. Mohammadimehr, B. Rousta Navi, A. Ghorbanpour Arani, Modified strain gradient Reddy rectangular plate model for biaxial buckling and bending analysis of double-coupled piezoelectric polymeric nanocomposite reinforced by FG-SWNT, *Composites Part B: Engineering*, 87 (2016) 132-148.
- [19] R. Ansari, R. Gholami, M. Faghih Shojaei, V. Mohammadi, S. Sahmani, Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory, *Composite Structures*, 100 (2013) 385-397.
- [20] R. Akbari Alashti, M. Khorsand, Three-dimensional dynamo-thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by DQ-FD coupled, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 96-97 (2012) 49-67.
- [21] A. Ghorbanpour Arani, M. Abdollahian, R. Kolahchi, Nonlinear vibration of a nanobeam elastically bonded with a piezoelectric nanobeam via strain gradient theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 100 (2015) 32-40.
- [2] C.-P. Wu, W.-W. Lai, Free vibration of an embedded single-walled carbon nanotube with various boundary conditions using the RMVT-based nonlocal Timoshenko beam theory and DQ method, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 68 (2015) 8-21.
- [3] T. Murmu, M.A. McCarthy, S. Adhikari, Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: A nonlocal elasticity approach, *Journal of Sound and Vibration*, 331(23) (2012) 5069-5086.
- [4] A. Shooshtari, S. Razavi, Nonlinear vibration analysis of rectangular magneto-electro-elastic thin plates, *IJE transactions A: Basics*, 28(1) (2015) 139-147.
- [5] E. García-Macías, R. Castro-Triguero, E.I. Saavedra Flores, M.I. Friswell, R. Gallego, Static and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced skew plates, *Composite Structures*, 140 (2016) 473-490.
- [6] Z. Lang, L. Xuewu, Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 37(4) (2013) 2279-2292.
- [7] D. Chen, S. Kitipornchai, J. Yang, Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core, *Thin-Walled Structures*, 107 (2016) 39-48.
- [8] M. Khanjani, M. Shakeri, M. Sedighi, A parametric study on the stress analysis and transient response of thick-laminated-faced cylindrical sandwich panels with transversely flexible core, *Aerospace Science and Technology*, 48 (2016) 1-20.
- [9] R. Ansari, R. Gholami, A. Norouzzadeh, Size-dependent thermo-mechanical vibration and instability of conveying fluid functionally graded nanoshells based on Mindlin's strain gradient theory, *Thin-Walled Structures*, 105 (2016) 172-184.
- [10] M. Nasihatgozar, V. Daghighi, M. Eskandari, K. Nikbin, A. Simoneau, Buckling analysis of piezoelectric cylindrical composite panels reinforced with carbon nanotubes, *International Journal of Mechanical Sciences*, 107 (2016) 69-79.
- [11] A.L. Araújo, V.S. Carvalho, C.M. Mota Soares, J. Belinha, A.J.M. Ferreira, Vibration analysis of laminated soft core sandwich plates with piezoelectric sensors and actuators, *Composite Structures*, 151 (2016) 91-98.
- [12] L.W. Zhang, Z.X. Lei, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite triangular plates using the FSDT and element-free IMLS-Ritz method, *Composite*



- [29] M. Ahmadi, R. Ansari, H. Rouhi, Multi-scale bending, buckling and vibration analyses of carbon fiber/carbon nanotube-reinforced polymer nanocomposite plates with various shapes, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 93 (2017) 17-25.
- [30] R. Gholami, R. Ansari, Y. Gholami, Nonlinear resonant dynamics of geometrically imperfect higher-order shear deformable functionally graded carbon-nanotube reinforced composite beams, *Composite Structures*, 174 (2017) 45-58.
- [31] K. Kiani, Longitudinal and transverse vibration of a single-walled carbon nanotube subjected to a moving nanoparticle accounting for both nonlocal and inertial effects, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(9) (2010) 2391-2401.
- [32] F. Daneshmand, M. Rafiei, S. Mohebpour, M. Heshmati, Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory, *Applied Mathematical Modelling*, 37(16-17) (2013) 7983-8003.
- [33] Y.T. Beni, F. Mehralian, M.K. Zeverdejani, Size-dependent buckling analysis of different chirality SWCNT under combined axial and radial loading based on orthotropic model, *Materials Research Express*, 4(6) (2017) 065004.
- [34] H. Razavi, A.F. Babadi, Y.T. Beni, Free vibration analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical nanoshell based on consistent couple stress theory, *Composite Structures*, 160 (2017) 1299-1309.
- [35] J. Mantari, J. Monge, Buckling, free vibration and bending analysis of functionally graded sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 119 (2016) 170-186.
- [22] A. Kutlu, M. Hakkı Omurtag, Large deflection bending analysis of elliptic plates on orthotropic elastic foundation with mixed finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1) (2012) 64-74.
- [23] M. Mohammadimehr, H. Mohammadi Hooyeh, H. Afshari, M. Salarkia, Size-dependent Effects on the Vibration Behavior of a Ti-moshenko Microbeam subjected to Pre-stress Loading based on DQM, *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 3(2) (2016) 99-112.
- [24] A. Paul, D. Das, Free vibration analysis of pre-stressed FGM Timoshenko beams under large transverse deflection by a variational method, *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19(2) (2016) 1003-1017.
- [25] A.G. Arani, V. Atabakhshian, A. Loghman, A. Shajari, S. Amir, Nonlinear vibration of embedded SWBNNTs based on nonlocal Timoshenko beam theory using DQ method, *Physica B: Condensed Matter*, 407(13) (2012) 2549-2555.
- [26] M. Mohammadimehr, B. Roustavi Navi, A. Ghorbanpour Arani, Surface stress effect on the nonlocal biaxial buckling and bending analysis of polymeric piezoelectric nanoplate reinforced by CNT using Eshelby-Mori-Tanaka approach, *Journal of Solid Mechanics*, 7(2) (2015) 173-190.
- [27] H.-T. Thai, T.P. Vo, A size-dependent functionally graded sinusoidal plate model based on a modified couple stress theory, *Composite Structures*, 96 (2013) 376-383.
- [28] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) (2012) 94-106.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Mohammadimehr, M. Mehrabi, E. Shaabaninejhad, Buckling and Vibration Analyses of Double-bonded Micro Composite Plates Reinforced by CNTs and BNNTs Based on MSGT, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 79-96.

DOI: 10.22060/mej.2017.13123.5543



