



الگوریتم محاسبه مجموعه مجاز و مجموعه مقاوم مبتنی بر توابع متعامد، برای سیستم‌های مقید خطی نامتغیر با زمان

مسعود حمصیان اتفاق^۱، مهیار نراقی^{۱*}، فرزاد توحیدخواه^۲

^۱دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
^۲دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده: مجموعه مجاز و مجموعه مقاوم نقش انکارناپذیری در تضمین پایداری سیستم‌های مقید و روش کنترل پیش‌بین دارد. در اینجا با استفاده از توابع متعامد، برای سیستم‌های مقید خطی نامتغیر با زمان، الگوریتم‌هایی جهت محاسبه این مجموعه‌ها ارائه می‌گردد. الگوریتم‌های استاندارد تولید این مجموعه‌ها که تاکنون ارائه شده‌اند به صورت تکراری در حوزه زمان عمل می‌کنند و توانایی اعمال روی سیستم‌هایی که بردار ورودی آن‌ها در فضایی بجز فضای زمان ساخته می‌شود را ندارند. الگوریتم‌های ارائه شده در این مقاله با استفاده یکپارچه و یکباره از تمامی ورودی‌های سیستم در کل افق زمان اقدام به رفع این محدودیت کرده است. الگوریتم ارائه شده برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم بگونه‌ای تدوین گشته است که توانایی کار در حضور اغتشاش و عدم قطعیت‌های پارامتری را داشته باشد. برای اطمینان از صحت عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی، نتایج آن‌ها با نتایج الگوریتم‌های استاندارد مقایسه شده است. در نهایت، با ارائه مثال‌هایی، زمان انجام محاسبات توسط الگوریتم‌های پیشنهادی با الگوریتم‌های استاندارد مقایسه شده است و میزان تأثیر پارامتری کردن بردار ورودی توسط توابع متعامد روی مجموعه‌های مجاز و مجاز مقاوم بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که پارامتری کردن بردار ورودی منجر به بهبود مجموعه‌های مجاز و مجاز مقاوم می‌شود.	تاریخچه داوری: دریافت: بازنگری: پذیرش: ارائه آنلاین:
کلمات کلیدی: مجموعه مجاز مجموعه مجاز مقاوم پارامتری کردن توابع متعامد کنترل پیش‌بین	

۱- مقدمه

آن مجموعه، به صورت کامل داخل آن مجموعه قرار می‌گیرد [۳]. اهمیت اساسی دیگر این مجموعه‌ها حصول پایداری برای شرایط اولیه انتخابی داخل این مجموعه‌ها بدون نیاز به بررسی برخط کاهنده بودن تابع لیپانوف است [۴]. به عبارت دیگر، نشان داده شده که با انتخاب شرایط اولیه درون مجموعه مجاز و استخراج پاسخ بهینه مسأله کنترل پیش‌بین افق محدود با در نظر گرفتن قیود سیستم و استفاده از قید نهایی^۴ می‌توان از پایداری حلقه بسته سیستم مقید اطمینان حاصل کرد، و دیگر نیازی به بررسی شرط کاهنده بودن یکنوای^۵ تابع هزینه (تابع لیپانوف) نیست [۴]. این نکته اهمیت بسزایی در کاهش زمان انجام محاسبات برخط برای طراحی کنترل پیش‌بین برای سیستم‌هایی با دینامیک حلقه باز ناپایدار دارد. از دیگر نتایج کاربردی این مجموعه‌ها عدم نیاز به افق‌های طولانی و مشکلات مربوط به آن (محاسبات سنگین، ناپایداری عددی و اشغال زیاد حافظه) برای اطمینان از پایداری و ارضای قیود است [۳].

موارد فوق باعث شده است که پژوهش‌های وسیعی پیرامون موضوع مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم شکل گیرد. در مرجع [۵] تعریف این مجموعه‌ها برای سیستم‌های پیوسته و گسسته به صورت دقیق و با استفاده

یکی از مفاهیم مهم و اساسی در چارچوب کاری الگوریتم‌های کنترلی برای سیستم‌های مقید و بطور خاص کنترل پیش‌بین مقید مجموعه‌های مجاز^۱ است که مطابق تعریف عبارت است از زیرفضایی از فضای حالت که برای آن قانون کنترلی وجود داشته باشد که تمامی قیدها را ارضاء نماید. این مجموعه‌ها ارتباط تنگاتنگی با افق پیش‌بین دارند و بطور معمول هرچه افق پیش‌بین بلندتر شود این مجموعه‌ها نیز بزرگتر می‌شوند [۱]. به صورت مشابه، مجموعه‌های مجاز مقاوم^۲ برای سیستم‌های همراه با اغتشاش یا عدم قطعیت تعریف می‌شوند و عبارتند از زیرفضایی از فضای حالت که برای آن قانون کنترلی وجود داشته باشد که در حضور همه عدم قطعیت‌های ممکن، تمامی قیدهای سیستم را ارضاء نماید [۲].

ویژگی مهم و اساسی مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم در مثبت پایایی^۳ آن نسبت به سیستم حلقه بسته است که بنا به تعریف، منحنی مسیر حلقه بسته سیستم برای زمان‌های آینده به ازای هر شرط اولیه انتخابی در

- 1 Feasible Set
- 2 Robust Feasible Sets
- 3 Positive Invariance

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: naraghi@aut.ac.ir

4 Terminal Constraint
5 Monotonically Decreasing

بردار ورودی آن‌ها توسط توابع متعامد پارامتری شده است. در این مقاله بردار ورودی کنترلی در فضایی، متفاوت از فضای زمان ساخته می‌شود. این تفاوت باعث می‌گردد که الگوریتم‌های موجود و مرسوم نتوانند مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم چنین سیستم‌هایی را محاسبه کنند. الگوریتم ارائه شده در اینجا با رفع این محدودیت اقدام به تولید مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم برای سیستم‌های خطی مستقل از زمان با ورودی پارامتری شده می‌کند. به عبارت دیگر، هدف این مقاله جستجو و دسته بندی شرایط اولیه‌ای است که در آن‌ها سیستم دینامیکی کنترل شده توسط ورودی پارامتری شده با توابع متعامد، مسیرهای پایداری را ایجاد کنند که همواره داخل مجموعه باقی بمانند. همان‌گونه که اشاره شد این مسأله کاربردهای اساسی در کنترل و پایداری سیستم‌های مقید، خصوصاً کنترل پیش‌بین دارد. پیکربندی این مقاله بدین ترتیب است: در بخش دوم پیش‌زمینه‌ای بر سیستم‌های مقید خطی نامتغیر با زمان، مجموعه‌های مجاز و مجموعه‌های مجاز مقاوم ارائه می‌گردد. بخش سوم اختصاص دارد به معرفی توابع متعامد و پارامتری کردن سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان توسط این توابع. محاسبه مجموعه‌های مجاز برای سیستم‌های پارامتری شده در بخش چهارم آمده است و بخش پنجم به محاسبه مجموعه‌های مجاز مقاوم اختصاص دارد. نتیجه‌گیری نهایی در بخش آخر آورده شده است.

۲- پیش زمینه

در این مقاله مدل فضای حالت سیستم مقید خطی نامتغیر با زمان به صورت زیر مفروض است.

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (الف-۱)$$

$$x(0) = x_0 \quad (ب-۱)$$

$$u(i) \in \mathbb{U}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (ج-۱)$$

$$x(i) \in \mathbb{X}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (د-۱)$$

$$x(N_p) \in \mathbb{X}_T, \quad (ه-۱)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس سیستمی، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس ورودی و N_p افق کنترل است. زوج (A, B) کنترل پذیر فرض می‌شوند و مجموعه‌های $\mathbb{U}, \mathbb{X}_T, \mathbb{X}$ چندوجهی‌های محدبی هستند که به ترتیب قید حالت، قید نهایی و قید ورودی را تشکیل می‌دهند و مبدأ یک نقطه درونی از این چندوجهی‌ها است. نمایش ماتریسی این چندوجهی‌ها عبارتست از:

$$x(i) \in \mathbb{X} \leftrightarrow H_x x \leq h_x, \quad (الف-۲)$$

از جبر مجموعه‌ها انجام گردید و نشان داده شد که مجموعه مجاز برای یک سیستم خطی نامتغیر با زمان^۱ همراه با قیود خطی، یک مجموعه محدب است. به این ترتیب مجموعه مجاز را می‌توان توسط یک چندوجهی محدب^۲ تعریف نمود. محاسبه مجموعه مجاز با استفاده از روش هندسی تصویر کردن متعامد^۳ [۶] توسط جونز [۷] انجام گردید که از آن در الگوریتم محاسباتی [۸] استفاده شده است. کریگان [۲ و ۹] اقدام به تدوین شرایط لازم و کافی برای مجموعه مجاز مقاوم با فرض اغتشاش به تنهایی و اغتشاش همراه با عدم قطعیت، کرد. وی با بررسی مثبت پایایی این مجموعه الگوریتم محاسباتی آن را بر مبنای چندوجهی‌ها ارائه نمود. از این الگوریتم در بسته محاسباتی [۸] برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم استفاده شده است [۱۰].

یکی از مشکلات پیاده سازی کنترلرهای مقید (از قبیل کنترل پیش‌بین) مربوط به محدودیت زمان نمونه برداری است. با توجه به محاسبات نسبتاً سنگین و زمان بر بهینه‌سازی مقید در این کنترل کننده‌ها امکان کاهش زمان نمونه برداری بیشتر از حد معینی وجود ندارد [۱۱]. برای مقابله با این موضوع استراتژی‌های مختلفی از قبیل کنترل پیش‌بین صریح [۱۱]، سرعت بخشی به الگوریتم‌های حل [۱۲] و تبدیل قیود سخت به متغیرهای اسلک^۴ [۴] ارائه شده است. یکی از این روش‌ها کاهش حجم محاسبات از طریق کاهش تعداد متغیرات تصمیم‌گیری است که خود به دو زیر شاخه، تقسیم می‌شود: شاخه اول کاهش افق‌های پیش‌بین و کنترل و شاخه دوم پارامتری کردن سیگنال کنترلی توسط تعداد متغیر کمتری نسبت به افق پیش‌بین. کاهش افق‌ها این ایراد را به همراه دارد که به همراه آن مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم شدیداً کاهش می‌یابند [۱]. روش پارامتری کردن سیگنال کنترلی با استفاده از یک دینامیک از پیش تعیین شده اقدام به تولید رشته سیگنال کنترلی $\{v(0), \dots, v(N_p - 1)\}$ با تعداد متغیر کمتری می‌کند [۱۳]. این روش ابتدا توسط وانگ با به کارگیری شبکه لاگر برای کنترل پیش‌بین سیستم‌های پیوسته و سپس برای سیستم‌های گسسته ارائه شد [۱۴-۱۳]. سپس، استفاده از توابع متعامد مرتبه بالاتر همراه با بهینه‌سازی پارامترهای این توابع در انجام گرفت [۱۵]. همچنین نشان داده شده است که پارامتری کردن منجر به بهبود عملکرد سیستم و افزایش حوزه جذب می‌شود [۱۶-۱۷]. در پژوهش‌های فوق مشخص نشده است که محاسبه مجموعه مجاز به چه ترتیبی صورت گرفته است. احتمالاً روش مورد استفاده شبکه بندی فضای متغیر حالت و بررسی نقاط آن شبکه بوده است. همچنین طبق بررسی‌های صورت گرفته هیچ پژوهشی در خصوص مجموعه مجاز مقاوم برای سیستم‌های پارامتری شده توسط توابع متعامد گزارش نشده است.

هدف این مقاله ارائه روش و الگوریتمی برای محاسبه مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم، برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمانی است که

- 1 Linear Time Invariant (LTI)
- 2 Polyhedron-Polytope
- 3 Projection
- 4 Projection

$$S_U(N_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ B & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{cl}B & B & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{cl}^2B & AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{cl}^{N_p-1}B & A_{cl}^{N_p-2}B & A_{cl}^{N_p-3}B & \cdots & \cdots & B \end{bmatrix} \quad (د-۶)$$

در صورتی که ورودی کنترلی از رابطه (۳) تبعیت نکند، روابط (۴) تا (۶) با فرض $K=0_{m \times n}$ همچنان صحیح هستند.

۲-۱- مجموعه مجاز مجموعه مجاز به آن دسته از شرایط اولیه گفته می‌شود که به ازای آن‌ها یک قانون کنترلی وجود دارد که اولاً قیود سیستم نقض نشود و ثانیاً متغیر حالت نهایی $x(N_p)$ در داخل قید نهایی \mathbb{X}_T قرار گیرد [۱]. به بیان ریاضی، مجموعه مجاز $\mathbb{X}_F(N_p)$ برای سیستم دینامیکی (۴) به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود:

$$\mathbb{X}_F(N_p) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists v(i), Kx(i) + v(i) \in \mathbb{U}, x(i) \in \mathbb{X}, i = 0, 1, \dots, N_p - 1, x(N_p) \in \mathbb{X}_T\} \quad (۷)$$

که در این رابطه، وابستگی این مجموعه به افق کنترل (N_p) به صراحت نشان داده شده است. الگوریتم استاندارد محاسبه $\mathbb{X}_F(N_p)$ از طریق محاسبه $\mathbb{X}_F(1)$ و قرار دادن مجموعه حاصل به جای رابطه (۴-ه) و سپس N_p بار تکرار فرایند است [۹ و ۱۹]. محاسبه $\mathbb{X}_F(1)$ به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

$$\mathbb{X}_F(1) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x_0 \in \mathbb{X}, A_{cl}x_0 + Bv(0) \in \mathbb{U}, Kx_0 + v(0) \in \mathbb{U}\} \quad (۸)$$

با توجه به نمایش چندوجهی قیود در (۲)، رابطه (۸) به این صورت تبدیل می‌شود:

$$\mathbb{X}_F(1) = \{x_0 \mid H_x x_0 \leq h_x, H_T (A_{cl}x_0 + Bv(0)) \leq h_T, H_u (Kx_0 + v(0)) \leq h_u\} \quad (الف-۹)$$

$$= \left\{ x_0 \mid \begin{bmatrix} H_x & 0 \\ H_T A_{cl} & H_T B \\ H_u K & H_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ v(0) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} h_x \\ h_T \\ h_u \end{bmatrix} \right\} \quad (ب-۹)$$

نامساوی ماتریسی رابطه (ب-۹) بیان ماتریسی یک چندوجهی محدب است [۶] و مجموعه مجاز $\mathbb{X}_F(1)$ از تصویر کردن^۲ این چندوجهی روی فضای متغیرهای حالت \mathbb{R}^n به دست می‌آید [۷]. الگوریتم محاسبه $\mathbb{X}_F(N_p)$ به صورت زیر است [۱۹]:

$$x(N_p) \in \mathbb{X}_T \leftrightarrow H_T x \leq h_T, \quad (ب-۲)$$

$$u(i) \in \mathbb{U} \leftrightarrow H_u x \leq h_u. \quad (ج-۲)$$

که در آن‌ها ماتریس‌های H_u ، H_T و H_x ، بردارهای h_u و h_T و h_x ضرایب و مقدار ثابت معادلات نیم‌صفحه‌ای هستند که قیود \mathbb{X} ، \mathbb{X}_T ، \mathbb{U} را نشان می‌دهند. برای سیستم‌های مفید معمولاً ورودی کنترلی به صورت رابطه (۳) صورت فرض می‌شود:

$$u(i) = Kx(i) + v(i) \quad (۳)$$

که در آن ضریب $K_{(m \times n)}$ و بردار تصمیم‌گیری جدید $v \in \mathbb{R}^m$ از روش مناسب به دست می‌آید. برای نمونه می‌توان روش کنترل دوگانه^۱ در کنترل پیش‌بین را نام برد که ضریب K از حل معادله جبری-ریکاتی به دست می‌آید [۴ و ۱۸]. در این مقاله به منظور عمومیت بخشیدن به روابط، بردار ورودی را به صورت رابطه (۳) در نظر می‌گیریم. به این ترتیب سیستم تعریف شده در رابطه (۱) عبارتست از:

$$x(i+1) = \underbrace{(A+BK)}_{A_{cl}} x(i) + Bv(i), \quad i = 0, 1, \dots, N_p - 1 \quad (الف-۴)$$

$$x(0) = x_0 \quad (ب-۴)$$

$$Kx(i) + v(i) \in \mathbb{U}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (ج-۴)$$

$$x(i) \in \mathbb{X}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (د-۴)$$

$$x(N_p) \in \mathbb{X}_T, \quad (ه-۴)$$

پاسخ سیستم تعریف شده در رابطه (۴) در افق کنترل N_p به صورت یکپارچه به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$X(N_p) = S_X(N_p)x_0 + S_U(N_p)V \quad (۵)$$

که در آن متغیرهای $S_X(N_p)$ ، $S_U(N_p)$ و V به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$X^T = \begin{bmatrix} x(0)^T & x(1)^T & x(2)^T & \cdots & x(N_p)^T \end{bmatrix} \quad (الف-۶)$$

$$V^T = \begin{bmatrix} v(0)^T & v(1)^T & v(2)^T & \cdots & v(N_p-1)^T \end{bmatrix} \quad (ب-۶)$$

$$S_x^T(N_p) = \begin{bmatrix} I & A_{cl}^T & A_{cl}^{2T} & \cdots & A_{cl}^{N_p T} \end{bmatrix} \quad (ج-۶)$$

و $A_{cl}(w^p(i)), B(w^p(i))$ به صورت زیر قابل نمایش هستند [۹ و ۲۱]:

$$A_{cl}(w^p(i)) = \sum_{j=1}^r \lambda_j A_j \quad (۱۲-الف)$$

$$B(w^p(i)) = \sum_{j=1}^r \lambda_j B_j \quad (۱۲-ب)$$

$$0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1. \quad (۱۲-ج)$$

به بیان ریاضی، مجموعه مجاز مقاوم $\mathbb{X}_{RF}(N_p)$ برای سیستم دینامیکی روابط (۱۱)-(۱۲) عبارتست از [۲]:

$$\mathbb{X}_{RF}(N_p) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists v(i), Kx(i) + v(i) \in \mathbb{U}, x(i) \in \mathbb{X}, i = 0, \dots, N_p - 1, x(N_p) \in \mathbb{X}_T, \forall (w^p(i), w^d(i)) \in \mathbb{W}^p \times \mathbb{W}^d\}. \quad (۱۳)$$

ویژگی رابطه (۱۲) باعث می‌شود که بتوان از لم زیر برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم استفاده کرد.

لم ۱ [۲۲]: فرض کنید تابع $g(z, x, w): \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}$ هر زوج (z, x) نسبت به w محدب باشد. همچنین فرض کنید متغیر w متعلق به چندوجهی W با رئوس $\{\bar{w}_j\}_{j=1}^{n_w}$ باشد. آنگاه قید $g(z, x, w) \leq 0 \forall w \in W$ برقرار است اگر و تنها اگر:

$$g(z, x, \bar{w}_j) \leq 0, j = 1, \dots, n_w. \quad (۱۴)$$

همچنین اگر $g(z, x, w) = g^{(1)}(z, x) + g^{(2)}(w)$ آنگاه قید $g(z, x, w) \leq 0$ را می‌توان با عبارت $g^{(1)}(z, x) \leq \bar{g}$ جایگزین کرد که در آن $\bar{g} = [\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n_g}]^T$ برداری است که عضو زام توسط رابطه تعریف می‌شود. اثبات. به [۲۱ و ۲۲] رجوع شود.

با استفاده از لم ۱ می‌توان اثر عدم قطعیت و اغتشاش $(w^p(i), w^d(i))$ را روی مجموعه مجاز مقاوم رابطه (۱۳) به صورت صریح نمایش داد. الگوریتم استاندارد ایجاد این مجموعه مشابه الگوریتم محاسبه مجموعه مجاز است؛ بدین ترتیب که ابتدا $\mathbb{X}_{RF}(1)$ به دست می‌آید و سپس با جایگزین کردن مجموعه حاصل به جای رابطه (۱۱-ه) و تکرار فرایند به اندازه N_p بار مقدار $\mathbb{X}_{RF}(N_p)$ حاصل می‌شود [۲ و ۹]. محاسبه $\mathbb{X}_{RF}(1)$ به صورت زیر است:

$$\mathbb{X}_{RF}(1) = \{x_0 \in \mathbb{X} \mid \exists v(0), Kx_0 + v(0) \in \mathbb{U}, A_{cl}(w_p)x_0 + B(w_p)v(0) + Ew_d \in \mathbb{X}_T, \forall (w^p, w^d) \in \mathbb{W}^p \times \mathbb{W}^d\} \quad (۱۵)$$

با توجه به نمایش چندوجهی قیود در روابط (۲) و (۱۲) و نیز استفاده از لم ۱، رابطه (۱۵) به صورت:

الگوریتم ۱ (محاسبه مجموعه مجاز) - برای سیستم تعریف شده در رابطه (۴)، مجموعه مجاز $\mathbb{X}_F(N_p)$ با استفاده از روابط (۷) تا (۹) به صورت زیر است:

۱. قرار بده $j=1$
 ۲. با استفاده از رابطه (۹-ب) و (۴) مقدار $\mathbb{X}_F(1)$ را به دست آور و در $\mathbb{X}'_T(j)$ قرار بده.
 ۳. در رابطه (۴-ه) مقدار $\mathbb{X}_F(1)$ را جایگزین $\mathbb{X}'_T(j)$ بکن.
 ۴. قرار بده $j=j+1$
 ۵. حلقه ۲ تا ۴ تا آنجایی ادامه بده که $j=N_p+1$.
- با استفاده از این الگوریتم داریم:

$$\mathbb{X}_F(j) = \mathbb{X}'_T(j), j = 1, 2, \dots, N_p. \quad (۱۰)$$

شکل ۱ (الف) فلوچارت الگوریتم ۱ را نشان می‌دهد. همان طور که از شکل مشخص است، این الگوریتم یک روش بازگشتی است، بدین ترتیب که برای محاسبه $\mathbb{X}_F(N_p)$ ابتدا باید $\mathbb{X}_F(N_p-1)$ را محاسبه کرد. بازگشتی بودن این الگوریتم نسبت به افق زمان و ورودی‌های منجر به تولید بسته‌های محاسباتی بر مبنای آن شده است [۸]. البته برای سیستم‌های با ابعاد بالا، الگوریتم ۱ ممکن است دچار خطاهای عددی شود [۱ و ۲۰].

۲-۲- مجموعه مجاز مقاوم

مجموعه مجاز معرفی شده در بخش ۱-۲ برای سیستم نامی رابطه (۴) معتبر است. برای سیستم‌های متأثر از اغتشاش یا عدم قطعیت مفهوم دیگری با عنوان مجموعه مجاز مقاوم استفاده می‌شود که در آن اثر اغتشاش و عدم قطعیت به صورت حداکثری دیده شده است. مجموعه مجاز مقاوم سیستم دینامیکی متأثر از اغتشاش یا عدم قطعیت عبارتست از مجموعه شرایط اولیه‌ای که به ازای آن‌ها یک قانون کنترلی با توانایی ارضای قیود سیستم و قید نهایی وجود داشته باشد [۲]. سیستم دینامیکی مورد استفاده برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم همان سیستم رابطه (۴) است که به آن عدم قطعیت و اغتشاش چندوجهی $w^p(i)$ و $w^d(i)$ به صورت زیر اضافه شده است:

$$x(i+1) = A_{cl}(w^p(i))x(i) + B(w^p(i))v(i) + Ew^d(i), i = 0, 1, \dots, N_p - 1 \quad (۱۱-الف)$$

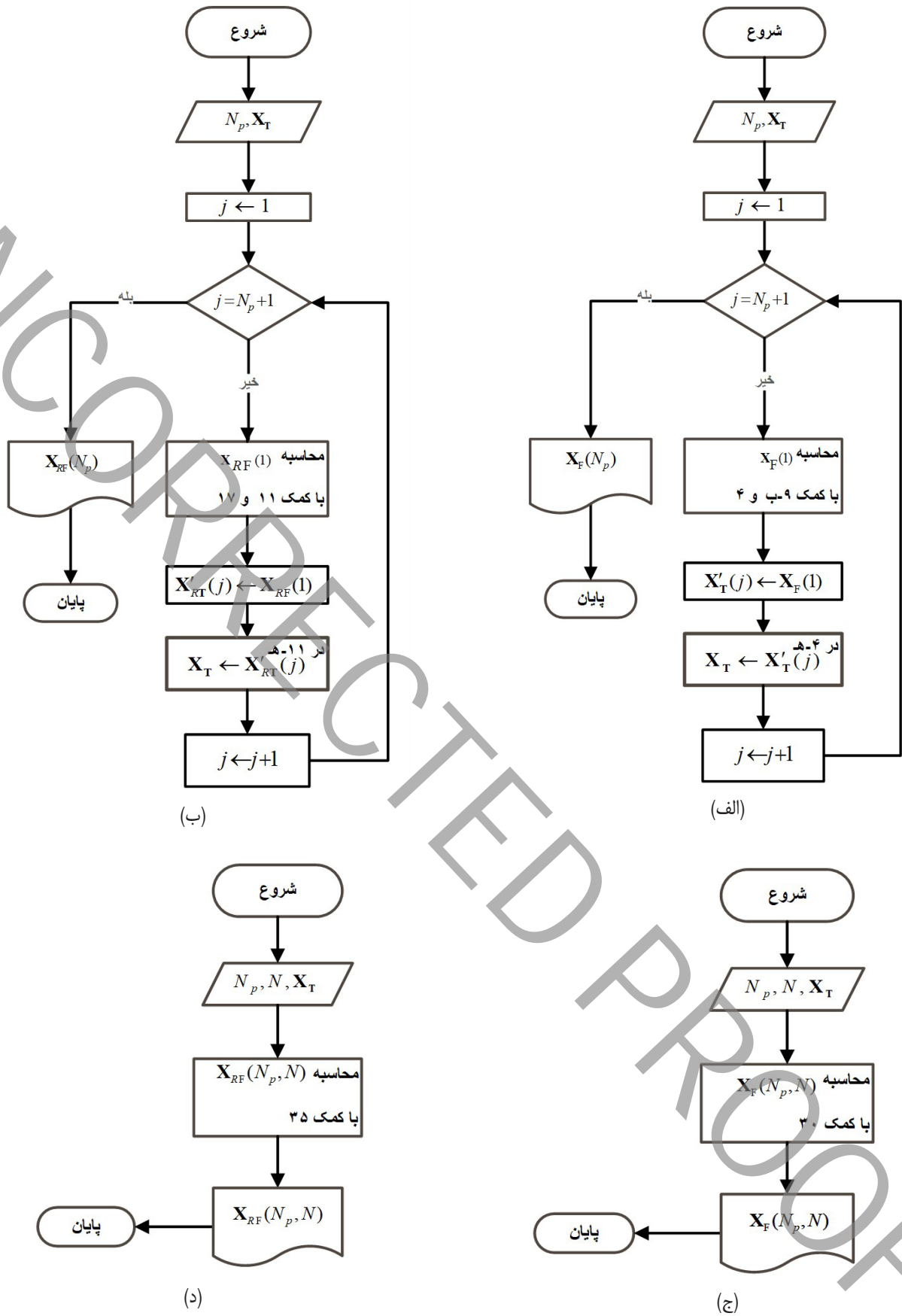
$$x(0) = x_0 \quad (۱۱-ب)$$

$$Kx(i) + v(i) \in \mathbb{U}, i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (۱۱-ج)$$

$$x(i) \in \mathbb{X}, i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (۱۱-د)$$

$$x(N_p) \in \mathbb{X}_T, \quad (۱۱-ه)$$

که در آن $w(i) = (w^p(i), w^d(i)) \in \mathbb{W}^p \times \mathbb{W}^d$ اغتشاش نامعلوم وارده به سیستم است. فرض می‌شود که مبدأ یک نقطه درونی از چندوجهی \mathbb{W}^d است



شکل ۱: (الف) فلوجارت الگوریتم ۱ برای محاسبه مجموعه مجاز؛ (ب) فلوجارت الگوریتم ۲ برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم؛ (ج) فلوجارت الگوریتم ۳ برای محاسبه مجموعه مجاز؛ (د) فلوجارت الگوریتم ۴ برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم؛

نحوه پارامتری کردن بردار ورودی یک سیستم خطی نامتغیر با زمان توسط این توابع ارائه می‌گردد.

۳-۱- توابع متعامد

توابع متعامد کاربرد وسیع و پراسابقه‌ای در حوزه سیگنال و شناسایی سیستم‌ها دارند [۲۳]. صورت عمومی این توابع در حوزه z توسط معادلات تاکناکا-مالماکوئیست^۱ به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود [۲۴]:

$$\Omega_j(z) = \frac{\sqrt{1-|\xi_j|^2}}{z-\xi_j} \prod_{k=1}^{j-1} \left[\frac{1-\bar{\xi}_k z}{z-\xi_k} \right], \quad j=1,2,\dots \quad (19)$$

که در آن $\xi_j \in C, |\xi_j| < 1$ قطب‌های پایدار توابع متعامد، C بیانگر صفحه مختلط و $\bar{\xi}$ مزدوج مختلط ξ است. در این مقاله فرض می‌شود که تمام قطب‌های (۱۹) حقیقی و برابر هستند ($\xi_j = \xi = a, 0 \leq a < 1$). ساختار حاصل ساده‌ترین شبکه متعامد را تشکیل می‌دهد که به آن توابع (شبکه) لاگر می‌گویند. توابع لاگر در حوزه z و حوزه زمان به ازای ورودی ضربه عبارتند از [۱۴ و ۲۵]:

$$\Omega_j(z) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{z-a} \left(\frac{1-az}{z-a} \right)^{j-1}, \quad (20-f)$$

$$L(i) = \begin{bmatrix} l_1(i) \\ l_2(i) \\ \vdots \\ l_N(i) \end{bmatrix} = \sqrt{b} \Psi^{i-1} L(0) \quad (20-b)$$

که در آن $b=1-a^2$ و $L(i)$ خروجی شبکه لاگر در زمان i است. مقدار اولیه شبکه لاگر $L(0)$ و ماتریس Ψ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$L(0) = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & \dots & (-1)^{N-1} a^{N-1} \end{bmatrix}^T, \quad (21-f)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ -ab & b & \dots & 0 \\ a^2b & -ab & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ (-1)^{N-2} a^{N-2}b & (-1)^{N-3} a^{N-3}b & \dots & a \end{bmatrix} \quad (21-b)$$

شرط پایدار بودن توابع لاگر همان $|a| < 1$ است و در مرجع [۲۳] نشان داده شده است که ترکیب خطی این توابع توانایی تخمین سیگنال با انرژی محدود را با درجه دقت دلخواه دارد. لازم به ذکر است که الگوریتم به دست آمده در این مقاله برای محاسبه مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم مستقل از انتخاب نوع تابع متعامد است. برای استفاده از توابع متعامد پیچیده‌تر می‌توان به مراجع [۲۴ و ۲۶] رجوع کرد.

$$\mathbb{X}_{RF}(1) = \{x_0 | H_u(Kx_0 + v(0)) \leq h_u, H_x x_0 \leq h_x, \quad (16-f)$$

$$H_T(A_{cl}(w_j^p)x_0 + B(w_j^p)v(0)) \leq \bar{h}_T, j=1, \dots, n_{w^p}\}$$

$$\bar{h}_T = \min_{w^d \in \mathbb{W}_d} (h_T - H_T E W^d) \quad (16-b)$$

تبدیل می‌شود که در آن \bar{h}_T سطر h از بردار \bar{h}_T است. بیان ماتریسی رابطه (۱۶) عبارتست از:

$$\mathbb{X}_{RF}(1) = \left\{ x_0 \mid \begin{bmatrix} H_u K & H_u \\ H_x & 0 \\ H_T A_{cl}(w_1^p) & H_T B(w_1^p) \\ \vdots & \vdots \\ H_T A_{cl}(w_{n_{w^p}}^p) & H_T B(w_{n_{w^p}}^p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ v(0) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} h_u \\ h_x \\ \vdots \\ \bar{h}_T \end{bmatrix} \right\} \quad (17)$$

مجموعه مجاز مقاوم $\mathbb{X}_{RF}(1)$ از تصویر کردن چندوجهی رابطه (۱۷) روی فضای متغیرهای حالت \mathbb{R}^n به دست می‌آید. الگوریتم محاسبه $\mathbb{X}_{RF}(N_p)$ به صورت زیر است [۲]:

الگوریتم ۲ (محاسبه مجموعه مجاز مقاوم) برای سیستم روابط (۱۱) و (۱۲) مجموعه مجاز مقاوم $\mathbb{X}_{RF}(N_p)$ با استفاده از روابط (۱۳) تا (۱۷) به این صورت است:

- ۱- قرار بده $j=1$
- ۲- با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۱) مقدار $\mathbb{X}_{RF}(1)$ را به دست آور و در $\mathbb{X}_{RT}^*(j)$ قرار بده.
- ۳- در رابطه (۱۱-ه) مقدار $\mathbb{X}_{RT}^*(j)$ را جایگزین \mathbb{X}_T بکن.
- ۴- قرار بده $j=j+1$
- ۵- حلقه ۲ تا ۴ تا آنجایی ادامه بده که $j=N_p+1$.

با استفاده از این الگوریتم به دست می‌آید که:

$$\mathbb{X}_{RF}(j) = \mathbb{X}_{RT}^*(j), \quad j=1,2,\dots,N_p. \quad (18)$$

همانگونه که فلوجارت الگوریتم ۲ در شکل ۱ (ب) نشان می‌دهد، این الگوریتم نیز مشابه الگوریتم ۱ بازگشتی است، بدین ترتیب که برای محاسبه $\mathbb{X}_{RF}(N_p)$ ابتدا باید $\mathbb{X}_{RF}(N_p-1)$ را محاسبه کرد. در بسته‌های محاسباتی [۸] از این الگوریتم برای محاسبه مجموعه مجاز مقاوم استفاده شده است. همان طور که در رابطه (۱۷) مشاهده می‌شود، تعداد سطرهای ماتریس بستگی دارد به تعداد رئوس چند وجهی \mathbb{W}^p . این موضوع می‌تواند منجر به ایجاد ابعاد بالا برای ماتریس و خطاهای محاسباتی ناشی از تصویر کردن مجموعه روی فضای متغیرهای حالت شود [۲۰].

۳- پارامتری کردن سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان توسط توابع متعامد

در این بخش ابتدا مطالبی پیرامون توابع متعامد بیان می‌شود و سپس

1 Takenaka-Malmquist

زمان مانع استفاده از الگوریتم ۱ و کلاً الگوریتم‌های بازگشتی برای محاسبه مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم می‌شود. به آسانی می‌توان نشان داد که برای $N_p > 1$ در سیستم دینامیکی تک متغیره (۲۴-الف)، استفاده از روابط (۸) و (۹) و الگوریتم ۱، مجموعه‌ای تولید می‌کند که با تعریف مجموعه مجاز (رابطه (۷)) همخوانی ندارد. به‌عنوان مثال مجموعه مجازی که از الگوریتم ۱ برای سیستم تک متغیره (۲۴-الف) با $N_p = 2$ به‌دست می‌آید عبارتست از

$$\mathbb{X}_T(1) = \{x_1 \in X \subset \mathbb{R}^n \mid A_{cl}x_1 + BL(0)\eta \in \mathbb{X}_T, Kx_1 + L(0)\eta \in U\} \quad (25\text{-الف})$$

$$\mathbb{X}_T(1) = \mathbb{X}_F(1) = \{x_1 \in X \subset \mathbb{R}^n \mid A_{cl}x_1 + BL(0)\eta \in \mathbb{X}_T, Kx_1 + L(0)\eta \in U\} \quad (25\text{-ب})$$

اما طبق تعریف مجموعه مجاز در رابطه (۷) برای $\mathbb{X}_F(2)$ داریم

$$\mathbb{X}_F(2) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n \mid A_{cl}x_0 + BL(0)\eta \in X, A_{cl}x_1 + BL(1)\eta \in \mathbb{X}_T, \\ Kx_0 + L(0)\eta \in U, Kx_1 + L(1)\eta \in U \end{array} \right\} \quad (26)$$

که متفاوت از مجموعه به‌دست آمده در (۲۵-ب) است. مشابه همین وضع برای مجموعه مجاز مقاوم هم برقرار است که نشان می‌دهد الگوریتم‌های بازگشتی ۱ و ۳ توانایی تولید مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم را برای سیستم‌های پارامتری شده ندارند. در اینجا با استفاده از بیان یکپارچه معادلات سیستم در روابط (۵) و (۶)، الگوریتمی جهت محاسبه مجموعه مجاز برای سیستم پارامتری شده رابطه (۲۳) ارائه می‌شود که محدودیت الگوریتم ۱ را ندارد. از آنجایی که مجموعه مجاز با معادلات نامی سیستم سر و کار دارد در معادلات (۲۴) فرض می‌شود که $w^d = 0, A_{cl}(w^p) = A_{cl}B(w^p) = B$

ایده روش پیشنهادی این مقاله استفاده از روابط (۵) و (۶) برای در دست داشتن سیگنال کنترلی و متغیر حالت در تمام طول افق کنترل است. بدین ترتیب با در اختیار داشتن رشته سیگنال ورودی و رشته متغیرهای حالت می‌توان قیدهای رابطه (۷) را بدون استفاده از الگوریتم بازگشتی اعمال نمود. برای این منظور ابتدا پارامتریسیون رابطه (۲۲) بر روی بردار ورودی رابطه (۶-ب) اعمال می‌شود. بدین ترتیب برای V داریم

$$V = \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ v(N_p - 1) \end{bmatrix}_{(N_p \times 1)} = \begin{bmatrix} L(0)^T \\ L(1)^T \\ \vdots \\ L(N_p - 1)^T \end{bmatrix}_{(N_p \times N)} \eta_{(N \times 1)} \quad (27)$$

که توسط آن رابطه (۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$X(N_p) = S_X(N_p)x_0 + S_U(N_p)\Gamma\eta \quad (28)$$

برای قید متغیر حالت طبق رابطه (۷) داریم $H_x x(i) \leq h_x, i=0, \dots, N_p$

۳-۲- پارامتری کردن بردار ورودی توسط توابع متعامد

مطابق رابطه (۲۰-ب)، خروجی توابع متعامد یک بردار متغیر با زمان $L(i)$ با بعد N است. نحوه پارامتری کردن بردار ورودی در حالت یک ورودی، $v(i), i=0, 1, \dots, N_p-1$ ($m=1$) در (۴-ج) و (۱۱-ج) به صورت رابطه (۲۲) است:

$$v(i) = L(i)^T \eta, i = 0, 1, \dots, N_p - 1, \quad (22)$$

که در آن بردار متغیرهای مجهول است که باید توسط الگوریتم کنترلی تعیین گردد. پارامتر N در رابطه (۲۲) بعد توابع متعامد را تعیین می‌کند و در حوزه کنترل پیش‌بین جایگزین افق کنترل می‌شود. این پارامتر همواره کوچکتر از N_p تعیین می‌شود تا با کاهش متغیرات تصمیم‌گیری محاسبات کاهش یابد.

رابطه (۲۲) برای حالت یک ورودی معتبر است. باید دقت کرد که در حالتی که سیستم چند ورودی داشته باشد برای هر کدام از ورودی‌ها یک شبکه متعامد مستقل نیاز است. در چنین حالتی پارامتریسیون بردار ورودی به این صورت انجام می‌شود.

$$v^{(j)}(i) = L^{(j)T}(i)\eta^{(j)}, i = 0, \dots, N_p - 1, j = 1, \dots, m. \quad (23)$$

در ادامه متن برای حفظ سادگی فرض می‌شود که سیستم یک ورودی دارد ($m=1$). بدین ترتیب معادلات دینامیکی سیستم رابطه (۱۱) که توسط توابع متعامد پارامتری شده است عبارتست از:

$$x(i+1) = A_{cl}(w^p(i))x(i) + B(w^p(i))L(i)^T \eta + Ew^d(i), i = 0, 1, \dots, N_p - 1 \quad (24\text{-الف})$$

$$x(0) = x_0 \quad (24\text{-ب})$$

$$Kx(i) + L(i)^T \eta \in U, i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (24\text{-ج})$$

$$Kx(i) + L(i)^T \eta \in U, i = 0, 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (24\text{-د})$$

$$x(N_p) \in \mathbb{X}_T. \quad (24\text{-ه})$$

در این مقاله از معادلات (۲۴) برای تعیین مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم استفاده می‌شود.

۴- محاسبه مجموعه مجاز برای سیستم‌های پارامتری شده توسط توابع متعامد

دقت در روابط (۲۲) و (۲۳) نشان می‌دهد که تعداد عناصر بردار متغیرهای تصمیم‌گیری η مستقل از پارامتر زمان است. به بیان دیگر با اضافه کردن زمان (در اینجا N_p) تغییری در بعد بردار η اتفاق نمی‌افتد (البته مقادیر η با توجه به الگوریتم کنترلی می‌تواند عوض شود) و تناظر یک به یک بین افق کنترل و متغیرهای تصمیم‌گیری وجود ندارد. این استقلال تعداد عناصر η از

که به بیان ماتریسی می‌توان گفت:

$$\Sigma_X X(N_p) \leq \sigma_X \quad (29-f)$$

که در آن:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} H_x & & & \\ & H_x & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & H_x \\ & 0 & & & H_T \end{bmatrix}, \sigma_X = \begin{bmatrix} h_x \\ h_x \\ \vdots \\ h_x \\ h_T \end{bmatrix} \quad (29-b)$$

با استفاده از رابطه (۲۸) در رابطه (۲۹) خواهیم داشت:

$$\Sigma_X S_X(N_p) x_0 + \Sigma_X S_U(N_p) \Gamma \eta \leq \sigma_X \quad (30)$$

به صورت مشابه برای قید ورودی در رابطه (۷) می‌توان نوشت:

$$\Sigma_U \Sigma_K S_X(N_p - 1) x_0 + \Sigma_U \Sigma_K S_U(N_p - 1) \Gamma \eta + \Sigma_U \Gamma \eta \leq \sigma_U \quad (31-f)$$

که در آن:

$$\Sigma_U = \begin{bmatrix} H_u & & & \\ & H_u & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & H_u \\ & 0 & & & H_u \end{bmatrix}, \Sigma_K = \begin{bmatrix} K & & & \\ & K & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & K \end{bmatrix}, \sigma_U = \begin{bmatrix} h_u \\ h_u \\ \vdots \\ h_u \end{bmatrix} \quad (31-b)$$

به این ترتیب تمام شرایط رابطه (۷) برای تعیین مجموعه مجاز توسط روابط ماتریسی روابط (۳۰) و (۳۱) به صورت یکجا بیان شده است. این فرایند به صورت الگوریتم ۳ بیان شده است:

الگوریتم ۳ (الگوریتم محاسبه مجموعه مجاز برای سیستم‌های پارامتری شده). برای سیستم رابطه (۲۴) با ورودی پارامتری شده رابطه (۲۲) و فرض $w^d = 0, A_{cl}(w^p) = A_{cp} B(w^p) = B$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbb{X}_F(N_p, N) = \left\{ x_0 \left[\begin{array}{cc} \Sigma_X S_X(N_p) & \Sigma_X S_U(N_p) \Gamma \\ \Sigma_U \Sigma_K S_X(N_p - 1) & (\Sigma_U \Sigma_K S_U(N_p - 1) + \Sigma_U) \Gamma \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_0 \\ \eta \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_U \end{bmatrix} \right\} \quad (32)$$

شایان ذکر است که رابطه (۳۲) برای سیستم‌های تک ورودی و چند ورودی معتبر است و تنها تفاوتی که برای سیستم‌های چند ورودی وجود دارد تعریف متفاوت ماتریس Γ است. همچنین باید توجه داشت که مجموعه مجاز محاسبه شده توسط الگوریتم ۳ تابع دو متغیر افق پیش‌بین N_p و بعد شبکه

متعامد $dim \eta = N$ است. شکل ۱ (ج) فلوجارت این الگوریتم را به نمایش در آورده است. همانگونه که این فلوجارت نشان می‌دهد این الگوریتم بازگشتی نیست و همین ویژگی باعث می‌شود که بتوان از آن برای محاسبه مجموعه مجاز سیستم‌های پارامتری شده استفاده کرد.

در اینجا با ارائه مثالی به بررسی صحت الگوریتم ۳ می‌پردازیم. در مثال ارائه شده نتایج مربوط به مجموعه مجاز توسط الگوریتم ۱ (الگوریتم استاندارد) و الگوریتم ۳ با یکدیگر مقایسه شده است. به منظور یکسان‌سازی شرایط، در الگوریتم ۳ قرار می‌دهیم $N=N_p, a=0$ ؛ با این ترتیب $\Gamma = I_{N_p \times N_p}$ و شرایط دو الگوریتم یکسان می‌گردد.

مثال ۱: سیستم دینامیکی با مشخصات و قیود (۳۳) مفروض است [۲۷].

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 2 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \end{bmatrix}, H_u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, h_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, h_x = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, K = -[1.19 \quad 7.88].$$

در شکل ۲ مجموعه مجاز از دو روش الگوریتم ۱ و الگوریتم ۳ (با فرض $N=N_p, a=0$) برای $N_p=3, 8, 26$ رسم شده است. محاسبات انجام شده و شکل نشان می‌دهد که دو الگوریتم مجموعه‌های کاملاً یکسانی را تولید کرده‌اند که حاکی از صحت الگوریتم پیشنهادی این مقاله (الگوریتم ۳) است. در شکل ۲ زمان انجام محاسبات در دو الگوریتم ۱ و ۳ برای $N_p=2, \dots, 26$ مقایسه شده است. محاسبات توسط متلب ۲۰۱۶ بر روی سیستم عامل

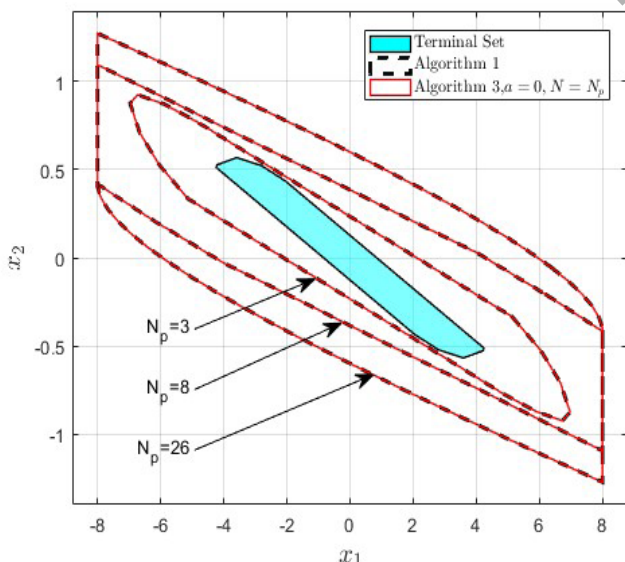


Fig. 2.

شکل ۲: مقایسه مجموعه‌های مجاز محاسبه شده توسط الگوریتم ۱ و الگوریتم ۳ در مثال ۱.

موضوع یکی از محسبات پارامتری کردن بردار ورودی توسط توابع متعامد را نشان می‌دهد. البته قابل ذکر است مجموعه مجاز (فارغ از الگوریتم محاسبه یا پارامتری کردن) هیچ گاه نمی‌تواند از مجموعه مجاز ماکزیمم (که در اینجا به ازای $N_p=26$ به دست می‌آید) بزرگتر باشد.

۵- محاسبه مجموعه مجاز مقاوم برای سیستم‌های پارامتری شده توسط توابع متعامد

اصول کار مشابه با آنچه که در بخش ۴ برای محاسبه مجموعه مجاز گفته شد، می‌باشد. ابتدا توسط روابط (۲۷) و (۲۸) تمام متغیرهای حالت در طول افق پیش‌بین به صورت صریح استخراج شده و سپس قیدهای رابطه (۱۶) بر روی تک تک عناصر اجرا می‌گردد.

معادل یکپارچه رابطه (۲۴-الف) در طول افق پیش‌بین عبارتست از:

$$X(N_p) = S_X(A(w^p); N_p)x_0 + S_U(A(w^p), B(w^p); N_p)\Gamma\eta + S_U(A(w^p), E; N_p)W^d \quad (34)$$

که در آن $X(N_p), \Gamma, \eta$ مطابق روابط (۶-الف) و (۲۵) تعریف شده‌اند. همچنین $S_X(A(w^p); N_p)$ و $W^d, S_U(A(w^p), B(w^p); N_p)$ به این صورت تعریف می‌شوند:

$$W^{dT} = \begin{bmatrix} W^d(0)^T & W^d(1)^T & \dots & W^d(N_p)^T \end{bmatrix}, \quad (35\text{-الف})$$

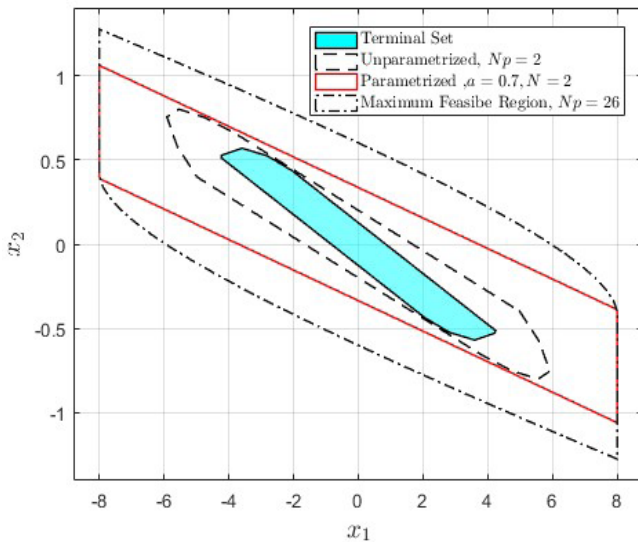


Fig. 4.

شکل ۴: مقایسه مجموعه‌های مجاز محاسبه شده توسط الگوریتم ۱ و الگوریتم ۳ در مثال ۱.

وین ۱ و سخت‌افزاری با پروسسور دو هسته‌ای با سرعت ۲/۵۳ گیگاهرتز و حافظه ۴ گیگابایت انجام گرفته است. مشاهده می‌شود که برای $N_p=2,3$ زمان مصرف شده در الگوریتم ۳ مشابه زمان مصرف شده در الگوریتم ۱ است. اما با افزایش N_p شرایط کاملاً عوض می‌شود و الگوریتم ۳ حدوداً ده بار کندتر از الگوریتم ۱ می‌شود. این پدیده را به صورت زیر می‌توان توضیح داد: در الگوریتم ۱ فرایند تصویر کردن N_p بار تکرار می‌شود اما این فرایند در الگوریتم ۳ تنها یکبار تکرار می‌گردد. همچنین فرایند تصویر کردن یکی از فرایندهای نسبتاً زمان بر است [۱]، به این دلیل می‌توان گفت برای $N_p=2,3$ زمان صرف شده برای تکرار این فرایند تقریباً معادل زمان انجام محاسبات ماتریسی روابط (۲۷) تا (۳۲) در الگوریتم ۳ است. با افزایش N_p محاسبات ماتریسی یکجای الگوریتم ۳ بسیار سنگین می‌شود به نحوی که زمان انجام آن بیشتر می‌شود از زمان مورد نیاز برای تکرار فرایند بازگشتی الگوریتم ۱. برای نمونه در $N_p=20$ ابعاد ماتریس ضرایب در رابطه (۳۲) برابر 13×22 است که محاسبات مربوط به آن (از جمله فرایند تصویر کردن) بسیار سنگین تر از استفاده از الگوریتم بازگشتی ۱ با ماتریس ضرایب (۹-ب) با ابعاد 34×3 است.

در شکل ۴ مجموعه مجاز برای ورودی پارامتری شده توسط تابع لاگر مربوط به مثال ۱ نشان داده شده است. همچنین مقایسه بین مجموعه مجاز برای سیستم پارامتری شده توسط توابع متعامد و نیز سیستم معمول در شکل آمده است. این مقایسه نشان می‌دهد که با انتخاب صحیح قطب a در سیستم پارامتری شده توسط توابع متعامد، می‌توان با N کمتر از N_p به مجموعه مجاز بزرگتری در مقایسه با سیستم پارامتری نشده دست یافت. این

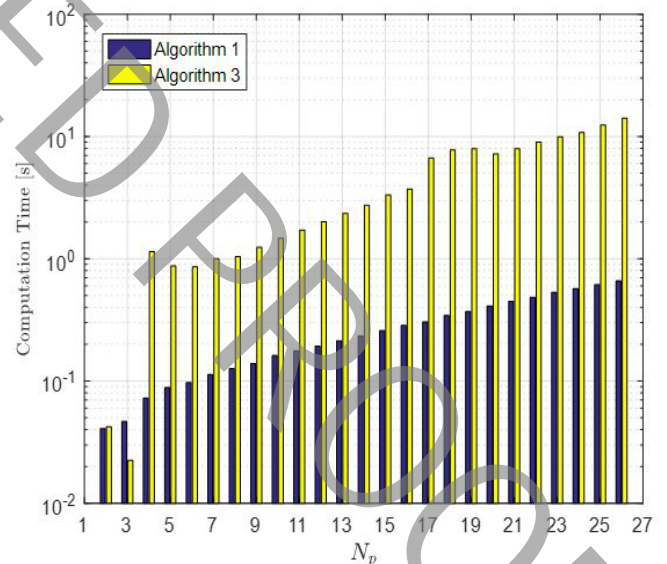


Fig. 3.

شکل ۳: زمان انجام محاسبات برای ساختن مجموعه مجاز توسط الگوریتم ۱ و الگوریتم ۳ در مثال ۱.

توجه شود که امکان استفاده از لم ۱ در رابطه (۳۷) و انجام تفکیک‌های روابط (۱۶) و (۱۷) وجود ندارد، زیرا حاصلضرب ماتریس نامعین $A(w^p)$ در خودش و در $B(w^p)$ و W^d تحذب پاسخ نسبت به w^p را از بین می‌برد و شرایط لم نقض می‌گردد. در این حالت باید رابطه (۳۷) را بر مبنای عدددهی به $A(w^p)$ ، $B(w^p)$ و W^d حل نمود. در حالت خاصی که داشته باشیم $A(w^p) = A$ عدم وجود پارامتر نامعین در ماتریس A رابطه (۳۷) نسبت به عدم قطعیت‌های w^p و w^d محذب می‌شود و می‌توان با اعمال لم ۱ آن را به صورت رابطه (۳۸) ساده نمود.

$$S_X(A(w^p); N_p) = \begin{bmatrix} I \\ A(w_0^p) \\ A(w_1^p)A(w_0^p) \\ \vdots \\ \prod_{j=0}^{N_p} A(w_j^p) \end{bmatrix}, \quad (ب-۳۵)$$

$$S_U(A(w^p), B(w^p); N_p) = \quad (ج-۳۵)$$

(۳۸-الف)

$$(\bar{\sigma}_X)_r = \min_{w^d \in \mathbb{W}_d} (\sigma_X - \Sigma_X S_U(A, E; N_p) W^d)_r \quad (ب-۳۸)$$

$$(\bar{\sigma}_U)_r = \min_{w^d \in \mathbb{W}_d} (\sigma_U - \Sigma_U \Sigma_K S_U(A, E; N_p - 1) W^d)_r \quad (ج-۳۸)$$

در رابطه (۳۸) پارامترهای $(\bar{\sigma}_X)_r$ و $(\bar{\sigma}_U)_r$ سطر r ام از بردار $\bar{\sigma}_X$ و $\bar{\sigma}_U$ است و برابر است با مینیمم سطر r ام عبارت سمت راست آن به ازای $W^d \in \mathbb{W}_d \times \dots \times \mathbb{W}_d$. این الگوریتم برای سیستم‌های تک ورودی و چند ورودی معتبر است.

به منظور بررسی صحت الگوریتم ۴، مثال ۱ به همراه اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. برای یکسان‌سازی شرایط، در الگوریتم ۴ قرار فرض می‌شود $N=N_p, a=0$.

مثال ۲: فرض می‌شود به سیستم مثال ۱ اغتشاش مطابق رابطه (۳۹) وارد می‌شود.

$$E = I_{2 \times 2}, \mathbb{W}^d = \left\{ \left[\begin{array}{c} w_1^d \\ w_2^d \end{array} \right] \middle| w_1^d, w_2^d \in [-0.02, +0.02] \right\} \quad (۳۹)$$

مجموعه مجاز مقاوم به دست آمده توسط الگوریتم ۲ و الگوریتم ۴ در شکل ۵ نشان داده شده است. به منظور یکسان‌سازی شرایط در الگوریتم ۴ فرض شده است که $N=N_p, a=0$. به این ترتیب $\Gamma = I_{N_p \times N_p}$ و اثر پارامتری کردن بردار ورودی حذف می‌گردد.

در شکل ۵ مجموعه مجاز، مجموعه مجاز مقاوم محاسبه شده توسط الگوریتم ۲ و مجموعه مجاز مقاوم محاسبه شده توسط الگوریتم ۴ برای $N_p=3, 26$ رسم شده است. مطابق انتظار، برای N_p مشخص مجموعه‌های مجاز مقاوم کوچکتر از مجموعه مجاز هستند و به صورت کامل داخل آن قرار گرفته‌اند. نکته مهمی که در این شکل قابل رویت است کوچکتر بودن

محاسبه مجموعه مجاز مقاوم با اعمال شرایط رابطه (۱۳) بر روی رابطه (۳۴) انجام می‌پذیرد. مشابه آنچه در (۲۹) و (۳۰) اتفاق افتاد، ارضای قید حالت و قید ورودی به صورت رابطه (۳۶-ب) است:

(۳۶-الف)

$$\begin{aligned} & \dot{O}_U \dot{O}_K S_X(A(w^p); N_p - 1) x_0 + \\ & \dot{O}_U \dot{O}_K S_U(A(w^p), B(w^p); N_p) \tilde{A} \eta \\ & + \dot{O}_U \tilde{A} \eta \leq \sigma_U - \dot{O}_U \dot{O}_K S_U(A(w^p), E; N_p) W^d \quad (ب-۳۶) \end{aligned}$$

که در آن $\Sigma_X, \Sigma_U, \Sigma_K, \sigma_X, \sigma_U$ مطابق روابط (۲۹) و (۳۱) تعریف شده‌اند. فرایند محاسبه مجموعه مجاز به صورت الگوریتم زیر خلاصه شده است.

الگوریتم ۴ (الگوریتم محاسبه مجموعه مجاز مقاوم برای سیستم‌های پارامتری شده). برای سیستم رابطه (۲۴) با ورودی پارامتری شده تعریف شده در رابطه (۲۲) مجموعه مجاز مقاوم $\mathbb{X}_{RF}(N_p, N)$ به صورت رابطه (۳۷) محاسبه می‌شود.

(۳۷)

شکل ۱ (د) فلوجارت این الگوریتم را نمایش می‌دهد. بازگشتی نبودن این الگوریتم باعث می‌شود که بتوان محاسبه مجموعه مجاز مقاوم سیستم‌های پارامتری شده را توسط آن انجام داد.

مجموعه‌های مجاز مقاوم محاسبه شده توسط الگوریتم ۴ (الگوریتم پیشنهادی) نسبت به الگوریتم ۲ است. علت این موضوع تأثیر متفاوت اغتشاش در تحول سیستم در دو الگوریتم ۲ و ۴ است. الگوریتم ۲ ماهیتی بازگشتی دارد و طبق روابط (۱۶-ب) و (۱۷) اثر مخرب اغتشاش در زمان وارد شده توسط بردار ورودی همان زمان قابل دفع و بهبود است. به بیان دیگر اغتشاش اثر خود را روی بردار حالت $x(i+1)$ می‌گذارد و اثر آن تمام می‌شود (توسط بردار ورودی $u(i)$ خنثی می‌شود). به این ترتیب اغتشاش $w(i)$ به صورت غیر مستقیم (از طریق تأثیر روی $x(i+1)$) روی سیر تحول سیستم اثرگذاری می‌کند. در الگوریتم ۴ شرایط متفاوتی حاکم است. در این الگوریتم اغتشاش $w(i)$ توسط روابط (۳۸-ب) و (۳۸-ج) روی تمام زمان‌های بعدی به صورت مستقیم تأثیر می‌گذارد که طی آن اثر ترمیم‌کنندگی ورودی $u(i)$ دیده نمی‌شود. در نتیجه الگوریتم ۴ با فرض $a=0, N=N_p$ پاسخ محافظه کارانه‌تری را ارائه می‌دهد. در حوزه کنترل پیش‌بینی حلقه بسته (الگوریتم ۳) و پیش‌بینی حلقه باز (الگوریتم ۴) نام‌گذاری می‌کنند. پیش‌بینی حلقه باز مجموعه مجاز مقاوم کوچکتری را ارائه می‌دهد اما فرایند طراحی کنترلر سریعتری را به همراه دارد. از طرف دیگر پیش‌بینی حلقه بسته مجموعه مجاز بزرگتری را تولید می‌کند و در عوض کنترلر مبتنی بر این روش محاسبات سنگین‌تری دارد. بررسی تفصیلی و مقایسه این دو روش برخورد با سیستم مقید همراه با اغتشاش در مرجع [۲۷] آمده است. آنچه در این مقاله مورد اهمیت است، کوچکتر بودن مجموعه مجاز مقاوم به دست آمده از الگوریتم ۴ نسبت به الگوریتم ۳ است که نشان از صحت الگوریتم پیشنهادی دارد.

در شکل ۶ زمان انجام محاسبات برای ساختن مجموعه مجاز مقاوم توسط الگوریتم ۲ و الگوریتم ۴ در مثال ۲.

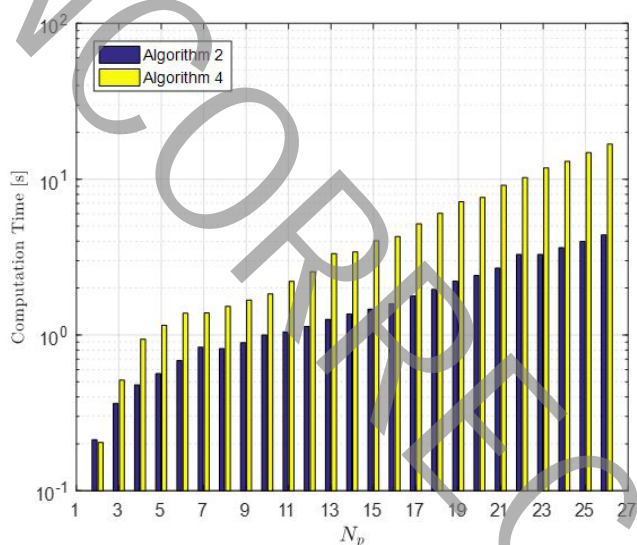


Fig. 6.

شکل ۶: زمان انجام محاسبات برای ساختن مجموعه مجاز مقاوم توسط الگوریتم ۲ و الگوریتم ۴ در مثال ۲.

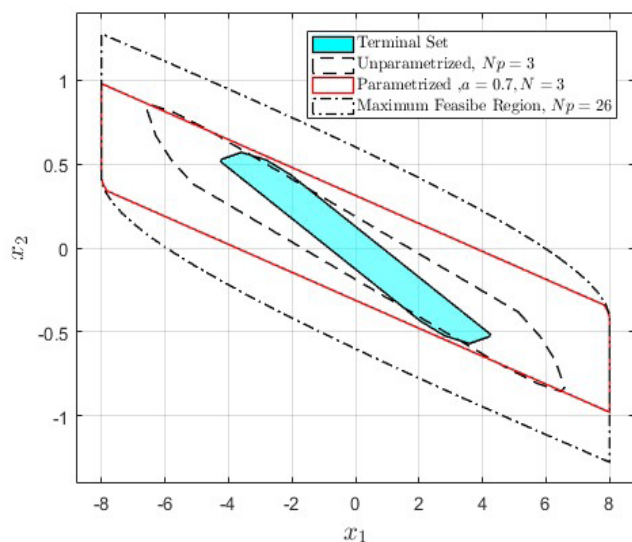


Fig. 7.

شکل ۷: مقایسه مجموعه‌های مجاز مقاوم برای سیستم پارامتری شده و سیستم پارامتری نشده در مثال ۲.

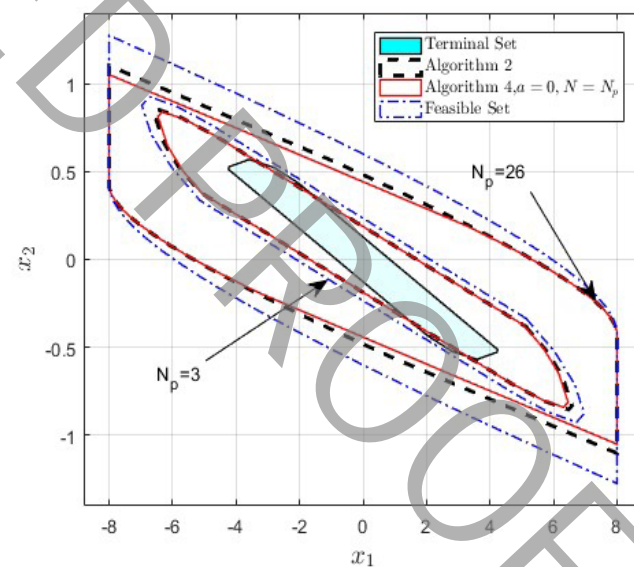


Fig. 5.

شکل ۵: مقایسه مجموعه‌های مجاز مقاوم محاسبه شده توسط الگوریتم ۲ و الگوریتم ۴ در مثال ۲.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله الگوریتم‌هایی جهت محاسبه مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم برای سیستم‌های مقید پارامتری شده توسط توابع متعامد ارائه شد. بررسی درستی الگوریتم‌های پیشنهادی از طریق مقایسه آن‌ها با الگوریتم‌های معمول انجام گردید. مهم‌ترین برتری الگوریتم‌های ارائه شده در اینجا نسبت به الگوریتم‌های معمول (الگوریتم ۱ و ۲)، توانایی آن‌ها در تطبیق با ورودی‌های پارامتری شده در فضایی بجز فضای زمان است. به بیان دیگر، توسط الگوریتم‌های پیشنهادی در این مقاله می‌توان به محاسبه مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم در سیستم‌های پارامتری شده توسط توابع متعامد پرداخت (امری که توسط الگوریتم‌های ۱ و ۲ امکان‌پذیر نیست). همچنین شبکه لاگر به‌عنوان ساده‌ترین شبکه متعامد برای پارامتری کردن بردار ورودی معرفی گردید و اثر پارامتری کردن بردار ورودی در اندازه مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم توسط مثال‌هایی بررسی گردید. مثال‌ها نشان می‌دهند که پارامتری کردن بردار ورودی توسط توابع متعامد منجر به بهبود (افزایش حجم) مجموعه مجاز و مجموعه مجاز مقاوم می‌شود. مشاهده گردید که الگوریتم‌های پیشنهادی از بابت زمان انجام محاسبات کندتر از الگوریتم‌های پیشین هستند که علت آن فرایند تصویر نمودن یک چندوجهی با ابعاد بزرگ است. همچنین مشاهده گردید که الگوریتم محاسبه مجموعه مجاز مقاوم، مجموعه‌ای محافظه کارانه‌تر نسبت به الگوریتم استاندارد بازگشتی تولید کرده است.

منابع

- [8] Kvasnica, Michal, Pascal Grieder, Mato Baotić, and Manfred Morari. "Multi-parametric toolbox (MPT)." In International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control, pp. 448-462. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [9] E.C. Kerrigan, Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control, PhD thesis, University of Cambridge, Cambridge, 2000.
- [10] Kvasnica, Michal, Bálint Takács, Juraj Holaza, and Deepak Ingole. "Reachability Analysis and Control Synthesis for Uncertain Linear Systems in MPT." IFAC-Papers On Line 48, no. 14 (2015): 302-307.
- [11] Bemporad, Alberto, Manfred Morari, Vivek Dua, and Efstratios N. Pistikopoulos. "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems." Automatica 38, no. 1 (2002): 3-20.
- [12] Zeilinger, Melanie Nicole, Colin Neil Jones, and Manfred Morari. "Real-time suboptimal model predictive control using a combination of explicit MPC and online optimization." IEEE Transactions on Automatic Control 56, no. 7 (2011): 1524-1534.
- [13] Wang, Liuping. "Continuous time model predictive control design using orthonormal functions." International Journal of Control 74, no. 16 (2001): 1588-1600.
- [14] Wang, Liuping. "Discrete model predictive controller design using Laguerre functions." Journal of process control 14, no. 2 (2004): 131-142.
- [15] Khan, Bilal, and J. Anthony Rossiter. "Alternative parameterisation within predictive control: a systematic selection." International Journal of Control 86, no. 8 (2013): 1397-1409.
- [16] Rossiter, J. Anthony, Liuping Wang, and Guillermo Valencia-Palomo. "Efficient algorithms for trading off feasibility and performance in predictive control." International Journal of Control 83, no. 4 (2010): 789-797.
- [17] Khan, B., G. Valencia-Palomo, J. A. Rossiter, C. N. Jones, and R. Gondhalekar. "Long horizon input parameterisations to enlarge the region of attraction of MPC." Optimal Control Applications and Methods (2014).
- [18] Michalska, Hanna, and David Q. Mayne. "Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems." IEEE Transactions on automatic control 38, no. 11 (1993): 1623-1633.
- [19] Kerrigan, Eric C., and Jan M. Maciejowski. "Invariant sets for constrained nonlinear discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control." In Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on, vol. 5, pp. 4951-4956. IEEE, 2000.
- [1] Scibilia Francesco, Sorin Olaru, Morten Hovd. On feasible sets for MPC and their approximations. Automatica 47, no. 1 (2011): 133-139.
- [2] Kerrigan, Eric C., Jan M. Maciejowski. Robust feasibility in model predictive control: Necessary and sufficient conditions. In Proceedings of the Decision and Control, 2001, vol. 1, pp. 728-733. IEEE, 2001.
- [3] Blanchini, Franco. Survey paper: Set invariance in control. Automatica 35, no. 11 (1999): 1747-1767.
- [4] Mayne, David Q., James B. Rawlings, Christopher V. Rao, Pierre OM Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. Automatica 36, no. 6 (2000): 789-814.
- [5] Gilbert, Elmer G., K. Tin Tan. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. IEEE Transactions on Automatic control 36, no. 9 (1991): 1008-1020.
- [6] Burger, Thomas, Peter Gritzmann, Victor Klee. Polytope projection and projection polytopes. The American mathematical monthly 103, no. 9 (1996): 742-755.
- [7] Jones, Colin. Polyhedral tools for control. No. EPFL-THESIS-169769. University of Cambridge, 2005

- [24] Wahlberg, Bo. "Construction and analysis." In *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*, pp. 15-39. Springer London, 2005.
- [25] Hemmasian Etefagh, Massoud, Mahyar Naraghi, Farzad Towhidkhah, and José De Doná. "Model predictive control of linear time varying systems using Laguerre functions." In *Control Conference (AuCC), 2016 Australian*, pp. 120-125. IEEE, 2016.
- [26] Hemmasian Etefagh, Massoud, José De Doná, Mahyar Naraghi and Farzad Towhidkhah. "Control of constrained linear-time varying systems via Kautz parametrization of model predictive control scheme". In *International Conference on Fundamental Research in Electrical Engineering, Iran, July 2017*.
- [27] Kouvaritakis, Basil, Mark Cannon. *Model Predictive Control: Classical, Robust and Stochastic*. Springer, 2015.
- [20] Jones, C. N., E. C. Kerrigan, and J. M. Maciejowski. "On polyhedral projection and parametric programming." *Journal of Optimization Theory and Applications* 138, no. 2 (2008): 207-220.
- [21] Blanchini, Franco. "Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions." In *Decision and Control, Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pp. 1755-1760. IEEE, 1991.
- [22] Borrelli, F., A. Bemporad, and M. Morari. "Predictive Control for Linear and Hybrid Systems, 2015." preparation, available online at <http://www.mpc.berkeley.edu/mpc-course-material> pp. 217, (2015).
- [23] Oliveira, Gustavo HC, Alex da Rosa, Ricardo JGB Campello, Jeremias B. Machado, and Wagner C. Amaral. "An introduction to models based on Laguerre, Kautz and other related orthonormal functions—part I: linear and uncertain models." *International Journal of Modelling, Identification and Control* 14, no. 1-2 (2011): 121-132.