نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۰، شماره ۶، سال ۱۳۹۷، صفحات ۱۰۱۷ تا ۱۰۳۲
DOI: 10.22060/ceej.2017.12265.5169

تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و گالرکین

معصومه سلطانی[۱*]، بهروز عسگریان[۲]

[۱] گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
[۲] دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده: امروزه استفاده از اعضای محوری و خمشی با مقطع متغیر در قاب‌ها به‌علت افزایش پایداری و کاهش وزن سازه، افزایش یافته است. به همین دلیل در این مقاله، رفتار ستون‌های غیرمنشوری تحت تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در مرحله نخست، معادله تعادل حاکم بر تیر اویلر-برنولی با مقطع متغیر که به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار باضرایب متغیر است، با اعمال اصل حداقل پتانسیل انرژی به تابع انرژی استخراج می‌گردد. در این پژوهش، به منظور حل دقیق معادله پایداری از روش بسط سری‌های توانی استفاده شده است. بر اساس اصول حاکم بر روش عددی مذکور فرم تقریبی تغییر شکل حاکم بر مد اول کمانش ستون به صورت یک چند جمله‌ای متناهی به‌دست می‌آید و با جایگذاری شرایط مرزی حاکم بر عضو ارتجاعی و با استفاده از روش حل مقادیر ویژه مقدار بار کمانش بحرانی محاسبه می‌گردد. در پایان، با توجه به تشابه فرم تغییر شکل اعضای الاستیک تحت تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری از روش تقریبی گالرکین جهت استخراج فرکانس طبیعی ارتعاش سیستم استفاده شده است. به منظور نشان دادن توانایی و صحت روش ترکیبی استفاده شده در این مطالعه، چندین مثال عددی شامل ستون‌های غیرمنشوری با شرایط مرزی متفاوت، ارائه می‌گردد. نتایج به‌دست آمده با مقادیر حاصل از پژوهش‌های انجام شده توسط دیگر محققین در این زمینه و تحلیل عددی حاصل از نرم‌افزار اجزای محدود انسیس، مقایسه شده‌اند. نتایج نشان دهنده تطابق مطلوب بین روش حاضر و دیگر روش‌های عددی و یا تحلیلی موجود است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳ دی ۱۳۹۵
بازنگری: ۱۰ مرداد ۱۳۹۶
پذیرش: ۱ آبان ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۵ دی ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:
بار کمانش بحرانی
فرکانس طبیعی ارتعاش
اعضای غیرمنشوری
سری‌های توانی
روش گالرکین

۱- مقدمه

تحلیل پایداری و تعیین نیروی کمانش بحرانی ستون‌ها، سابقه بسیار طولانی در تحقیق‌های مهندسی سازه دارد. اعضای سازنده قاب‌ها شامل تیر و یا ستون را می‌توان تحت شرایط گوناگون و برای کاربردهای مختلف به صورت مقطع متغیر طراحی نمود و این اعضا غیرمنشوری نام دارند. یک عضو با مقطع متغیر نسبت به یک عضو منشوری که دارای سطح مقطع بزرگتری است، از توان باربری بیشتری برخوردار است. همچنین امروزه اکثر مهندسان به دنبال استفاده از روش‌های ایده‌آلی هستند تا بتوانند وزن سازه را کاهش دهند. در نتیجه می‌توان گفت که با استفاده از این دسته از اعضا می‌توان ظرفیت باربری را به صورت قابل ملاحظه‌ای افزایش داد و هم زمان وزن سازه را کاهش داد. این نکته از نظر صرفه جویی اقتصادی دارای اهمیت بسیاری میباشد.

محققان از روش‌های مختلف که اساس اکثر آن‌ها حل معادله دیفرانسیل پایداری یک المان کلی تحت اثر نیروهای محوری و جانبی است، در تعیین نیروی کمانش ستون‌ها بهره گرفته‌اند. در این زمینه، تیموشنکو[1] [۱] ، چن[2] [۲] و بازانت[3] [۳] روش‌های متعددی بر مبنای روش‌های تقریبی عددی و یا حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم بر پایداری ستون‌های الاستیک با شرایط مرزی مختلف را ارائه نمودند. فریش فی[4] [۴] حل مسئله کمانش و تعیین نیروی کمانشی یک المان منشوری با نیروی محوری یکنواخت تحت شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش تحلیلی مورد مطالعه قرار داد و بار بحرانی را برای یک ستون کاملا مهار شده با استفاده از انتگرال بسل محاسبه نمود. کربلیس[5] [۵] معادله دیفرانسیل پایداری حاکم بر تیر غیرمنشوری را با روش عددی حل و سپس، ضرایب ماتریس سختی و هندسی حاکم بر عضو ارتجاعی را توسط چهار تابع شکل حاکم بر چهار درجه آزادی ستون مد نظر تعیین نمود. لاک[6] [۶] در طی یک مطالعه عددی به تعیین بار

*نویسنده عهده‌دار مکاتبات: msoltani@kashanu.ac.ir

1 Timoshenko
2 Chen
3 Bazant
4 Frisch-Fay
5 Karabalis
6 Lake

کمانشی تیر ستون‌هایی که سطح مقطعشان به صورت پله‌ای در طول عضو تغییر می‌کند و تحت بارگذاری استاتیکی می‌باشند، پرداخت. درنهایت، توسط چند نمودار به خوبی نشان داده شده است که تا چه حد کاهش سطح مقطع در طول عضو می‌تواند به لحاظ کاهش وزن سازه و هم بعلت افزایش ظرفیت باربری به معنی افزایش بار کمانش محوری به صرفه باشد. اربابی[1] [۷] کمانش الاستیک تیر-ستون‌های غیرمنشوری با ضخامت متغیر را مورد بررسی قرار داد. سیگنر[2] [۸] رفتار کمانشی ستونهای مخروطی با تغییرات خطی سختی خمشی در طول عضو را مطالعه نمود. ارموپلوس[3] [۹] با استفاده از روش شیب-افت طول موثر کمانش ستون‌های غیرمنشوری را محاسبه نمود. مقدار بار کمانش بحرانی ستون با مقطع متغیر که عضوی از یک قاب مهار نشده است و تحت بار متمرکز محوری فشاری در نقاط مختلف خود قرار دارد، توسط ارموپلوس [۱۰] و با حل معادله دیفرانسیل غیرخطی پایداری و به کمک روش شیب-افت تعیین گردیده است. رافتوپانیس[4] [۱۱] به بررسی بار کمانش بحرانی اعضای ماهیچه‌ای و پله‌ای با نقص اولیه و خروج از مرکزیت پرداخت. در این مطالعه، به منظور حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهار پایداری، فرض شده است که اثر موارد مذکور را می‌توان به صورت یک انحنای اولیه و فرضی در نظر گرفت. ماتریس‌های سختی اعضای ارتجاعی با مقطع متغیر متکی بر بستر الاستیک توسط جیرجین[5] [۱۲] تعیین گشتند. روش ارائه شده توسط وی بر اساس تکنیک عددی مهر است. ماتریس‌های سختی تیر متکی بر بستر الاستیک سه پارامتری برمبنای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار عضو توسط آورامیدیس[6] [۱۳] ارائه گردید. صفاری[7] [۱۴] با استفاده از روابط شیب-افت ضریب طول موثر برای قاب‌های شیبدار با اعضای ماهیچهای را به‌دست آورد. در روش ارائه شده، ضرایب پایداری در روابط شیب-افت برای قاب‌هایی که ابعاد نیم‌رخ اعضایشان به صورت خطی در طول عضو در حال تغییر است، اصلاح گردیده است. رهایی[8] [۱۵] نیروی بحرانی ستون با مقطع متغیر پلکانی را در مودهای مختلف با استفاده از روش انرژی و به کار بردن اصل تشابه تغییر شکل کمانشی و ارتعاشی اعضای الاستیک، تعیین نمود. آتای[9] [۱۶ و ۱۷] معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش را با استفاده از روش تکرار تغییرات حل و مقدار بار کمانشی ستون با مقاطع ثابت و متغیر و ستون اویلر با مهاربندی پیوسته را تعیین نمود. اکای[10] [۱۸] با استفاده از روش تکرار تغییرات بار کمانش بحرانی و تغییر شکل کمانشی را برای ستون‌های چاق به‌دست آورد.

در این پژوهش، فرکانس طبیعی ارتعاش ستون‌های غیرمنشوری، به کمک یک مسیر عددی جدید برمبنای ترکیب دو روش سری‌های توانی و گالرکین تعیین شده است. مطالعه رفتار اعضای الاستیک با مقطع متغیر تحت تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد با استفاده از روش ترکیبی سری‌های توانی و گالرگین انجام نشده، بلکه از شیوه‌های عددی دیگر به‌خصوص روش اجزای محدود [۲۲-۱۹] در مطالعات موجود استفاده شده است. همچنین با استفاده از روش ارائه شده می‌توان فرکانس ارتعاشی و بار کمانش بحرانی را به‌صورت همزمان محاسبه نمود.

بدین منظور و در مرحله نخست، معادلات تعادل حاکم بر اعضای غیرمنشوری الاستیک براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک با استفاده از اصل همیلتون[11] و به کمک روش انرژی به‌دست می‌آید. در ادامه، از روش بسط سری‌های توانی برای حل معادله پایداری عضو غیرمنشوری استفاده شده و پس از جایگذاری شرایط مرزی (دو شرط برای هر انتهای عضو) و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار بار کمانش بحرانی و همچنین فرم تغییر شکل عضو مدنظر تحت آنالیز پایداری تعیین می‌گردد. در ادامه با توجه به تشابه فرم تغییر شکل اعضای الاستیک تحت تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری و با استفاده از روش عددی گالرکین[12] و برمبنای حداقل کردن تابع انرژی پتانسیل کل، مقدار فرکانس طبیعی ارتعاش محاسبه می‌گردد.

در انتهای مقاله، چند نمونه مثال عددی شامل هر دو تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد، با استفاده از روش مورد مطالعه حل شده است. نتایج به‌دست آمده از روش عددی ارائه شده با نتایج حاصل از سایر روش‌های موجود دیگر و روش اجزای محدود مقایسه گشته‌اند و در تمام مسائل مورد بررسی کارآمدی و صحت روش ترکیبی ارائه شده به اثبات رسیده است.

۲- فرمول بندی مسئله

۲- ۱- سینماتیک مسئله

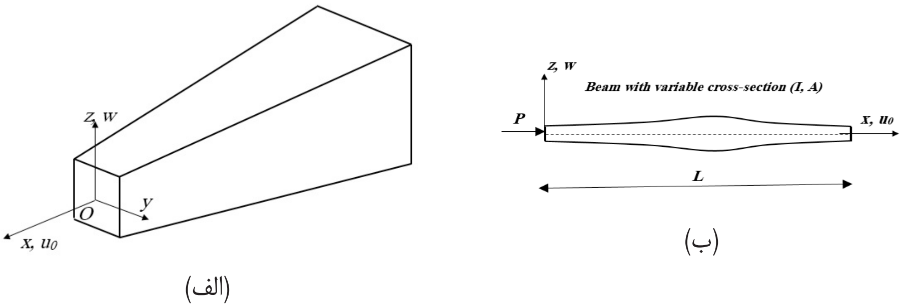
یک تیر غیرمنشوری با سطح مقطع متقارن توپر به طول L مطابق شکل ۱- الف، مد نظر است. طول عضو در مقایسه با ابعاد سطح مقطع بسیار بزرگ‌تر است، بنابراین؛ تغییر شکل‌ها بسیار کوچک هستند و از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌گردد. مطابق شکل ۱-ب، برای تیر اویلر-برنولی میدان جابه‌جایی شامل تغییر شکل محوری و مولفه تغییر مکان عمودی نسبت به O (مرکز سطح نیمرخ تیر) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$U(x,z,t) = u_0(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \qquad (۱)$$

$$W(x,z,t) = w(x,t) \qquad (۲)$$

در روابط فوق، x و z به ترتیب در راستای طول و در جهت ضخامت تیر هستند. مولفه‌های U و W نشان دهنده تغییر مکان‌های محوری و عمودی (در جهت x و z) هستند.

1 Arbabi
2 Siginer
3 Ermopulos
4 Raftoyiannis
5 Girgin
6 Avramidis
7 Safari
8 Rahai
9 Atay
10 Okay
11 Hamilton's principle
12 Galerkin's method



شکل ۱: الف) عضو غیرمنشوری تحت بار محوری فشاری، ب) میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر اویلر-برنولی

Fig. 1. Non-prismatic member under compressive axial load, Coordinate system and notation of displacement parameters

در تحلیل پایداری اعضای الاستیک، بایستی مولفه‌های کرنش را با در نظر گرفتن جملات کرنش خطی و غیرخطی مطابق با تانسور کرنش گرین محاسبه نمود. مولفه‌های کرنش گرین با در نظر گرفتن اثرات تغییر مکان‌های بزرگ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right)=\varepsilon_{ij}^{l}+\varepsilon_{ij}^{*} \quad (۳)$$

ε^{l}_{ij} و ε^{*}_{ij} به ترتیب جملات خطی و غیرخطی کرنش هستند. در مورد تیر اویلر-برنولی، مولفه‌های تانسور کرنش به مورد زیر کاهش می‌یابد:

$$\varepsilon_{xx}\approx U'+\frac{1}{2}\left(W'^{2}\right)=\varepsilon_{xx}^{l}+\varepsilon_{xx}^{*} \quad (۴)$$

با استفاده از معادلات ۱ و ۲، مولفه‌های خطی و غیرخطی کرنش طولی با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های کوچک برای تیر الاستیک به صورت زیر قابل تعیین هستند:

$$\varepsilon_{xx}^{l}=u_0'-zw''; \qquad \varepsilon_{xx}^{*}=\frac{1}{2}w'^{2} \quad (۵)$$

همچنین

$$\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\gamma_{yz}=\varepsilon_{yy}^{*}=\varepsilon_{zz}^{*}=\gamma_{yz}^{*}=0 \quad (۶)$$

به طوری که ε_{ij}, γ^{*}_{ij}, ε^{*}_{ij}, γ_{ij} کرنش‌های خطی و غیرخطی متناسب با مولفه‌های تغییر شکل U و W هستند. در این مطالعه، مصالح مصرفی همگن و ایزوتروپیک می‌باشند. با توجه به آنکه E و G مدول الاستیسیته و برشی هستند، روابط تنش-کرنش مطابق قانون هوک به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\sigma_x=E\varepsilon_{xx}^{l}; \qquad \tau_{xy}=G\gamma_{xy}; \qquad \tau_{xz}=G\gamma_{xz} \quad (۷)$$

تحت شرایط خاص کمانش خمشی داخل صفحه، زمانی که تیر تحت بار محوری فشاری P قرار دارد، تنش نرمال اولیه روی سطح مقطع به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{0}=\frac{P}{A} \quad (۸)$$

در اینجا، σ^{0}_{xx} بیانگر تنش عمودی در تیر است. همچنین بعلت بارگذاری بر روی مرکز سطح و عدم وجود خروج از مرکزیت، مقدار لنگرهای خمشی و نیروی برشی اولیه برابر صفر است و در نتیجه تنش برشی میانگین در تیر مد نظر تحت شرایط موجود مساوی صفر است.

۲- ۲- استخراج معادله حرکت و پایداری حاکم بر تیر غیرمنشوری

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک تیر با مقطع متغیر را می‌توان به کمک روش انرژی و از اصل همیلتون به صورت ذیل به‌دست آورد:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Pi dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(U_l+U_0+U_M-W_e\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta U_l+\delta U_0+\delta U_M-\delta W_e\right)dt=0 \quad (۹)$$

در رابطه فوق Π نشان دهنده انرژی پتانسیل کل سیستم الاستیک است. این انرژی برابر مجموع انرژی کرنشی خطی الاستیک U_l و انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه U_0 و انرژی جنبشی تحت بارگذاری هارمونیک U_M می‌باشد. در این مورد به خصوص که عضو مد نظر تحت هیچگونه بارگذاری خارجی قرار ندارد، مقدار کار خارجی ناشی از بارهای موثر وارد بر عضو (W_e) برابر صفر است. روابط حاکم بر تغییرات مرتبه اول هریک از پارامترهای دخیل در انرژی پتانسیل کلی با استفاده از اصل حساب تغییرات در زیر آورده شده‌اند:

$$\delta U_l=\int_0^L\int_A\left(E(\varepsilon_{xx}^{l}\delta\varepsilon_{xx}^{l})\right)dAdx \quad (۱۰)$$

$$\delta U_0 = \int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx}^0 \delta \varepsilon_{xx}^* \right) dA dx \tag{۱۱}$$

$$\delta U_M = \omega^2 \int_0^L \int_A \rho \left(U \delta U + W \delta W \right) dA dx \tag{۱۲}$$

در روابط ارائه شده، A و L به ترتیب مساحت نیمرخ و طول عضو هستند. همچنین، ρ و ω معرف چگالی جرمی مصالح و فرکانس طبیعی ارتعاش می‌باشند. با جایگذاری روابط کرنش-تغییر مکان و تنش اولیه تعریف شده در عبارات ۵ تا ۸ در معادلات انرژی‌های کرنشی و جنبشی و انتگرال‌گیری بر روی سطح مقطع عضو، معادلات زیر حاصل می‌گردند:

$$\delta U_l = \int_L \left(EAu_0' \delta u_0' + EI_y w'' \delta w'' \right) dx \tag{۱۳}$$

$$\delta U_0 = \int_L \left(Pw' \delta w' \right) dx \tag{۱۴}$$

$$\delta U_M = \omega^2 \int_L \left(\rho \left(Au_0 \delta u_0 + Aw \delta w \right) \right) dx \tag{۱۵}$$

در رابطه ۱۳، I_y گشتاور لختی نیمرخ عرضی تیر است. درنهایت، معادله حاکم بر تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل کلی یک تیر همگن غیرمنشوری به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_L \left(EAu_0' \delta u_0' + EI_y w'' \delta w'' \right) dx + \int_L \left(Pw' \delta w' \right) dx \\ & + \omega^2 \int_L \left(\rho \left(Au_0 \delta u_0 + Aw \delta w \right) \right) dx = 0 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

باتوجه به آنکه هدف از این مطالعه، بررسی رفتار پایداری و ارتعاشی تیر تحت تغییر شکل خمشی است، از عبارات مربوط به تغییر شکل محوری در ادامه فرآیند استخراج روابط حاکم بر تیر اویلر-برنولی صرف‌نظر می‌گردد. بنابر این خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_L \left(EI_y w'' \delta w'' \right) dx + \int_L \left(Pw' \delta w' \right) dx \\ & + \omega^2 \int_L \left(\rho \left(Au_0 \delta u_0 + Aw \delta w \right) \right) dx = 0 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

با استفاده از روش حساب تغییرات و انتگرال‌گیری جز به جز رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_L \left(\left(EI_y w'' \right)'' - Pw'' + \omega^2 \rho A w \right) \delta w dx \\ & - \left[\left((EI_y w'')' - Pw' \right) \delta w \right]_0^L + \left[\left(EI_y w'' \right) \delta w' \right]_0^L = 0 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

در رابطه فوق، اولین جمله، شامل حاصلضرب معادله دیفرانسیل تعادل حاکم بر عضو غیرمنشوری در یک تغییر کوچک تابع تغییر شکل است. عبارات دوم و سوم، حاوی شرایط مرزی طبیعی و اساسی عضو هستند. بدین ترتیب معادله حرکت حاکم بر تیرغیرمنشوری به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI_y(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - P \frac{d^2 w}{dx^2} + \omega^2 \rho A(x) w(x) = 0 \tag{۱۹}$$

بنابراین، معادله فوق در شرایط تحلیل پایداری به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI_y(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{۲۰}$$

مطابق با رابطه ۱۸و فرضیات حاکم بر تغییر شکل خمشی تیر، شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده به صورت زیر تعریف می‌گردند:

انتهای مفصلی: $w = 0$ و $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$ (۲۱)

انتهای گیردار: $w = 0$ و $\frac{dw}{dx} = 0$ (۲۲)

انتهای آزاد: $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$ و $\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{P}{EI}\frac{dw}{dx} = 0$ (۲۳)

با توجه به آنکه در مطالعه انجام شده، سطح مقطع تیر متغیر در نظر گرفته شده است، معادله پایداری ۲۰، یک معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر است که یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای حل چنین معادلاتی روش سری توانی است. سری به صورت $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ که در آن $a_0, a_1, ..., a_n$ اعداد حقیقی هستند، سری توانی نامیده می‌شود. بسط سری‌های توانی یکی از بهترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با مرتبه‌های بالا و ضرایب متغیر می‌باشد. روش حل مبتنی بر این اندیشه است که جواب معادله به صورت یک سری توانی بر حسب متغیر نوشته شود. گرچه ممکن است در نظر اول تعیین جواب‌های معادله دیفرانسیل به صورت سری، یأس‌آمیز جلوه کند؛ اما از لحاظ محاسباتی این روش می‌تواند یکی از آسانترین و مناسبترین شیوه‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر باشد. محققین مختلفی به شیوه‌های متفاوتی از روش بسط سری‌های توانی به منظور تعیین بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی تیر-ستون‌ها و اعضای جدار نازک استفاده نموده‌اند [۲۹-۲۳]. در ادامه، بر مبنای مسیر عددی ارائه شده در این پژوهش که در ابتدای مقاله ارائه شد و با استفاده از روش عددی مذکور، معادله حاکم بر پایداری عضو مد نظر حل می‌گردد و پس از اعمال شرایط مرزی مقدار بار کمانش بحرانی و فرم تغییر شکل کمانشی محاسبه می‌شوند.

۲-۳- روش بسط سری‌های توانی

بر مبنای روش بسط سری توانی، بایستی کلیه متغیرهای دخیل در معادله دیفرانسیل را به صورت یک چند جمله‌ای متناهی در نظر گرفت. بنابراین، لنگر دوم سطح مقطع عضو نسبت به محور ضعیف ($I_y(x)$) به فرم سری توانی ذیل در نظر گرفته شده است:

$$I_y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} I_i x^i \qquad (۲۴)$$

با معرفی یک مختصات بدون بعد محلی ($\varepsilon=x/L$)، معادله پایداری برحسب متغیر ε به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$E\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} I_i L^i \varepsilon^i\right)\frac{d^2 w}{d\varepsilon^2}\right]-PL^2\frac{d^2 w}{d\varepsilon^2}=0 \qquad (۲۵)$$

براساس اصول حاکم بر روش بسط سری‌های توانی، فرم جواب حاکم بر تغییر شکل عرضی ($w(\varepsilon)$) به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i \qquad (۲۶)$$

در ادامه کار، با توجه به وجود مشتقات مرتبه اول و دوم تغییر شکل در رابطه ۲۵، خواهیم داشت:

$$\frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\sum_{i=1}^{\infty} i a_i \varepsilon^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}\varepsilon^i \qquad (۱-۲۷)$$

$$\frac{d^2 w(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}=\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i \varepsilon^{i-2}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)a_{i+2}\varepsilon^i \qquad (۲-۲۷)$$

و با جایگذاری روابط ۲۶ و ۲۷ در عبارت ۲۵، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\left[E\left\{\sum_{i=0}^{\infty} I_i^* \varepsilon^i\right\}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2}(j+2)(j+1)\varepsilon^j\right\}\right]\\&-L^2 P\left\{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2}(j+2)(j+1)\varepsilon^j\right\}=0\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با ضرب جمله به جمله هر دو سری و با توجه به قانون حاکم بر جمع و ضرب پارامتریک سری‌های، رابطه فوق به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}E\sum_{i=0}^{j+2} I_i^*(j-i+4)(j-i+3)(j+2)(j+1)a_{j-i+4}\\-PL^2(j+1)(j+2)a_{j+2}\end{array}\right]\varepsilon^j=0 \qquad (۲۹)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}EI_0^*(j+4)(j+3)(j+2)(j+1)a_{j+4}+\\E\sum_{i=1}^{j+2} I_i^*(j-i+4)(j-i+3)(j+2)(j+1)a_{j-i+4}\\+L^2(j+1)(j+2)a_{j+2}\end{array}\right]\varepsilon^j=0 \qquad (۳۰)$$

برای آن که معادله ۳۰ به ازای همه‌ی مقادیر ε برقرار باشد، لازم است که ضریب هریک از توان‌های ε صفر باشد. بنابراین، رابطه بازگشتی زیر نتیجه گرفته شده است:

$$\begin{aligned}&a_{j+4}=\frac{-1}{EI_0^*(j+4)(j+3)(j+2)(j+1)}\times\\&\left[\begin{array}{l}E\sum_{i=1}^{j+2} I_i^*(j-i+4)(j-i+3)(j+2)(j+1)a_{j-i+4}\\+PL^2(j+1)(j+2)a_{j+2}\end{array}\right]\\&for\quad j=0,1,2,........\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

همانگونه که در ابتدا ذکر شد، فرم تغییر شکل تیر با مقطع متغیر به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+a_3\varepsilon^3+a_4\varepsilon^4+... \qquad (۳۲)$$

با توجه به رابطه بازگشتی حاصل شده ۳۱ و با استفاده از نرم‌افزار متلب (Matlab) [۳۱]، چند جمله ابتدایی تابع تغییر مکان به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}w(\varepsilon)=&a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+a_3\varepsilon^3-\frac{\varepsilon^4}{24EI_0^*}\left\{a_2(4EI_2^*-2L^2P)+12a_3EI_1^*\right\}\\&-\frac{\varepsilon^5}{120EI_0^*}\left\{a_2(12EI_3^*-3\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(4EI_0^*-2L^2P\right)+a_3(36EI_2^*-\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(36EI_1^*\right)-6L^2P)\right\}\\&-\frac{\varepsilon^6}{360EI_0^*}\Big\{a_2\Big(24EI_4^*-\frac{2I_1^*}{I_0^*}(12EI_3^*-3\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(4EI_0^*-2L^2P\right))-\frac{12EI_2^*+L^2P}{2EI_0^*}\left(4EI_2^*-2L^2P\right)\Big)\\&+a_3\Big(72EI_3^*-\frac{2I_1^*}{I_0^*}(-\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(36EI_1^*\right)+36EI_2^*-6L^2P)-\frac{12EI_2^*-L^2P}{2EI_0^*}(12EI_1^*)\Big)\Big\}+.....\end{aligned} \qquad (۳۳)$$

مطابق با عبارت فوق، مشخص است که جواب معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه ۲۵ را می‌توان برحسب چهار ضریب مجهول a_0, a_1, a_2, a_3 تعیین نمود. در نتیجه، جواب معادله دیفرانسیل پایداری حاکم بر ستون غیرمنشوری را می‌توان در مختصات محلی به فرم ماتریسی ذیل ارائه نمود:

$$w(\varepsilon)=\langle B(\varepsilon)\rangle\{A\} \qquad (۳۴)$$

که

$$A=\{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3\}^T \qquad (۱-۳۵)$$

$$\langle B(\varepsilon)\rangle=\langle w_0(\varepsilon) \quad w_1(\varepsilon) \quad w_2(\varepsilon) \quad w_3(\varepsilon)\rangle \qquad (۲-۳۵)$$

w_i (i=0,1,2,3) جواب‌های عمومی معادله ۲۵هستند، که به صورت سری توانی در رابطه ۳۲ معرفی شدند و توسط نرم‌افزار متلب [۳۱] تعیین می‌گردند. چند جمله ابتدایی توابع مذکور در پیوست ۱ نشان داده شده‌اند.

همواره برای حل معادلات دیفرانسیل و تعیین جواب دقیق آن‌ها نیاز به شرایط مرزی در ابتدا و انتهای محدوده معادله است. از آنجا که معادله حاکم بر پایداری ستون‌های غیرمنشوری از مرتبه چهار است، به چهار شرط مرزی به منظور تعیین بارهای بحرانی مدهای مختلف کمانش نیاز می‌باشد.

در این مطالعه، سه نوع ستون با شرایط مرزی: دو سر مفصل، یک سر گیردار-یک سر آزاد و یک سر گیردار-یک سر مفصل مطابق شکل ۲ در نظر گرفته شده است. با اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی شامل تغییر مکان، شیب، لنگر و برش در هر تکیه‌گاه و تشکیل ماتریس مقادیر ویژه، مقدار بار کمانش بحرانی تعیین می‌گردد.

شکل۲: ستون‌های در نظر گرفته شده با شرایط تکیه‌گاهی مختلف

Fig. 2. The considered columns with different boundary conditions

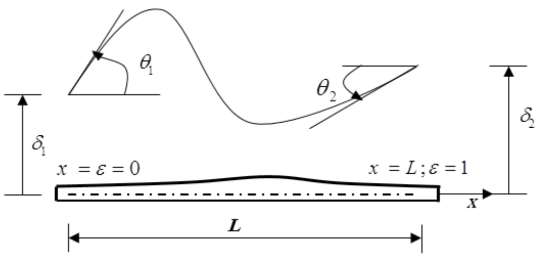
همانگونه که در ابتدا توضیح داده شد، مقدار فرکانس طبیعی ارتعاش در این پژوهش با استفاده از روش گالرکین تعیین می‌گردد. برای نیل به این هدف و براساس تئوری حاکم بر روش عددی مذکور به فرم تقریبی تغییر شکل عضو که شرایط مرزی مسئله را ارضا نماید، نیاز است. با توجه به آنکه بردار ویژه حاصل شده از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر هر دو آنالیز کمانشی و ارتعاشی ستون یکسان است و کلیه مقادیر به‌دست آمده از هر دو تحلیل مذبور به جز دامنه تغییر شکل مساوی هستند، می‌توان از تابع حاصل شده برای مد اول کمانشی به جای فرم تغییر شکل ارتعاشی ستون غیرمنشوری استفاده نمود. بنابراین در ادامه، مقدار دقیق بار بحرانی کمانش که مطابق مراحل فوق و با استفاده از روش حل مقادیر ویژه محاسبه گشته را بایستی به منظور به‌دست آوردن فرم تغییرشکل نظیر مد اول کمانش یا همان بردار ویژه، در عبارت ۳۴ جایگذاری نمود. سپس، شرایط مرزی برای هر مسئله جداگانه تعریف می‌گردد.

۲- ۴- شرایط مرزی

کاملا مشخص است که تمامی ضرایب مجهول (a_0, a_1, a_2, a_3) توابعی از تغییر مکان‌های گره‌ای و درجات آزادی (DOF) هر المان هستند، که با جایگذاری شرایط مرزی قابل محاسبه هستند. مطابق با هندسه مسئله و تغییر شکل‌های حاکم بر تیر اویلر-برنولی، برای گره انتهایی از هر دهانه یک تیر، دو درجه‌آزادی در نظر گرفته شده است. شکل ۳ بیانگر فرم تغییر شکل یک ستون می‌باشد. مطابق با شکل رسم شده، شرایط مرزی برای نقاط ابتدایی و انتهایی عضو (x=0 و x=L) به صورت زیر می‌باشند:

$$w(0)=\delta_1; \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right]_{x=0}=\theta_1 \tag{۳۸}$$

$$w(L)=\delta_2; \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right]_{x=L}=\theta_2 \tag{۳۸}$$



شکل ۳: فرم تغییر شکل عضو مدنظر به همراه شرایط مرزی انتهایی در مختصات محلی

Fig. 3. Deformation shape of member with end conditions local coordinate system

شرایط مرزی فوق برای نقاط ابتدایی و انتهایی عضو (ε=0 و x=L) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{\Delta\}=[V]\{A\} \tag{۳۸}$$

به طوری که

$$\{\Delta\}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \theta_1\\ \delta_2\\ \theta_2\end{Bmatrix} \tag{۱-۳۹}$$

$$V=\begin{bmatrix} w_0(0) & w_1(0) & w_2(0) & w_3(0)\\ \dfrac{w_0'(0)}{L} & \dfrac{w_1'(0)}{L} & \dfrac{w_2'(0)}{L} & \dfrac{w_3'(0)}{L}\\ w_0(1) & w_1(1) & w_2(1) & w_3(1)\\ \dfrac{w_0'(1)}{L} & \dfrac{w_1'(1)}{L} & \dfrac{w_2'(1)}{L} & \dfrac{w_3'(1)}{L}\end{bmatrix} \tag{۲-۳۹}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\{A\}=[V]^{-1}\{\Delta\} \tag{۴۰}$$

با توجه به توابع به‌دست آمده برای w_i (i=0,1,2,3) که در پیوست ۱ نشان داده شده‌اند، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که $w_1(0)=w_2(0))=0$ و $w_0(0)=w'_1(0)=0$، درنتیجه $=w_3(0)=w'_0(0)=w'_2(0)=w'_3(0$

ماتریس $\{A\}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ L\theta_1 \\ -\dfrac{1}{C}\left\{w_3'(1)\left(\delta_2-\delta_1-L\theta_1\right)-w_3(1)\left(L\theta_2-L\theta_1\right)\right\} \\ \dfrac{1}{C}\left\{w_2'(1)\left(\delta_2-\delta_1-L\theta_1\right)-w_2(1)\left(L\theta_2-L\theta_1\right)\right\} \end{Bmatrix} \quad (۴۱)$$

به طوری که:

$$C=w_3(1)w_2'(1)-w_2(1)w_3'(1)$$

در نهایت، فرم مد اول کمانشی به صورت زیر قابل تعیین است:

$$\begin{aligned} w(\varepsilon)=&\ \delta_1 w_0(\varepsilon)+L\theta_1 w_1(\varepsilon)-\frac{1}{C}\left\{w_3'(1)\left(\delta_2-\delta_1-L\theta_1\right)-w_3(1)\left(L\theta_2-L\theta_1\right)\right\}w_2(\varepsilon) \\ &+\frac{1}{C}\left\{w_2'(1)\left(\delta_2-\delta_1-L\theta_1\right)-w_2(1)\left(L\theta_2-L\theta_1\right)\right\}w_3(\varepsilon) \end{aligned} \quad (۴۲)$$

در این تحقیق اعضای غیرمنشوری با سه نوع شرایط تکیه‌گاهی: دوسر مفصل، یک سر گیردار و یک سرگیردار–یک سر مفصل در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین، فرم تغییرشکل تقریبی اعضای مد نظر تحت نیروی کمانشی برای هریک از شرایط مذکور به صورت زیر اصلاح می‌شود:

– عضو دوسر مفصل:

در این حالت تغییر مکان عمودی ابتدا و انتهای عضو برابر صفر هستند

$$\begin{aligned} &\delta_1=\delta_2=0\rightarrow \\ &w(\varepsilon)=\frac{L}{C}\left(Cw_1(\varepsilon)+(w_3'(1)-w_3(1))w_2(\varepsilon)-(w_2'(1)+w_2(1))w_3(\varepsilon)\right)\theta_1 \\ &\quad+\frac{L}{C}\left(w_3(1)w_2(\varepsilon)-w_2(1)w_3(\varepsilon)\right)\theta_2 \end{aligned} \quad (۴۳)$$

علاوه بر شرایط مذکور، مقدار لنگر خمشی در هردو تکیه گاه مساوی صفر است.

$$\begin{aligned} &M(\varepsilon)=EIw''(\varepsilon) \quad \underline{\varepsilon=0} \qquad M(0)=EIw''(0)=0 \\ &\rightarrow w''(0)=0\Rightarrow w''=\sum_{i=0}^{n}(i+1)(i+2)a_{i+2}\varepsilon^i \rightarrow a_2=0 \end{aligned} \quad (۴۴)$$

در نهایت، فرم تغییر شکل عضو دوسر مفصل تحت تحلیل پایداری به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$w(\varepsilon)=\frac{L}{C}\begin{Bmatrix} \dfrac{w_3(1)}{\left(w_3(1)-w_3'(1)\right)}\times\left(Cw_1(\varepsilon)+(w_3'(1)-w_3(1))w_2(\varepsilon)-(w_2'(1)+w_2(1))w_3(\varepsilon)\right) \\ +\left(w_3(1)w_2(\varepsilon)-w_2(1)w_3(\varepsilon)\right) \end{Bmatrix}\theta_2 \quad (۴۳)$$

– عضو یک‌سر گیردار:

در این حالت تغییر مکان و شیب (دوران) در محل تکیه‌گاه گیردار تیر و در ابتدای عضو مساوی صفر هستند.

$$\begin{aligned} &\delta_1=\theta_1=0\rightarrow \\ &w(\varepsilon)=\frac{1}{C}(w_2'(1)w_3(\varepsilon)-w_3'(1)w_2(\varepsilon))\delta_2+\frac{1}{C}(w_3(1)w_2(\varepsilon)-w_2(1)w_3(\varepsilon))\theta_2 \end{aligned} \quad (۴۳)$$

همچنین مقدار لنگر در انتهای آزاد تیر برابر صفر است.

$$\begin{aligned} &M(\varepsilon)=EIw''(\varepsilon) \quad \underline{\varepsilon=1} \\ &M(1)=EIw''(1)=0\rightarrow w''(1)=0 \end{aligned} \quad (۴۷)$$

در نتیجه، تابع تغییر شکل تقریبی تیر با شرایط مرزی یک سرگیردار–یک سر آزاد به فرم زیر تعیین می‌گردد:

$$w(\varepsilon)=\left(\frac{1}{w_2'(1)w_3''(1)-w_3'(1)w_2''(1)}\right)\left\{w_3''(1)w_2(\varepsilon)-w_2''(1)w_3(\varepsilon)\right\}\theta_2 \quad (۴۸)$$

– عضو یک سرگیردار– یک سر مفصل:

در این حالت در ابتدای عضو و در محل تکیه‌گاه گیردار از تغییر مکان عمودی و دوران عضو جلوگیری شده است و در سمت دیگر و محل تکیه‌گاه مفصلی، مقدار تغییر مکان نیز مساوی صفر است. در نهایت تابع تعریف کننده تغییرشکل کمانشی تیر با شرایط مرزی مذکور در مد اول به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta_1=\theta_1=\delta_2=0\rightarrow w(\varepsilon)=\frac{L}{C}(w_3(1)w_2(\varepsilon)-w_2(1)w_3(\varepsilon))\theta_2 \quad (۴۹)$$

تا این مرحله فرم تغییر شکل کمانشی عضو غیرمنشوری تحت بارگذاری محوری فشاری به‌دست آمده است.

روش گالرکین و رایلی–ریتز دو مسیر عددی مرسوم در تحلیل تقریبی سازه‌ها هستند. تفاوت اساسی این دو شیوه در این است که روش گالرکین که خود بر اساس تکنیک باقی‌مانده وزنی است، مستقیما به حل معادله دیفرانسیل می‌پردازد. در حالی که، روش عددی رایلی–ریتز بر مبنای اصل مینیمم انرژی پتانسیل است. در هر دو تکنیک عددی اشاره شده، نیاز است که فرم تقریبی تغییر شکل مناسب برای المان ارتجاعی مورد تحلیل که شرایط تعادل به همراه شرایط مرزی اساسی و طبیعی را ارضا می‌کند، تعیین گردد. درنتیجه، سیستم خطی ارتجاعی با بی نهایت درجه آزادی، به سیستمی با درجه آزادی محدود تبدیل میگردد.

۳- حل با روش گالرکین

با توجه به قسمت قبل، تغییر شکل ستون $(w(\varepsilon))$ با شرایط مرزی تعریف شده در این پژوهش را می‌توان با یک تابع مستقل $(G(\varepsilon))$ که در یک ضریب نامعلوم (دوران انتهای سمت چپ (θ_2)) ضرب شده است، تعریف نمود:

$$w(\varepsilon)=\theta_2 G(\varepsilon) \quad (۵۰)$$

که در آن $G(\varepsilon)$ شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا می‌کند. درنتیجه، جملات دوم و سوم در رابطه ۱۸ مساوی صفر می‌شوند و از عبارت حاکم بر تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل کلی ستون ارتجاعی حذف می‌شوند. برای آن‌که جمله اول عبارت مذکور نیز مساوی صفر شود، ضریب

θ_2 بایستی به‌گونه‌ای انتخاب شود که تابع $w(\varepsilon)$ معادله دیفرانسیل حرکت ۱۹ را ارضا نماید. درنتیجه، مطابق با اصول حاکم بر روش تقریبی گالرکین عبارت زیر حاصل می‌گردد:

$$\delta\Pi = \int_0^1 \left(\frac{d^2}{d\varepsilon^2}(EI_y(\varepsilon)\frac{d^2G}{d\varepsilon^2}) + \omega^2\rho A(\varepsilon)G(\varepsilon)\right)G(\varepsilon)\delta\theta_2 d\varepsilon = 0 \quad (۵۱)$$

با توجه به اختیاری بودن ضریب θ_2 رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2}{d\varepsilon^2}(EI_y(\varepsilon)\frac{d^2G}{d\varepsilon^2}) + \omega^2\rho A(\varepsilon)G(\varepsilon)\right)G(\varepsilon)d\varepsilon = 0 \quad (۵۲)$$

که تابع $G(\varepsilon)$ برای هریک از شرایط مرزی مفروض در این پژوهش در طی معادلات ۴۵، ۴۸ و ۴۹ ارائه شده است.

۴- حل با روش رایلی-ریتز

براساس این روش عددی، از میان تمام حالات تغییر شکل یافته سازه که سازگاری و شرایط مرزی را برآورده می‌کنند، فرم تغییرشکلی شرایط تعادل را برآورده می‌کند که به ازای آن انرژی پتانسیل کل حداقل باشد. معادله انرژی پتانسیل کلی در مختصات بدون بعد محلی که شامل انرژی کرنشی الاستیک و انرژی جنبشی است و با صرفنظر کردن از اثر میرایی مطابق رابطه ۱۶ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\Pi = \frac{E}{2L^3}\int_0^1 I_y(\varepsilon)\left(\frac{d^2w}{d\varepsilon^2}\right)^2 d\varepsilon + \frac{L\rho\omega^2}{2}\int_0^1 A(\varepsilon)w^2(\varepsilon)d\varepsilon \quad (۵۳)$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کل نسبت به هر کدام از تغییر مکان‌های تعمیم‌یافته می‌توان مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش را تعیین نمود. مطابق با عبارات به‌دست آمده برای تغییر شکل کمانشی ستون ۴۵، ۴۸ و ۴۹ ، می‌توان انرژی پتانسیل را به صورت تابعی از متغیر θ_2 تعیین کرد. بنابراین، شرط حداقل شدن انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d(\Pi)}{d\theta_2}\delta\theta_2 = 0 \quad (۵۴)$$

با توجه به اختیاری بودن $\delta\theta_2$ (دوران مجازی) رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{d(\Pi)}{d\theta_2} = 0 \quad (۵۵)$$

در ادامه، با جایگذاری رابطه ۵۰ در معادله فوق خواهیم داشت:

$$\frac{E}{2L^3}\int_0^1 I_y(\varepsilon)\left(G''(\varepsilon)\right)^2 d\varepsilon + \frac{L\rho\omega^2}{2}\int_0^1 A(\varepsilon)G^2(\varepsilon)d\varepsilon = 0 \quad (۵۶)$$

درنهایت، مقدار فرکانس طبیعی ارتعاش با استفاده از عبارت ذیل قابل تعیین است:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{E\int_0^1 I_y(\varepsilon)\left(G''(\varepsilon)\right)^2 d\varepsilon}{L^4\rho\int_0^1 A(\varepsilon)G^2(\varepsilon)d\varepsilon}\right)} \quad (۵۵)$$

۵- نتایج عددی

در این قسمت، چند نمونه مثال عددی شامل تحلیل پایداری و ارتعاشی ستون‌های غیرمنشوری و ماهیچه‌ای با شرایط مرزی مختلف به منظور بررسی صحت روش عددی معرفی شده بر مبنای بسط سری توانی، ارائه شده است. در تمام مراحل محاسبه بار کمانشی و فرکانس طبیعی ارتعاش اعضای غیرمنشوری از نرم‌افزار متلب [۳۱] استفاده شده است. به منظور نشان دادن دقت روش ارائه شده در این مقاله، نتایج حاصل از روش ترکیبی معرفی شده با مقادیر بدست آمده از روش اجزای محدود و دیگر روش‌های عددی و تحلیلی موجود مقایسه گردیده‌اند. با توجه به آنکه هدف اصلی این پژوهش کاربرد همزمان روش سری‌توانی و گالرکین در تحلیل ارتعاش آزاد اعضای غیرمنشوری است، مثال‌های ارائه شده تنها با استفاده از روش عددی گالرکین تحلیل شده‌اند. در نتیجه، توانایی و عملکرد روش رایلی-ریتز کنترل نشده است. این از آن جهت است که در مراجع مختلف به روش اخیر بسیار پرداخته شده است و کمتر قابلیت روش گالرکین در تحلیل ارتعاش آزاد مورد بررسی قرار گرفته است.

۵- ۱- مثال ۱

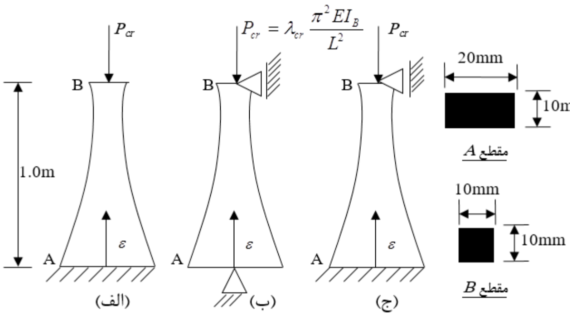
به منظور بررسی صحت و دقت روش ارائه شده در تعیین بار بحرانی کمانش (آنالیز مرتبه دوم) و فرکانس طبیعی ارتعاش(ω)، یک مطالعه مقایسه‌ای بر روی سه ستون غیرمنشوری، مطابق با شکل ۴ ، با شرایط مرزی مختلف (یک سر گیردار، دو سر مفصل و یک سر گیردار – یک سر مفصل) صورت گرفته است. سطح مقطع همه‌ی ستون‌ها مستطیل شکل بوده که عرض آن به صورت یک منحنی درجه دو در طول عضو تغییر می‌کند و در انتهای فوقانی به نصف مقدار اولیه خود کاهش می‌یابد. همچنین ستون مورد بحث تحت بار محوری فشاری P قرار دارد. مدول الاستیسیته مصالح و چگالی آن به ترتیب ۲۵ گیگاپاسکال، ۷۸۵۳ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده‌اند. ممان اینرسی $I(\varepsilon)$ و مساحت $A(\varepsilon)$ ستون مورد تحلیل در مختصات محلی به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$I(\varepsilon) = I_A\left(1-0.5\varepsilon^2\right) \quad (۱-۵۸)$$

$$A(\varepsilon) = A_A\left(1-0.5\varepsilon^2\right) \quad (۲-۵۸)$$

در این مثال، نتایج حاصل از روش عددی معرفی شده با جواب‌های به‌دست آمده از خروجی نرم‌افزار Ansys [۳۲] مقایسه شده‌اند. برای مدل‌سازی ستون‌های رسم شده در شکل مذکور به وسیله روش اجزای

محدود و در محیط‌کار نرم‌افزار Ansys از المان ماهیچه‌ای Beam188 استفاده گردیده است. عضو رسم شده در شکل ۴ یک عضو ماهیچه‌ای نیست، بلکه مقطع عرضی آن به صورت درجه ۲ در طول در حال تغییر می‌باشد. بنابراین برای مدل‌سازی، هر عضو به ۲۰ قسمت تقسیم شده و هر یک از قطعات با تقریب به صورت یک عضو ماهیچه‌ای در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۴: ستون‌های غیرمنشوری با شرایط مرزی متفاوت، الف) یک سر گیردار، ب) دو سر مفصل، ج) یک سر گیردار- یک سر مفصل، تحت بار متمرکز فشاری در انتهای فوقانی

Fig. 4. Non-prismatic columns with different boundary conditions and subjected to compressive load. (a) Clamped-Free (C-F); (b) Pinned-Pinned (P-P); (c) Clamped-Pinned (C-P)

ضرایب بار بحرانی کمانش ($\lambda_{cr}=P_{cr}\dfrac{L^2}{\pi^2 EI_B}$) به‌دست آمده از روش ارائه شده برای هر سه ستون مدنظر در جدول ۱ نشان داده شده‌اند. در این قسمت سعی بر آن است که: مشخص شود که با به کار بردن چه تعداد از جملات سری توانی در مراحل محاسبات می‌توان به یک جواب همگرا رسید. همچنین، کفایت و صحت روش موجود را نسبت به جواب‌های به‌دست آمده از روش اجزای محدود نشان داده شود.

با توجه به جدول ۱ ، مشخص است که با افزایش تعداد جملات در بسط سری‌توانی تا ۳۰ جمله، جواب‌ها به سرعت به نتایج حاصل شده از روش المان محدود همگرا شده‌اند. بنابراین، در تمام مسائل بعدی، برای تعیین مقدار بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی تعداد جملات سری برای بسط دادن برابر با ۳۰ در نظر گرفته خواهد شد. در ادامه، نتایج به‌دست آمده از آنالیز ارتعاش آزاد در مقایسه با خروجی‌های نرم‌افزار المان محدود Ansys در جدول ۲ نشان داده شده‌اند.

با توجه به جدول ۲، مطابقت بسیار خوب به‌دست آمده برای مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش، بیانگر کارآیی و دقت الگوریتم حل پیشنهاد شده است.

جدول۱: ضریب بار کمانش بحرانی (λ_{cr}) برای ستون‌های غیرمنشوری با شرایط مرزی متفاوت، مطابق با شکل ۴

Table. 1. Buckling load parameter (λ_{cr}) for non-prismatic columns with various boundary conditions (Fig. 4)

	تعداد جملات سری توانی N					FEM Ansys
	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	
C-F	۰/۴۰۴۰	۰/۴۵۹۵	۰/۴۶۲۸	۰/۴۶۲۹	۰/۴۶۲۹	۰/۴۶۳
P-P	۱/۷۱۳	۱/۶۸۸	۱/۶۸۷۷	۱/۶۸۷۷	۱/۶۸۷۷	۱/۶۸۶
C-P	۳/۲۷۹۲	۳/۳۴۸۹	۳/۳۴۹	۳/۳۴۹	۳/۳۴۹	۳/۳۴۸

جدول۲: فرکانس طبیعی ارتعاش (ω) برای اعضای غیرمنشوری با شرایط مرزی متفاوت، مطابق با شکل ۴

Table. 2. Natural frequency for non-prismatic beam with different boundary conditions (Fig. 4)

شرایط مرزی	روش ارائه شده	FEM Ansys
C-F	۶۳/۴۷	۶۳/۴۸
P-P	۱۴۶/۷۷	۱۴۶/۸۱
C-P	۲۳۴/۸۳	۲۳۴/۹۲

۵- ۲- مثال ۲

در این مثال، ارتعاش آزاد و پایداری خطی سه ستون غیرمنشوری متفاوت به طول L و مقطع مستطیل شکل مورد بررسی قرار گرفته است. توابع حاکم بر تغییرات مساحت و ممان اینرسی نیمرخ تیر به صورت تابع توانی و به فرم زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$I(\varepsilon)=I_0(1-\beta\varepsilon)\ ;A(\varepsilon)=A_0(1-\beta\varepsilon)$$ مورد اول: (۱-۵۹)

$$I(\varepsilon)=I_0(1-\beta\varepsilon)^3\ ;A(\varepsilon)=A_0(1-\beta\varepsilon)$$ مورد دوم: (۲-۵۹)

$$I(\varepsilon)=I_0(1-\beta\varepsilon)^4\ ;A(\varepsilon)=A_0(1-\beta\varepsilon)^2$$ مورد سوم: (۳-۵۹)

که I_0 و A_0 به ترتیب لنگر دوم سطح و مساحت مقطع بزرگتر در ابتدای عضو غیرمنشوری هستند. عبارات در نظر گرفته شده برای لنگر لختی سطح و مساحت مقطع در مورد اول از عضو غیرمنشوری مدنظر، نظیر حالتی است که طول نیم‌رخ مستطیلی ستون به صورت خطی کاهش می‌یابد، اما عرض مقطع در امتداد عضو ثابت نگهداشته شده است. مورد دوم مربوط به حالتی است که عرض مقطع مستطیلی به صورت خطی در امتداد عضو با شیب ثابت β کاهش یافته؛ درحالی‌که طول نیم‌رخ ثابت می‌ماند. در مورد سوم، طول و عرض مقطع مستطیل شکل عضو ارتجاعی مدنظر به صورت همزمان در راستای عضو و با شیب β کاهش می‌یابند. مدول الاستیسیته و چگالی مصالح مصرفی به‌ترتیب ۲۱۰ گیگاپاسکال، ۷۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب فرض شده‌اند. همچنین در این مثال، سه نوع ستون براساس شرایط مرزی (دو سرمفصل، یک سر گیردار و یک سر گیردار- یک سر مفصل) در نظر گرفته شده است.

مقادیر بار بحرانی و فرکانس ارتعاشی به‌دست آمده از روش عددی ارائه شده که مطابق با رابطه ۶۰ بی‌بعد گشته‌اند به همراه نتایج حاصل شده از روش تحلیلی ارائه شده توسط ونگ [۳۰] و نرم‌افزار انسیس در جداول ۳ تا ۸ نشان داده شده‌اند.

$$P_{nor}=P_{cr}\times\frac{L^2}{EI_0};\quad \omega_{nor}=\omega\times\sqrt{\frac{\rho A_0L^4}{EI_0}} \qquad (۶۰)$$

لازم به ذکر است که مطابق با نتایج حاصل شده در مثال ۱، از ۳۰ جمله در بسط سری توانی توصیف کننده فرم تغییر شکل حاکم بر مد اول کمانش استفاده شده است.

جدول ۳: بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون با تغییرات خطی ممان اینرسی سطح مقطع با مقدار دقیق

Table. 3. Normalized critical buckling loads for columns with linear variation of moment of inertia

β	P-P column		C-F column		C-P column	
	ونگ [۳۰]	PSM	ونگ [۳۰]	PSM	ونگ [۳۰]	PSM
۰/۱	۹/۳۷۲	۹/۳۷۲	۲/۳۹۳	۲/۳۹۳	۱۹/۱۷	۱۹/۱۶۸
۰/۳	۸/۳۴۳	۸/۳۴۳	۲/۲۳۵	۲/۲۳۵	۱۷/۰۳	۱۷/۰۳۵
۰/۵	۷/۲۵۶	۷/۲۵۶	۲/۰۶۲	۲/۰۶۲	۱۴/۷۴	۱۴/۷۳۹

جدول ۴: بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون با تغییرات مکعبی ممان اینرسی سطح مقطع با مقدار دقیق

Table. 4. Normalized critical buckling loads for columns with quadratic variation of moment of inertia

β	P-P column		C-F column		C-P column	
	ونگ [۳۰]	PSM	ونگ [۳۰]	PSM	ونگ [۳۰]	PSM
۰/۱	۸/۴۳۶	۸/۴۳۴	۲/۲۴۶	۲/۲۴۶۴	۱۷/۲۵	۱۷/۲۵۲
۰/۳	۵/۸۴۰	۵/۸۴۰	۱/۷۹۸	۱/۷۹۷۷	۱۱/۹۲	۱۱/۹۲۳
۰/۵	۳/۶۲۸	۳/۶۲۸	۱/۳۳۶	۱/۳۳۶۴	۷/۳۶۲	۷/۳۶۲

جدول ۵: بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون با تغییرات مرتبه چهار ممان اینرسی سطح مقطع با مقدار دقیق

Table. 5. Normalized critical buckling loads for columns with cubic variation of moment of inertia

β	P-P column		C-F column		C-P column	
	ونگ [۳۰]	PSM	ونگ [۳۰]	PSM	ونگ [۳۰]	PSM
۰/۱	۷/۹۹۴	۷/۹۹۴	۲/۱۷۵	۲/۱۷۵	۱۶/۳۵	۱۶/۳۵۴
۰/۳	۴/۸۳۶	۴/۸۳۶	۱/۵۹۵	۱/۵۹۵	۹/۸۹۳	۹/۸۹۳
۰/۵	۲/۴۶۷	۹/۹۴۶	۱/۰۲۹	۱/۰۲۹	۵/۰۴۸	۵/۰۵۸

مطابق آنچه در جداول ۳ تا ۵ نشان داده شده است، افزایش مقدار ضریب β، منجر به کاهش سطح مقطع و صلبیت خمشی در طول و به خصوص در انتهای دیگر عضو می‌شود و در نتیجه بار کمانش بحرانی کاهش و ناپایداری افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش توان تغییرات و با ثابت ماندن شیب (β)، مقدار بار کمانش بحرانی به علت بزرگتر شدن انتهای دیگر عضو در مقایسه با حالات دیگر افزایش و ناپایداری کاهش می‌یابد. علاوه بر این موارد، مقایسه مقادیر بار کمانشی محاسبه شده با استفاده از روش عددی ارائه شده با نتایج حاصل شده از روش ونگ[1] [۳۰] نشان دهنده تطابق بسیار خوب با میزان اختلاف ناچیز می‌باشد.

در ادامه نتایج مربوط به فرکانس طبیعی ارتعاش بدون بعد به‌دست آمده برای هر سه مورد عضو غیرمنشوری در نظر گرفته شده در این مثال در جدول‌های ۶ تا ۸ ارائه شده‌اند.

جدول ۶: فرکانس طبیعی ارتعاش بی‌بعد ستون با تغییرات خطی ممان اینرسی سطح مقطع با مقدار دقیق

Table. 6. Normalized natural frequencies for columns with linear variation of moment of inertia

β	P-P column		C-F column		C-P column	
	Ansys	PSM	Ansys	PSM	Ansys	PSM
۰/۱	۹/۷۹۲	۹/۸۶۸	۳/۶۱۸	۳/۶۳۱	۱۵/۲۶۳	۱۵/۵۲۷
۰/۳	۹/۷۸۵	۹/۸۶۰	۳/۹۰۱	۳/۹۱۶	۱۵/۵۰۰	۱۵/۷۶۸
۰/۵	۹/۷۵۲	۹/۸۲۵	۴/۲۹۷	۴/۳۱۵	۱۵/۷۷۰	۱۶/۰۴۴

جدول ۷: فرکانس طبیعی ارتعاش بی‌بعد ستون با تغییرات مکعبی ممان اینرسی سطح مقطع با مقدار دقیق

Table. 7. Normalized natural frequencies s for columns with quadratic variation of moment of inertia

b	P-P column		C-F column		C-P column	
	Ansys	PSM	Ansys	PSM	Ansys	PSM
۰/۱	۹/۳۰۶	۹/۳۶۸	۳/۵۴۷	۳/۵۵۹	۱۴/۶۱۷	۱۴/۸۴۹
۰/۳	۸/۲۵۳	۸/۳۰۲	۳/۶۵۵	۳/۶۶۷	۱۳/۴۶۵	۱۳/۶۴۰
۰/۵	۷/۰۹۳	۷/۱۲۲	۳/۸۱۳	۳/۸۲۴	۱۲/۱۷۵	۱۲/۳۰۰

1 Wang

جدول ۸: فرکانس طبیعی ارتعاش بی‌بعد ستون با تغییرات مرتبه چهار ممان اینرسی سطح مقطع با مقدار دقیق

Table. 8. Normalized natural frequencies for columns with cubic variation of moment of inertia

β	P-P column		C-F column		C-P column	
	Ansys	PSM	Ansys	PSM	Ansys	PSM
۰/۱	۹/۳۰۱	۹/۳۶۲	۳/۶۶۱	۳/۶۷۴	۱۴/۷۲۲	۱۴/۹۵۵
۰/۳	۸/۲۰۶	۸/۲۵۰	۴/۰۵۰	۴/۰۶۷	۱۳/۷۸۲	۱۳/۹۶۲
۰/۵	۶/۹۲۶	۶/۹۵۷	۴/۶۱۰	۴/۶۲۵	۱۲/۷۱۷	۱۲/۸۵۰

با توجه به جداول فوق می‌توان نتیجه‌گیری نمود که تطابق بسیار خوبی میان روش ترکیبی ارائه شده و روش المان محدود به کار برده شده در نرم‌افزار Ansys وجود دارد. همچنین، فرکانس ارتعاشی محاسبه شده با استفاده از روش عددی ارائه شده برای هر سه عضو غیرمنشوری بزرگ‌تر از مقادیر به‌دست آمده از نرم‌افزار انسیس است. براساس مقادیر ارائه شده در جداول ۳ تا ۸ می‌توان نتیجه‌گیری نمود که تغییر عرض نیم‌رخ تیر تاثیر قابل توجهی بر نتایج دارد. درشرایطی که طول و عرض سطح مقطع تیر به صورت همزمان دچار تغییر شوند، پایداری عضو بعلت تغییر شدید سطح مقطع انتهایی عضو، با شدت بیشتری کاهش می‌یابد.

۵- ۳- مثال ۳

به منظور نشان دادن دقت و توانایی روش عددی معرفی شده در این مقاله در محاسبه فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمانش بحرانی اعضای غیرمنشوری مختلف، مثال‌های نمایش داده شده در جدول ۹ بررسی شده‌اند. نتایج حاصل شده با مقادیر محاسبه شده توسط روش‌های عددی و یا تحلیلی موجود دیگر همچنین آنچه توسط نرم‌افزار Ansys به‌دست آمده است، مقایسه می‌گردند.

در مورد اول، رفتار یک تیر جدار نازک غیرمنشوری یک سر گیردار تحت تحلیل‌های پایداری و ارتعاش آزاد مورد مطالعه قرار گرفته است. تیر مدنظر سطح مقطع I متقارن دارد. ارتفاع جان سطح مقطع (فاصله میان بال فوقانی و تحتانی) به صورت خطی از ۶۰۰ میلی‌متر در انتهای گیردار به ۳۰۰ میلی‌متر در انتهای آزاد کاهش یافته است. همچنین تیر مذکور دارای بال ماهیچه‌ای است. مطابق جدول ۹، پهنای بال در طول عضو از ۱۸۸ میلی متر به ۱۴۴ میلی متر تغییر داده شده است. در این مورد، مدول الاستیسیته و چگالی مصالح مصرفی به ترتیب ۲۱۰ گیگاپاسکال، ۷۸۵۰ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده‌اند.

مورد دوم یک ستون یک سر گیردار با جان ماهیچه‌ای که نیمرخ I متقارن دارد در نظر گرفته شده است. در این مورد، ارتفاع جان (فاصله میانتار دو بال) ستون مد نظر به صورت خطی در طول تیر از ۶۰۰ میلی متر در انتهای گیردار به ۳۰۰ میلی متر در انتهای آزاد تغییر می‌کند. بار متمرکز فشاری بر مرکز سطح نیم‌رخ تیر در انتهای آزاد آن وارد می‌شود.

مورد سوم بیانگر مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمانشی تیر طره با بال باریک شونده است. پهنای بال در طول عضو الاستیک مدنظر به صورت خطی تغییر می‌کند و در نتیجه در انتهای آزاد عضو کاهش یافته است.

مورد چهارم یک ستون دو سر مفصل با جان ماهیچه‌ای که نیمرخ متقارن دارد و تحت تحلیل ارتعاشی و پایداری قرار دارد را در نظر گرفته است. در این مورد، ارتفاع جان ستون مد نظر به صورت خطی در طول تیر از ۶۰۰ میلی متر در انتهای سمت چپ به ۳۶۰ میلی متر در انتهای دیگر تغییر می‌کند؛ درحالی‌که، پهنای بال در طول عضو ثابت باقی می‌ماند.

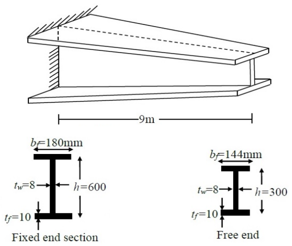
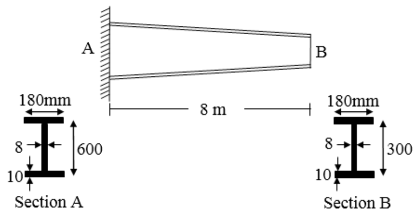
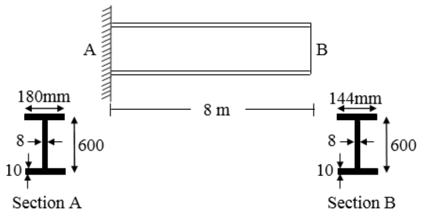
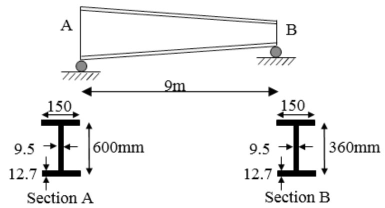
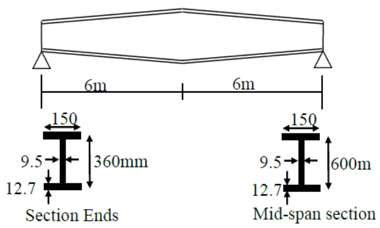
مورد پنجم مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمانشی برای یک تیر دوسر مفصل غیرمنشوری متشکل از دو المان ماهیچه‌ای را نشان می‌دهد. در این مورد، فرض شده است که خصوصیات هندسی و مصالح تیر نسبت به محور طولی عضو متقارن هستند، بدین معنی که هر دو المان مقاطع و ثابت باریک شوندگی یکسانی دارند.

در هر چهار مورد اخیر، ضریب ارتجاعی، چگالی جرمی و ضریب پواسون مصالح تیرهای غیرمنشوری به ترتیب ۲۱۰ گیگاپاسکال، ۷۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و ۰/۳ فرض شده‌اند. همچنین، خصوصیات هندسی و نیمرخ تمامی موارد مذکور در جدول ۹ نشان داده شده‌اند.

با توجه به نتایج بدست آمده از تحلیل ارتعاشی و پایداری پنج مورد ارائه شده در جدول ۹، مشاهده می‌شود روش پیشنهادی در این مقاله در مقایسه با سایر روش‌های موجود از کارآیی، عملکرد و دقت بسیار خوبی برخوردار است.

جدول ۹: بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش برای اعضای غیرمنشوری متفاوت

Table. 9. Critical buckling load and natural frequency for different members with varying cross-section

	بار بحرانی (kN)		فرکانس طبیعی ارتعاش ω(rad/s)	
	مرجع	روش ارائه شده	مرجع	روش ارائه شده
مورد اول 	۵۰/۸۶۸ [۳۲]	۵۳/۳۹۳	۸/۶۵ [۳۲]	۸/۶۵۲
مورد دوم 	۷۸/۲۵۱ [۳۲]	۸۱/۴۷۹	۱۱/۱۲ [۲۹] ۱۱/۰۶ [۳۲]	۱۱/۱۳
مورد سوم 	۶۲/۵۰۴ [۳۲]	۶۷/۳۸۶	۹/۵۰ [۲۹] ۹/۴۳ [۳۲]	۹/۵۰۵
مورد چهارم 	۱۸۲/۷۷۸ [۲۹] ۱۸۳/۵ [۳۲]	۱۸۳/۷۴۲	۱۸/۶۵ [۲۹] ۱۸/۵۲ [۳۲]	۱۸/۶۴۸
مورد پنجم 	۱۰۲/۸۴ [۳۲]	۱۰۳/۳۵۳	۱۰/۲۱ [۲۹] ۱۰/۱۲ [۳۲]	۱۰/۲۰

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، از ترکیب دو روش سری‌های توانی و گالرکین، یک روش عددی جدید با هدف تحلیل پایداری و ارتعاشی اعضای ارتجاعی با مقطع متغیر ارائه شده است.

ابتدا، معادله دیفرانسیل تعادل حاکم بر ستون غیرمنشوری با استفاده از از روابط حاکم بر تغییر شکل تیر اویلر-برنولی و اصل پایستگی انرژی پتانسیل به‌دست آمد و در ادامه، با استفاده از روش بسط سری‌های توانی، معادله دیفرانسیل پایداری حاکم بر ستون غیرمنشوری حل گردید. سپس، با اعمال شرایط مرزی حاکم بر هر دهانه عضو، فرم تقریبی تغییر شکل کمانشی حاصل شد و با استفاده از روش حل مسئله مقدار ویژه مقدار بار کمانش بحرانی عضو مدنظر محاسبه شد. در پایان، با استفاده از تابع تغییر شکل حاصل شده از تحلیل پایداری و با استفاده از روش تقریبی گالرکین مقدار فرکانس طبیعی ارتعاش تعیین گردید. در انتهای پژوهش حاضر، تاثیر عواملی مختلفی همچون شرایط مرزی گوناگون و شدت تغییرات سطح مقطع بر بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته است. پس از بررسی نتایج مثال‌های عددی ارائه شده، ذکر موارد زیر ضروری است:

- تنها با به کاربردن حداقل ۳۰ جمله از بسط سری توانی، مقادیر بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی را می‌توان با میزان خطای کمتر از ۱٪ به‌دست آورد.
- تطابق قابل قبولی میان نتایج محاسبه شده برای بارهای کمانشی و فرکانس طبیعی ارتعاش با استفاده از روش عددی ارائه شده و روش‌های عددی و تحلیلی دیگر وجود دارد.
- با استفاده از روش معرفی شده می‌توان، مقدار بار بحرانی و فرکانس ارتعاشی را همزمان محاسبه نمود.

پیوست ۱

$$w_0(\varepsilon) = 1$$

$$w_1(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$w_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{24EI_0^*}\left[4EI_2^* - 2L^2P\right] - \frac{\varepsilon^5}{120EI_0^*}\left[-3\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(4EI_0^* - 2L^2P\right) + 12EI_3^*\right]$$
$$- \frac{\varepsilon^6}{360EI_0^*}\left[-\frac{2I_1^*}{I_0^*}\left(-3\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(4EI_0^* - 2L^2P\right) + 12EI_3^*\right) + 24EI_4^* - \frac{(12EI_2^* - L^2P)}{2EI_0^*}\left(4EI_2^* - 2L^2P\right)\right] + \ldots$$

$$w_3(\varepsilon) = \varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^4}{24EI_0^*}(12EI_1^*) - \frac{\varepsilon^5}{120EI_0^*}\left[-\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(36EI_1^*\right) + 36EI_2^* - 6L^2P\right]$$
$$- \frac{\varepsilon^6}{360EI_0^*}\left[-\frac{2I_1^*}{I_0^*}\left(-\frac{I_1^*}{I_0^*}\left(36EI_1^*\right) + 36EI_2^* - 6L^2P\right) + 72EI_3^* - \frac{(12EI_2^* - L^2P)}{2EI_0^*}(12EI_1^*)\right] + \ldots$$

مراجع

[1] S.P. Timoshenko, J.M Gere, Theory of elastic stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1961.

[2] W.F. Chen, E.M. Lui, Structural stability, theory and implementation, Elsevier, 1987.

[3] Z.P. Bazant, L. Cedolin L, Stability of structures Elastic, inelastic fracture and damage theories, Dover Publications, 1991.

[4] R. Frisch-Fay, On the stability of a strut under uniformly distributed axial forces, International Journal of Solids and Structures, 2(3) (1962) 361–369.

[5] D.L. Karabalis, D.E. Beskos, Static, dynamic and stability of structures composed of tapered beams, Computers and Structures, 16(6) (1983) 731-748.

[6] M.S. Lake, M.M. Mikulas, Buckling and vibration analysis of a simply supported column with apiece wise constant cross section, National Aeronautic and Space Administration NASA, 1991.

[7] F. Arbabi, F. Li, Buckling of variable cross-section columns: integral equation approach, Journal of Structural Engineering, 117(8) (1991) 2426–2441.

[8] A. Siginer, Buckling of columns of variable flexural rigidity, Journal of Engineering Mechanics, 118(3) (1992) 543–640.

[9] J. Ermopulos, Equivalent buckling length of non-uniform members, Journal of Constructional Steel Research, 442 (1977) 141–158.

[10] J. Ermopoulos, Buckling length of non-uniform members under stepped axial loads, Computers and Structures, 73 (1999) 573-582.

[11] I. Raftoyiannis, J. Ermopoulos, Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections, Engineering Structures, 27 (2005) 1248–1257.

[12] Z.C. Girgin, K. Girgin, A numerical method for static or dynamic stiffness matrix of non-uniform members resting on variable elastic Foundations, Engineering Structures, 27 (2005) 1373–1384.

[13] I.E. Avramidis, K. Mofidis, Bending of beams on three- parameter elastic foundation, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006) 357-375.

[14] H. Saffari, R. Rahgozar, R. Jahanshahi, An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members, Journal of Constructional Steel Research, 64 (2008) 400–406.

[15] A.R. Rahai, S. Kazemi, Buckling analysis of non-prismatic column based on modified vibration method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13 (2008) 1721–1735.

[16] M.T. Atay, S.B. Coşkun, Elastic stability of Euler columns with a continuous elastic restraint using variational iteration method, Computers and Mathematics with Applications, 58(11–12) (2009) 2528–2534.

[17] S.B. Coşkun, M.T. Atay, Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method, Computers and Mathematic with Applications, 58(11–12) (2009) 2260–2266.

[18] F. Okay, M.T. Atay, S.B. Coçkun, Determination of buckling loads and mode shapes of a heavy vertical column under its own weight using the variational iteration method, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 11(10) (2010) 851–857.

[19] R. Attarnejad, Basic displacement functions in analysis of non-prismatic beams, Engineering with Computers, 27(6) (2010) 733-745.

[20] A. Shahba, R. Attarnejad, M. Tavanaie Marvi, S. Hajilar, Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions, Composite Part. B, 42 (2011) 801–808.

[21] A. Shahba, S. Rajasekaran, Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials, Applied Mathematical Modelling, 36(7) (2012) 3094-3111.

[22] A. Shahba, R. Attarnejad, S. Hajilar, A mechanical-based solution for axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 20 (2013) 696-707.

[23] M. Eisenberger, J. Clastornik, Beams on variable two-parameter elastic foundation, Journal of Engineering Mechanics, 113(10) (1987) 1454-1466.

[24] H. Matsunaga, Vibration and buckling of deep beam–columns on two parameter elastic foundations, Journal of Sound and Vibration, 228(2) (1999) 359–76.

[25] M. Eisenberger, Vibration frequencies for beams on variable one-and two- parameters elastic foundation, Journal of Sound and Vibration, 176(5) (1994) 577–584.

[26] S.Z. Al-Sadder, Exact expression for stability functions of a general non- prismatic beam-column member, Journal of Constructional Steel Research, 60 (2004)1561–1584.

[27] N-II Kim, C.C. Fu, M.Y. Kim, Stiffness matrices for flexural–torsional/lateral buckling and vibration analysis of thin-walled beam, Journal of Sound and Vibration, 299 (2007) 739–756.

[28] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, Thin-Walled Structures, 62 (2013) 96–108.

[29] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams, Thin-Walled Structures, 82 (2014) 245-261.

[30] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy,Exact Solutions for Buckling of Structural Members, CRC Press LLC, Florida, 2005.

[31] MATLAB Version7.6, MathWorks Inc, USA, 2008.

[32] ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis System, Inc, 2007.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Soltani, B. Asgarian, Stability and free vibration analyses of non-prismatic columns using the combination of power series expansions and Galerkin’s method, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 50(6) (2019) 1017-1032.

DOI: 10.22060/ceej.2017.12265.5169