نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۱، شماره ۳، سال ۱۳۹۸، صفحات ۱ تا ۱۴
DOI:

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در محیط با دمای بالا

نقی آقایی، مصطفی طالبی توتی*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

چکیده: در این تحقیق، ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی در محیط با دمای بالا مورد مطالعه قرار گرفته است. توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت پوسته به دو صورت یکنواخت و مدرج تابعی درنظر گرفته شده است. اثر بارگذاری حرارتی به صورت تنش‌های اولیه در نظرگرفته شده، معادلات حاکم با استفاد از اصل همیلتون، براساس تئوری کلاسیک و روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی فون کارمن بدست آمده است. معادلات مستخرج، با استفاده از روش گلرکین گسسته‌سازی شده است. در این تحقیق با استفاده از توابع تیر، فرکانس پوسته مخروطی به ازای شرایط مرزی مختلف بدست آمده است. درابتدا نتایج حاضر با نتایج موجود اعتبار سنجی شده و سپس تاثیر پارامترهای مختلف از جمله بارگذاری حرارتی، مقدار کسر حجمی، نوع توزیع نانولوله‌های کربنی، شرایط مرزی مختلف و شرایط هندسی متفاوت بر روی فرکانس طبیعی سازه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان از آن دارد که وجود بارگذاری حرارتی اولیه تاثیر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت:
بازنگری:
پذیرش:
ارائه آنلاین:

کلمات کلیدی:
ارتعاشات آزاد
پوسته مخروطی
نانولوله‌های کربنی
توابع تیر
دما

۱- مقدمه

در میان سازه‌های مهندسی، پوسته‌های مخروطی حائز اهمیت ویژه‌ای در بسیاری از کاربردها می‌باشند. این پوسته‌ها می‌توانند در صنعت لوله‌کشی، توربین‌ها و مخازن تحت فشار مورد استفاده قرار گیرند. همچنین هواپیماها، موشک‌ها، راکت‌ها، کشتی‌ها و زیردریایی‌ها مثال‌هایی از موارد کاربرد پوسته‌ها در صنایع هوافضا و مهندسی دریا می‌باشند. نمونه‌های ذکرشده در بالا تنها فهرست کوچکی از کاربردهای پوسته‌ها در مهندسی می‌باشد. هرچند با پیشرفت علوم و تحقیقات روی مواد مرکب و رفتار خوب مکانیکی آن‌ها، تا حدود زیادی مشکلات مواد و فلزات پوشش داده شده است، ولی باز هم با توجه به کاربردهای مختلف پوسته‌های مخروطی و یا استوانه‌ای در سرعت‌های بالا، دمای بالا و یا ضربات مکانیکی، نظرات را معطوف به مواد جدیدی برای جبران مشکلات موجود مواد مرکب نموده است. یکی از این فن‌آوری‌ها استفاده از نانو لوله‌های کربنی[1] می‌باشد که آزمایش‌ها نشان داده است که نانولوله‌های کربنی از خواص فوق‌العاده‌ای برخوردارند. از لحاظ مقاومت کششی و ضریب کشسانی، این مواد یکی از محکم‌ترین موادی هستند که تاکنون شناخته شده‌اند. بنابراین انتظار می‌رود که استفاده از نانولوله‌های کربنی به عنوان فاز تقویتی در زمینه پلیمری، باعث بهبود خواص این کامپوزیت‌ها نسبت به نوع تقویت شده با الیاف گردد. ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی توسط بسیاری از محققین با روش‌های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. میرزایی و کیانی [۱] تحلیل کمانش حرارتی پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق، توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت و به صورت مدرج تابعی درنظر گرفته شده است و خواص ماده وابسته به دما می‌باشد. اجزای کرنش-تغییر مکان از تئوری مرتبه اول برشی و فرضیات غیر خطی فون کارمن بدست آمده است. جهت بدست آوردن نیروی منتجه حرارتی، از تحلیل غشایی خطی استفاده شده است. هوا [۲] در تحقیقی به بررسی اثرات شرایط مرزی و خواص اورتوتروپیک روی فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص دوار پرداخت. در این تحقیق از روش گالرکین[2] برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. لی و همکاران [۳] به محاسبه فرکانس طبیعی و پاسخ ارتعاش اجباری پوسته مخروطی پرداخته‌اند. با استفاده از اصل همیلتون و روش ریلی-ریتز[3] معادلات حرکت به دست آمده‌اند. فرکانس طبیعی پوسته مخروطی ناقص با حل مساله مقادیر ویژه معادلات حرکت محاسبه و پاسخ پایدار ارتعاش اجباری با حل معادلات حرکت بدست می‌آیند. حسینی و طالبی [۴] به بررسی کمانش پوسته‌های مخروطی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تحت بار محوری پرداخته‌اند. معادلات حاکم با استفاده

1 Carbon Nanotubes

2 Galerkin Method
3 Rayleigh–Ritz Method

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: talebi@qut.ac.ir

از روش مربعات تفاضلی[1] حل شده‌اند. سپس معادله استاندارد مقدار ویژه تشکیل و بار بحرانی کمانش محاسبه شده است. شن [۵] به بررسی کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی پرداخته است. از روابط غیرخطی فون کارمن برای بدست آوردن اجزای کرنش استفاده شده است. انصاری و ترابی [۶] به بررسی کمانش حرارتی پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند. برای بدست آوردن اجزای کرنش از تئوری مرتبه اول برشی استفاده کرده‌اند و معادلات حاکم با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته[2] حل شده‌اند. شو [۷] به ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی کامپوزیتی لایه‌ای پرداخته و از تئوری کلاسیک برای بدست آوردن اجزای کرنش استفاده کرده است. برای حل معادلات حاکم از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته استفاده شده است. انصاری و ترابی [۸] به حل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری حرارتی و احاطه شده توسط بسترالاستیک پرداخته است. انصاری و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد پوسته‌های کروی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی قرارگرفته بر روی بستر الاستیک پرداخته اند. روابط کرنش-تغییر مکان بر اساس تئوری مرتبه اول برشی بدست آمده است. جم و کیانی [۱۰] به تجزیه و تحلیل کمانش خطی پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره تحت فشار عرضی پرداخته‌اند. خواص مادی بر اساس قانون اصلاح شده مخلوط بدست آمده است. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پوسته دانل و با استفاده از اصل جابجایی مجازی، معادلات حاکم استخراج گردید.جهت حل معادلات پایداری و بدست آوردن بار بحرانی کمانش، از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته و توابع مثلثاتی به ترتیب در راستای محوری و محیطی استفاده شد. انصاری و همکاران [۱۱] به تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی، استوانه‌ای و صفحات حلقوی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش مربعات تفاضلی متغیر[3] پرداخته اند. بستر الاستیک به صورت مدل پسترناک درنظر گرفته شده است. در این تحقیق خواص مکانیکی مستقل از دما در نظر گرفته شدهو بر اساس تئوری مرتبه اول روابط کرنش تغییر مکان بدست آمده است. بر اساس اصل همیلتون و استفاده از روش مربعات تفاضلی متغیر فرم‌های کاهش یافته جرم و ماتریس سختی بدست آمده است. مهری و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد و کمانش تحت فشار خارجی و فشار محوری پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به طور همزمان را مورد بررسی قرار داده‌اند. معادلات حرکت با استفاده از روابط غیر خطی گرین-لاگرانژ و فرضیه پوسته نووژیلو [4] بدست آمده است. با در نظر گرفتن حل غشایی معادلات تعادل در حالت خطی، نیروهای پیش کمانش بدست آمده است. برای حل معادلات حاکم، یک حل نیمه تحلیلی بر اساس بسط مثلثاتی در جهت محیطی در نظر گرفته شده است. انصاری و همکاران [۱۳] به تجزیه و تحلیل کمانش پانل‌های مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری فشاری با استفاده از روش مربعات تفاضلی متغیر پرداخته‌اند. توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. اجزای کرنش از تئوری مرتبه اول برشی بدست آمده است. با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در جهت محوری و محیطی معادلات پایداری گسسته‌سازی شده است. جوییار و همکاران [۱۴]، به کمک روش عددی مربعات تفاضلی، به بررسی ارتعاشات پانل مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در محیط با دمای بالا پرداختند. در این تحقیق، شرایط مرزی، به کمک المان‌های فنر، مدل‌سازی گردیده‌اند و اثر شرایط مرزی مختلف در راستای مولد پانل بررسی نگردیده است.

با توجه به بررسی نویسندگان در ادبیات تحقیق، مشخص شد که تا کنون بررسی اثر شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات و دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله در محیط با دمای بالا، به روش تحلیلی مورد مطالعه قرار نگرفته است. در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی اولیه مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور محاسبه دمای بحرانی کمانش، دمای محیط به تدریج افزایش می‌یابد، به گونه‌ای که در یک درجه حرارت خاص که همان دمای بحرانی کمانش سازه می‌باشد، فرکانس طبیعی سازه صفر می‌گردد. از توابع تیر برای تقریب متغیرهای میدان استفاده می‌گردد، که با این تکنیک می‌توان با تقریب خوبی رفتار پوسته‌های مخروطی تحت شرایط مرزی مختلف را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. جهت حل کردن معادلات حاکم و محاسبه فرکانس طبیعی پوسته، از روش حل تحلیلی گالرکین استفاده شده است. در انتها نیز با ارائه و بررسی نتایج، تاثیر پارامترهای مختلف از جمله بارگذاری حرارتی، شرایط مرزی مختلف، نوع توزیع نانولوله، درصد کسر حجمی نانولوله و شرایط هندسی متفاوت بر روی فرکانس طبیعی سازه مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- خواص مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی

فرض شده است که کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از ترکیب نانولوله‌های کربنی تک لایه و ماده زمینه ایزوتروپ تشکیل شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت بصورت یکنواخت و مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. مدل‌های میکرومکانیکی متفاوتی برای پیش‌بینی خواص مکانیکی موثر کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به مدل موری تاناکا اشاره کرد. بر اساس قانون اختلاط تعمیم یافته، مدول یانگ و مدول برشی موثر به صورت رابطه (۱) ارائه می شوند [۵]:

1 Differential Quadrature Method (DQM)
2 Generalized Differential Quadrature (GDQ)
3 Variational Differential Quadrature (VDQ)
4 Novo-Zhilov

$$E_{11}=\eta_1 V_{CN}E_{11}^{CN}+V_mE^m \ , \ \frac{\eta_2}{E_{22}}=\frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}}+\frac{V_m}{E^m} \ , \ \frac{\eta_3}{G_{12}}=\frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}}+\frac{V_m}{G^m} \quad (۱)$$

که E_{11}^{CN} ، E_{22}^{CN} و G_{12}^{CN} به ترتیب مدول‌های یانگ و برشی نانولوله‌های کربنی می‌باشد، E^m و G^m خواص متناظر به زمینه می‌باشند. $\eta_i(i=1,2,3)$ پارامتر کارایی نانولوله کربنی می‌باشد. این پارامتر به این دلیل که انتقال بار بین ماتریس و نانولوله به صورت کامل صورت نمی‌گیرد، در رابطه (۱) وارد می‌شود و مقدار آن با تطابق مدول‌های الاستیسیته به دست آمده از نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و قانون مخلوط‌ها تعیین می‌شود. همچنین V_{CN} نسبت حجمی نانولوله کربنی و V_m نسبت حجمی زمینه می‌باشد که رابطه $V_{CN}+V_m=1$ نیز ارضا می‌نماید. علاوه بر توزیع یکنواخت، سه نوع توزیع مدرج تابعی اعم از $FG\text{-}A$ ، $FG\text{-}V$ و $FG\text{-}X$ در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. در توزیع $FG\text{-}A$ ، سطح خارجی پوسته از ماده زمینه و سطح داخلی آن متشکل از نانولوله کربنی می‌باشد. درتوزیع $FG\text{-}V$ سطح میانی متشکل از نانولوله کربنی و سطح خارجی و داخلی از ماده زمینه تشکیل شده است. در توزیع نوع $FG\text{-}X$ سطح میانی متشکل از ماده زمینه و سطح داخلی و خارجی متشکل از نانولوله کربنی می‌باشد.کسر حجمی توزیع نانولوله‌کربنی در راستای ضخامت برای حالت‌های مختلف به صورت رابطه (۲) می‌باشد [۸]:

$$UD: V_{CN}=V_{CN}^*; FG-A: V_{CN}=-\left(\frac{2z-h}{h}\right)V_{CN}^*;$$
$$FG-V: V_{CN}=\left(\frac{2z+h}{h}\right)V_{CN}^*; \quad (۲)$$
$$FG-X: V_{CN}=\left(\frac{4|z|}{h}\right)V_{CN}^*$$

که در رابطه بالا V_{CN}^* به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$V_{CN}^*=w_{CN}\Big/\left(w_{CN}+\left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right)-\left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right)w_{CN}\right) \quad (۳)$$

که w_{CN} کسرجرمی نانولوله ρ_{CN} چگالی جرمی نانولوله و ρ_m چگالی ماده می‌باشد و نسبت پواسون و چگالی جرمی به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$\nu_{12}=V_{CN}\nu_{12}^{CN}+V_m\nu_{12}^{m} \ , \ \rho=V_{CN}\rho_{CN}+V_m\rho_m \quad (۴)$$

ضریب انبساط حرارتی طولی و عرضی نانو لوله‌های کربنی به ترتیب به صورت رابطه (۵) به دست می‌آید [۵]:

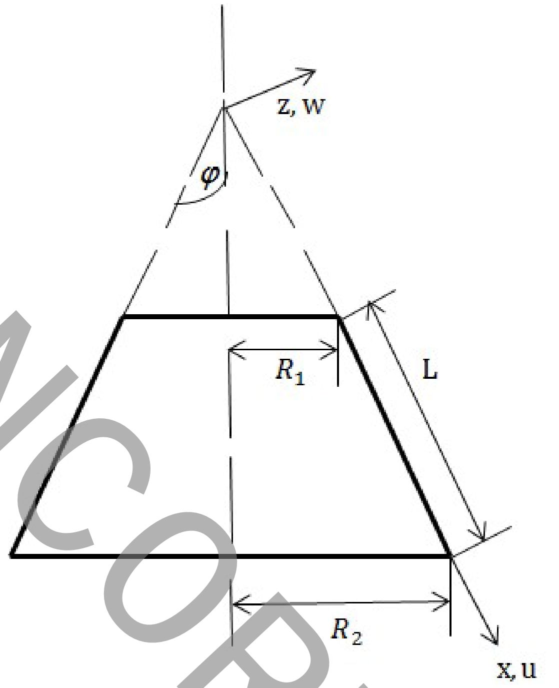

Fig. 1.

شکل ۱: نمای کلی از هندسه پوسته مخروطی.

$$\alpha_{11}=\frac{E_{11}^{CN}\alpha_{11}^{CN}V_{CN}+V_mE^m\alpha^m}{E_{11}^{CN}V_{CN}+V_mE^m} \ ,$$
$$\alpha_{22}=(1+\nu_{12}^{CN})\alpha_{22}^{CN}V_{CN}+(1+\nu^m)\alpha_mV_m-\nu_{12}\alpha_{11} \quad (۵)$$

که در این روابط α_{11}^{CN} ، α_{22}^{CN} و α_m به ترتیب بیانگر ضریب انبساط حرارتی نانولوله و ماده زمینه بوده و ν_{12}^{CN} و ν^m نیز به ترتیب ضریب پواسون نانولوله و ماده زمینه می‌باشد.

۳- روابط حاکم

پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با شعاع کوچک R_1، شعاع بزرگ R_2 ، ضخامت h و طول L درنظر بگیرید که در شکل ۱ نشان داده شده است. که مختصه x در راستای محوری، مختصه θ در راستای محیطی و مختصه z در راستای عمود بر سطح میانی و به سمت خارج پوسته می‌باشد.

کرنش‌های سطح میانی و تغییرات انحنا برای یک پوسته مخروطی ناقص براساس تئوری کلاسیک انجام شده و مدل غیرخطی فون کارمن در روابط جابجایی-کرنش استفاده به صورت رابطه (۶) می‌باشد [۵ و ۷]:

$$\varepsilon_x=\varepsilon_{0x}+zk_x \ ,$$
$$\varepsilon_\theta=\varepsilon_{0\theta}+zk_\theta \ , \quad (۶)$$
$$\varepsilon_{x\theta}=\varepsilon_{0x\theta}+zk_{x\theta}$$

که پارامترها مختلف در رابطه (۶) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{0x}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 ,\\
&\varepsilon_{0\theta}=\frac{1}{R(x)}\frac{\partial v_0}{\partial \theta}+\frac{u_0\sin(\varphi)}{R(x)}+\frac{w_0\cos(\varphi)}{R(x)}+\frac{1}{2R(x)^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)^2\\
&\varepsilon_{0x\theta}=\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial u_0}{\partial \theta}-\frac{v_0\sin(\varphi)}{R(x)}+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial x} ,\\
&k_x=\frac{\partial \varphi_x}{\partial x},\ \varphi_x=-\frac{\partial w_0}{\partial x},\ k_\theta=\frac{1}{R(x)}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}+\frac{\varphi_\theta\sin(\varphi)}{R(x)} ,\\
&\tau=\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \alpha}+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \theta}-\frac{\varphi_\theta\sin(\varphi)}{R(x)} ,\\
&\varphi_\theta=\frac{v_0\cos(\varphi)}{R(x)}-\frac{1}{R(x)}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}
\end{aligned} \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، ε_{0x} ، $\varepsilon_{0\theta}$ و γ_{0x} به ترتیب بیانگر کرنش غشایی محوری، محیطی و برشی بوده و k_x ، k_θ و τ نیز تغییر در انحنا می‌باشند.

براساس قانون هوک، تنش‌ها بر اساس مولفه‌های خطی کرنش به صورت رابطه (۸) به دست می‌آیند [۸]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{x\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{x\theta}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\\ 0\end{bmatrix}\Delta T\right) \qquad (۸)$$

که ضرایب $\bar{Q}_{ij}$ به صورت رابطه (۹) بیان می‌شود:

$$\bar{Q}_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\bar{Q}_{22}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\bar{Q}_{12}=\frac{E_{11}\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\bar{Q}_{66}=G_{12} \qquad (۹)$$

با توجه به تنش‌های ارائه شده در رابطه (۸) نیروهای منتجه به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}N_x\\ N_\theta\\ N_{x\theta}\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{x\theta}\end{bmatrix}dz\ ;\begin{bmatrix}M_x\\ M_\theta\\ M_{x\theta}\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{x\theta}\end{bmatrix}zdz \qquad (۱۰)$$

درنتیجه منتجه‌های نیرو و ممان به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌گردند:

$$\begin{bmatrix}N_x\\ N_\theta\\ N_{x\theta}\\ M_x\\ M_\theta\\ M_{x\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66}\\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0\\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{0x}\\ \varepsilon_{0\theta}\\ \varepsilon_{0x\theta}\\ k_x\\ k_\theta\\ \tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}N_x^T\\ N_\theta^T\\ 0\\ M_x^T\\ M_\theta^T\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

همچنین ضرایب A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به صورت رابطه (۱۲) بیان می‌شود:

$$A_{ij}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}dz\ \ ;\ B_{ij}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}zdz\ \ ;\ D_{ij}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}z^2dz \qquad (۱۲)$$

همچنین منتجه نیرو و ممان به واسطه بارگذاری حرارتی به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}N_x^T\\ N_\theta^T\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\end{bmatrix}\Delta T dz\ \ ;\\
&\begin{bmatrix}M_x^T\\ M_\theta^T\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\end{bmatrix}\Delta T z dz
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

٤- معادلات حاکم

معادلات حرکت پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله کربنی که تحت بارگذاری حرارتی اولیه قرار گرفته، با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌گردد. در صورتی‌که منتجه نیروهای حرارتی اولیه N_x^0، N_θ^0 و $N_{x\theta}^0$ تعریف شود، انرژی کرنشی پوسته مخروطی به صورت روابط (۱۴) و (۱۵) می‌باشد.

$$U=\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_\theta\varepsilon_\theta+\sigma_{x\theta}\varepsilon_{x\theta}\right)R(x)dzdxd\theta \qquad (۱۴)$$

$$U_T=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left(N_x^0\varepsilon_x+N_\theta^0\varepsilon_\theta+N_{x\theta}^0\varepsilon_{x\theta}\right)R(x)dxd\theta \qquad (۱۵)$$

که در رابطه بالا به ترتیب U و U_T انرژی کرنشی و انرژی کرنشی به واسطه بارگذاری حرارتی اولیه همچنین انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌گردد:

$$T=\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^L\int_0^{2\pi}\rho\left(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)R(x)dzdxd\theta \qquad (۱۶)$$

اصل همیلتون به صورت رابطه (۱۷) بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(U+U_T-T)dt=0 \qquad (۱۷)$$

با اعمال اصل همیلتون معادله خطی حرکت به صورت رابطه (۱۸) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\sin(\varphi)}{R(x)}(N_x-N_\theta)+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta}=\rho_t\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\\
&\frac{1}{R(x)}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{2\sin(\varphi)N_{x\theta}}{R(x)}+\frac{\cos(\varphi)}{R(x)}Q_\theta=\rho_t\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}\\
&-\left(\frac{\cos(\varphi)}{R(x)}N_\theta\right)+\frac{\partial Q_x}{\partial \alpha}+\frac{\sin(\varphi)}{R(x)}Q_x+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}+\\
&N_x^0\left(\frac{\sin(\varphi)}{R(x)}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)=\rho_t\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}Q_x=\frac{M_x\sin(\varphi)}{R(x)}+\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}-\frac{M_\theta\sin(\varphi)}{R(x)}\ ,\ Q_\theta=\frac{1}{R(x)}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}+\\
&\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+\frac{2M_{x\theta}\sin(\varphi)}{R(x)}
\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

منتجه نیروهای حرارتی اولیه ($N_{x\theta}^0$ و N_θ^0، N_x^0) با استفاده از تحلیل غشایی معادلات و درنظر گرفتن بارگذاری حرارتی به صورت رابطه (۱۹) حاصل می‌شوند [۶]:

$$N_x^0 = \frac{-L\sin(\varphi)}{R(x)\,ln\left(1+\dfrac{L\sin(\varphi)}{R_1}\right)}\left(N_x^T - \frac{A_{12}}{A_{22}}N_\theta^T\right), \qquad N_\theta^0=0\;,\; N_{x\theta}^0=0 \tag{۱۹}$$

۵- حل معادلات حرکت به روش گلرکین و تحلیل ارتعاشات آزاد

در غیاب بارهای خارجی و با در نظر گرفتن این مطلب که در یک فرکانس طبیعی، هرنقطه در سیستم الاستیک حرکتی هارمونیک دارد، می‌توان میدان جابجایی را به صورت رابطه (۲۰) بیان کرد:

$$\begin{aligned} u_0(x,\theta,t) &= A\,\frac{\partial\varnothing(x)}{\partial x}\cos(n\theta)\cos(\omega t)\;, \\ v_0(x,\theta,t) &= B\,\varnothing(x)\sin(n\theta)\cos(\omega t) \\ w_0(x,\theta,t) &= C\,\varnothing(x)\cos(n\theta)\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که در رابطه (۲۰)، A، B و C ضرایب ثابت می‌باشند و n تعداد نیم موج در راستای محیطی ، ω فرکانس طبیعی و $\varnothing(x)$ توابع تیر می‌باشد.

برای متغیرهای محوری مولفه جابجایی باید توابعی تعریف گردند که شرایط مرزی مشابهی با شرایط مرزی پوسته مخروطی داشته باشد، یک انتخاب مناسب استفاده از توابع تیر اویلر می‌باشد. این انتخاب این امکان را می‌دهد که بتوان تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی را بدون درگیر شدن به محاسبات پیچیده برای انواع شرایط مرزی مختلف بدست آورد. از این‌رو با حل معادله حاکم بر تیر تابعی موسوم به تابع تیر بدست آمده و مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\varnothing(x) = a_1\cosh\left(\frac{\gamma_m x}{L}\right) + a_2\cos\left(\frac{\gamma_m x}{L}\right) - s_m\left(a_3\sinh\left(\frac{\gamma_m x}{L}\right) + a_4\sin\left(\frac{\gamma_m x}{L}\right)\right) \tag{۲۱}$$

که a_i ها ثوابتی هستند که بنا به شرایط مرزی می‌توانند مقادیر صفر، یک یا منفی یک را اختیار نمایند. λ_m نیز ریشه‌های معادلات غیر جبری بدست آمده از شرایط مرزی و ζ_m پارامترهای مربوط به λ_m هستند. مقادیر a_i، λ_m و ζ_m در جدول ۱ برای انواع شرایط مرزی مختلف ارائه شده‌اند.

با جایگذاری روابط (۲۰) در معادلات (۱۸) و اعمال روش گلرکین درحوزه مکان روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\int_0^L\!\!\int_0^{2\pi} R_1\psi_1 R(x)\,dx\,d\theta = 0\;,\; \int_0^L\!\!\int_0^{2\pi} R_2\psi_2 R(x)\,dx\,d\theta = 0\;,\; \int_0^L\!\!\int_0^{2\pi} R_3\psi_3 R(x)\,dx\,d\theta = 0 \tag{۲۲}$$

در روابط (۲۲) توابع وزن ψ_1 ، ψ_2 و ψ_3 به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود:

$$\psi_1 = \frac{\partial u_0}{\partial c_1}\;,\; \psi_2 = \frac{\partial v_0}{\partial c_2}\;,\; \psi_3 = \frac{\partial w_0}{\partial c_3} \tag{۲۳}$$

با ضرب معادلات اول، دوم و سوم رابطه (۲۰) به ترتیب در u ، v و w که به عنوان توابع وزن در نظر گرفته می‌شوند و با انتگرال‌گیری از معادلات حاصله و برخی ساده‌سازیها، رابطه مقدار ویژه زیر حاصل می‌گردد.

جدول ۱: مقادیر a_i، γ_m و s_m برای انواع شرایط مرزی مختلف [۱۵].

Table 1.

شرایط مرزی	$a_i(i=1,2,3,4)$	λ_m	s_m
تکیه‌گاه ساده-تکیه‌گاه ساده	$a_1=0, a_2=0$ $a_3=0, a_4=-1$	$m\pi$	1
تکیه‌گاه گیردار-تکیه‌گاه گیردار	$a_1=1, a_2=-1$ $a_3=1, a_4=-1$	$\cosh(\gamma_m)\cos(\gamma_m)=1$	$\dfrac{\cosh(\gamma_m)-\cos(\gamma_m)}{\sinh(\gamma_m)-\sin(\gamma_m)}$
تکیه‌گاه ساده-گیردار	$a_1=1, a_2=-1$ $a_3=1, a_4=-1$	$\tan(\gamma_m)=\tanh(\gamma_m)$	$\dfrac{\cosh(\gamma_m)-\cos(\gamma_m)}{\sinh(\gamma_m)-\sin(\gamma_m)}$
تکیه‌گاه آزاد-گیردار	$a_1=1, a_2=-1$ $a_3=1, a_4=-1$	$\cosh(\gamma_m)\cos(\gamma_m)=-1$	$\dfrac{\cosh(\gamma_m)-\cos(\gamma_m)}{\sinh(\gamma_m)+\sin(\gamma_m)}$
تکیه‌گاه ساده-آزاد	$a_1=1, a_2=1$ $a_3=1, a_4=1$	$\tan(\gamma_m)=\tanh(\gamma_m)$	$\dfrac{\cosh(\gamma_m)-\cos(\gamma_m)}{\sinh(\gamma_m)-\sin(\gamma_m)}$

$$\begin{bmatrix} I_1\omega^2+k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & I_1\omega^2+k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & I_1\omega^2+k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \qquad (۲۴)$$

که عملگرهای L_{ij} در پیوست۱ آمده است.

پس از انجام انتگرال‌گیری دستگاه معادلات همگن (۲۵) بدست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} I_1\omega^2+k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & I_1\omega^2+k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & I_1\omega^2+k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \qquad (۲۵)$$

که ضرایب k_{ij} در پیوست۱ آمده است.

واضح است که برای شرط جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب باید مساوی صفر باشد. در نتیجه با محاسبه و برابر صفر قراردادن دترمینان، فرکانس طبیعی مدنظر حاصل می‌گردد.

٦- بحث و نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برای بررسی ارتعاشات پوسته‌های مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی که تحت بار حرارتی اولیه بوده ارائه شده است. ماده پلی‌متیل متاکریلت به عنوان ماده زمینه انتخاب می‌شود که خواص آن به صورت زیر می‌باشد [۸]:

$$E^m = 2.5\ \text{GPa}\ ;G^m = 0.933\ \text{GPa}\ ;\nu^m = 0.34; \qquad (۲۶)$$
$$\rho^m = 1150\frac{\text{kg}}{\text{m}^3};\alpha^m = 45\times10^{-6}\frac{1}{\text{K}}$$

همچنین نانولوله‌های تک لایه به‌عنوان تقویت کننده کامپوزیت لحاظ می‌شود که با در نظر گرفتن ضخامت موثر خواص آن به صورت جدول ۲ در نظر گرفته می‌شود [۱۶]:

در رابطه (۲۷) ضرایب η_1 ، η_2 و η_3 برای سه مقدار مختلف کسر حجمی آورده شده است.

$$\begin{aligned} V_{CN}^* &= 12\%, \eta_1 = 0.137; \eta_2 = 1.022; \eta_3 = 0.715\ ; \\ V_{CN}^* &= 17\%, \eta_1 = 0.142; \eta_2 = 1.626; \eta_3 = 1.138 \\ V_{CN}^* &= 28\%, \eta_1 = 0.141; \eta_2 = 1.585; \eta_3 = 1.109 \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

همچنین توزیع درجه حرارت در راستای ضخامت پوسته یکنواخت در نظر گرفته شده است.

۶- ۱- اعتبار سنجی نتایج

در این بخش نتایج حاصل از این تحقیق جهت اعتبار سنجی با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه می‌شود. بدین منظور در جدول ۳ نتایج حاصل برای فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی ایزوتروپیک با نتایج ارائه شده در مرجع [۲] مقایسه شده است. شرایط مرزی در دو انتها تکیه‌گاه ساده می‌باشد.

جدول ۴ نیز امکان مقایسه نتایج کارحاضر با تئوری کلاسیک را با مرجع [۷] در مورد پاسخ ارتعاشی پوسته مخروطی کامپوزیتی فراهم می‌نماید. در این جدول، مقادیر پارامترهای فرکانسی یک پوسته مخروطی کامپوزیتی دولایه کراس پلای غیرمتقارن [۰/۹۰] با شرایط مرزی CC به ازای نسبت مختلف ضخامت داده شده است. اعداد داخل پرانتز بیانگر شماره مود محیطی می‌باشند. نتایج این جدول موید این مطلب است که روش ارائه شده در این پایان‌نامه به خوبی قادر به تحلیل ارتعاشی پوسته مخروطی کامپوزیتی نیز می‌باشد.

در جدول ۵ نتایج حاصل برای کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای ساخته شده با نانو کامپوزیت هدفمند با نتایج مرجع [۵] و[۶] مقایسه شده است. لازم به ذکر است در صورتی که زاویه راس مخروط نزدیک به صفر قرار داده شود می‌توان نتایج برای پوسته‌های استوانه‌ای را بدست آورد.

در جدول ۶ دمای بحرانی کمانش برای پوسته مخروطی با طول پوسته، توزیع نانولوله و درصد حجمی نانولوله مختلف، با نتایج مرجع [۱] مقایسه شده است. در این مقایسه، پوسته دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در دوسر می‌باشد، که نتایج همخوانی مناسبی با نتایج مرجع دارد.

در انتها در جدول ۷، به قصد صحه‌سنجی مدل‌سازی ریاضی ارتعاشات پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله، پارامتر فرکانسی پوسته با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و با زاویه راس مخروط ۳۰ درجه با نتایج مرجع [۱۱] مقایسه شده است. در این جدول، سه مدل از توزیع نانولوله با دو درصد حجمی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

اکنون که از دقت روش حاضر در پیش‌بینی رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی اطمینان حاصل شده است، می‌توان تغییرات پارامتر فرکانسی به

جدول۲: خواص مادی وابسته به دما مربوط به نانولوله کربنی تک جداره (۱۰،۱۰).

Table 2.

دما (K)	E_{11}^{CN} (TPa)	E_{22}^{CN} (TPa)	G_{12}^{CN} (TPa)	$\alpha_{11}^{CN}\ (10^{-6}\frac{1}{\text{K}})$	$\alpha_{22}^{CN}\ (10^{-6}\frac{1}{\text{K}})$
۳۰۰	۵/۶۴۶۶	۷/۰۸۰۰	۱/۹۴۴۵	۳/۴۵۸۴	۵/۱۶۸۲
۵۰۰	۵/۵۳۰۸	۷/۰۸۰۰	۱/۹۶۴۳	۴/۵۳۶۱	۵/۰۱۸۹
۷۰۰	۵/۴۷۴۴	۶/۸۶۴۱	۱/۹۶۴۴	۴/۶۶۷۷	۴/۸۹۴۳

جدول ۳: مقایسه فرکانس بی بعد $\Omega = \omega R_2 \sqrt{\rho\left(1-\nu^2\right)/E}$ برای پوسته مخروطی ایزوتروپیک.

(E=70 GPa; h=0/004m, h/R_2=0/01 L sinφ /R_2=0/25, ν=0/3)

Table 3.

n	$\varphi=30°$		$\varphi=30°$		$\varphi=30°$	
	مرجع [۲]	کار حاضر	مرجع [۲]	کار حاضر	مرجع [۲]	کار حاضر
۲	۰/۸۴۲۰	۰/۸۴۰۴	۰/۷۶۵۵	۰/۷۶۳۸	۰/۶۳۴۸	۰/۶۳۴۱
۳	۰/۷۳۷۶	۰/۷۳۷۳	۰/۷۲۱۲	۰/۷۲۰۹	۰/۶۲۳۸	۰/۶۲۳۵
۴	۰/۶۳۶۲	۰/۶۳۶۶	۰/۶۳۶۹	۰/۶۷۳۵	۰/۶۱۴۵	۰/۶۱۴۳
۵	۰/۵۵۲۸	۰/۵۵۳۴	۰/۶۳۲۳	۰/۶۳۲۳	۰/۶۱۱۱	۰/۶۱۱۰
۶	۰/۴۹۵۰	۰/۴۹۵۳	۰/۶۰۳۵	۰/۶۰۳۵	۰/۶۱۷۱	۰/۶۱۶۹
۷	۰/۴۶۶۱	۰/۴۶۵۹	۰/۵۹۲۱	۰/۵۹۱۸	۰/۶۳۵۰	۰/۶۳۴۴

جدول ٤: مقایسه پارامتر فرکانس بی بعد $\Omega = \omega R_1^2/h \sqrt{\rho^m/E^m}$ برای پوسته مخروطی ناقص کامپوزیتی با تکیه‌گاه گیر دار.

(E=70 GPa; h=0/004m, h/R_2=0/01 L sinφ /R_2=0/25, ν=0/25, E_x/E_θ=15, $G_{x\theta}$=0/5E_θ)

Table 4.

Ω		$\frac{h}{R_1}$
کار حاضر	مرجع [۷]	
۰/۳۰۱(۷)	۰/۲۹۸۶(۷)	۰/۰۱
۰/۴۶۶۵(۵)	۰/۴۶۲۵(۵)	۰/۰۲
۰/۶۲۴۰(۵)	۰/۶۲۱۰(۵)	۰/۰۳
۰/۷۷۹۲(۴)	۰/۷۷۵۲(۴)	۰/۰۴

جدول ۵: مقایسه دمای بحرانی کمانش برای پوسته استوانه‌ای (L/R_1=2, R_1/h=40,SS).

Table 5.

کار حاضر	مرجع [٦]	مرجع [٥]	توزیع نانولوله	V_{CN}^*
	$T_{cr}(K)$			
۳۷۳/۷	۳۷۸/۶۴	۳۷۶/۵۵	*UD*	۰/۱۲
۳۷۲/۶	۳۷۷/۵۳	۳۷۴/۶۴	*FGV*	
۳۶۳/۵۸	۳۶۹/۴۷	۳۶۶/۱۲	*FGA*	
۳۸۵/۱۳	۳۸۹/۵۳	۳۸۸/۵۶	*FGX*	
۳۸۲/۹۳	۳۸۹/۰۲	۳۸۳/۹۰	*UD*	۰/۱۷
۳۸۲/۶۲	۳۸۸/۴۸	۳۸۳/۰۱	*FGV*	
۳۷۳/۳۵	۳۸۰/۰۶	۳۷۳/۹۰	*FGA*	
۳۹۵/۴۳	۴۰۱/۲۱	۳۹۷/۲۱	*FGX*	

جدول ٦: تاثیر توزیع نانو لوله‌های کربنی و طول پوسته مخروطی بر دمای بحرانی کمانش $(R_1/h=50,\ \varphi=30°,\ h=1mm,\ CC)$.

Table 6.

V_{CN}^*	توزیع نانو لوله	$L=\sqrt{400R_1h}$		$L=\sqrt{300R_1h}$	
		مرجع [1]	کار حاضر	مرجع [1]	کارحاضر
		$T_{cr}(K)$			
۰/۱۲	UD	۳۹۴/۰۶	۳۹۷/۴۱	۴۰۷/۷۵	۴۱۱/۱۳
	FGX	۴۰۷/۶۱	۴۱۱/۴۸	۴۲۸/۰۷	۴۳۳/۸۶
	FGV	۳۸۸/۱۶	۳۹۳/۲۹	۳۹۷/۹۴	۴۰۲/۵۷
	FGA	۳۸۲/۲۵	۳۸۶/۳۵	۳۹۱/۷۷	۳۹۵/۹۱
۰/۱۷	UD	۴۰۲/۴۸	۴۰۷/۹۶	۴۱۵/۹۵	۴۱۹/۸۸
	FGX	۴۱۷/۳۳	۴۲۱/۸۵	۴۳۷/۴۱	۴۴۱/۹۴
	FGV	۳۹۶/۸۲	۴۰۰/۳۵	۴۰۶/۵۵	۴۰۹/۹۸
	FGA	۳۹۰/۴۴	۳۹۴/۹۶	۳۹۹/۹۹	۴۰۳/۷۵

جدول ۷: مقایسه پارامتر فرکانس بی بعد $\Omega=\omega R_1^2/h\sqrt{\rho^m/E^m}$ پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی $(L/R_1=2,\ R_1/h=20, \varphi=30°,\ SS)$.

Table 7.

V_{CN}^*	توزیع نانو لوله	مرجع [۱۱]	کارحاضر
۰/۱۲	UD	۶/۰۰	۵/۹۸۸
	FGA	۵/۸۹	۵/۸۶۱
	FGX	۶/۶۱	۶/۶۰۵
۰/۱۷	UD	۷/۵۱	۷/۴۹۳
	FGA	۷/۴۳	۷/۴۱۵
	FGX	۸/۲۹	۸/۲۸۴

ازای بار حرارتی اولیه مختلف، شرایط مرزی متفاوت، تاثیر نیم زاویه راس مخروط، تاثیر نسبت طول به شعاع و همچنین نسبت ضخامت به شعاع و تاثیر درصد کسر حجمی و توزیع نوع نانولوله را مورد بررسی قرار داد.

در جدول ۸، تاثیر شرایط مرزی بر فرکانس پایه پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می‌شود که در نسبت طول به شعاع $L/R_1=4$ ، شرایط مرزی تاثیر بسزایی بر رفتار ارتعاشی سازه داشته، و در نتیجه بیشترین فرکانس پایه برای شرایط مرزی *(FS)* و کمترین مقدار فرکانس مربوط به شرایط مرزی می‌باشد. علاوه بر این ملاحظه می‌گردد نوع توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت در تمامی حالات روند یکسانی داشته، به گونه‌ای که نوع *FGX* و *FGA* به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار فرکانس پایه را دارند.

در شکل‌های ۲ و ۳ تغییرات فرکانس طبیعی براساس نسبت کسر حجمی مختلف تحت بار حرارتی اولیه رسم شده است. همچنین توزیع نانولوله در راستای ضخامت یکنواخت فرض شده است و تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. همانطور که از شکل‌های ۲ و ۳ مشخص است، تغییرات اختلاف دما بر فرکانس پایه پوسته مخروطی ناقص نشان می‌دهد که با افزایش زاویه راس مخروط پایداری پوسته کاهش می‌یابد. برخلاف انتظار افزایش کسر حجمی لزوما موجب روند افزایش دمای بحرانی کمانش نمی‌شود. برای حالتی که اختلاف دما صفر می‌باشد بیشترین فرکانس پایه پوسته برای حالتی است که $V_{CN}^*=0/28$، اما با افزایش دما پوسته مخروطی با کسر حجمی $V_{CN}^*=0/28$ زودتر دچار کمانش می‌گردد و بیشترین مقدار دمای بحرانی کمانش برای حالتی است که $V_{CN}^*=0/17$ می‌باشد.

تغییرات فرکانس طبیعی پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های

جدول ۸: فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت شرایط مرزی مختلف
.($L/R_1=4$, $R_1/h=20$, $\varphi=15°$, $V_{CN}^*=0/17$)
Table8.

FGA	FGV	FGX	UD	B.C	ΔT(K)
۵۶/۴۲	۵۸/۶۳	۶۱/۲۳	۵۸/۰۹	C-C	۵/۹۸۸
۴۹/۱۳	۵۰/۱۲	۵۳/۱۴	۵۰/۰۳	C-S	۵/۸۶۱
۴۲/۸۹	۴۶/۱۱	۴۷/۹۶	۴۵/۵۴	S-S	۶/۶۰۵
۱۸/۳۶	۲۰/۹۲	۲۲/۳۱	۲۰/۷۵	C-F	۷/۴۹۳
۱۴/۶۵	۱۶/۸۹	۱۷/۶۴	۱۶/۵۴	F-S	۷/۴۱۵
۵۰/۶۱	۵۲/۰۱	۵۴/۳۸	۵۱/۶۹	C-C	۳۹۵/۹۱
۴۱/۴۱	۴۴/۱۲	۴۶/۱۸	۴۳/۰۲	C-S	۴۱۹/۸۸
۳۵/۰۳	۳۹/۱۲	۴۱/۰۹	۳۸/۸۷	S-S	۴۴۱/۹۴
۱۳/۲۱	۱۴/۶۲	۱۷/۰۳	۱۴/۵۷	C-F	۴۰۹/۹۸
۱۰/۹۸	۱۳/۴۸	۱۴/۹۴	۱۳/۱۹	F-S	۴۰۳/۷۵

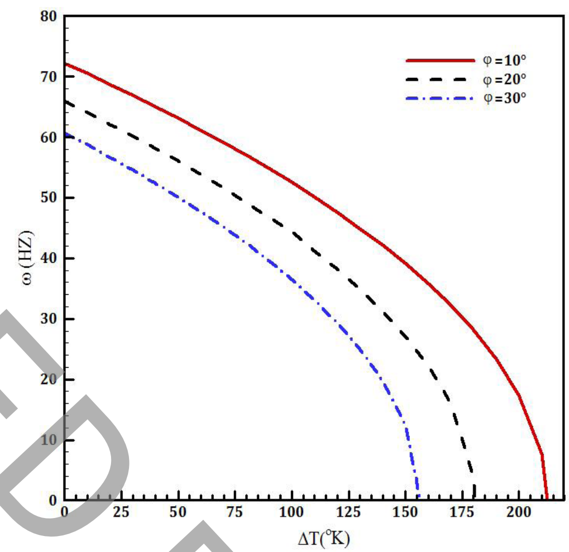

Fig. 2.

شکل ۲: تاثیر زاویه مخروط و نانولوله‌های کربنی بر فرکانس پایه پوسته مخروطی با بار حرارتی اولیه.
.($L/R_1=2$, $h/R_1=1/40$, $V_{CN}^*=\%17$ UD)

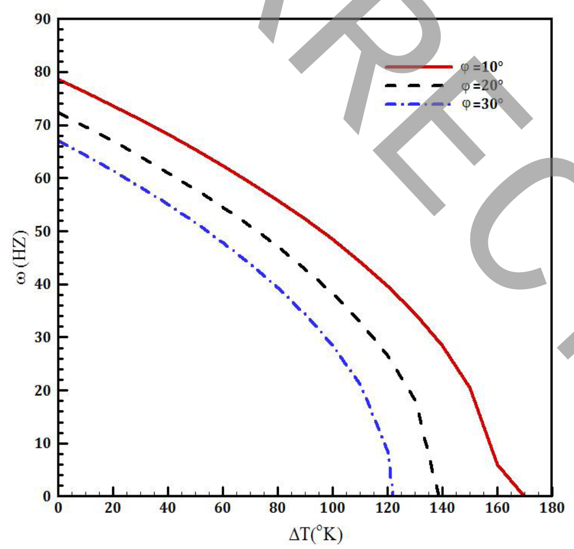

Fig. 3.

شکل ۳: تاثیر زاویه مخروط و نانولوله‌های کربنی بر فرکانس پایه پوسته مخروطی با بار حرارتی اولیه.
.($L/R_1=2$, $h/R_1=1/40$, $V_{CN}^*=\%28$ UD)

مختلف طول به شعاع در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. همانطور که از شکل استنباط می‌گردد، با افزایش بارگذاری حرارتی اولیه، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد اما نکته قابل توجه اینجاست که هر چه نسبت طول به شعاع کوچکتر باشد، تغییرات فرکانس بیشتر تحت تاثیر بارگذاری حرارتی اولیه قرار می‌گیرد و حتی در درجه حرارت‌های پایین نیز بارگذاری حرارتی اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی دارد. همچنین در شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌گردد که افزایش نسبت طول به شعاع، تاثیر چندانی در دمای بحرانی کمانش ندارد.

تغییرات فرکانس طبیعی پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع در شکل‌های ۶ و ۷ برای چهار نوع توزیع نانولوله نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، بیشترین و کمترین پایداری پوسته بر اساس توزیع نانولوله به ترتیب مربوط به *FGX* و *FGA* می‌باشد و هر چه نسبت ضخامت به شعاع مخروط افزایش یابد،

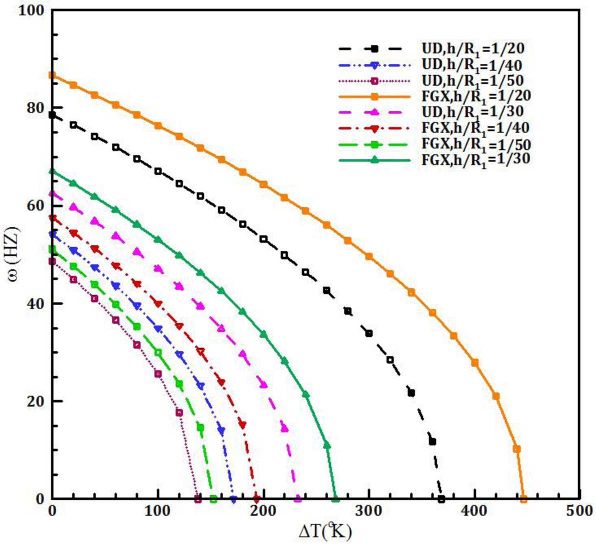

Fig. 4.

شکل ٤: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی با نسبت‌های طول به شعاع مختلف.
.($h/R_1=1/20$, $V_{CN}{}^*=\%12$ $\varphi=15°$, SS)

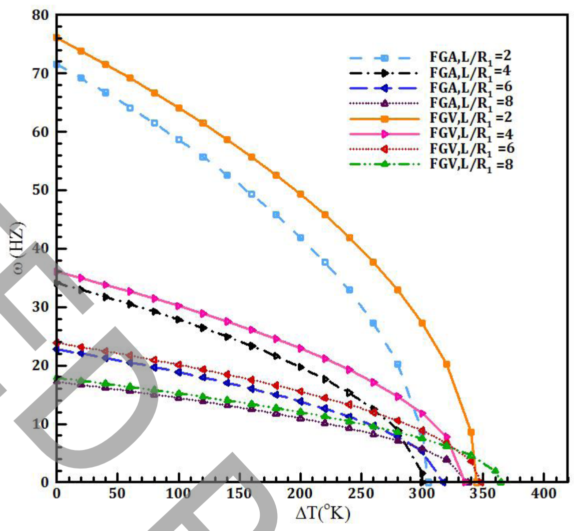

Fig. 5.

شکل ٥: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی با نسبت‌های طول به شعاع مختلف.
.($h/R_1=1/20$, $V_{CN}{}^*=\%12$ $\varphi=15°$, SS)

پوسته با فرکانس بیشتری ارتعاش می‌کند و در نتیجه پایداری پوسته تحت بار حرارتی اولیه افزایش می‌یابد.

شکل‌های ۸ تا ۱۱ تغییرات فرکانس پایه پوسته مخروطی ساخته شده از نانوکامپوزیت مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های مختلف طول به شعاع، دو نوع شرایط مرزی و دو مقدار نسبت حجمی نانولوله را نشان می‌دهد.

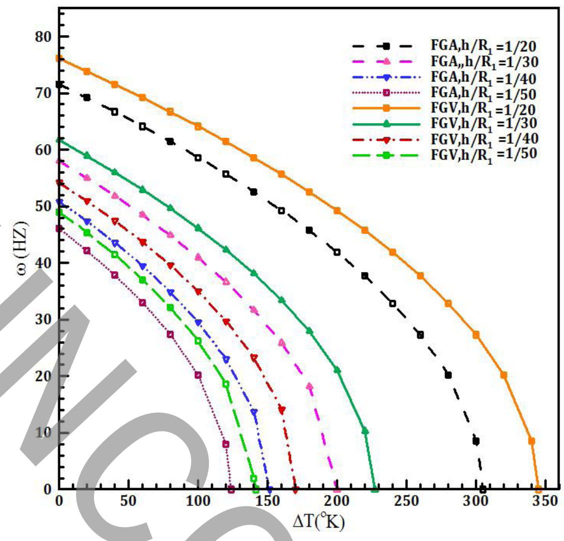

Fig. 6.

شکل ٦: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی اولیه با نسبت‌های ضخامت به شعاع مختلف.
.($L/R_1=2$, $V_{CN}{}^*=12\%$, $\varphi=15°$ SS)

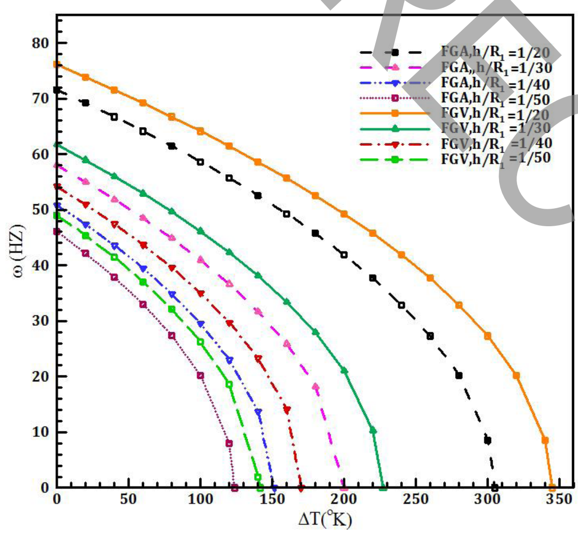

Fig. 7.

شکل ۷: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی اولیه با نسبت‌های ضخامت به شعاع مختلف . ***($L/R_1=2$, $V_{CN}{}^*=12\%$, $\varphi=15°$ SS).***

همانطور که از شکل‌های ۸ تا ۱۱ مشخص است، با افزایش بارگذاری حرارتی اولیه، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد اما نکته قابل توجه اینجاست که هرچه نسبت طول به شعاع کوچکتر باشد، تغییرات فرکانس بیشتر تحت تاثیر بارگذاری حرارتی اولیه قرار می‌گیرد و حتی در درجه حرارت‌های پایین، بارگذاری حرارتی اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی دارد. شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی پوسته مخروطی تاثیر بسزایی بر رفتار ارتعاشی سازه

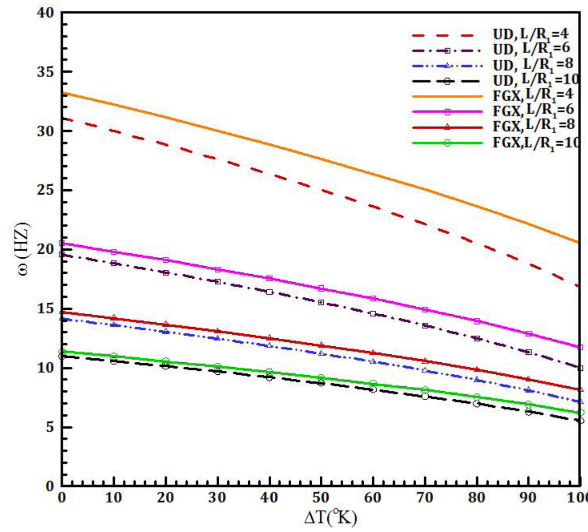

Fig. 8.

شکل ۸: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی.

.($R_1/h=50$, $V_{CN}^*=17\%$, $\varphi=30°$ C-C)

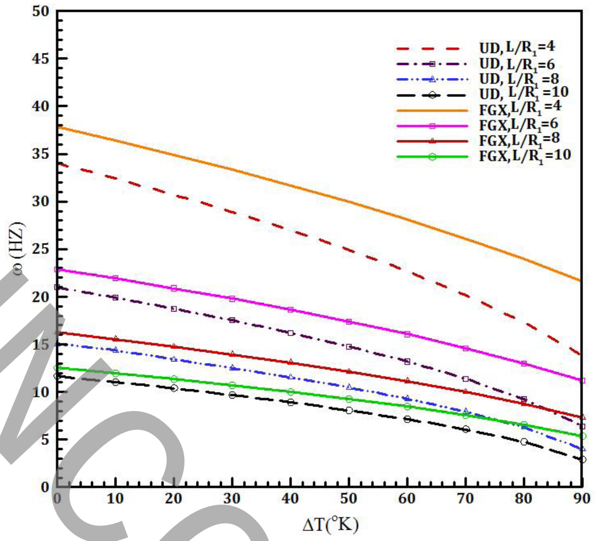

Fig. 10.

شکل ۱۰: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی.

.($R_1/h=50$, $V_{CN}^*=28\%$, $\varphi=30°$ C-C)

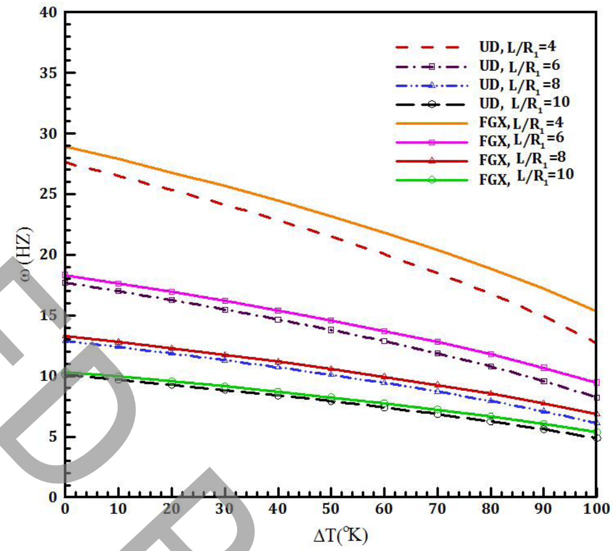

Fig. 9.

شکل ۹: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی.

.($R_1/h=50$, $V_{CN}^*=17\%$, $\varphi=30°$ C-S)

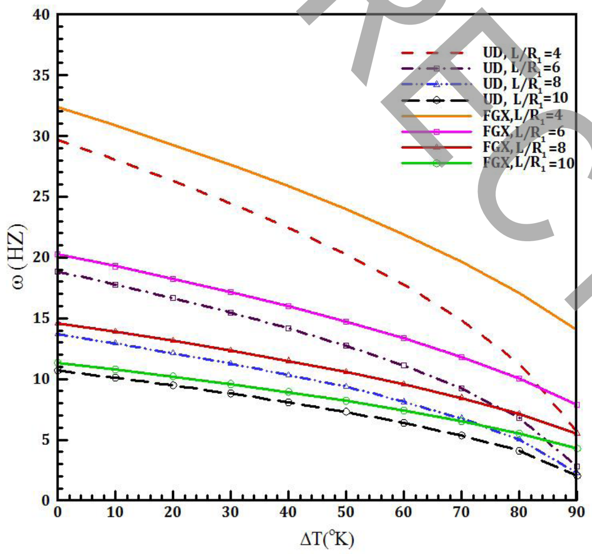

Fig. 11.

شکل ۱۱: بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی .

.($R_1/h=50$, $V_{CN}^*=28\%$, $\varphi=30°$ C-S)

داشته، به گونه‌ای که با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار در دو انتها (CC) پوسته بیشترین پایداری را داشته و درنتیجه بیشترین فرکانس طبیعی را دارد. از طرفی ملاحظه می‌گردد که نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت در تمامی حالت روند یکسانی داشته، به گونه‌ای که نوع FGX و FGA به ترتیب بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی را دارند. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته برای شرایط مرزی (CC ، CS و SS) تقریبا نتایج مشابهی را گزارش می‌کنند. از طرفی مشاهده می‌شود که میزان کسر حجمی و نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی تاثیر بسزایی بر رفتار ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی دارد. برخلاف انتظار، افزایش کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی موجب روند افزایشی یکنواختی در اختلاف دمای بحرانی کمانش نشده به طوری که پوسته با کسر حجمی $V_{CN}^*=0/28$ به ترتیب بیشترین و کمترین پایداری حرارتی را دارا می‌باشد.

در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به بررسی فرکانس پایه پوسته مخروطی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی پرداخته شده است و سپس نتایج حاضر با نتایج تحلیل آباکوس بررسی شده است. همانطور که از شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشخص است، با افزایش نسبت طول به شعاع مخروط فرکانس پایه کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس پوسته افزایش می‌یابد. همانطور که از نمودار مشخص است نتایج حاضر به نتایج تحلیل آباکوس بسیار نزدیک می‌باشد و این صحت انجام تحلیل را نشان می‌دهد.

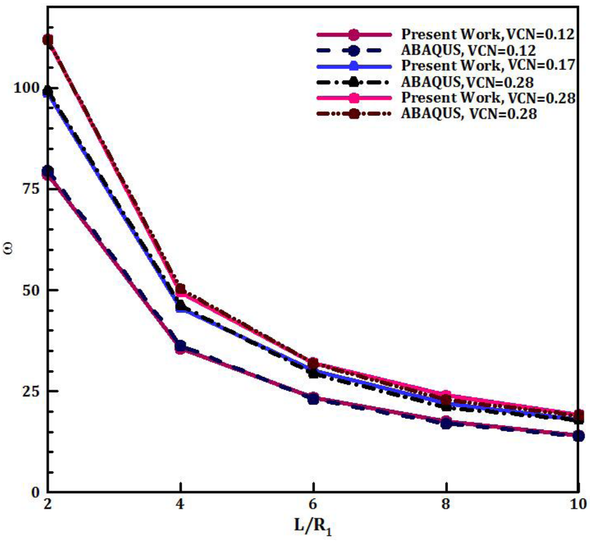

Fig. 12.

شکل ۱۲: تاثیر نسبت طول به شعاع مختلف برروی فرکانس پوسته مخروطی(Hz).

.($h/R_1=1/20$, $R_1=1m$, $\varphi=15°$, $\Delta T=0K$, SS, UD)

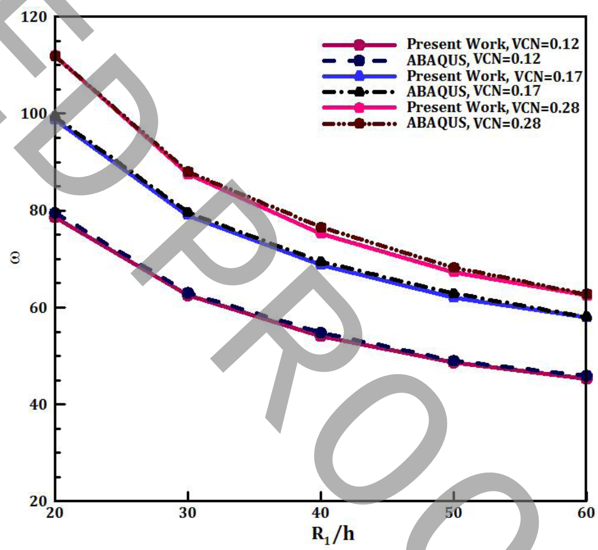

Fig. 13.

شکل ۱۳: تاثیر نسبت شعاع به ضخامت مختلف برروی فرکانس پوسته مخروطی(Hz).

.($L/R_1=2$, $R_1=1m$, $\varphi=15°$, $\Delta T=0K$, SS, UD)

۷- نتیجه‌گیری

از میان مهم‌ترین یافته‌های نتایج عددی، می‌توان به موارد زیراشاره کرد:

- نسبت اورتوتروپی تاثیر قابل توجهی بر فرکانس پوسته دارد. این اثر برای پوسته‌های کوتاه‌تر بیشتر مشهود است. با افزایش طول مخروط، منحنی‌های فرکانس تمایل به همگرا شدن دارند. هرچه نسبت ارتوتروپی بزرگتر باشد، پوسته منعطف‌تر و با فرکانس کوچکتری ارتعاش می‌نماید.
- با افزایش زاویه راس مخروط فرکانس پایه پوسته مخروطی کاهش می‌یابد و باعث کاهش پایداری پوسته مخروطی می‌گردد
- هرچقدر درصد حجمی پوسته مخروطی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بیشتر باشد برای اختلاف دمای صفر، بیشترین فرکانس پایه پوسته برای حالت ۰/۲۸ تقویت شده با نانو لوله کربنی اتفاق می‌افتد. ولی با افزایش دما پایداری پوسته مخروطی برای ۰/۲۸ تقویت شده با نانولوله کربنی نسبت به حالت ۰/۱۲و ۰/۱۷ کمتر می‌شود و پوسته مخروطی دچار کمانش می‌گردد و بیشترین دمای بحرانی کمانش مربوط به کسر درصد حجمی ۰/۱۷ نانولوله می‌باشد.
- بیشترین مقدار فرکانس پایه برای حالت توزیع حالت *FGX* اتفاق می‌یابد.
- با افزایش درجه حرارت به دلیل به وجود آمدن تنش‌های حرارتی اولیه فرکانس پوسته مخروطی کاهش می‌یابد.
- هر چه نسبت طول به شعاع کوچکتر باشد، تغییرات فرکانس بیشتر تحت تاثیر بارگذاری حرارتی اولیه قرار می‌گیرد و حتی در دماهای پایین نیز بارگذاری حرارتی اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی دارد. همچنین افزایش نسبت طول به شعاع، تاثیر چندانی در دمای بحرانی کمانش ندارد.
- هر چه نسبت ضخامت به شعاع مخروط افزایش یابد، پوسته با فرکانس بیشتری ارتعاش می‌کند و در نتیجه پایداری پوسته تحت بار حرارتی اولیه افزایش می‌یابد.

پیوست ۱

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{A_{11}\sin(\varphi)}{R(x)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{A_{22}\sin^2(\varphi)}{R^2(x)}+\frac{A_{66}}{R^2(x)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{12}=\frac{\left(A_{12}+A_{66}\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}-\frac{\left(A_{22}+A_{66}\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\left(B_{12}+2B_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}-\frac{\left(B_{12}+B_{22}+2B_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{13}=\frac{A_{12}\cos\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{A_{22}\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}-B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\frac{\left(B_{12}+2B_{66}\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial\theta^2}-\frac{B_{11}\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\left(B_{12}+B_{22}+2B_{66}\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{B_{22}\sin^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{21}=\frac{\left(A_{12}+A_{66}\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}-\frac{\left(A_{22}+A_{66}\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\left(B_{12}+2B_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{\left(B_{22}-B_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{22}=A_{66}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sin^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\right]+\left(\frac{A_{22}}{R^2\left(x\right)}+\frac{2B_{22}\cos\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}+\frac{D_{22}\cos^2\left(\varphi\right)}{R^4\left(x\right)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{B_{66}\cos\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\left[3\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sin^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\right]+\frac{2D_{66}\cos^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2\sin^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\right]$$

$$L_{23}=\left(\frac{A_{22}\cos\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}+\frac{B_{22}\cos^2\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}-\frac{4D_{66}\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^4\left(x\right)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}-\left(\frac{B_{22}}{R^3\left(x\right)}+\frac{D_{22}\cos\left(\varphi\right)}{R^4\left(x\right)}\right)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}-\left(\frac{B_{22}\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}+\frac{\left(D_{22}-4D_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}-\frac{\left(D_{12}+2D_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}+\frac{\left(B_{12}+2B_{66}\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial\theta^2}$$

$$L_{31}=-\frac{A_{12}\cos\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{A_{22}cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}+B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{\left(B_{12}+2B_{66}\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial\theta^2}+\frac{2B_{11}\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\left(B_{22}-2B_{66}\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{B_{22}\sin^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{B_{22}\sin^3\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{32}=-\left(\frac{A_{22}\cos\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}+\frac{B_{22}\cos^2\left(\varphi\right)-\left(B_{22}+2B_{66}\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}-\frac{\left(2D_{12}+2D_{22}+8D_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{R^4\left(x\right)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{B_{22}}{R^3\left(x\right)}+\frac{D_{22}\cos\left(\varphi\right)}{R^4\left(x\right)}\right)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+\left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R\left(x\right)}+\frac{\left(D_{12}+4D_{66}\right)\cos\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial\theta}-\left(\frac{\left(D_{22}+2D_{12}+8D_{66}\right)cos\left(\varphi\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}+\frac{\left(B_{22}+2B_{66}\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}$$

$$L_{33}=-\frac{A_{22}cos^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}+\frac{2B_{12}\cos\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}+\frac{2B_{22}\cos\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{B_{22}\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}-D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\frac{2\left(D_{12}+2D_{66}\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\theta^2}-\frac{D_{22}}{R^4\left(x\right)}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}-\frac{2D_{11}\sin\left(\varphi\right)}{R\left(x\right)}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{2\left(D_{12}+4D_{66}\right)\sin\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial\theta^2}+\frac{D_{22}\sin^2\left(\varphi\right)}{R^2\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2\left(D_{22}+D_{12}+4D_{66}\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{R^4\left(x\right)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{D_{22}\sin^3\left(\varphi\right)}{R^3\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$k_{11}=\frac{\int_0^L\int_0^{2\pi}L_{11}\{u\}uR\left(x\right)d\theta dx}{\int_0^L\int_0^{2\pi}u^2R\left(x\right)d\theta dx},$$

$$k_{12}=\frac{\int_0^L\int_0^{2\pi}L_{11}\{v\}uR\left(x\right)d\theta dx}{\int_0^L\int_0^{2\pi}u^2R\left(x\right)d\theta dx},$$

$$k_{13}=\frac{\int_0^L\int_0^{2\pi}L_{11}\{w\}uR\left(x\right)d\theta dx}{\int_0^L\int_0^{2\pi}u^2R\left(x\right)d\theta dx},$$

$$k_{21}=\frac{\int_0^L\int_0^{2\pi}L_{11}\{u\}vR\left(x\right)d\theta dx}{\int_0^L\int_0^{2\pi}v^2R\left(x\right)d\theta dx}\ \ldots.$$

$$k_{33}=\frac{\int_0^L\int_0^{2\pi}L_{33}\{w\}wR\left(x\right)d\theta dx}{\int_0^L\int_0^{2\pi}w^2R\left(x\right)d\theta dx}$$

منابع

[1] Mirzaei, M. and Y. Kiani. "Thermal buckling of temperature dependent FG-CNT reinforced composite conical shells". Aerospace Science and Technology, 47: 42-53, (2015).

[2] Hua, L. "Frequency analysis of rotating truncated circular orthotropic conical shells with different boundary conditions." Composites Science and Technology 60(16): 2945-2955,2000.

[3] Li, F.-M., et al."The calculations of 222natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method." Mechanics Research Communications 36(5): 595-602,2009.

[4] Hosseini, M. and M. Talebitooti "Buckling analysis of moderately thick FG carbon nanotube reinforced

composite conical shells under axial compression by DQM." Mechanics of Advanced Materials and Structures: 1-10, 2017.

[5] Shen, H.-S. "Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells." Composites Part B: Engineering 43(3): 1030-1038.

[6] Torabi, j. and R. Ansari. "Thermal buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells." Modares Mechanical Engineering 15(10): 137-146,2015

[7] Shu, C. " Free vibration analysis of composite laminted conical shells by generalzed differntial quadrature." Journal of Sound and Vibration 194(4): 587-604,1996.

[8] Torabi, j. and R. Ansari. "Free vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells surrounded by elastic foundation subjected to thermal loading." 194: 271-282,2015.

[9] Ansari, R., et al. "Analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite spherical shells resting on elastic foundation using the variation differential quadrature method." European Journal of Mechanics - A/Solids 60: 166-182, 2016.

[10] Jam, J. E. and Y. Kiani "Buckling of pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells". Composite Structures 125:586-595, 2015.

[11] Ansari, R., et al. "Free vibration analysis of embedded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical/cylindrical shells and annular plates using a numerical approach." Journal of Vibration and Control , 2016.

[12] Mehri, M., et al. "Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 303: 75-100, 2016.

[13] Ansari, R., et al. "Buckling analysis of axially-loaded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical panels using a novel numerical method." Composite Structures 157: 398-411, 2016.

[14] Jooybar, N., et al. "Vibration of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite truncated conical panels with elastically restrained against rotation edges in thermal environment." Composites Part B: Engineering 106: 242-261, 2016.

[15] Rahimi, G. H., et al. "Vibration of functionally graded cylindrical shells with ring support." Scientia Iranica 18(6): 1313-1320,2011.

[16] Moradi-Dastjerdi, R., et al. "Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method." Materials & Design 44: 256-266,2013.