نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۱، شماره ۳، سال ۱۳۹۸، صفحات ۱ تا ۱۱
DOI:

بررسی کمانش پوسته استوانه‌ای با بکارگیری سوپرالمان جدید وابسته به اثر اندازه

ایمان سلیمانی، یعقوب طادی بنی*، محسن بت شکنان

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت:
بازنگری:
پذیرش:
ارائه آنلاین:

کلمات کلیدی:
تئوری تنش کوپل اصلاح شده
اجزاء محدود
اثر اندازه
مدل پوسته
کمانش

چکیده: در این مقاله با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده به معرفی المان جدید پوسته استوانه‌ای پرداخته شده است. از آنجاکه تئوری کلاسیک قادر به محاسبه صحیح سختی و احتساب اثر اندازه در سازه های میکرو/نانو نمی‌باشد، تئوری‌های مرتبه بالاتر مانند تئوری تنش کوپل اصلاح شده بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و با استفاده از مدل پوسته به جای مدل تیر، کمانش نانو لوله‌ها با استفاده از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار گرفته است. المان جدید براساس توابع شکل سوپر المان‌ها تعریف و ماتریس جرم و سختی بدست آمده است. علاوه بر سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده، سوپر المان پوسته استوانه‌ای کلاسیک با فرض اثر اندازه صفر در روابط بدست آمده، قابل تعریف می‌باشد. در حالت خاص، به منظور بررسی کاربرد روابط بدست آمده کمانش نانو پوسته استوانه‌ای با استفاده از المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد مطالعه قرار گرفته و درستی نتایج با استفاده از نتایج بدست آمده از روش تحلیلی نشان داده شده و تاثیر پارامترهایی نظیر اثر اندازه، طول و ضخامت بر کمانش پوسته استوانه‌ای بررسی شده است.

۱- مقدمه

با پیشرفت علم نانو، اجزای میکرو/نانو به سبب خواص مکانیکی، شیمیایی و الکترونیکی برترشان، بطور گسترده در میکرو و نانو سازه‌هایی همچون میکرو الکترومکانیک‌ها و نانو الکترومکانیک‌ها بکار گرفته شده‌اند و توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده‌اند. در تمامی این کاربردها، اثر اندازه، منطبق با نتایج آزمایشگاهی، نقش بسیار مهمی در مطالعه صحیح رفتار این سازه‌ها خواهد داشت. به همین منظور از آنجاکه مکانیک کلاسیک محیط پیوسته در پیش‌بینی صحیح رفتار این سازه‌ها به سبب فقدان اثر اندازه دچار خطا می‌گردد، استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر نظیر تئوری گرادیان کرنش و تئوری تنش کوپل که قادر به احتساب اثر اندازه در محاسبات می‌باشند، گسترش یافته است [۷-۱].

در دهه ۱۹۶۰، تعدادی از پژوهشگران با درنظر گرفتن گرادیان چرخش مرتبه بالاتر به عنوان ماتریس تغییر شکل که منجر به صرف‌نظر کردن از قسمت متقارن گرادیان تغییر شکل مرتبه دوم می‌شود، به معرفی تئوری تنش کوپل پرداختند [۱۱-۸]. پس از معرفی این تئوری که شامل دو پارامتر اثر اندازه مرتبه بالا علاوه بر دو ثابت لامه است، یانگ و همکاران به معرفی تئوری تنش کوپل اصلاح شده که تنها شامل یک پارامتر اثر اندازه مرتبه بالا است، پرداختند [۱۲]. این تئوری با معرفی معادله جدید تعادل کوپل‌ها، علاوه بر معادلات تعادل نیروها و مومنتوم نیروها، گسترش یافته است. مطالعات بسیاری با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده انجام شده است. به عنوان مثال شنگلی و همکاران [۱۳] با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده به بررسی مسائل دینامیکی تیر اویلر-برنولی پرداخته‌اند و اثر اندازه بر روی فرکانس‌های طبیعی را مطابق با دو نوع شرایط مرزی، مورد ارزیابی قرار دادند و تفاوت عمده ای میان نتایج بدست آمده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری محیط پیوسته کلاسیک مشاهده کردند. ردی [۱۴] با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، خمش صفحات دایروی متقارن را مورد بررسی قرار داده و امکان استفاده از روابط بدست آمده برای گسترش پاسخ تحلیلی ارتعاشات آزاد، خمش و کمانش نمونه‌های خطی را نشان داده است. قربان پور آرانی و همکاران [۱۵] ارتعاشات غیر خطی و ناپایداری نانو لوله‌های دو جداره حاوی سیال در بستر ویسکو پسترناک را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار داده و اثر پارامتر اثر اندازه را بر ارتعاشات آزاد غیر خطی و ناپایداری را ارزیابی کرده‌اند.

به منظور پیش‌بینی صحیح رفتار میکرو/نانو سازه‌ها، علاوه بر درنظر گرفتن پارامتر اثر اندازه، استفاده از مدل هندسی مناسب جهت مدل‌سازی صحیح سازه‌ها و المان‌ها نیز مورد نیاز می‌باشد. از آنجاکه امروزه استفاده از نانو لوله‌ها در نانو سازه‌ها گسترش فراوانی یافته، اهمیت این موضوع نیز دوچندان شده است [۱۹-۱۶]. تاکنون مطالعات بسیاری با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل تیر تیموشنکو و اویلر-برنولی انجام شده است [۲۳-۲۰]. آکگوز و همکاران [۲۴] با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: adehghan@yazd.ac.ir

و تئوری تنش کوپل اصلاح شده پاسخ ارتعاشی میکرو تیر غیریکنواخت را مورد بررسی قرار دادند و اثرات خواص مادی و نسبت مخروطی شدن را بر روی فرکانس طبیعی نشان دادند. محمدآبادی و همکاران [۲۵] به بررسی کمانش سه مدل میکرو تیر تیموشنکو، اویلر-برنولی و ردی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند و اثر ضخامت تیر، پارامتر اثر اندازه و نسبت پواسون بر روی بار کمانشی بحرانی میکرو تیرها را نشان دادند. وانگ و همکاران [۲۶] با استفاده از تئوری غیرخطی هندسی ون کارمن علاوه بر مدل تیر اویلر-برنولی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیرها پرداخته و وابستگی فرکانس‌ها بر پارامتر اثر اندازه و نسبت پواسون را نشان داده و مشخص نمودند که، فرکانس‌های ارتعاشی غیرخطی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده بزرگتر از تئوری کلاسیک و منطبق با نتایج تجربی می‌باشند. طادی و همکاران [۲۷] به بررسی ناپایداری پولین وابسته به اثر اندازه نانو آیینه‌های چرخشی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند و تطابق مناسبی میان نتایج آزمایشگاهی و تئوری ارائه شده نسبت به تئوری کلاسیک مشاهده نمودند.

از آنجاکه ساختار هندسی نانو لوله‌ها به صورت پوسته استوانه‌ای می‌باشد، استفاده از مدل تیر منجر به پیش‌بینی صحیحی از رفتار نانو لوله‌ها نخواهد شد. به عنوان مثال در بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های چند جداره که سه فرکانس طبیعی در سه راستای مختلف برای هر نانو لوله وجود داشته و از طرف دیگر نانولوله‌های چندجداره با نیروهای واندروالس کوپل شده‌اند، سه فرکانس طبیعی از هر نانو لوله ممکن است نسبت به نانو لوله‌های ایزوله شده متفاوت باشند. بنابراین استفاده از مدل پوسته در پیش‌بینی صحیح رفتار نانولوله‌های چندجداره نسبت به مدل تیر که با یک فرکانس طبیعی می‌باشد، در پیش‌بینی صحیح رفتار میکرو/نانو سازه‌ها بسیار اثرگذار خواهد بود [۲۸]. امروزه اهمیت این موضوع نظر بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب نموده است [۳۲-۲۹]. به عنوان مثال سهمانی و همکاران [۳۳] با به‌کارگیری مدل پوسته و تئوری تنش کوپل اصلاح شده به بررسی پاسخ پایداری دینامیکی وابسته به اندازه با استفاده از میکرو پوسته استوانه‌ای تغییر شکل‌پذیر مرتبه بالاتر پرداختند و افزایش عرض محدوده ناپایداری با کاهش پارامتر اثر اندازه را نشان دادند. قربان پور آرانی و همکاران [۳۴] کمانش الکترو-ترمومکانیکال نانو لوله‌های دوجداره را با استفاده از تئوری پوسته استوانه‌ای پیزو الکتریک نانلوکال مورد بررسی قرار داده و اثر بارهای دمایی و الکتریکی بر رفتار کمانشی نانو لوله‌های دوجداره را ارزیابی کرده و نشان داده‌اند که میدان الکتریکی و جهت آن بر میزان بار بحرانی کمانش اثر گذار می‌باشد.. ضیغم‌پور و همکاران [۳۵] با استفاده از مدل پوسته و تئوری تنش کوپل اصلاح شده به بررسی رفتار دینامیکی نانو لوله دو جداره کربنی پرداختند و اثر پارامترهایی نظیر اندازه و سرعت سیال بر نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپل اصلاح شده را نشان دادند.

به علت آنکه استفاده از روش تحلیلی بدلیل پیچیدگی‌های موجود در سازه‌های مقیاس میکرو/نانو، همانند وجود بارگذاری یا هندسه پیچیده همواره امکان پذیر نمی‌باشد، استفاده از سایر روش‌ها همانند روش اجزاء محدود که یکی از روش‌های رایج بررسی رفتار میکرو/نانو سازه ها می‌باشد و با روندی ساده به تحلیل و شبیه‌سازی سازه‌های پیچیده می‌پردازد، اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. پژوهشگران بسیاری تاکنون از این روش استفاده کرده‌اند [۴۰-۳۶]. به عنوان مثال متز و همکاران [۴۱] به بررسی رفتار خمشی الکترومکانیکال‌های پلیمری با استفاده از روش اجزاء محدود پرداخته‌اند. تجلی و همکاران [۴۲] با استفاده از المان صفحه نه گره‌ای و احتساب هندسه غیرخطی و فشار سیال، پولین دینامیکی میکرو/نانو صفحه‌های الکترواستاتیکی را مورد بررسی قرار دادند.. توجه به این نکته ضروری است که تمامی این مطالعات براساس تئوری محیط پیوسته کلاسیک انجام شده، درحالی‌که همانگونه که پیش از این نیز اشاره شد، به منظور پیش‌بینی صحیح رفتار میکرو/نانو سازه‌ها، تئوری محیط پیوسته کلاسیک نه تنها قادر به محاسبه صحیح سختی میکرو/نانو سازه‌ها نمی‌باشد، بلکه پارامتر اثر اندازه را نیز در محاسبات لحاظ نخواهد کرد. بنابراین این تئوری پیش‌بینی صحیحی از رفتار میکرو/نانو سازه‌ها نخواهد داشت و به منظور بررسی رفتار این سازه‌ها و درنتیجه در نظر گرفتن اثر اندازه، می‌باید تئوری‌های مرتبه بالاتر در روش اجزاء محدود مورد استفاده قرار گیرند.

از طرف دیگر در روش اجزاء محدود به منظور افزایش دقت محاسبات، افزایش تعداد المان‌های مش‌بندی امری رایج می‌باشد که منجر به افزایش زمان تحلیل می‌گردد. بنابراین کاهش تعداد المان‌ها و درجات آزادی بدون کاهش دقت نتایج مورد توجه زیاد پژوهشگران به سبب کاهش حجم محاسبات و زمان تحلیل قرار دارد. روش‌های بسیاری از جمله استفاده از سوپر المان‌ها برای کاهش درجات آزادی و افزایش کارایی محاسبات وجود دارد [۴۳]. امروزه گسترش و استفاده از سوپر المان‌ها در تحلیل سازه‌ها بسیار گسترش یافته است. به طور مثال، لوکاس [۴۴] با استفاده از سوپر المان به بررسی مسائل پوسته‌های الاستوپلاستیک پرداخته است. ارتعاشات آزاد صفحه مستطیلی با استفاده از سوپر المان اجزاء محدود تیر و صفحه توسط کوکو و همکاران [۴۵] مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج مناسبی در مقایسه با مطالعات دیگر مشاهده شده است . احمدیان و همکاران[۴۶] با استفاده از سوپر المان به تحلیل ارتعاشات صفحات مستطیلی اورتوتروپیک با شرایط مرزی مختلف و احتساب جابجایی خمشی پرداخته‌اند و در نهایت تطابق بسیار مناسبی میان نتایج بدست آمده از یک سوپر المان و ۶۲۵ المان معمولی را نشان داده‌اند.

با توجه به مطالب ذکر شده، در این مقاله با استفاده از روش اجزاء محدود و تئوری تنش کوپل اصلاح شده، سوپر المان جدید پوسته استوانه‌ای معرفی شده و ماتریس جرم و سختی با استفاده از توابع شکل بدست آمده و نحوه کاربرد المان جدید در بررسی کمانش نانو لوله‌ها ارائه و نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی تئوری تنش کوپل اصلاح شده مقایسه شده است. تاثیر پارامترهایی نظیر اثر اندازه و طول بر کمانش پوسته استوانه‌ای بررسی و مشخص گردیده که استفاده از سوپر المان جدید علاوه بر دارا بودن دقت

بالا، حجم محاسبات را کاهش و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد.

۲- تعریف المان

همانطور که گفته شد به منظور پیش‌بینی صحیح رفتار میکرو/نانو سازه‌ها، علاوه بر درنظر گرفتن پارامتر اثر اندازه، استفاده از مدل هندسی مناسب جهت مدل‌سازی صحیح سازه‌ها و المان‌ها نیز مورد نیاز بوده و از آنجا که ساختار هندسی نانو لوله‌ها به صورت پوسته استوانه‌ای می‌باشد، استفاده از مدل تیر منجر به پیش‌بینی صحیحی از رفتار نانو لوله‌ها نخواهد شد، در نتیجه نیاز به استفاده از مدل پوسته می‌باشد. از طرف دیگر به منظور رفع مشکل بارگذاری یا هندسه پیچیده از یک طرف و افزایش دقت محاسبات بدون افزایش تعداد المان‌های مش‌بندی و درجات آزادی و کاهش زمان تحلیل در روش اجزاء محدود از طرف دیگر، بدون کاهش دقت نتایج همراه با کاهش حجم محاسبات و زمان تحلیل، استفاده از سوپر المان در دستور کار قرار گرفته است. در نتیجه با استفاده از روش اجزاء محدود و تئوری تنش کوپل اصلاح شده، سوپر المان جدید پوسته استوانه‌ای معرفی شده و ماتریس جرم و سختی با استفاده از توابع شکل بدست آمده و نحوه کاربرد المان جدید در بررسی کمانش نانو لوله‌ها ارائه و نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی تئوری تنش کوپل اصلاح شده مقایسه شده است.

یک سوپر المان استوانه‌ای ۱۶ گره‌ای به طول L و شعاع R و ضخامت h، مطابق شکل ۱ درنظر گرفته شده و از آن‌جا که المان مذکور سه‌بعدی است، سه مختصات مستقل به منظور توصیف کامل بردار مکان در المان مورد نیاز است.

دستگاه مختصات استوانه‌ای (x, θ, r) به عنوان سیستم مختصات کلی که x، θ و r به ترتیب مختصات محوری، مماسی و شعاعی مطابق با شکل ۱ می‌باشند، مورد استفاده قرار گرفته و فرمولاسیون المان بر اساس توابع شکل زیر به دست خواهد آمد [۴۷]:

$$N_1=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma-\cos\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

$$N_2=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma-\cos\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

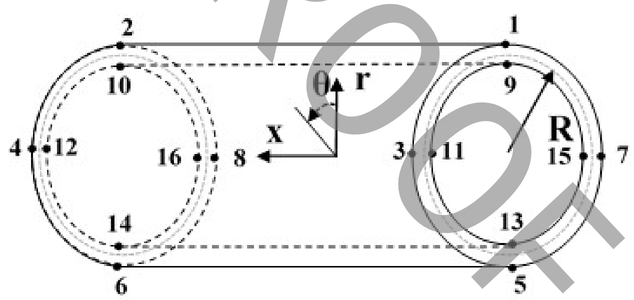

Fig. 1.

شکل ۱: سوپر المان پوسته استوانه ای.

$$N_3=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma-\sin\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

$$N_4=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma-\sin\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

$$N_5=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma+\cos\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

$$N_6=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma+\cos\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

$$N_7=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma+\sin\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right)$$

$$N_8=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma+\sin\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1+\eta\right) \quad (۱)$$

$$N_9=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma-\cos\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{10}=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma-\cos\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{11}=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma-\sin\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{12}=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma-\sin\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{13}=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma+\cos\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{14}=\frac{1}{8}\left(\cos^2\pi\gamma+\cos\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{15}=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma+\sin\pi\gamma\right)\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_{16}=\frac{1}{8}\left(\sin^2\pi\gamma+\sin\pi\gamma\right)\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

دستگاه مختصات محلی (ξ, η, γ) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi=\frac{2x}{L},\quad \eta=\frac{2r-2R}{h},\quad \gamma=\frac{\alpha}{\pi}-1 \quad (۲)$$

که در آن:

$$-\frac{L}{2}\le x\le\frac{L}{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ R-\frac{h}{2}\le r\le R+\frac{h}{2} \quad (۳)$$

و در نتیجه:

$$-1\le\xi,\gamma,\eta\le 1 \quad (۴)$$

به منظور توسعه صحیح فرمولاسیون اجزاء محدود در ابعاد نانو و استخراج ماتریس‌های سختی، جرم و سختی هندسی سوپر المان پوسته

استوانه‌ای معرفی شده فوق و تعریف صحیح روابط مولفه‌های کلاسیک و غیرکلاسیک برای سوپر المان استوانه‌ای مذکور که با صفر قرار دادن پارامتر اثر اندازه در تئوری تنش کوپل اصلاح شده، قابلیت استخراج نتایج تئوری محیط پیوسته کلاسیک علاوه بر نتایج تئوری تنش کوپل اصلاح شده را نیز دارا باشد، از تئوری پوسته نازک به همراه روابط تنش و کرنش تئوری تنش کوپل اصلاح شده به شکل روابطی که در ادامه بیان می‌شوند استفاده شده است.

۲- ۱- روابط کرنش-جابجایی

تئوری پوسته نازک به منظور بیان میدان جابجایی مورد استفاده قرار گرفته که بر اساس آن جابجایی یک نقطه از المان استوانه‌ای در سه راستای x, θ, r به ترتیب با مولفه‌های u, v, w به شکل زیر نمایش داده شده است [۴۸]:

$$u(x,\theta,r,t)=U(x,\theta,t)-r\frac{\partial W(x,\theta,t)}{\partial x}$$

$$\mathrm{v}(x,\theta,r,t)=V(x,\theta,t)-\frac{r}{R}\left(\frac{\partial W(x,\theta,t)}{\partial \theta}-V(x,\theta,t)\right) \qquad (۵)$$

$$w(x,\theta,r,t)=W(x,\theta,t)$$

جابجایی یک نقطه از المان استوانه‌ای که توسط بردار U در سه راستای x, θ, r به ترتیب با مولفه های u, v, w نمایش داده می‌شود، با توجه به توابع شکل به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{U}=\{u \quad v \quad w\}^T \qquad (۶)$$

$$\mathbf{U}_{3\times1}=\mathbf{N}_{3\times48}\,\mathbf{d}_{48\times1} \qquad (۷)$$

که:

$$\mathbf{d}=\{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \cdots u_{16} \quad v_{16} \quad w_{16}\}^T \qquad (۸)$$

و N_i ها به عنوان توابع شکل مطابق با رابطه (۱) تعریف می‌گردند.

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\mathbf{N}^u\\ \mathbf{N}^v\\ \mathbf{N}^w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_{16} & 0 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_{16} & 0\\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_{16}\end{bmatrix} \qquad (۹)$$

با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده انرژی کرنشی مطابق رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathbf{ó}:\mathbf{å}+\mathbf{m}:\div)\,dV \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا σ_{ij}، ε_{ij}، χ_{ij} و m_{ij} به ترتیب تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش، تانسور متقارن گرادیان چرخش و تانسور تنش مرتبه بالاتر است که مولفه‌های کلاسیک و غیر کلاسیک تانسور کرنش برای المان استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \qquad (۱۱)$$

$$\chi_{ij}=\frac{1}{4}\left(e_{ipq}\eta_{jpq}+e_{jpq}\eta_{ipq}\right) \qquad (۱۲)$$

که u_i، e_{ipq} و η_{ipq} به ترتیب مولفه‌های بردار جابجایی، نماد جایگشت و تانسور گرادیان کشش انحرافی است. مطابق با رابطه (۱۱) مولفه‌های تانسور کرنش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w}{r},\ \ \varepsilon_{rr}=\frac{\partial w}{\partial r},\\
&\gamma_{x\theta}=\gamma_{\theta x}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x},\\
&\gamma_{xr}=\gamma_{rx}=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial x},\\
&\gamma_{\theta r}=\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که به فرم ماتریسی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{å}=\mathbf{LU} \qquad (۱۴)$$

که:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۷)، رابطه (۱۴) به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$\mathbf{å}=\mathbf{LU}=\mathbf{LN\,d}=\mathbf{B\,d} \qquad (۱۶)$$

بنابراین:

$$\mathbf{B}_{6\times48}=\mathbf{L}_{6\times3}\ \mathbf{N}_{3\times48} \qquad (۱۷)$$

و همچنین مطابق با رابطه (۱۲) مولفه‌های مرتبه بالاتر تانسور کرنش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\chi_{rr}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial r}\right)$$

$$\chi_{xx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}\right)$$

$$\chi_{\theta\theta}=\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}\right)$$

$$\chi_{x\theta}=\chi_{\theta x}=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{array}\right) \tag{۱۸}$$

$$\chi_{rx}=\chi_{xr}=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r^2}\\ -\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\end{array}\right)$$

$$\chi_{r\theta}=\chi_{\theta r}=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\\ +\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial r}\end{array}\right)$$

که به فرم ماتریسی به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$\chi=\bar{\mathbf{L}}\ \mathbf{U} \tag{۱۹}$$

که

$$\bar{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix}\bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} & \bar{L}_{13}\\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} & \bar{L}_{23}\\ \bar{L}_{31} & \bar{L}_{32} & \bar{L}_{33}\\ \bar{L}_{41} & \bar{L}_{42} & \bar{L}_{43}\\ \bar{L}_{51} & \bar{L}_{52} & \bar{L}_{53}\\ \bar{L}_{61} & \bar{L}_{62} & \bar{L}_{63}\end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

و مولفه‌های ماتریس $\bar{\mathbf{L}}$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\bar{L}_{11}=0,\bar{L}_{12}=-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial r},\bar{L}_{13}=\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}$$

$$\bar{L}_{21}=\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\bar{L}_{22}=\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial x},\bar{L}_{23}=-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}$$

$$\bar{L}_{31}=-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta},\bar{L}_{32}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial r},\bar{L}_{33}=0 \tag{۲۱}$$

$$\bar{L}_{41}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial r},\quad \bar{L}_{42}=-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}$$

$$\bar{L}_{43}=\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\bar{L}_{51}=-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta},\bar{L}_{53}=\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\bar{L}_{52}=-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\bar{L}_{61}=-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$\bar{L}_{62}=\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta},\bar{L}_{63}=\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial r}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۷)، رابطه (۱۹) به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$\chi=\bar{\mathbf{L}}\mathbf{U}=\bar{\mathbf{L}}\mathbf{N}\,\mathbf{d}=\bar{\mathbf{B}}\ \mathbf{d} \tag{۲۲}$$

بنابراین:

$$\bar{\mathbf{B}}_{6\times48}=\bar{\mathbf{L}}_{6\times3}\ \mathbf{N}_{3\times48} \tag{۲۳}$$

۲- ۲- روابط تنش و کرنش

مولفه‌های تانسور تنش کوشی و بخش متقارن تانسور تنش مرتبه بالاتر با استفاده از رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$\sigma=\mathbf{C}\ \varepsilon=\mathbf{C}\ \mathbf{B}\mathbf{d} \tag{۲۴}$$

$$\mathbf{m}=\mathbf{D}\,\chi=\mathbf{D}\ \bar{\mathbf{B}}\mathbf{d} \tag{۲۵}$$

که:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

$$\mathbf{D} = 2l^2\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که E، ν و μ به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و مدول برشی و l پارامتر اثر اندازه مستقل می‌باشند.

۲- ۳- ماتریس‌های سختی، جرم و سختی هندسی المان

با توجه به رابطه (۱۰) و اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\int_V \left(\delta\varepsilon^T \acute{\mathbf{o}} + \delta\chi^T \mathbf{m}\right) dV = \int_V \delta\mathbf{U}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \delta\mathbf{U}^{S^T} \mathbf{f}^S dS + \sum_i \delta\mathbf{U}^{i^T} \mathbf{R}_c^i \tag{۲۷}$$

که f^B، f^S و R^c به ترتیب بار واحد حجمی، بار سطحی اعمالی بر سطح کوچک و بار متمرکز می‌باشند. با توجه به روابط (۷)،(۱۶) و (۲۲) خواهیم داشت:

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{N}\ \delta\mathbf{d} \tag{۲۸–الف}$$

$$\delta\varepsilon = \mathbf{B}\ \delta\mathbf{d} \tag{۲۸–ب}$$

$$\delta\chi = \bar{\mathbf{B}}\ \delta\mathbf{d} \tag{۲۸–ج}$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (۲۸) در (۲۷) و با استفاده از روابط (۲۴) و (۲۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\int_V \left(\delta\mathring{\mathbf{a}}^T \acute{\mathbf{o}} + \delta\div^T \mathbf{m}\right) dV = \\ &\int_V \left((\mathbf{B}\delta\mathbf{d})^T \mathbf{CB} + (\bar{\mathbf{B}}\delta\mathbf{d})^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}} \right) dV = \\ &\delta\mathbf{d}^T \left(\int_V \left(\mathbf{B}^T\mathbf{CB} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\right) dV \right) \mathbf{d} \end{aligned} \tag{۲۹}$$

$$\begin{aligned} &\int_V \delta\mathbf{U}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \delta\mathbf{U}^{S^T} \mathbf{f}^S dS + \sum_i \delta\mathbf{U}^{i^T} \mathbf{R}_c^i = \\ &\delta\mathbf{d}^T \left(\mathbf{R}_c^i + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{f}^S dS \right) \end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\left(\int_V \left(\mathbf{B}^T\mathbf{CB} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\right) dV \right) \mathbf{d} = \left(\mathbf{R}_c^i + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}^B dV \right) \tag{۳۱}$$

که ماتریس سختی و نیرو به فرم زیر خواهد بود:

$$\mathbf{K} = \int_V \left(\mathbf{B}^T\mathbf{CB} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\right) dV \tag{۳۲}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_c^i + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}^B dV \tag{۳۳}$$

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\mathbf{B}^T\mathbf{CB} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\right) \frac{Lh\pi}{4} \frac{h\eta + 2R}{2} d\xi\, d\gamma\, d\eta \tag{۳۴}$$

ماتریس جرم که بیان‌کننده خصوصیات جرم المان است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N}\, dV \tag{۳۵}$$

که پس از انتقال انتگرال به سیستم مختصات محلی خواهیم داشت:

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \frac{Lh\pi}{4} \frac{h\eta + 2R}{2} d\xi\, d\gamma\, d\eta \tag{۳۶}$$

برای محاسبه ماتریس سختی هندسی المان که نشانگر کاهش یا افزایش سختی به هنگام اعمال نیرو می‌باشد نیز با تعریف ماتریس‌های J، W و G به شکل زیر خواهیم داشت:

$$[J] = \sum_{i=1}^{16} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} \theta_i & N_{i,\xi} r_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} \theta_i & N_{i,\eta} r_i \\ N_{i,\gamma} x_i & N_{i,\gamma} \theta_i & N_{i,\gamma} r_i \end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

$$[W]=\sum_{i=1}^{16}\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 \\ N_{i,\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} & 0 \\ 0 & N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & 0 & N_{i,\eta} \\ 0 & 0 & N_{i,\gamma} \end{bmatrix} \tag{۳۸}$$

$$[\tilde{J}^{-1}]=\begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [J]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow [G]=[\tilde{J}^{-1}][W] \tag{۳۹}$$

$$[\mathbf{K}_{\sigma}^{e}]=\int_V [\mathbf{G}]^T [S][\mathbf{G}]dV \tag{۴۰}$$

که:

$$[S]=\begin{bmatrix} [s] & 0 & 0 \\ 0 & [s] & 0 \\ 0 & 0 & [s] \end{bmatrix} \tag{۴۱}$$

$$[s]=\begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} & \tau_{xz0} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & \tau_{yz0} \\ \tau_{xz0} & \tau_{yz0} & \sigma_{z0} \end{bmatrix} \tag{۴۲}$$

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{z0} \\ \tau_{xy0} \\ \tau_{yz0} \\ \tau_{zx0} \end{Bmatrix}=[E][B]\{d\} \tag{۴۳}$$

۳- نتایج و بحث

پس از توسعه فرمولاسیون اجزاء محدود و استخراج ماتریس‌های سختی، جرم و سختی هندسی سوپر المان پوسته استوانه‌ای معرفی شده در این قسمت سعی شده است چگونگی استفاده از سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده در حل مسئله کمانش نشان داده شود. همانگونه که پیش از این نیز بیان شد با صفر قرار دادن پارامتر اثر اندازه در تئوری تنش کوپل اصلاح شده، نتایج مربوط به تئوری محیط پیوسته کلاسیک بدست خواهد آمد.

با استفاده از معادله تعادل استاتیکی مطابق رابطه زیر

$$[K]\{D\}=\{R\} \tag{۴۴}$$

که $\{R\}$ بار اعمالی می‌باشد، مقادیر بارهای بحرانی کمانش به کمک رابطه (۴۵) به دست خواهند آمد:

$$\det([K]+\lambda[K_{\sigma}])=0 \tag{۴۵}$$

به منظور بررسی و صحت نتایج بدست آمده با استفاده از سوپر المان جدید، نتایج حاصل شده با استفاده از المان مذکور با نتایج بدست آمده از مراجع دیگر بر اساس حل تحلیلی تئوری تنش کوپل اصلاح شده مقایسه خواهد شد.

در این راستا، نانو پوسته استوانه‌ای به طول L و شعاع سطح مقطع R و ضخامت h و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با خواص مادی $E=210$GPa و $v=210$GPa و ابعاد $L/R=0/5$ و $h/l=1$ مورد بحث قرار گرفته است.

بار بحرانی کمانش بدون بعد به دست آمده برای نسبت‌های مختلف

جدول ۱: مقایسه بار بحرانی کمانش بدون بعد برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت.

Table 1.

R/h	حل تحلیلی (مرجع [۴۹])	مطالعه حاضر (۵ المان)	مطالعه حاضر (۱۰ المان)
۳۰	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۵۴	۰/۰۳۳۱
۳۵	۰/۰۲۵۷	۰/۰۳۰۴	۰/۰۲۷۶
۴۰	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۴۶	۰/۰۲۲۹
۴۵	۰/۰۱۹۳	۰/۰۲۱۱	۰/۰۱۹۸
۵۰	۰/۰۱۷۱	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۷۳

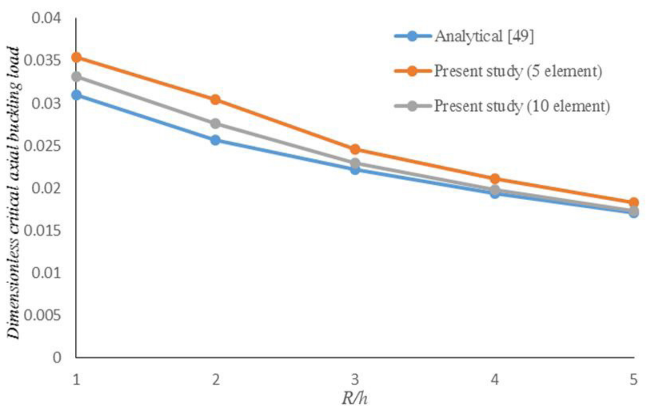

Fig. 2.

شکل ۲: تاثیر نسبت شعاع به ضخامت بر بار بحرانی کمانش بدون بعد.

شعاع به ضخامت با استفاده از روش اجزاء محدود و به کارگیری سوپر المان پوسته استوانه‌ای با نتایج حل تحلیلی در جدول ۱ نشان داده شده و مشخص گردیده است که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت، میزان بار بحرانی کمانش بدون بعد به علت کم شدن سختی، کاهش خواهد یافت. لازم به ذکر است که به منظور کاهش زمان تحلیل ابتدا تعداد ۵ المان برای تحلیل مساله کمانش نانو پوسته استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه به منظور بررسی صحت و همگرایی نتایج تعداد ۱۰ سوپر المان استفاده شده و نشان داده شده است که با افزایش تعداد المان‌های مذکور خطا نسبت به نتایج حل تحلیلی کاهش یافته، ضمن اینکه میزان خطا به هنگام استفاده از ۵ المان نیز مطابق نتایج به دست آمده قابل قبول بوده که این نکته موید آن است که نتایج حاصل دارای دقت مناسبی می‌باشند.

مقادیر بار ارائه شده در جدول ۱ را می‌توان در شکل ۲، به شکل نمودار نیز مشاهده کرد. همانطور که مشخص است نتایج حاصل از روش اجزاء محدود با به‌کارگیری سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده با نتایج حل تحلیلی تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطابقت داشته که این موضوع موید آن است که استفاده از سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده علاوه بر کاهش حجم محاسبات و زمان تحلیل، دارای دقت بالا و سرعت همگرایی مناسب در تحلیل مسائل مختلف از جمله کمانش می‌باشد.

در ادامه تاثیر نسبت طول به شعاع بر کمانش بحرانی نانو لوله استوانه‌ای در مقادیر مختلف اثر اندازه ، تاثیر پارامتر اثر اندازه برای ضخامت‌های مختلف و اثر تغییرات ضخامت نانو لوله استوانه‌ای با استفاده از روش اجزاء محدود و به کار گیری تنها تعداد ۵ عدد سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده نشان داده شده است.

در شکل ۳ به منظور بررسی تاثیر نسبت طول به شعاع بر کمانش بحرانی، نانو پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی تکیه گاه ساده و با خواص مادی $E=210$TPa و $v=0/19$ و ضخامت ثابت $h=0/34$mm مورد بررسی قرار گرفته است.

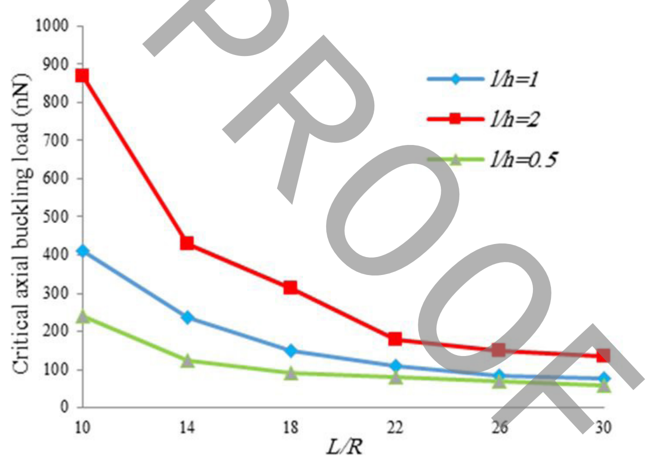

Fig. 3.

شکل ۳: تاثیر نسبت طول به شعاع بر بار کمانش محوری بحرانی.

همانطور که در شکل ۳ نشان داده است افزایش طول منجر به کاهش بار کمانش محوری بحرانی در مقادیر مختلف پارامتر اثر اندازه می‌گردد به نحوی که با افزایش پارامتر اثر اندازه تاثیر افزایش پارامتر طول بر کاهش بار کمانش بحرانی بیشتر می‌باشد. مطابق شکل ۳ با دو برابر شدن پارامتر اثر اندازه ($l=2h$) نسبت به زمانی‌که پارامتر اثر اندازه برابر ضخامت می‌باشد ($l=h$) بار کمانش محوری بحرانی افزایش خواهد یافت که این افزایش برای نسبت طول به شعاع کمتر از ۲۰ بسیار زیاد می‌باشد به نحوی‌که افزایش بیش از دو برابری بار کمانش محوری بحرانی را به دنبال خواهد داشت. همچنین با نصف شدن پارامتر اثر اندازه ($l=2h$) بار کمانش محوری بحرانی کاهش خواهد یافت که این روند کاهشی برای نسبت طول به شعاع کمتر از ۱۵ بیشتر می‌باشد. به عبارت دیگر افزایش طول نانو لوله به علت کاهش سختی منجر به کاهش بار کمانش بحرانی می‌گردد که این میزان کاهش بار

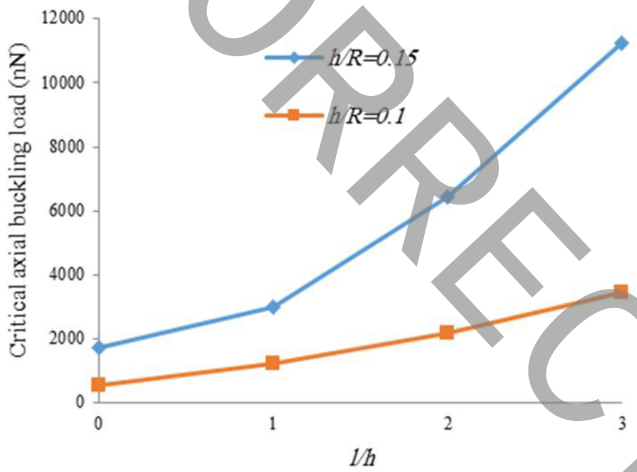

Fig. 4.

شکل ٤: تاثیر نسبت پارامتر اثر اندازه به ضخامت بر بار کمانش محوری بحرانی.

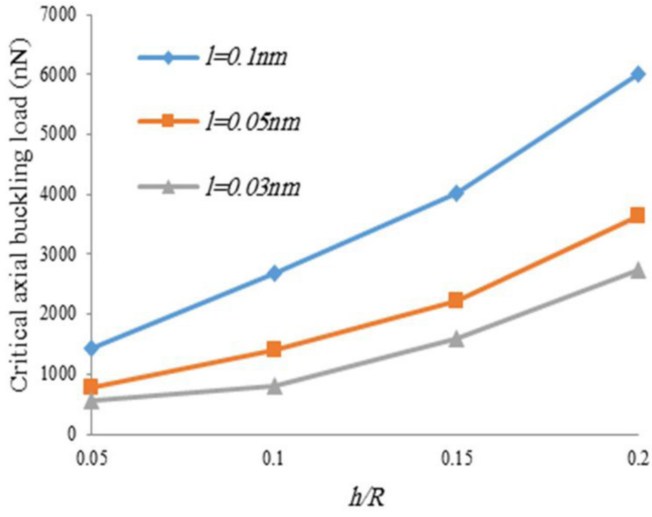

Fig. 5.

شکل ۵: تاثیر نسبت ضخامت به شعاع بر بار کمانش محوری بحرانی.

بحرانی برای نانو لوله‌ها با طول کوتاهتر بیشتر می‌باشد و تغییرات پارامتر اثر اندازه نیز بر آن تاثیر گذار خواهد بود.

تاثیر پارامتر اثر اندازه برای ضخامت‌های مختلف نانولوله استوانه‌ای و وابستگی رفتار کمانشی نانولوله به اثر اندازه در شکل ۴ با استفاده از روش اجزاء محدود و به کارگیری سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده نشان داده شده و مشخص گردیده است که افزایش پارامتر اثر اندازه منجر به افزایش بار کمانش محوری بحرانی خواهد شد. همانطور که نشان داده شده تاثیر پارامتر اثر اندازه بر بار کمانش محوری بحرانی برای ضخامت‌های بالاتر بیشتر می‌باشد.

در ادامه اثر تغییرات ضخامت نانو لوله استوانه‌ای بر بار کمانش محوری بحرانی تحت تاثیر تغییرات پارامتر اثر اندازه مطابق شکل ۵ مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده که افزایش ضخامت به ویژه در مقادیر بالاتر پارامتر اثر اندازه تاثیر قابل توجهی بر افزایش بار کمانش محوری بحرانی خواهد داشت.

همانطور که در نتایج مشخص گردید با افزایش نسبت شعاع به ضخامت که باعث کاهش سختی می‌گردد، میزان بار بحرانی کمانش کاهش خواهد یافت. همچنین افزایش طول نانو لوله به علت کاهش سختی منجر به کاهش بار کمانش محوری بحرانی در مقادیر مختلف پارامتر اثر اندازه می‌گردد به نحوی که با افزایش پارامتر اثر اندازه تاثیر افزایش پارامتر طول بر کاهش بار کمانش بحرانی بیشتر می‌باشد. که این میزان کاهش بار بحرانی برای نانو لوله‌ها با طول کوتاهتر بیشتر بوده و تغییرات پارامتر اثر اندازه نیز بر آن اثر گذار است. علاوه بر آن افزایش پارامتر اثر اندازه که باعث افزایش سختی می‌گردد نیز باعث افزایش بار کمانش محوری بحرانی شده به نحوی که تاثیر پارامتر اثر اندازه بر بار کمانش محوری بحرانی برای ضخامت‌های بالاتر بیشتر نیز می‌باشد. همچنین افزایش ضخامت به ویژه در مقادیر بالاتر پارامتر اثر اندازه به علت افزایش سختی باعث افزایش بار کمانش محوری بحرانی خواهد شد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل پوسته به معرفی سوپر المان جدید پوسته استوانه‌ای تنش کوپل اصلاح شده که قادر به احتساب اثر اندازه در محاسبات در مقیاس نانو می باشد پرداخته شده است. با فرض اثر اندازه صفر، دستیابی به المان پوسته استوانه‌ای کلاسیک علاوه بر المان جدید پوسته استوانه‌ای تنش کوپل اصلاح شده امکان‌پذیر می‌باشد. در حالت خاص، به منظور بررسی کاربرد روابط بدست آمده، به بررسی کمانش پرداخته شده و تاثیر پارامترهایی نظیر طول، ضخامت و شعاع بر بار بحرانی کمانش نانو لوله نشان داده شده و به منظور بررسی صحت نتایج، نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی مقایسه گردیده و انطباق مناسبی مشاهده شده و مشخص گردیده که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت، میزان بار بحرانی کمانش بدون بعد به علت کم شدن سختی، کاهش یافته و افزایش طول منجر به کاهش بار کمانش محوری بحرانی در مقادیر مختلف پارامتر اثر اندازه گردیده به نحوی که با افزایش پارامتر اثر اندازه تاثیر افزایش پارامتر طول بر کاهش بار کمانش بحرانی بیشتر می‌باشد.

علاوه بر این نشان داده شده است که افزایش پارامتر اثر اندازه منجر به افزایش بار کمانش محوری بحرانی شده و تاثیر پارامتر اثر اندازه بر بار کمانش محوری بحرانی برای ضخامت‌های بالاتر بیشتر می‌باشد. همچنین نشان داده شده که افزایش ضخامت به‌ویژه در مقادیر بالاتر پارامتر اثر اندازه تاثیر قابل توجهی بر افزایش بار کمانش محوری بحرانی خواهد داشت. به منظور کاهش زمان تحلیل و حجم محاسبات حداقل تعداد سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای تحلیل مسائل مذکور استفاده گردیده و نشان داده شده است که نتایج حاصل از روش اجزاء محدود با به کارگیری سوپر المان پوسته استوانه‌ای تئوری تنش کوپل اصلاح شده علاوه بر حجم محاسبات و زمان تحلیل کمتر، دارای دقت بالا و سرعت همگرایی مناسب در تحلیل مسائل مختلف از جمله کمانش می‌باشند.

منابع

[1] B. Arash, R. Ansari, Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain, Physica E, Vol. 42, pp. 2058 –2064, 2010.

[2] S. Sahmani, R. Ansari, On the free vibration response of functionally graded higher-order shear deformable microplates based on the strain gradient elasticity theory, Composite Structures, Vol. 95, pp. 430–442, 2013.

[3] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, L. Shen, Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 79, pp. 22 – 39, 2014.

[4] M. Şimşek, Nonlinear Static and Free Vibration Analysis of Microbeams Based on the Non-linear Elastic Foundation Using Modified Couple Stress Theory and He's Variational Method, Composite Structures, Vol. 112, , pp. 264-272, 2014.

[5] M. H. Ghayesh, H. Farokhi, M. Amabili, Nonlinear dynamics of a microscale beam based on the modified couple stress theory, Composites: Part B: Engineering, Vol. 50, pp. 318–324, 2013.

[6] M. Mohammadimehr, M. Mohandes, The Effect of Modified Couple Stress Theory on Buckling and Vibration Analysis of Functionally Graded Double-Layer Boron Nitride Piezoelectric Plate Based on CPT, Journal of Solid Mechanics, Vol. 7, No. 3, pp. 281-298, 2015.

[7] A. Ghorbanpour Arani, M. Abdollahian, R. Kolahchi, Nonlinear vibration of embedded smart composite microtube conveying fluid based on modified couple stress theory, Polymer Composites, Vol. 36, No. 7, pp. 1314-1324, 2015.

[8] R. A. Toupin, Elastic materials with couple stresses, Arch. Rational Mech.Anal, Vol. 11, pp. 385–414, 1962.

[9] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, Arch. Rational Mech. Anal, Vol. 11, pp. 415–448, 1962.

[10] W. T. Koiter, Couple stresses in the theory of elasticity, I and II.Proc.K.Ned.Akad.Wet.(B), Vol. 67, pp. 17–44, 1964.

[11] R. D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, Arch. Rational Mech.Anal.Vol. 16, pp. 51–78, 1964.

[12] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress Based Strain gradient theory for elasticity, Int.J.Solids Struct, Vol. 39, pp. 2731–2743, 2002.

[13] K. Shengli, Z. Shenjie, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams, J Eng Sci, Vol. 46, pp. 427–37, 2008.

[14] J. N. Reddy, J. Berry, Nonlinear theories of axisymmetric bending of functionally graded circular plates with modified couple stress, Compos Struct,Vol. 94, pp. 3664-3668, 2012.

[15] A. Ghorbanpour Arani, M. R. Bagheri, R. Kolahchi, Z. Khoddami Maraghi, Nonlinear vibration and instability of fluid-conveying DWBNNT embedded in a visco-Pasternak medium using modified couple stress theory, Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 27, No. 9, pp. 2645-2658, 2013.

[16] F. Pampaloni, E. L. Florin, Microtubule architecture: inspiration for novel carbon nanotube-based biomimetic materials, Trends Biotechnol, Vol. 26, pp. 302–310, 2008.

[17] H. G. Craighead, Nanoelectromechanical systems, Science, Vol. 290, pp. 1532–1535, 2000.

[18] M. Li, H. X. Tang, M. L. Roukes, Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications, Nat. Nanotech-nol. Vol. 2, pp. 114–120, 2007.

[19] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. T. Ahmadian, Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials, ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, San Diego, California, USA, August 30–September 2, 2009.

[20] Y. Tadi Beni, A. Koochi, M. Abadyan, Theoretical study of the effect of Casimir force, elastic boundary conditions and size dependency on the pull-in instability of beam-type NEMS, Phys E,Vol. 43, pp. 979-988, 2011.

[21] M. Şimşek, J. N. Reddy, Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory, Int J of Eng Sci, Vol. 64, pp. 37–53, 2013.

[22] J. Abdi, A. Koochi, A.S. Kazemi, M. Abadyan, Modeling the effects of size dependence and dispersion forces on the pull-in instability of electrostatic cantilever NEMS using modified couple stress theory, Smart Mater and Struct, Vol. 20, pp. 11-55, 2011.

[23] M. Şimşek, Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, Int J of Eng Sci, Vol. 48 No. 12, pp. 1721-1732, 2010.

[24] B. Akgöz, Ö. Civalek, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory, Composite Structures, Vol. 98, pp. 314-322, 2013.

[25] M. Mohammad-Abadi, A. R. Daneshmehr, Size dependent buckling analysis of microbeams based on modified couple stress theory with high order theories and general boundary conditions, International Journal of Engineering Science, Vol. 74, pp. 1-14, 2014.

[26] Y. G. Wang, W. H. Lin, N. Liu, Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 47, pp. 80-85, 2013.

[27] Y. Tadi Beni, A. Koochi, M. R. Abadyan, Using modified couple stress theory for modeling the size dependent pull-in instability of torsional nano-mirror under Casimir force, Int J of Optomechatronics, Vol. 8, pp. 47-71, 2014.

[28] R. Li, G. A. Kardomateas, Vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes embedded in elastic media by a nonlocal elastic shell model, Journal of Applied Mechanics, Vol. 74, No. 6, pp. 1087-1094, 2007.

[29] H. Zeighampour, Y. Tadi Beni, Cylindrical thin-shell model based on modified strain gradient theory, International Journal of Engineering Science, Vol. 78, pp. 27–47, 2014.

[30] H. Zeighampour, Y. Tadi Beni, Analysis of conical shells in the framework of coupled stresses theory, International Journal of Engineering Science, Vol. 81, pp. 107-122, 2014.

[31] F. Mehralian, Y. Tadi Beni, Size-dependent torsional buckling analysis of functionally graded cylindrical shell, Composites, Part B, Vol. 94, pp. 11-25, 2016.

[32] F. Mehralian, Y. Tadi Beni, R. Ansari, On the size dependent buckling of anisotropic piezoelectric cylindrical shells under combined axial compression and lateral pressure, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 119, pp. 155-169, 2016.

[33] S. Sahmani, R. Ansari, R. Gholami, A. Darvizeh, Dynamic stability analysis of functionally graded higher-

order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory, Composites: Part B, Vol. 51, pp. 44–53, 2013.

[34] A. Ghorbanpour Arani, S. Amir, A. R. Shajari, M. R. Mozdianfard, Electro-thermo-mechanical buckling of DWBNNTs embedded in bundle of CNTs using nonlocal piezoelasticity cylindrical shell theory, Composites Part B: Engineering, Vol. 43, No. 2, pp. 195-203, 2012.

[35] H. Zeighampour, Y. Tadi Beni, Size-dependent vibration of fluid-conveying double-walled carbon nanotubes using couple stress shell theory, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 61, pp. 28-39, 2014.

[36] D. H. Wu, W. T. Chien, C. J. Yang, Y. T. Yen, Coupled-field analysis of piezoelectric beam actuator using FEM, Sens Actuators A, Vol. 118, pp. 171–176, 2005.

[37] R. A. Coutu, P. E. Kladitis, L. A. Starman, J. R. Reid, A comparison of micro-switch analytic, finite element, and experimental results, Sens Actuators A,Vol. 115, pp. 252–258, 2004.

[38] F. Chapuis, F. Bastien, J. F. Manceau, F. Casset, P. L. Charvet, FEM modelling of Piezo-actuated microswitches, In: Seventh international conference on thermal, mechanical and multiphysics simulation and experiments in micro-electronics and micro-systems, EuroSime 2006, IEEE; April 24-26, 2006.

[39] B. Zhang, Y. He, D. Liu , Z. Gan, L. Shen, A non-classical Mindlin plate finite element based on a modified couple stress theory, European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 42, pp. 63-80, 2013.

[40] M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari , M. T. Ahmadian, A Timoshenko beam element based on the modi fied couple stress theory, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 79, pp. 75–83, 2014.

[41] P. Metz, G. Alici, G. M. Spinks, A finite element model for bending behaviour of conducting polymer electromechanical actuators, Sens Actuators A, Vol. 130, pp. 1–11, 2006.

[42] S. A. Tajalli, M. Moghimi Zand, M.T. Ahmadian, Effect of geometric nonlinearity on dynamic pull-in behavior of coupled-domain microstructures based on classical and shear deformation plate theories, Eur J Mech A Solids, Vol. 28, pp. 916 –9 25, 2009.

[43] J. Jiang, M. D. Olson, Nonlinear analysis of orthogonally stiffened cylindrical shells by a super element approach, Finite elements in Analysis and Design, Vol. 18, No. 1, pp. 99-110, 1994.

[44] S. A. Lukasiewicz, Geometrical super-elements for elasto-plastic shells with large deformation, Finite