

تعیین سرعت‌های بحرانی و مرزهای ناپایداری واگرایی برای یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ سرعت بالا

محمد کریمی خوزانی^۱، مهرداد پورسینا^{۲*}، علی پورکمالی انارکی^۱

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

^۲ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۴ تیر ۱۳۹۶

بازنگری: ۱۸ مهر ۱۳۹۶

پذیرش: ۱۲ بهمن ۱۳۹۶

ارائه آنلاین: ۱۸ بهمن ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

سرعت‌های بحرانی

ناپایداری واگرایی

سیستم سیاره‌ای دومارپیچ

اثرات ژيروسکوپ

سرعت بالا

چکیده: سیستم‌های سیاره‌ای سرعت بالا، یا به عبارت کلی‌تر، سیستم‌های ژيروسکوپ، پایستار انرژی نمی‌باشند، بنابراین در معرض ناپایداری قرار دارند. در این تحقیق پس از استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در فضای سه‌بعدی و با در نظر گرفتن شش درجه آزادی برای هر عضو به بررسی پایداری در محدوده سرعت‌های بحرانی سیستم پرداخته می‌شود. در استخراج معادلات، سفتی درگیری به صورت ثابت فرض شده و اثرات ژيروسکوپ ناشی از دوران بازو در نظر گرفته می‌شود. سرعت‌های بحرانی سیستم‌های ژيروسکوپ در سرعت‌هایی رخ می‌دهد که در آن یک یا تعداد بیشتری از فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر صفر می‌شود. برای محاسبه سرعت‌های بحرانی، مسأله مقدار ویژه سیستم از طریق روش‌های عددی حل می‌گردد. به منظور صحت‌سنجی معادلات و همچنین روند استخراج سرعت‌های بحرانی سیستم، نتایج استخراج شده برای یک سیستم سیاره‌ای ساده سرعت بالا با نتایج تحقیق موجود در این زمینه مقایسه می‌گردد. در پایان با رسم نمودارهای مربوط به تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در مقابل بازه‌ای از سرعت‌های بازو، پایداری سیستم در نزدیکی سرعت‌های بحرانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج تحقیق حاضر نشان می‌دهد که سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در بعضی از سرعت‌های بحرانی پایدار و در برخی دیگر در معرض ناپایداری واگرایی قرار دارد.

۱- مقدمه

سرعت‌های بحرانی سیستم‌های ژيروسکوپ در سرعت‌های خاصی رخ می‌دهد که در آن یک یا تعداد بیشتری از فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر صفر می‌شود. در سرعت‌های بحرانی، یک نیروی استاتیکی (یک نیرو با فرکانس نوسان صفر) رزونانس‌های سیستم را تحریک می‌کند [۱]. سیستم‌های چرخنده‌ای سیاره‌ای مستعد ناپایداری در سرعت‌های بحرانی می‌باشند، زیرا این نوع سیستم‌ها در معرض گشتاورهای ورودی و خروجی ثابت هستند. سرعت‌های بحرانی مرزهای ناپایداری واگرایی^۱ را از یکدیگر جدا می‌کنند. بنابراین محاسبه سرعت‌های بحرانی و مرزهای سرعت با ناپایداری واگرایی در طراحی سیستم‌های دوار شامل سیستم‌های سیاره‌ای سرعت بالا مثل موتور توربوفن‌ها و توربو جت‌ها (که دارای سرعتی بیش از ۶۰۰۰ دور بر دقیقه می‌باشند) و همچنین مته‌های دندانپزشکی (که سرعتی بین ۱۰۰۰۰ تا ۴۰۰۰۰۰ دور بر دقیقه دارند) اهمیت دارد.

از طرفی یکی از مهم‌ترین منابع ایجاد نویز و ارتعاشات در سیستم‌های چرخنده‌ای تغییرات سفتی درگیری می‌باشد که به واسطه تغییر در تعداد و موقعیت تماس دندان‌های درگیر ایجاد می‌شود. این تغییرات را می‌توان به صورت یک تابع پرریودیک مدل کرد که به صورت پارامتریک سیستم را

تحریک می‌کنند [۲]. این تحریک پارامتریک باعث ایجاد ناپایداری در سیستم تحت شرایط کاری خاص خواهد شد و در نتیجه، ایجاد نویز، افزایش بارهای دینامیکی سیستم و آسیب رسیدن به دندان‌های چرخنده و خرابی یاتاقان‌ها را به دنبال خواهد داشت. بنابراین مطالعه پایداری پارامتریک در سیستم‌های چرخنده‌ای نیز بسیار مهم خواهد بود.

با بررسی منابع تجربی موجود در زمینه سیستم‌های چرخنده‌ای می‌توان گفت، که تقریباً در مورد ارتعاشات سیستم‌های سیاره‌ای به خصوص سیستم‌های سیاره‌ای سرعت بالا مطالعه تجربی وجود ندارد. بنابراین هیچ نتیجه تجربی منتشر شده‌ای در مورد ناپایداری سیستم‌های سیاره‌ای موجود نیست. تنها مدرک موجود در این زمینه ارتعاشات زیادی است که در صنعت در سیستم‌های چرخنده‌ای سیاره‌ای سرعت بالا مشاهده می‌شود [۳]. البته بدون انجام پژوهش‌های تجربی تخصصی و تمرکز بر آن‌ها، نمی‌توان به طور قطعی مشخص کرد که ارتعاشات بسیار زیاد سیستم ناشی از ناپایداری مربوط به سرعت‌های بحرانی سیستم می‌باشد یا ناپایداری ناشی از تحریک پارامتریک حاصل از تغییرات سفتی درگیری این ارتعاشات را به وجود می‌آورد. از این رو برخی از محققان در مورد تعیین سرعت‌های بحرانی و برخی دیگر نیز در مورد پایداری حاصل از تحریک پارامتریک سیستم‌های ژيروسکوپ مطالعاتی داشته‌اند.

مطالعات متنوعی در مورد تعیین سرعت‌های بحرانی و پایداری مکانیکی

1 Divergence instability

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mehrdad.poursina@gmail.com

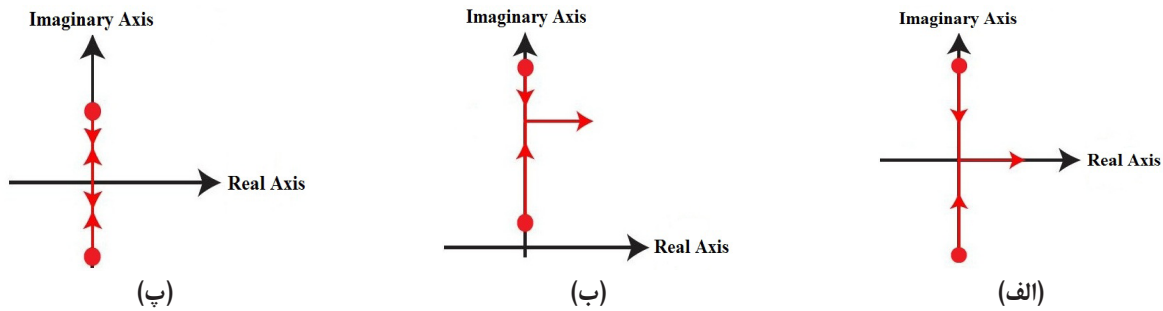


Fig. 1. a) Divergence instability, b) Flutter instability, and c) Stability state

(The circles indicate initial eigenvalues and the vectors indicate the variation direction of the eigenvalue versus the carrier speed changes)

شکل ۱: (الف) ناپایداری واگرایی، (ب) ناپایداری دوشاخه شدگی، (پ) حالت پایدار

(دایره‌ها در شکل نشان‌دهنده مقدار اولیه مقادیر ویژه خواهد بود و بردارها جهت تغییرات مقادیر ویژه با تغییر سرعت بازو را نشان می‌دهد)

واگرایی و ناپایداری دوشاخه‌شدگی^۲ قرار دارند. ناپایداری واگرایی همان‌طور که در شکل ۱-الف مشاهده می‌شود، زمانی رخ می‌دهد که یکی از مقادیر ویژه موهومی سیستم، به‌صورت یک عدد حقیقی و مثبت درآید. ناپایداری دوشاخه‌شدگی مطابق با شکل ۱-ب زمانی اتفاق می‌فتد که دو مقدار ویژه موهومی محض، با یکدیگر برابر شده و به‌صورت یک عدد مختلط با قسمت حقیقی مثبت درآیند. زمانی که ناپایداری دو شاخه‌شدگی اتفاق می‌افتد، حرکت نوسانی با افزایش دامنه ارتعاشات به‌صورت نمایی رخ می‌دهد. حالت دیگری که مطابق با شکل ۱-پ ممکن است رخ دهد این است که در سرعت بحرانی دو مقدار ویژه برابر صفر شوند اما بدون هیچ‌گونه تغییری قبل و بعد از سرعت بحرانی همچنان به‌صورت موهومی محض وجود داشته باشند. در این حالت سیستم پایدار خواهد بود.

زمانی که یک سیستم سیاره‌ای در ناحیه مربوط به سرعت ناپایداری قرار می‌گیرد، مدل‌های تحلیلی، پاسخ سیستم را به‌صورت بی‌کران پیش‌بینی خواهند کرد. در واقعیت، نیز در چنین شرایطی دامنه ارتعاشات سیستم زیاد می‌باشد که به واسطه خواص غیرخطی سیستم و همچنین میرایی آن محدود می‌گردد. این دامنه‌های بزرگ حرکت، باعث ایجاد نویز در سیستم می‌شود. بنابراین پیش‌بینی صحیح این نواحی سرعت برای دوری کردن از آن‌ها ضروری می‌باشد. تحقیق حاضر بر روی ناپایداری واگرایی یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در محدوده سرعت‌های بحرانی متمرکز است.

۳- مدل‌سازی دینامیکی سیستم سیاره‌ای دومارپیچ

برای استخراج مدل در فضای سه‌بعدی، برای هر عضو ۶ درجه آزادی شامل سه درجه آزادی انتقالی و سه درجه آزادی دورانی، در نظر گرفته می‌شود. همچنین علاوه بر در نظر گرفتن سفتی درگیری، سفتی ناشی از اثرات یاتاقان‌ها نیز در مدل وارد می‌شود. در ضمن از فرضیه‌های زیر که برخی از آن‌ها در مراجع [۱۶-۱۸] نیز بیان شده است، استفاده می‌گردد:

- ۱) بدنه تمامی چرخنده‌های درگیر به‌صورت جسم صلب فرض می‌شوند.
- ۲) انعطاف پذیری درگیری چرخنده‌ها توسط فنرهای خطی مدل می‌شوند که بر روی صفحه عمل عمود بر سطح دندانه‌های چرخنده

سیستم‌های ژيروسکوپ، موجود می‌باشد. این مطالعات شامل سیستم‌هایی مثل محور در حال حرکت وسایل نقلیه [۴-۵]، شفت‌های دوار [۶]، دیسک‌های دوار [۱ و ۱۳-۷] و همچنین دیسک‌ها و اسپیندل‌های^۱ دوار [۱۴-۱۵] می‌باشند. سرعت‌های بحرانی دیسک‌های دوار به‌صورت تجربی نیز در مراجع [۱ و ۱۲ و ۱۳] تعیین شده است. تنها مرجع موجود در زمینه تعیین سرعت‌های بحرانی بازو در سیستم‌های سیاره‌ای، تحقیق کولی و پارکر می‌باشد که در آن به پایداری مکانیکی یک سیستم سیاره‌ای ساده سرعت بالا پرداخته شده است [۳]. آن‌ها در این پژوهش نشان دادند که سرعت‌های بحرانی و بردارهای ویژه متناسب با این سرعت‌های بحرانی خواص مشخصی دارند. به‌ویژه، سیستم‌های سیاره‌ای ساده دارای سه نوع سرعت بحرانی می‌باشند که متناسب با شکل مود مربوطه به سه دسته سرعت‌های بحرانی سیاره‌ای، پیچشی و انتقالی تقسیم‌بندی می‌شوند.

بررسی منابع موجود در سیستم‌های سیاره‌ای نشان می‌دهد که در زمینه پایداری سیستم‌های سیاره‌ای دومارپیچ مرجعی وجود ندارد. از این رو در تحقیق حاضر به بررسی پایداری یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ با در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپ و سفتی درگیری ثابت در محدوده سرعت‌های بحرانی بازو پرداخته می‌شود. به همین منظور ابتدا انواع ناپایداری در سیستم‌های ژيروسکوپ توضیح داده می‌شود. سپس معادلات کلی حاکم بر یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در فرم ماتریسی به‌همراه نحوه استخراج سرعت‌های بحرانی سیستم ارائه می‌گردد. در بخش بعدی از طریق مقایسه نتایج برای یک سیستم سیاره‌ای ساده سرعت بالا با نتایج تحقیق کولی و پارکر [۳] معادلات مربوطه و روند انجام کار صحت‌سنجی می‌گردند. در بخش پایانی نیز با رسم نمودارهای مربوط به تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم در مقابل بازه‌ای از سرعت‌های بازو، در مورد پایداری سیستم در نزدیکی سرعت‌های بحرانی بحث می‌گردد.

۲- انواع ناپایداری در سیستم‌های ژيروسکوپ

سیستم‌های ژيروسکوپ در سرعت‌های بالا مستعد دو نوع ناپایداری

اینرسی جرمی می‌باشند. حال بایستی روابط (۱) و (۲) را برای درگیری چرخنده‌های خورشید- سیاره، رینگ- سیاره و بازو- سیاره بسط داد تا معادلات دینامیکی مربوط به هر کدام از جفت چرخنده‌های درگیر استخراج شود.

۳-۱- معادلات دینامیکی چرخنده‌های خورشید- سیاره i ام

مجموعه معادلات دینامیکی مربوط به درگیری چرخنده‌های خورشید- سیاره i ام در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۳) بیان می‌گردد [۱۸-۱۶]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + k_{sp} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{spi}^{11} & \mathbf{K}_{spi}^{12} \\ sym. & \mathbf{K}_{spi}^{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{gpi} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_s(t) \\ \mathbf{q}_{pi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{sm} + \mathbf{f}_{si}(t) \\ \mathbf{f}_{spi}(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، زیرنویس‌های s و p به ترتیب نشان‌دهنده چرخنده‌های خورشید و سیاره i ام، \mathbf{M} ماتریس جرم، \mathbf{G} ماتریس ژيروسکوپ، \mathbf{q} و $\dot{\mathbf{q}}$ به ترتیب بردارهای جابه‌جایی، سرعت و شتاب، \mathbf{K}_b ماتریس سفتی یاناقان، k_{spi} میانگین سفتی درگیری بین چرخنده‌های خورشید و سیاره i ام، \mathbf{K}_{spi} ماتریس تبدیل سفتی درگیری بین چرخنده‌های خورشید و سیاره i ام در جهات مختصاتی مختلف، Ω_c سرعت بازو حول محور z سیاره i ام در جهات مختصاتی مختلف، \mathbf{K}_g ماتریس سفتی ناشی از اثرات ژيروسکویی، \mathbf{f}_{sm} ، \mathbf{f}_{si} و \mathbf{f}_{spi} به ترتیب تحریک‌های ناشی از گشتاور خارجی و خطای انتقال استاتیکی بین چرخنده‌های خورشید و سیاره i ام می‌باشند.

۳-۲- معادلات دینامیکی چرخنده‌های رینگ- سیاره i ام

مجموعه معادلات دینامیکی مربوط به درگیری چرخنده‌های رینگ- سیاره i ام در فرم ماتریسی مطابق رابطه (۴) می‌باشد [۱۸-۱۶]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{br} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + k_{rp} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rpi}^{11} & \mathbf{K}_{rpi}^{12} \\ sym. & \mathbf{K}_{rpi}^{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{gpi} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r(t) \\ \mathbf{q}_{pi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{rm} + \mathbf{f}_{ri}(t) \\ \mathbf{f}_{rpi}(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

در رابطه (۴)، زیرنویس r نشان‌دهنده چرخنده رینگی، k_{rp} میانگین

اثر می‌کنند.

(۳) از متغیر با زمان بودن سفتی درگیری صرف‌نظر می‌شود [۲۰-۱۹].

(۴) فرض می‌شود دندانه‌های چرخنده در ناحیه درگیری همیشه با یکدیگر تماس دارند و هیچ‌گونه جدایشی رخ نمی‌دهد.

(۵) فرض می‌شود که تمامی چرخنده‌های سیاره‌ای مشابه یکدیگر می‌باشند.

(۶) نیروی اصطکاکی که به واسطه لغزش دندانه‌ها بر روی یکدیگر به وجود می‌آید، ناچیز فرض می‌شود [۲۱].

(۷) سمت چپ و راست چرخنده‌های دو مارپیچ به جز جهت دندانه‌ها که عکس یکدیگر می‌باشند، یکسان فرض می‌شود.

(۸) گروهی از خطاهای بالقوه مثل خروج از مرکزی، خطا در موقعیت سوراخ بین سیاره‌ها و غیره که ناشی از ساخت چرخنده‌ها و بازو می‌باشد، نادیده گرفته می‌شود.

(۹) از میرایی سیستم صرف‌نظر می‌شود.

(۱۰) اثرات ژيروسکویی ناشی از دوران بازو در نظر گرفته می‌شود.

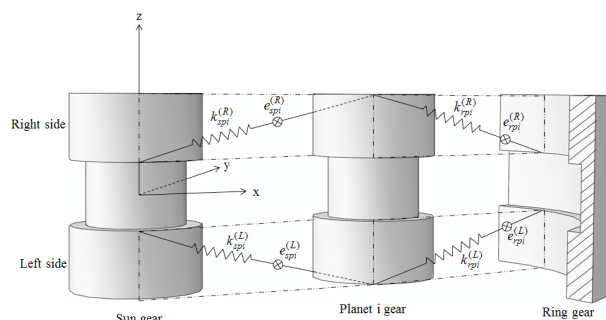


Fig. 2. Lumped mass model of double helical planetary gear system with one planet

شکل ۲: مدل جرم گسسته یک سیستم سیاره‌ای دوماپیچ با یک سیاره

شکل ۲ نشان‌دهنده یک سیستم سیاره‌ای دوماپیچ با یک سیاره می‌باشد. با در نظر گرفتن فرضیه‌های بالا، ابتدا معادلات دینامیکی برای یک سمت از چرخنده‌های درگیر نوشته می‌شود. سپس از آنجایی که سمت چپ و راست چرخنده‌ها مشابه یکدیگر فرض شده‌اند، معادلات به سمت دیگر نیز تعمیم داده می‌شود. در پایان هم با استفاده از روش المان محدود و به کمک المان‌های تیر اویلر معادلات سمت چپ و راست با یکدیگر ترکیب شده تا معادلات کلی سیستم استخراج گردند.

معادلات اساسی نیرو و گشتاور در فضای سه‌بعدی برای استخراج معادلات حرکت هر جفت چرخنده درگیر به صورت زیر خواهند بود:

$$\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_i \quad (i = x, y, z) \quad (1)$$

$$\sum \mathbf{T}_i = \mathbf{I}_i \ddot{\theta}_i \quad (i = x, y, z) \quad (2)$$

در روابط (۱) و (۲)، m جرم، \mathbf{F}_i ، \mathbf{T}_i ، \mathbf{a}_i و $\ddot{\theta}_i$ به ترتیب بردار نیرو، بردار گشتاور، بردار شتاب خطی، بردار شتاب زاویه‌ای و ماتریس ممان

جدول ۲: مقایسه سرعت‌های بحرانی استخراج شده در این تحقیق با نتایج داده شده در مرجع [۳] برای یک سیستم سیاره‌ای ساده با چهار سیاره

Table 2. Comparison of extracted critical speeds in this research with the presented results in Ref. [3] for a spur planetary gear system with four planet

ردیف	سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده	
	نتایج ارائه شده در مرجع [۳]	نتایج استخراج شده در این تحقیق
۱ و ۲	۰/۷۴۲۲ (۲)	۰/۷۴۲۲ (۲)
۳ و ۴	۱ (۲)	۱ (۲)
۵ و ۶	۱/۰۶۸ (۲)	۱/۰۶۸ (۲)
۷ و ۸	۱/۳۵۶ (۲)	۱/۳۵۶ (۲)
۹	۱/۴۴	۱/۴۳۹۷
۱۰ و ۱۱	۱/۵۲۸ (۲)	۱/۵۲۸ (۲)
۱۲	۴/۳۳	۴/۳۱۹۸
۱۳ و ۱۴	۵/۲۴۴ (۲)	۵/۲۴۳۹ (۲)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b - \Omega_c^2 \mathbf{K}_g)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (۶)$$

در رابطه (۶)، \mathbf{K}_m ماتریس سفتی درگیری و $\mathbf{F}(t)$ بردار تحریک ناشی از گشتاورهای خارجی و تحریک ناشی از خطای انتقال استاتیکی می‌باشند. جزئیات مربوط به نحوه محاسبه بردارها و ماتریس‌های ارائه شده در رابطه (۶) در مراجع [۱۶-۱۸] داده شده است.

۴- روند استخراج سرعت‌های بحرانی برای یک سیستم سیاره‌ای دومارپیج

به منظور استخراج سرعت‌های بحرانی، ابتدا تمامی پارامترها و ماتریس‌های سیستم، نسبت به پارامترهای چرخنده سیاره بی‌بعد می‌شوند. سپس با استفاده از روش جداسازی متغیرها و قرار دادن $\mathbf{q} = \Phi \exp(\lambda t)$ در رابطه (۶) معادله مقدار ویژه برای فرم همگن رابطه (۶) به صورت رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$\lambda^2 \mathbf{M}\Phi + \lambda \mathbf{G}\Phi + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_m - \Omega_c^2 \mathbf{K}_g)\Phi = \mathbf{0} \quad (۷)$$

همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد، در سرعت‌های بحرانی، حداقل یکی از مقادیر ویژه سیستم صفر خواهد شد. بنابراین، در رابطه (۷) مقدار λ برابر صفر قرار داده می‌شود تا رابطه (۸) استخراج گردد:

$$(\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_m)\Phi - \Omega_{crit}^2 \mathbf{K}_g \Phi = \mathbf{0} \quad (۸)$$

رابطه (۸) در واقع یک مسأله مقدار ویژه می‌باشد که حل آن باعث می‌شود تا سرعت‌های بحرانی سیستم که در واقع همان مقادیر ویژه رابطه (۸) می‌باشد، محاسبه گردد.

۵- صحت‌سنجی معادلات و روند استخراج سرعت‌های بحرانی

در این قسمت به منظور صحت‌سنجی معادلات و همچنین روند استخراج سرعت‌های بحرانی سیستم، نتایج مربوط به یک سیستم سیاره‌ای ساده با نتایج ارائه شده در مرجع [۳] مقایسه می‌گردد. جدول ۱ پارامترهای اساسی

سفتی درگیری بین چرخنده‌های رینگ و سیاره i ام، \mathbf{K}_{rpi} ماتریس تبدیل سفتی درگیری بین چرخنده‌های رینگ و سیاره i ام در جهات مختلف مختصاتی، \mathbf{f}_i ، \mathbf{f}_m و \mathbf{f}_{rpi} به ترتیب تحریک‌های ناشی از گشتاور خارجی و خطای انتقال استاتیکی بین چرخنده‌های رینگ و سیاره i ام می‌باشند.

۳-۳- معادلات دینامیکی بازو- سیاره i ام

مجموعه معادلات دینامیکی مربوط به درگیری بازو- سیاره i ام در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۵) بیان می‌گردد [۱۶-۱۸]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_c(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_c(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \mathbf{q}_{pi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cpi}^{11} & \mathbf{K}_{cpi}^{12} \\ sym. & \mathbf{K}_{cpi}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \mathbf{q}_{pi}(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{gp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \mathbf{q}_{pi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (۵)$$

در رابطه (۵)، زیرنویس c نشان‌دهنده بازو و \mathbf{K}_{cpi} ماتریس سفتی درگیری بین بازو با سیاره i ام می‌باشند.

۳-۴- معادلات کلی سیستم

مجموعه معادلات کلی حاکم بر سیستم سیاره‌ای دومارپیج با N سیاره (با مجموع $(N + ۳)$ درجه آزادی) پس از ترکیب معادلات سمت چپ و راست چرخنده‌های درگیر با استفاده از المان‌های تیر اویلر در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۶) درمی‌آید [۱۶-۱۸]:

جدول ۱: پارامترهای اساسی سیستم سیاره‌ای ساده [۳]

Table 1. Basic parameters of a spur planetary gear system [3]

پارامتر	چرخنده خورشیدی	چرخنده سیاره‌ای	چرخنده رینگی	بازو
جرم (kg)	۳	۱/۸۶	۷/۶۴	۱۲
ممان اینرسی تقسیم بر مربع شعاع مبنا (kg)	۱/۷۵	۱/۲۵	۸/۰۹	۶/۸
قطر مبنا (mm)	۵۵/۷۵	۲۷	۱۰۹/۷	۸۸/۶
سفتی درگیری سفتی یاتاقان در (N/ μm)	۱۰۰	۱۰۰		
جهت X و Y (N/ μm)	۲۰	۱۰	۱۰۰	۵۰
سفتی پیچشی یاتاقان (N/ μm)	۲۰	-	۱۰۰	۱۰۰
زاویه فشار (درجه)	۲۰	۲۰	۲۰	-

جدول ۴: سرعت‌های بحرانی محاسبه شده برای سیستم سیاره‌ای دومازیج

Table 4. Calculated critical speeds for a double-helical planetary gear system

سرعت بحرانی بی‌بعد شده	ردیف
۰/۳۶۵۹۳	۱
۰/۴۲۳۷۶۲	۲
۰/۵۰۷۹	۳ و ۴
۰/۶۱۳۱۵۵	۵
۰/۶۶۵۶۵	۶
۰/۶۸۲۵۶۱	۷
۰/۸۲۵۶۲۳	۸
۰/۸۶۱۴۹۴	۹
۰/۸۹۱۵۴۶	۱۰
۰/۹۹۳۰۹۴	۱۱
۱	۱۲ و ۱۳ و ۱۴
۱/۰۲۲۹۸۲	۱۵
۱/۱۵۰۲۵۶	۱۶
۱/۱۸۷۲۲۶	۱۷
۱/۳۲۲۸۷۶	۱۸
۱/۳۷۷۲۶۹	۱۹
۱/۴۶۶۴۳	۲۰
۱/۵۶۲۳۵۴	۲۱
۱/۷۱۷۰۴۷	۲۲
۱/۷۵۸۱۱۸	۲۳
۱/۷۷۰۴۴	۲۴
۱/۹۵۴۹۸۸	۲۵
۲/۰۳۹۹۶۷	۲۶
۲/۲۸۵۸۱	۲۷
۲/۴۵۰۳۴	۲۸

جدول ۳: پارامترهای اساسی سیستم سیاره‌ای دومازیج [۱۶]
Table 3. Basic parameters of a double-helical planetary gear system [16]

پارامتر	چرخنده خورشیدی	چرخنده سیاره	چرخنده رینگی	بازو
تعداد دندانه	۴۷	۳۹	۱۲۵	-
مدول نرمال (mm)		۱/۸۱		-
زاویه ماریج (درجه)		۲۱/۵		-
زاویه فشار نرمال (درجه)		۲۲/۵		-
شعاع مبنا (mm)	۴۱/۸	۳۴/۷	۱۱۱/۲	-
جرم (kg)	۱/۲۲	۱/۶۹	۲/۴	۰/۶۵۱
سفتی درگیری (N/μm)		۵۶۴	۵۳۱	-
سفتی یاتاقان در جهات X و Y (N/μm)	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	-
سفتی یاتاقان (1e6Nm/rad)	۵	۵	۱۰	-

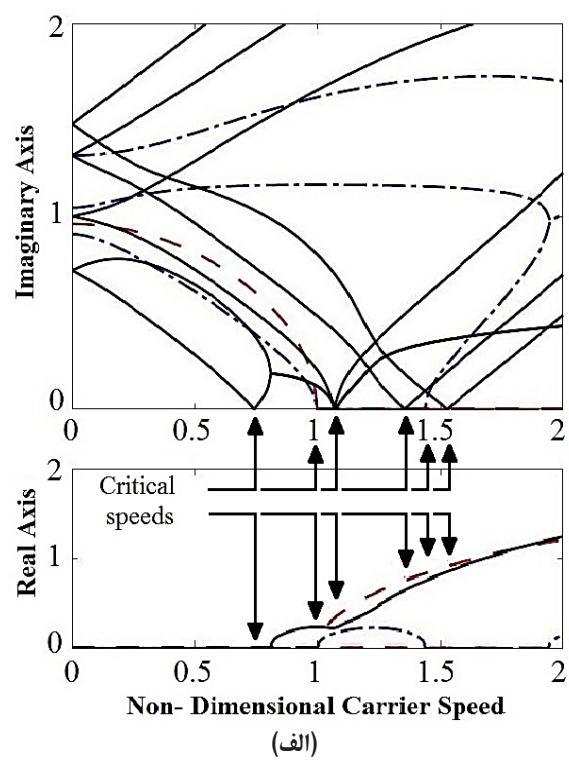
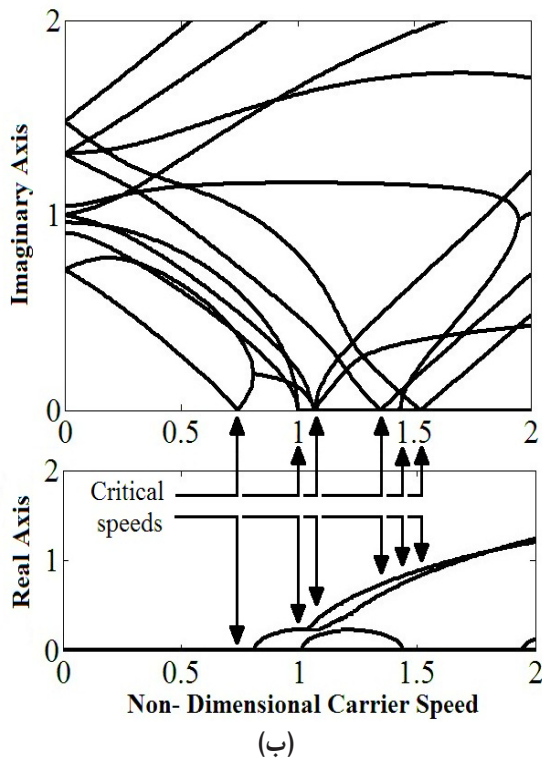


Fig. 3. Diagram of variation of the real and imaginary parts of the eigenvalue versus non-dimensional carrier speed for spur planetary gear system: a) The presented results in Ref. [3], b) The extracted results in this research

شکل ۳: نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم سیاره‌ای ساده در مقابل تغییرات سرعت بازوی بی‌بعد شده: (الف) نتایج ارائه شده در مرجع [۳]، (ب) نتایج استخراج شده در این تحقیق.

برابر صفر می‌باشد.

به‌منظور تحلیل پایداری سیستم در محدوده سرعت‌های بحرانی بازو، بایستی از شکل‌های ۱-الف و ۱-پ استفاده نمود. در ضمن بهتر است، نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم در محدوده‌های کوچکتری از سرعت‌های بازوی بی‌بعد شده ترسیم گردد. از این رو شکل‌های ۵-الف تا ۵-ث به ترتیب نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم را در بازه‌های $0 < \Omega_c < 0.5$ ، $0.5 < \Omega_c < 1$ ، $1 < \Omega_c < 1.5$ ، $1.5 < \Omega_c < 2$ و $2 < \Omega_c < 2.5$ نشان می‌دهد. با بررسی شکل‌های ۱-الف، ۱-پ و ۵-الف تا ۵-ث، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- در محدوده سرعت بازوی بی‌بعد شده $0 < \Omega_c < 0.5$ ، سیستم در سرعت بحرانی بی‌بعد شده 0.36593 دچار ناپایداری واگرایی شده است و در سرعت بحرانی بی‌بعد شده 0.423762 پایدار می‌باشد.
- در محدوده سرعت بازوی بی‌بعد شده $0.5 < \Omega_c < 1$ ، سیستم در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 0.5079 ، 0.613155 ، 0.682561 ، 0.825623 ، 0.861494 ، 0.891546 و 1 در معرض ناپایداری واگرایی قرار دارد و در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 0.66565 و 0.993094 پایدار می‌باشد.

- در محدوده سرعت بازوی بی‌بعد شده $1 < \Omega_c < 1.5$ ، سیستم در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 1.022982 ، 1.150256 ، 1.322876 و 1.377269 ناپایداری واگرایی را تجربه می‌کند و در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 1.187226 و 1.46643 پایدار می‌باشد.

- در محدوده سرعت بازوی بی‌بعد شده $1.5 < \Omega_c < 2$ ، سیستم در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 1.717047 و 1.77044 دچار ناپایداری واگرایی شده است و در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 1.562354 ، 1.758118 و 1.954988 پایدار می‌باشد.

- در محدوده سرعت بازوی بی‌بعد شده $2 < \Omega_c < 2.5$ ، سیستم در سرعت بحرانی بی‌بعد شده 2.039967 دچار ناپایداری واگرایی شده است و در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد شده 2.28581 و 2.45034 پایدار می‌باشد.

پایداری و ناپایداری سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در سرعت‌های بحرانی را با توجه به شکل‌های ۱-الف و ۱-پ می‌توان این‌گونه توجیه کرد که در سرعت‌هایی که مقدار ویژه موهومی سیستم حقیقی و مثبت می‌شود، سیستم در معرض ناپایداری واگرایی قرار دارد. این در حالی است که در سرعت‌هایی که مقدار ویژه سیستم برابر صفر شود، اما بدون هیچ‌گونه تغییری قبل و بعد از سرعت بحرانی همچنان به صورت موهومی محض وجود داشته باشد، سیستم، پایدار خواهد بود.

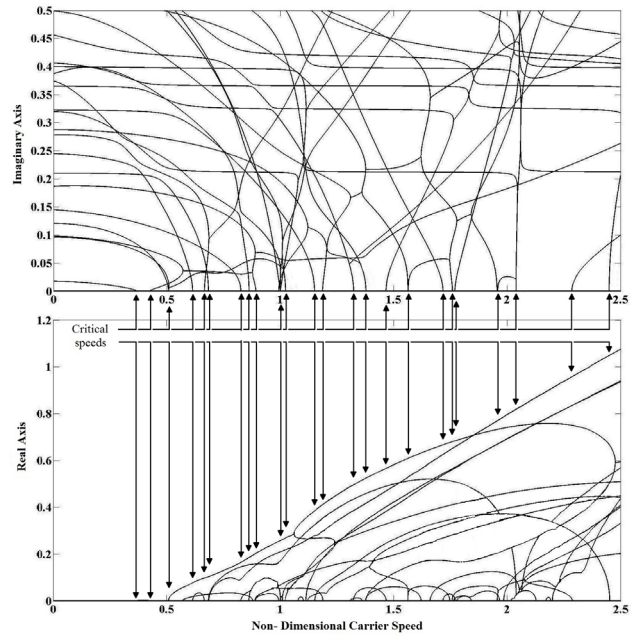


Fig. 4. Diagram of variation of the real and imaginary parts of the eigenvalue versus non-dimensional carrier speed for double-helical planetary gear system

شکل ۴: نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در مقابل تغییرات سرعت بازوی بی‌بعد شده

سیستم سیاره‌ای داده شده در مرجع [۳] را نشان می‌دهد. جدول ۲ نیز مقایسه سرعت‌های بحرانی محاسبه شده با سرعت‌های بحرانی داده شده در مرجع [۳] برای یک سیستم سیاره‌ای ساده با چهار سیاره را نشان می‌دهد. مقایسه سرعت‌های بحرانی داده شده در جدول ۲ نشان‌دهنده صحت روابط و روند استخراج سرعت‌های بحرانی سیستم می‌باشد.

به‌منظور اطمینان بیشتر، در مرحله بعدی نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم سیاره‌ای ساده در مقابل تغییرات سرعت بازوی بی‌بعد شده ترسیم می‌گردد. همانطور که در شکل ۳ مشخص می‌باشد، نمودار استخراج شده با نمودارهای ارائه شده در مرجع [۳] به‌طور کامل مطابقت داشته و قسمت موهومی مقادیر ویژه در سرعت‌های بحرانی سیستم که در جدول ۲ داده شده است، برابر صفر می‌باشد.

۶- استخراج سرعت‌های بحرانی و بررسی پایداری برای یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ

در جدول ۳ پارامترهای اساسی یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ ارائه شده است. جدول ۴ سرعت‌های بحرانی محاسبه شده برای این سیستم سیاره‌ای دومارپیچ را نشان می‌دهد. اعداد ارائه شده در جدول ۴ بر اساس روندی که در بخش چهارم این تحقیق بیان گردید، محاسبه شده است.

شکل ۴ نشان‌دهنده نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم سیاره‌ای دومارپیچ در مقابل تغییرات سرعت بازوی بی‌بعد شده می‌باشد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، قسمت موهومی مقادیر ویژه در سرعت‌های بحرانی سیستم که در جدول ۴ داده شده است،

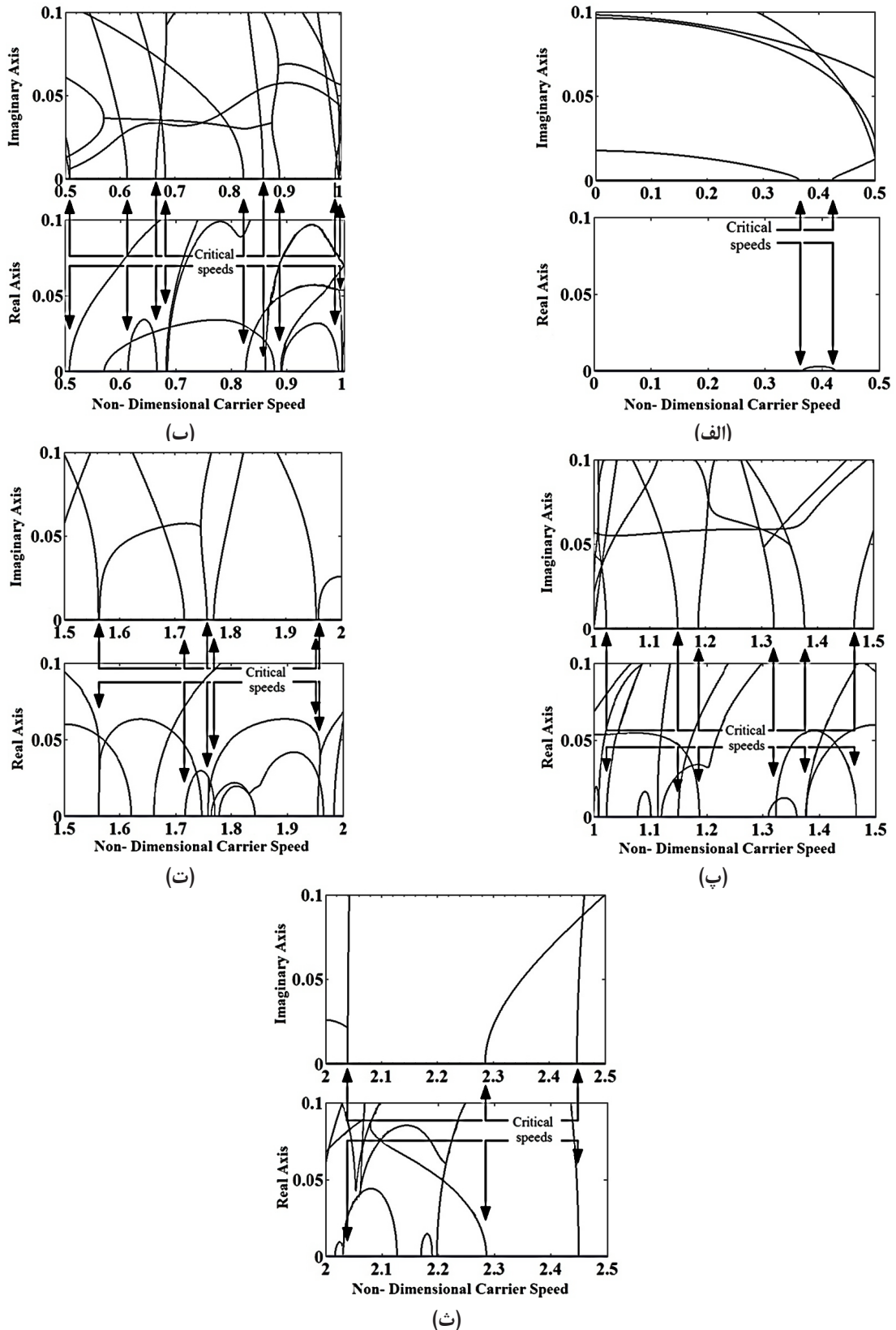


Fig. 5. Diagram of variation of the real and imaginary parts of the eigenvalue:
 (a) $0 < \Omega_c < 0.5$. (b) $0.5 < \Omega_c < 1$. (c) $1 < \Omega_c < 1.5$. (d) $1.5 < \Omega_c < 2$. (e) $2 < \Omega_c < 2.5$.

شکل ۵: نمودار تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم سیاره‌ای دواماریج در مقابل بازه‌های مختلف تغییرات سرعت بازوی بی‌بعد شده:
 (الف) $0 < \Omega_c < 0.5$ (ب) $0.5 < \Omega_c < 1$ (پ) $1 < \Omega_c < 1.5$ (ت) $1.5 < \Omega_c < 2$ (ث) $2 < \Omega_c < 2.5$

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق پس از استخراج یک مدل دینامیکی خطی مستقل از زمان در فضای سه بعدی و با در نظر گرفتن شش درجه آزادی برای هر عضو و در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپیک ناشی از دوران بازو به بررسی پایداری یک سیستم سیاره‌ای دوماریچ پردازخته شده است. به همین منظور، پس از استخراج معادلات حاکم بر سیستم، سرعت‌های بحرانی بازو که در آن یک یا چند عدد از مقادیر ویژه سیستم صفر می‌شود، محاسبه می‌گردد. سپس با رسم نمودار تغییرات قسمت‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه سیستم در مقابل بازه‌ای از سرعت‌های بازوی بی‌بعد شده، مرزهای ناپایداری واگرایی سیستم تعیین می‌گردد. ناپایداری واگرایی در سرعت‌های بحرانی زمانی اتفاق می‌افتد که یکی از مقادیر ویژه موهومی سیستم، به صورت یک عدد حقیقی و مثبت درآید. این در حالی است که اگر در سرعت‌های بحرانی، مقدار ویژه موهومی سیستم برابر صفر شود اما بدون هیچ‌گونه تغییری قبل و بعد از سرعت بحرانی همچنان به صورت موهومی محض وجود داشته باشند، سیستم پایدار خواهد بود. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در یک سیستم سیاره‌ای دوماریچ، در برخی از سرعت‌های بحرانی، ناپایداری واگرایی اتفاق می‌افتد و در برخی دیگر پایدار می‌باشد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	بردار شتاب خطی
e	خطای انتقال استاتیکی
f	بردار نیرو مربوط به درگیری یک جفت چرخنده
F	بردار نیروی کلی سیستم
G	ماتریس ژيروسکوپ
I	ماتریس ممان اینرسی جرمی
k	میانگین سفتی درگیری
K	ماتریس سفتی
M	ماتریس جرم
N	تعداد سیاره
q	بردار جابه‌جایی
q̇	بردار سرعت
q̈	بردار شتاب
t	زمان، S
T	بردار گشتاور

علائم یونانی

λ	مقادیر ویژه
θ	بردار شتاب زاویه‌ای
Φ	بردار ویژه
Ω	سرعت بی‌بعد شده

زیرنویس

b	یاقاقان
c	بازو
crit	بحرانی
g	ژيروسکوپ
i	جهت‌های x، y و z
m	درگیری
s	چرخنده خورشیدی

π	چرخنده سیاره‌ای نام
r	چرخنده رینگ
بالانویس	
L	سمت چپ چرخنده
R	سمت راست چرخنده

مراجع

- [1] S. Tobias, R. Arnold, The influence of dynamical imperfection on the vibration of rotating disks, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 171(1) (1957) 669-690.
- [2] M. Benton, A. Seireg, Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems, *Journal of Mechanical Design*, 100(1) (1978) 26-32.
- [3] C.G. Cooley, R.G. Parker, Mechanical stability of high-speed planetary gears, *International Journal of Mechanical Sciences*, 69 (2013) 59-71.
- [4] J. Wickert, C. Mote, Classical vibration analysis of axially moving continua, *Journal of Applied Mechanics*, 57(3) (1990) 738-744.
- [5] R. Parker, Supercritical speed stability of the trivial equilibrium of an axially-moving string on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 221(2) (1999) 205-219.
- [6] R.P. Han, J.-Z. Zu, Modal analysis of rotating shafts: a body-fixed axis formulation approach, *Journal of Sound and Vibration*, 156(1) (1992) 1-16.
- [7] J.-S. Chen, D. Bogy, Effects of load parameters on the natural frequencies and stability of a flexible spinning disk with a stationary load system, *Journal of Applied Mechanics*, 59(2S) (1992) S230-S235.
- [8] C. Mote Jr, Stability of circular plates subjected to moving loads, *Journal of the Franklin Institute*, 290(4) (1970) 329-344.
- [9] A.A. Renshaw, C. Mote, Absence of one nodal diameter critical speed modes in an axisymmetric rotating disk, *Journal of applied mechanics*, 59(3) (1992) 687-688.
- [10] W. Iwan, T. Moeller, The stability of a spinning elastic disk with a transverse load system, *Journal of Applied Mechanics*, 43(3) (1976) 485-490.
- [11] R.M. Khorasany, S.G. Hutton, The effect of axisymmetric nonflatness on the oscillation frequencies of a rotating disk, *Journal of Vibration and Acoustics*, 132(5) (2010) 051012.
- [12] C. D'Angelo III, C. Mote Jr, Natural frequencies of a thin disk, clamped by thick collars with friction at the contacting surfaces, spinning at high rotation speed, *Journal of Sound and Vibration*, 168(1) (1993) 1-14.
- [13] R.M. Khorasany, S.G. Hutton, Vibration Characteristics

- double-helical planetary gear set, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: *Journal of Multi-body Dynamics*, 232(2) (2018) 199-223.
- [19] M. Kubur, A. Kahraman, D. Zini, K. Kienzle, Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment, *Journal of vibration and acoustics*, 126(3) (2004) 398-406.
- [20] M. Kang, A. Kahraman, An experimental and theoretical study of the dynamic behavior of double-helical gear sets, *Journal of Sound and Vibration*, 350 (2015) 11-29.
- [21] M.R. Kang, A. Kahraman, Measurement of vibratory motions of gears supported by compliant shafts, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29 (2012) 391-403.
- of Rotating Thin Disks—Part I: Experimental Results, *Journal of Applied Mechanics*, 79(4) (2012) 041006.
- [14] R. Parker, P. Sathe, Free vibration and stability of a spinning disk-spindle system, *Journal of Vibration and Acoustics*, 121(3) (1999) 391-396.
- [15] R. Parker, P. Sathe, Exact solutions for the free and forced vibration of a rotating disk-spindle system, *Journal of Sound and Vibration*, 223(3) (1999) 445-465.
- [16] P. Sondkar, A. Kahraman, A dynamic model of a double-helical planetary gear set, *Mechanism and Machine Theory*, 70 (2013) 157-174.
- [17] P.B. Sondkar, Dynamic modeling of double-helical planetary gear sets, *The Ohio State University*, 2012.
- [18] M. K. Khoozani, M. Poursina, A. P Anaraki, Study of gyroscopic effects on the dynamics and vibrations of

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

Mohammad Karimi Khoozani, Mehrdad Poursina, Ali Pourkamali Anaraki, Determination of Critical Speeds and Divergence Instability Boundary for a High-Speed Double-Helical Planetary Gear System, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 177-186.

DOI: 10.22060/mej.2018.13148.5549



