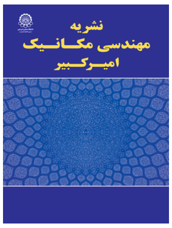


Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(1) (2020) 41-44
DOI: 10.22060/mej.2018.13957.5762

An Analytical Method for Damped Free Vibration Analysis of a Cracked Beam Considering the Coupled Multimode Equations

M. Rezaee*, V. Shaterian-Alghalandis

Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

ABSTRACT: The multimodal free vibration of a beam with a breathing crack excited by arbitrary initial conditions is investigated. Taking the initial conditions to be arbitrary makes more than one mode of the beam to be excited simultaneously. By considering the bending moment at the crack position, a multi-harmonic function describing the instantaneous opening and closing of the crack is extracted. Since the modal stiffnesses of the beam are dependent on the crack parameters, the extracted crack breathing function will appear in the equations of motion and makes them to be coupled. These equations are solved using the perturbation method. Then, the free response of the beam is extracted under three cases of initial conditions: excitation of the first mode, simultaneous excitation of the first and second modes, and simultaneous excitation of the first three modes. The results show that by exciting the first mode solely, the harmonic components of the response offer very limited information about the crack. However, by exciting the first several modes simultaneously, many other harmonic components appears at the frequency response curves which are more sensitive to the crack and contain more comprehensive information about the crack parameters.

Review History:

Received: 13 Jan. 2018
Revised: 1 Feb. 2018
Accepted: 29 Mar. 2018
Available Online: 6 May. 2018

Keywords:

Beam with a fatigue crack
Multimode free damped vibration
Perturbation method
Frequency analysis

1- Introduction

Vibration analysis of the beams to identify possible defects in them has been known as one of the main structural health monitoring methods. One of the most common defects in structures is the fatigue crack, which is generated mainly due to structural vibration, and if continued, will eventually lead to structural failure. The fatigue crack is usually open under tension and is closed under compression, so, in dynamic analysis of the cracked beam, the crack is modeled by the bilinear variation of the elastic force against the beam displacement [1], or by periodic variation of the elastic force with the time [2]. Because of the strong nonlinearity, in the literature, to perform analytical assessment of the vibration of the cracked beam, the dynamic model of the beam is usually simplified to a one degree of freedom system by considering only one mode of vibration of the beam. There are also very few references studying the multi-mode vibration of the cracked beam based on the finite element methods.

In this paper, the multimodal free vibration equations of the cracked beam are extracted as a set of coupled second order ordinary differential equations, and these equations are solved by the perturbation method [3]. The obtained analytical response makes it possible to assess the effects of crack parameters on the vibrational behavior of the beam directly and without any need to the numerical and or finite element based methods. The analytical free vibration responses of the cracked beam are obtained for the cases of single-mode and also multi-mode excitations; then by frequency decomposition of the responses, the harmonic components of the responses are extracted and the effects of the crack on them are studied.

*Corresponding author's email: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

2- Multi-mode Response of the Beam with a Breathing Crack under an Arbitrary Initial Condition

A simply supported beam with a length of l and with a transverse crack located at l_1 is shown in Fig. 1.

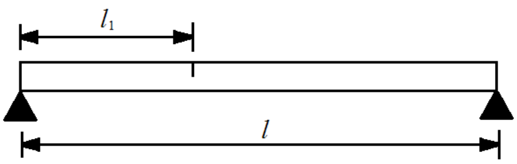


Fig. 1. A simply supported cracked beam

When the beam is vibrating in one mode, it can be modeled as a single degree of freedom system governed by the following equation of motion [4]:

$$\bar{m}_n \ddot{u}_n(t) + \bar{c}_n \dot{u}_n(t) + \left[\bar{k}_n - \frac{\Delta \bar{k}_n}{2} \left(1 + \cos(\omega_n t)\right) \right] u_n(t) = 0 \tag{1}$$

where, $\bar{m}_n$, $\bar{c}_n$ and $\bar{k}_n$ are the equivalent mass, damping and elasticity of the intact beam. $\Delta\bar{k}_n$ is the difference between the elasticity of the intact beam and the cracked beam and ω_n is the n^{th} natural frequency of the cracked beam.

Eq. (1), although is the fundamental equation of many studies on the vibration of cracked beams, is only applicable in the case of single-mode vibration. For the multi-mode case the variation of the beam elasticity is no longer harmonic. In this case, because of the dependency of the beam elasticity on the status of the crack, in order to determine the variation of elasticity, the process of the crack opening and closing is to be modeled. If the crack opening is determined by the function $h(t)$, the equation of motion of the beam is determined as follows:

$$\bar{m}_n\ddot{u}_n(t)+\bar{c}_n\dot{u}_n(t)+\left[\bar{k}_n-\frac{\Delta\bar{k}_n}{2}\big(1+h(t)\big)\right]u_n(t)=0 \quad (2)$$

which may be nondimensionalized as follows:

$$\frac{d^2u_n}{d\tau^2}+2\varepsilon_n\mu_n\frac{du_n}{d\tau}+\left[1-\varepsilon_n\left(1+h(\tau)\right)\right]\alpha_n^2u_n(\tau)=0 \quad (3)$$

where, $\tau=\omega_1 t$, $\alpha_n=\dfrac{\omega_n}{\omega_1}$, $\varepsilon_n=\dfrac{\Delta\bar{k}_n}{2\bar{k}_n}$, $2\varepsilon_n\mu_n=\dfrac{\bar{c}_n}{\omega_1\bar{m}_n}$. The function $h(\tau)$ depends on the status of the crack, such that when the crack is fully open, $h(\tau)=1$, and when it is fully closed, $h(\tau)=-1$. The amount of crack opening is proportional to the magnitude of the bending moment at the crack location; so that:

$$h(\tau)\propto M=EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

where, M, E, I and w are the bending moment, modulus of elasticity, moment of inertia of the beam cross section and lateral displacement of the beam, respectively. By obtaining the first order approximation for the solution of the beam equation of motion and then using Eq. (4), $h(\tau)$ can be determined, which after normalizing, yields Eq. (5):

$$h(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\cos(\alpha_{nc}\tau) \quad (5)$$

where:

$$h_n=\frac{a_{n0}\phi_n''(l_1)}{\sum_{p=1}^{\infty}a_{p0}\phi_p''(l_1)} \quad (6)$$

where, ϕ_n is the n^{th} linear mode shape of the cracked beam and $a_{n0}=u_n(0)$.

By putting Eq. (5) into Eq. (3) and solving that by using the method of multiple scales [5], the analytical response of the cracked beam to an arbitrary initial displacement is obtained as follows:

$$\begin{aligned} w(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)u_n \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\Bigg\{a_n\cos(\omega_n t+\beta_n) \\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_n a_n\alpha_n^2\Bigg[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\left(\omega_n^2-(\omega_n+\omega_{pc})^2\right)}\cos((\omega_n+\omega_{pc})t+\beta_n) \\ &+\sum_{\substack{p=1\\p\neq 2n}}^{\infty}\frac{h_p}{\left(\omega_n^2-(\omega_n-\omega_{pc})^2\right)}\cos((\omega_n-\omega_{pc})t+\beta_n)\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \quad (7)$$

3- Case Study

Here, the multi-mode free response of the simply supported cracked beam is extracted for various cracks, and then, by frequency decomposition of the free response, the effects of crack parameters on the frequency response function of the cracked beam are studied. The mechanical properties of the beam are given in Table 1.

Table 1. The mechanical properties of the beam

Material	Length (cm)	Width (cm)	Thickness (cm)	Density (kg/m³)	Young modulus (MPa)
AL 7075	56	2.54	0.64	2780	72400

In order to excite the fundamental mode of vibration of the beam, its initial displacement is considered to be proportional to the 1th mode shape, with the amplitude equal to 1 mm. The response is obtained for the beam with a crack located at the relative position of 0.25 and with the relative depths of 0 (intact beam), 0.3 and 0.6. In Figs. 2 and 3, the time responses of the midpoint of the beam as well as the frequency responses are shown respectively.

In the multi-mode case, the initial displacement of the beam is supposed to be a combination of three first linear mode shapes and with the ratios of 0.5, 0.3 and 0.2, respectively. The amplitude of the initial displacement is also taken equal to 0.8 mm. The crack parameters are taken as those in the single-mode case. The midpoint responses of the beam and also the frequency response functions for various cracks are shown in Figs. 4 and 5 respectively.

By comparing Figs. 2 and 4, one concludes that when only one mode is excited, the crack may sometimes have a slight effect on the system response, but in multi-mode excitation that is not the case, and the response changes significantly in presence of the crack. Also, considering Figs. 3 and 5, it is clear that in the multi-mode case, the crack causes several high-order crack sensitive harmonic components to be generated in the frequency response functions, and based on this fact, it will be possible to establish new crack detection methods based on the variations of the harmonic components of the cracked beam responses.

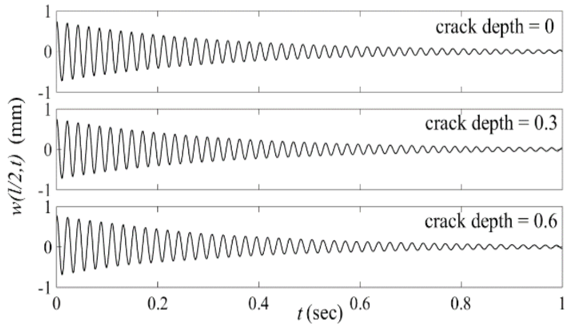


Fig. 2. Single-mode response of the cracked beam

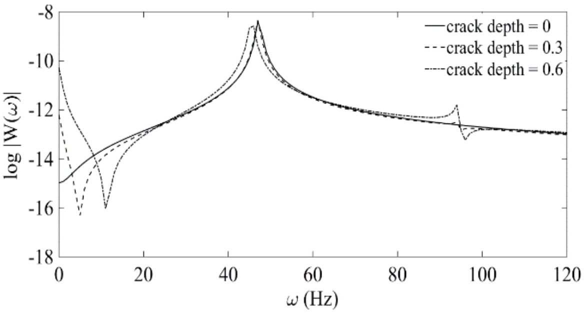


Fig. 3. Frequency response function of the cracked beam

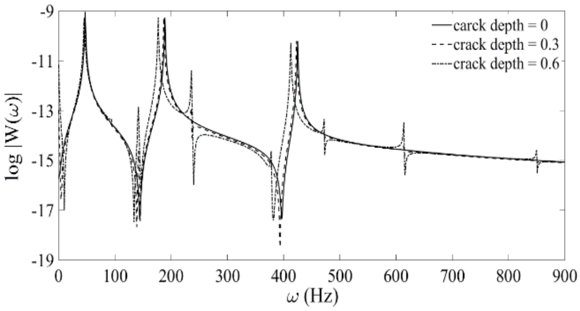


Fig. 4. Multi-mode response of the cracked beam

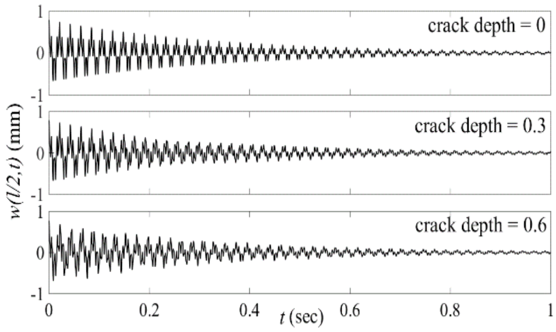


Fig. 5. Frequency response function of the cracked beam

4- Conclusions

In this paper, the multi-mode free damped vibration of a simply supported beam with a breathing crack is studied analytically. To this end, a multi-harmonic function representing the crack opening status as a function of the bending moment at the crack location is extracted. By using this function the multi-harmonic equations of motion of the cracked beam is obtained and solved analytically. The results show that when several modes are excited, the crack will produce many high-order harmonic components in the frequency response function, which may be used to establish new crack detection methods.

References

[1] Smith, S., Wang, G., and Wu, D., 2017. “Bayesian approach to breathing crack detection in beam structures”. *Engineering Structures*, 148, pp. 829–838.

[2] Vigneshwaran, K., and Behera, R.K., 2014. “Vibration Analysis of a Simply Supported Beam with Multiple Breathing Cracks”. *Procedia Engineering*, 86, pp. 835-842.

[3] Nayfeh, A.H., 1993. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley.

[4] Rezaee, M., and Hassannejad, R., 2010. “Free Vibration Analysis Of Simply Supported Beam With Breathing Crack Using Perturbation Method”, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 23(5), pp. 459-470.

[5] Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., 1979. *Nonlinear oscillations*, Wiley-Interscience.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۵۵ تا ۱۷۲
DOI: 10.22060/mej.2018.13957.5762

پاسخ تحلیلی ارتعاشات آزاد میرای تیر ترک‌دار با معادلات حرکت چند مودی کوپل

موسی رضائی*، وحید شاطریان القلندیس

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

خلاصه: در این مقاله، ارتعاشات چند مودی آزاد تیر با ترک خستگی تحت شرایط اولیه دلخواه مطالعه شده است. اعمال شرایط اولیه دلخواه باعث تحریک هم‌زمان چند مود ارتعاشی تیر می‌شود. برای تحلیل مسأله، با در نظر گرفتن گشتاور خمشی تیر در محل ترک، رابطه‌ای برای تعیین میزان باز شدگی آنی ترک به صورت تابعی چندهارمونیک از زمان ارائه می‌شود. تابع توصیف کننده وضعیت آنی ترک در مجموعه معادلات مودال توصیف کننده ارتعاشات تیر ترک‌دار ظاهر شده و سبب کوپل شدن معادلات می‌شود. این معادلات با استفاده از روش اغتشاشات حل و پاسخ تحلیلی ارتعاش چند مودی تیر ترک‌دار به تحریک اولیه دلخواه به دست می‌آید. سپس پاسخ ارتعاشی تیر در سه حالت: تحریک مود اول، تحریک هم‌زمان مودهای اول و دوم و تحریک هم‌زمان مودهای اول تا سوم به دست آمد. نتایج نشان می‌دهد که با تحریک صرفاً در مود اول، مؤلفه‌های هارمونیک پاسخ ارتعاشی اطلاعات بسیار محدودی در مورد ترک ارائه می‌دهد در حالی که با تحریک هم‌زمان مودهای بالاتر، مؤلفه‌های هارمونیک متعددی به علت وجود ترک در پاسخ ارتعاشی ایجاد می‌شوند که حساسیت زیادی به ترک دارند و از تحلیل آن‌ها اطلاعات دقیقی در مورد موقعیت و عمق ترک حاصل می‌شود.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۲۳
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۱/۰۹
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۰۹
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۲/۱۶

کلمات کلیدی:
تیر با ترک خستگی
ارتعاش چند مودی آزاد میرا
روش اغتشاشات
تحلیل فرکانسی

۱- مقدمه

تحلیل ارتعاشات تیرها به منظور پایش سلامتی و شناسایی عیوب احتمالی در آن‌ها، سال‌هاست به عنوان یکی از موضوعات کلیدی در علم مهندسی مکانیک مطرح می‌باشد. تحلیل داده‌های ارتعاشی تیرها عموماً به استخراج پارامترهایی منجر می‌گردد که با استفاده از آن‌ها می‌توان در مورد وضعیت سازه اظهار نظر نمود. رایج‌ترین عیب در سازه‌ها، وجود ترک خستگی ناشی از ارتعاشات و بارگذاری‌های متناوب حاصل از آن می‌باشد که در صورت تداوم، ترک گسترش یافته و نهایتاً به گسیختگی سازه منجر می‌شود.

ترک ناشی از خستگی دارای این ویژگی است که در حین ارتعاش تیر، زمانی که تحت کشش باشد، باز و زمانی که تحت فشار قرار گیرد بسته می‌شود. در تحلیل ارتعاشات، فرآیند باز و بسته شدن ترک به صورت رفتار خطی تکه‌ای نامتقارن در نیروی بازگرداننده تیر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، سازه‌ها با ترک خستگی دارای رفتار ارتعاشی غیرخطی شدید بوده و بررسی ارتعاشات آن‌ها با دشواری‌هایی همراه است. با توجه به این دشواری‌ها، در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در ادبیات فن، از یک سیستم یک درجه آزادی برای استخراج پاسخ ارتعاشی تیرهای ترک‌دار بهره گرفته شده و در آن‌ها نیروی بازگرداننده به صورت یک تابع دو خطی از جابه‌جایی آنی تیر بیان شده است. به عنوان یکی از پایه‌ای‌ترین تحلیل‌ها، چو و شن [۱] تیر ترک‌دار را به صورت یک سیستم یک درجه آزادی تحت نیروی بازگرداننده دوخطی در نظر گرفته و پاسخ ارتعاش آزاد و پاسخ به تحریک هارمونیک را با استفاده از روش‌های تحلیلی به دست آوردند و تأثیر ترک خستگی در طیف فرکانسی پاسخ ارتعاشی را مورد مطالعه قرار دادند. ریوولا [۲] با بهره‌گیری از مدل یک درجه آزادی مشابه، پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار به تحریک هارمونیک را با استفاده از روش بالانس هارمونیک به دست آورده و تأثیر ترک در هارمونیک‌های ایجاد شده در پاسخ ارتعاشی را مورد مطالعه قرار داد. سپس پاسخ تیر ترک‌دار به تحریک اتفاقی نویز سفید را به صورت تجربی به دست آورده و با بهره‌گیری از روش آنالیز دو طیفی، تأثیر ترک بر رفتار ارتعاشی تیر را مورد مطالعه قرار داد.

یکی دیگر از روش‌های معرفی شده برای شناسایی رفتار دو خطی در

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

سازه‌ها توسط گلمن و همکاران [۳] با مطالعه پاسخ نوسانی میرای تیر به تحریک ضربه معرفی گردیده است. آن‌ها در تحقیق خود به بررسی تأثیر اندازه ترک بر نرخ کاهش دامنه نوسان آزاد تیر و فرکانس طبیعی آن پرداختند و نشان دادند که تغییر در نرخ کاهش دامنه نوسان می‌تواند شاخص مناسبی برای تشخیص وجود ترک و تعیین شدت آن باشد. در تحقیق دیگری، شاخص‌های مختلفی از وجود ترک و شدت آن با استفاده از ارتعاشات آزاد تیر توسط بووسانوسکی [۴] معرفی شد و با مقایسه آن‌ها، معیار جدیدی بر اساس مقدار نسبی هارمونیک صفر در طیف فرکانسی پاسخ خروجی معرفی گردید. در تحقیقی دیگر، بووسانوسکی [۵] روش‌هایی را برای شناسایی ترک با استفاده از تغییر شکل‌ها و اعوجاجات پاسخ‌های هارمونیک (جابه‌جایی، سرعت و شتاب) و نیز با استفاده از دامنه‌های نسبی پاسخ هارمونیک در حالت ارتعاش فراهارمونیک و زیرهارمونیک ارائه نمود. کرسپو و همکاران [۶] نیروی بازگرداننده دو خطی را با یک چند جمله‌ای مرتبه ۴ تخمین زده و از روش سری‌های ولترا و توابع پاسخ فرکانسی مراتب بالاتر برای شناسایی ترک استفاده نمودند. از آنجایی که ساختار این توابع دقیقاً وابسته به ضرایب جملات تابع چندجمله‌ای و در نتیجه وابسته به شکل تابع دوخطی است، بنابراین ارتباط مستقیمی بین توابع پاسخ فرکانسی و موقعیت و عمق ترک وجود دارد. همین ایده بعدها توسط چاترجی [۷] و با تخمین نیروی بازگرداننده دو خطی با یک چندجمله‌ای مرتبه دوم انجام گرفت. در تحقیق دیگری، سوریس [۸] ایده استفاده از توابع پاسخ فرکانسی مرتبه بالا به تحریک با دو مؤلفه هارمونیک با فرکانس‌های مختلف بسط داده شد تا تأثیر رفتار غیرخطی تیر ترک‌دار در پاسخ پریودیک ناشی از ترکیب دو نیروی هارمونیک مورد مطالعه قرار گیرد. برای حل معادله حرکت تیر ترک‌دار با نیروی بازگرداننده دو خطی، زمانی که انحراف شیب‌ها کم باشد (غیرخطی ضعیف) می‌توان از روش بالانس هارمونیک استفاده کرد. از سوی دیگر برای حالت غیرخطی شدید روشی به نام بالانس هارمونیک افزایشی توسط لاوو و همکارانش [۹] ابداع شده است. برودا و همکاران [۱۰] پاسخ ارتعاش طولی تیر ترک‌دار را با استفاده از روش المان محدود به دست آورده و با مطالعه مؤلفه‌های هارمونیک پاسخ ارتعاشی نشان دادند که تاثیرات غیرخطی ناشی از ترک در پاسخ ارتعاشی تیر در نقاط پیرامونی ترک بسیار بیشتر از نقاط دور از آن می‌باشد به طوری که امکان جداسازی آثار غیرخطی ناشی از ترک از دیگر عوامل غیرخطی وجود دارد. دووتی و همکاران [۱۱] با انجام مطالعه‌ای جامع در مورد ارتعاشات اجباری تیر ترک‌دار نشان دادند که تیر با ترک باز و بسته شونده حتی در صورت تحریک با نیروی هارمونیک ساده رفتارهای غیرخطی پیچیده‌ای از خود نشان خواهد داد، که برخی از این رفتارهای غیرخطی عبارتند از: خودتحریکی در تشدید هارمونیک[1]، رفتار شبه پریودیک[2]، ارتعاشات آشوبناک[3] و ... . اسمیت و همکاران [۱۲] پاسخ تحلیلی ارتعاشات تیر ترک‌دار را با استفاده از روش اغتشاشات هوموتوپی [4] به دست آورده و با استفاده از آن، روشی را برای شناسایی ترک با استفاده از تئوری استنباط بیزی[5] و با بهره‌گیری از روش مونت کارلو[6] بیان نمودند. جوگلکار و میترا [۱۳] با استفاده از روش المان‌های طیفی مبتنی بر تبدیل فوریه به مطالعه انتشار موجک‌های خمشی در تیر ترک‌دار پرداختند. نتایج به دست آمده، نشانگر وجود مؤلفه‌های هارمونیک مرتبه بالا به علت وجود ترک باز و بسته شونده در تیر است که با افزایش عمق ترک، آثار مؤلفه‌های هارمونیک در پاسخ ارتعاشی تیر بزرگتر می‌گردد. در تحقیق دیگری، همین محققان با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه موجک به مطالعه تاثیر ترک در موجک‌های خمشی در تیر ترکدار پرداختند [۱۴]. پراوین و رائو [۱۵] با جایگزینی مدل دو خطی معمول برای مدل‌سازی سفتی تیر ترک‌دار با مدل‌های چندجمله‌ای مناسب، به مطالعه ارتعاشات غیرخطی تیر با ترک باز و بسته شونده پرداختند. همین محققان در تحقیق دیگری با استفاده از سری‌های ولترا[7] و با بهره‌گیری از مفهوم فیلتر تطبیقی[8] به مطالعه رفتار غیرخطی ناشی از ترک در تیر با ترک باز و بسته شونده پرداختند [۱۶].

در ادبیات فن، در کنار مدل دو خطی برای بیان نیروی بازگرداننده در تیر ترک‌دار، روش دیگر، تعریف آن به صورت یک تابع پیوسته هموار در سراسر دامنه نوسان تیر است. دلیل استفاده از این روش این است که فرآیند باز و بسته شدن ترک در حقیقت به صورت فرآیندی تدریجی و پیوسته و نه یک پدیده آنی است. در صورتی که تیر در یکی از مودهای خود نوسان نماید، متداول‌ترین روش برای تعریف نیروی بازگرداننده به صورت تابعی پیوسته، بیانِ ضریب فنریت به صورت یک تابع هارمونیک از زمان است [۱۷]. از مراجع معتبری که از روش فوق برای بیان نیروی بازگرداننده در تیر ترک‌دار بهره برده‌اند می‌توان به مقالات ارائه شده توسط رضائی و حسن‌نژاد [۱۸ و ۱۹]، سینونو [۲۰]، دووکا و هاجی لئونتیادیس [۲۱]، لوتریدیس و همکاران [۲۲] و ویگنوشواران و بهارا [۲۳] اشاره کرد. رضائی و حسن‌نژاد [۱۹] پاسخ حالت آزاد معادله حرکت فوق را به صورت تحلیلی به دست آورده و نشان

1 self-excitation of harmonic resonances
2 quasi-periodic motion
3 haotic vibrations
4 homotopy perturbation method
5 bayesian inference approach
6 monte carlo technique
7 volterra series
8 adaptive filter

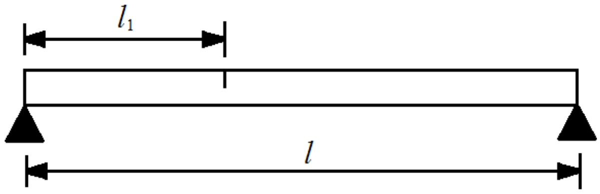
دادند که پاسخ آزاد بصورت نوسانی میرا با جملات هارمونیک با فرکانس‌های مضرب زوج از فرکانس طبیعی سیستم است. همچنین ارتباط بین ضریب میرایی معادل سیستم ارتعاشی و پارامترهای ترک به صورت دقیق استخراج شد.

در تمامی مراجع ذکر شده، تیر ترک‌دار به صورت سیستم یک درجه آزادی مدل‌سازی شده است. از سوی دیگر، زمانی که ترک به صورت باز و بسته شونده باشد، برخلاف حالت ترک باز، بدست آوردن رابطه دقیق برای بیان پاسخ ارتعاشی با در نظر گرفتن مودهای ارتعاشی بالاتر بسیار پیچیده‌تر می‌شود و از این رو تعداد مراجعی که به این موضوع پرداخته‌اند محدودتر می‌باشند. بخش عمده‌ای از این مقالات نیز از روش المان محدود برای حل مسأله استفاده کرده‌اند. یکی از اولین تحقیقات در این زمینه توسط روتلو و همکاران [۲۴] انجام گرفته است. وی تأثیر ترک را به صورت تابع دوخطی برای ماتریس ضرایب میرایی در نظر گرفت و نشان داد که زمانی که فرکانس تحریک به تشدید فراهارمونیک نزدیک باشد ترک ممکن است در هر سیکل نوسان، بیشتر از یک بار تغییر وضعیت (باز یا بسته بودن) دهد. این موضوع سبب می‌شود تا دست‌یابی به پاسخ تحلیلی برای مسأله تشدید فراهارمونیک با چالشی جدی مواجه شود. برای حل این موضوع، پلاختینکو [۵۲] حالت تشدید ضعیف فراهارمونیک را در نظر گرفته و با بهره‌گیری از روش‌های استروگرادسکی و ریتز به مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول رسید که توصیف کننده رفتار دینامیکی تیر ترک‌دار هستند. البته این حالت محدود به ترک‌های کم عمق و نیز سیستم‌های با میرایی بالا است. کادمی [۲۶] روشی تحلیلی را برای بدست آوردن توابع مود مرتبه‌های مختلف برای تیرها با ترک باز و با ترک باز و بسته شونده ارائه کرد که در آن، وجود ترک در معادله دیفرانسیل حرکت به وسیله توابع دلتای دیراک معرفی شده است و به این طریق امکان بدست آوردن تابع جابه‌جایی به صورت تحلیلی دقیق وجود دارد. بووسانوسکی و همکاران [۲۷] در تحقیق دیگری با استفاده از روش المان محدود و با تعریف ضریب فنریت به صورت تابع پله‌ای در ماتریس سفتی، پاسخ سیستم را بدست آورده و از نسبت‌های ضرایب هارمونیک پاسخ سیستم ارتعاشی به عنوان شاخصه‌های شناسایی ترک استفاده کردند و نشان دادند که وجود ترک باز و بسته شونده سبب ایجاد جملات هارمونیک از مرتبه زوج در طیف پاسخ فرکانسی سیستم می‌گردد. در تحقیقات گسترده دیگری که مبتنی بر روش المان محدود هستند [۳۱-۲۸] نشان داده شده است که ارتعاشات تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده دارای تشدیدهای فراهارمونیک (با دامنه بسیار کوچک) هستند. از سوی دیگر، رفتار غیرخطی ذاتی پاسخ ارتعاشی در تشدیدهای فراهارمونیک و زیرهارمونیک بسیار مورد بحث قرار گرفته است. در حالت کلی، میزان رفتار غیرخطی تا حد زیادی به اندازه ترک بستگی دارد. ایده استفاده از توابع پریودیک برای مدل‌سازی ترک نیز در روش‌های مبتنی بر المان محدود استفاده شده است [۱۹و ۲۴ و ۲۸ و ۳۰].

آنچه که از بررسی ادبیات فن می‌توان دریافت این است که بیشتر مطالعات تحلیلی صورت گرفته در زمینه ارتعاشات تیر با ترک خستگی با در نظر گرفتن تنها یکی از مودهای ارتعاشی تیر و مبتنی بر مدل یک درجه آزادی بوده است. با استفاده از این مدل‌های ارتعاشی، پاسخ آزاد تیر و یا پاسخ آن به تحریک هارمونیک استخراج و تأثیر ترک در رفتار ارتعاشی تیر مورد مطالعه قرار گرفته است. مراجعی که به مطالعه ارتعاشات تیر با در نظر چند مود ارتعاشی اول پرداخته‌اند نیز اغلب از روش‌های مبتنی بر المان محدود بهره جسته‌اند و مقالات بسیار معدودی نیز وجود دارند که از روش‌های عددی برای استخراج پاسخ ارتعاشی و مطالعه ارتعاشات تیر ترک‌دار استفاده کرده‌اند. بر این اساس، در این مقاله معادلات ارتعاش آزاد چندی مودی تیر ترک‌دار به صورت مجموعه معادلات کوپل شده استخراج و پاسخ تحلیلی با استفاده از روش اغتشاشات به دست می‌آید. پاسخ تحلیلی به دست آمده این امکان را فراهم می‌آورد تا تأثیر هر یک از پارامترهای ترک (عمق و موقعیت آن) در رفتار ارتعاشی آزاد تیر به طور مستقیم و بدون نیاز به استفاده از روش‌های مبتنی بر محاسبات عددی یا المان محدود مورد مطالعه قرار گیرد. سپس، با استفاده از روابط استخراج شده، پاسخ ارتعاشی یک تیر ترک‌دار معین در سه حالت: تحریک مود اول، تحریک هم‌زمان مودهای اول و دوم، و تحریک هم‌زمان سه مود اول به دست آمده و با تجزیه فرکانسی پاسخ به دست آمده، تأثیر ترک در مؤلفه‌های هارمونیک ایجاد شده در پاسخ ارتعاشی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد چند مودی تیر با ترک خستگی تحت شرایط اولیه دلخواه

در شکل ۱، یک تیر دو سر مفصل به طول l با یک ترک خستگی عرضی در موقعیت l_1 نشان داده شده است.



شکل ۱: تیر دو سر مفصل با یک ترک خستگی

Fig. 6. The hinged-hinged beam with a fatigue crack

در حالت بدون ترک، معادله حرکت تیر یکنواخت با میرایی ویسکوز تحت شرایط ارتعاش آزاد به صورت رابطه (۱) است [۳۲]:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+C\frac{\partial w}{\partial t}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \qquad (۱)$$

که در آن، m جرم واحد طول تیر، C ضریب میرایی، E مدول الاستیسیته تیر و I ممان اینرسی سطح مقطع تیر است. برای حل معادله فوق با استفاده از روش گالرکین، پاسخ به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود [۳۲]:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)u_n(t) \qquad (۲)$$

که در آن، $\Phi_n(x)$شکل مودخطی و $u_n(t)$ تابع زمانی n ام تیر است. با قرار دادن پاسخ فرضی (رابطه (۲)) در رابطه (۱)، ضرب طرفین در شکل مود nام و انتگرال‌گیری در طول تیر و با در نظر داشتن تعامد شکل مودها، به رابطه (۳) خواهیم رسید:

$$\bar{m}_n\ddot{u}_n(t)+\bar{c}_n\dot{u}_n(t)+\bar{k}_n u_n(t)=0,\quad n=1,2,... \qquad (۳)$$

که در آن، $\bar{m}_n$ ، $\bar{c}_n$ و $\bar{k}_n$ به ترتیب، جرم مودال، میرایی مودال و سفتی مودال تیر بوده و به ترتیب برابرند با:

$$\bar{m}_n=\int_0^l m\phi_n^2(x)\mathrm{d}x \qquad (\text{الف-۴})$$
$$\bar{c}_n=\int_0^l C\phi_n^2(x)\mathrm{d}x \qquad (\text{ب-۴}) \qquad (۴)$$
$$\bar{k}_n=\int_0^l \phi_n(x)\left(EI\phi_n(x)\right)^{(IV)}\mathrm{d}x \qquad (\text{ج-۴})$$

در تیر ترک‌دار با ترک خستگی، بخش زمانی معادله حرکت تیر در مود n ام متفاوت از رابطه (۳) خواهد بود. در تیر ترک‌دار، در حین نوسان تیر، ترک به طور متناوب باز و بسته می‌شود که باز و بسته شدن ترک به صورت تغییر در ضریب فنریت مودال $\bar{k}_n$ مدل‌سازی می‌شود. در ادبیات فن، در بحث ارتعاشات تیر ترک‌دار، بخش زمانی معادله حرکت در مود n با فرض اینکه تیر صرفاً در یک مود نوسان کند، استخراج شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. در این حالت، مقدار جابه‌جایی و گشتاور خمشی تیر در هر نقطه از آن به صورت هارمونیک با زمان و با فرکانسی برابر با فرکانس طبیعی خطی n ام تیر، ω_n ، تغییر می‌کند. در نتیجه، با توجه به اینکه مقدار باز شدگی ترک متناسب با گشتاور خمشی تیر در محل ترک است، تغییرات زمانی باز و بسته شدن ترک نیز به صورت هارمونیک خواهد بود. بنابراین، با توجه به وابستگی ضریب فنریت $\bar{k}_n$ به وضعیت ترک در هر لحظه، رابطه (۳) برای تیر با ترک خستگی به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۱۸]:

$$\bar{m}_n\ddot{u}_n(t)+\bar{c}_n\dot{u}_n(t)+\left[\bar{k}_{cn}-\left(\frac{\bar{k}_{cn}-\bar{k}_{on}}{2}\right)\left(1+\cos(\omega_n t)\right)\right]u_n(t)=0 \qquad (۵)$$

که در آن، $\bar{k}_{cn}$ ضریب فنریت تیر در حالت ترک بسته و $\bar{k}_{on}$ضریب فنریت تیر در حالت ترک باز می‌باشد. در صورتی که ضریب فنریت تیر در حالت ترک بسته را معادل ضریب فنریت تیر در حالت سالم (بدون ترک) در نظر بگیریم، آنگاه: $\bar{k}_{cn}=\bar{k}_{on}$ همچنین، اگر تغییرات مقدار ضریب فنریت تیر به صورت $\Delta\bar{k}_n=\bar{k}_{cn}-\bar{k}_{on}$ تعریف شود، رابطه (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{m}_n\ddot{u}_n(t)+\bar{c}_n\dot{u}_n(t)+\left[\bar{k}_n-\frac{\Delta\bar{k}_n}{2}\left(1+\cos(\omega_n t)\right)\right]u_n(t)=0 \qquad (۶)$$

رابطه (۶) پایه و اساس بسیاری از مطالعات صورت گرفته در مورد ارتعاشات تیرهای با ترک باز و بسته شونده می‌باشد. با این حال، همانطور که اشاره شد، این معادله برای ارتعاش تیر در مود nام آن صادق خواهد بود. در صورتی که نوسان تیر در برگیرنده چند مود مختلف باشد، فرآیند باز و بسته شدن ترک و در نتیجه تغییرات ضریب فنریت به صورت یک تابع هارمونیک با فرکانس ω_n قابل بیان نخواهد بود. با توجه به اینکه نوسان تیر در این حالت شامل چند مود مختلف است، جابه‌جایی تیر و گشتاور خمشی آن در محل ترک به صورت تابعی چندهارمونیک با زمان تغییر می‌کند و در نتیجه، مقدار باز شدگی ترک نیز دارای تغییرات چندهارمونیک است. بنابراین، در رابطه (۶)، بایستی تابع چندهارمونیک مناسبی که توصیف کننده فرآیند باز و بسته شدن ترک و تغییرات ناشی از آن باشد تعریف شود. در این مقاله، ابتدا با توجه به مقدار گشتاور خمشی در محل ترک، رابطه‌ای برای تعیین مقدار باز شدگی ترک در هر لحظه، استخراج و با استفاده از آن، پاسخ چندهارمونیک تیر ترک‌دار به تحریک اولیه استخراج می‌شود. اگر این تابع را با$h(t)$ نشان دهیم، معادله حاکم بر ارتعاش تیر ترک‌دار در مود nام به صورت رابطه (۷) قابل بیان است:

$$\bar{m}_n\ddot{u}_n(t)+\bar{c}_n\dot{u}_n(t)+\left[\bar{k}_n-\frac{\Delta\bar{k}_n}{2}\left(1+h(t)\right)\right]u_n(t)=0 \quad (۷)$$

تابع(h(t در هر لحظه متناسب با مقدار بازشدگی ترک بوده و برای ترک کاملاً بسته، ۱-= (h(t برای ترک کاملاً باز، ۱ =(h(t است. رابطه (۷) را می‌توان به صورت زیر ساده‌سازی کرد:

$$\ddot{u}_n(t)+\frac{\bar{c}_n}{\bar{m}_n}\dot{u}_n(t)+\left[1-\frac{\Delta\bar{k}_n}{2\bar{k}_n}\left(1+h(t)\right)\right]\omega_n^2u_n(t)=0 \quad (۸)$$

که در آن $\omega_n^2=\frac{\bar{k}_n}{\bar{m}_n}$ همچنین اگر فرکانس طبیعی خطیnام تیر با ترک باز را با ω_{no} نشان دهیم، داریم:

$$\frac{\Delta\bar{k}_n}{2\bar{k}_n}=\frac{\bar{k}_n-\bar{k}_{on}}{2\bar{k}_n}=\frac{\frac{\bar{k}_n}{\bar{m}_n}-\frac{\bar{k}_{on}}{\bar{m}_n}}{2\frac{\bar{k}_n}{\bar{m}_n}}=\frac{\omega_n^2-\omega_{no}^2}{2\omega_n^2} \quad (۹)$$

با توجه به اینکه در شرایط عملی، تغییرات مقادیر فرکانس طبیعی تیر در اثر وجود ترک عموماً کوچک (کمتر از۱۰ درصد) است، بنابراین، پارامتر $\frac{\Delta\bar{k}_n}{2\bar{k}_n}$ به طور کلی مقدار کوچکی دارد. در صورتی که این پارامتر را با ε_n نمایش داده و همچنین ضریب میرایی نرمالیزه شده را با رابطه $\bar{\mu}_n=\frac{\bar{c}_n}{2\bar{m}_n}$ تعریف کنیم، رابطه (۸) را می‌توان به صورت رابطه (۱۰) بازنویسی کرد:

$$\ddot{u}_n(t)+2\bar{\mu}_n\dot{u}_n(t)+\left[1-\varepsilon_n\left(1+h(t)\right)\right]\omega_n^2u_n(t)=0 \quad (۱۰)$$

با توجه به کوچک بودن ε_n، رابطه (۱۰) را می‌توان با استفاده از روش اغتشاشات حل کرد. برای این منظور، ابتدا با استفاده از تعریف رابطه (۱۱)، رابطه (۱۰) را بی‌بعد می‌کنیم:

$$\tau=\omega_1 t \quad (۱۱)$$

با جایگذاری متغیر بی‌بعد τ دررابطه (۱۰) و پس از ساده‌سازی معادله، داریم:

$$\frac{d^2u_n}{d\tau^2}+\frac{2\bar{\mu}_n}{\omega_1}\frac{du_n}{d\tau}+\left[1-\varepsilon_n\left(1+h(t)\right)\right]\alpha_n^2u_n(t)=0 \quad (۱۲)$$

که در آن، $\alpha_n=\frac{\omega_n}{\omega_1}$ فرکانس طبیعی بی‌بعد و $\frac{2\bar{\mu}_n}{\omega_1}$ ضریب میرایی مودال nام بی‌بعد شده است. در صورتی که میرایی سیستم کوچک باشد، می‌توان ضریب میرایی مودال را هم مرتبه با ε_n در نظر گرفته و در نهایت، رابطه (۱۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d^2u_n}{d\tau^2}+2\varepsilon_n\mu_n\frac{du_n}{d\tau}+\left[1-\varepsilon_n\left(1+h(\tau)\right)\right]\alpha_n^2u_n(\tau)=0 \quad (۱۳)$$

با حل رابطه (۱۳) و به دست آوردن توابع $u_n(\tau)$، پاسخ ارتعاشی آزاد تیر ترک‌دار به تحریک اولیه به دست می‌آید. به منظور استخراج تابع $h(\tau)$ ، ابتدا تغییرات گشتاور خمشی تیر در محل ترک به دست آمده و سپس تابع $h(\tau)$ برای بیان وضعیت باز و بسته بودن ترک به صورت تابعی از گشتاور خمشی تیر در محل ترک استخراج می‌شود (ضمیمه الف):

$$h(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\cos(\alpha_{nc}\tau)\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (۱۴)$$

که در آن، $\alpha_{nc}=(1-\frac{1}{2}\varepsilon_n)\alpha_n$ فرکانس طبیعی بی‌بعد nام تیر با ترک باز و بسته شونده است. همچنین، ضرایب h_n به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$h_n=\frac{a_{n0}\phi_n''(x)}{\sum_{p=1}^{\infty}a_{p0}\phi_p''(x)} \quad (۱۵)$$

رابطه (۱۳) را می‌توان با استفاده از روش‌های مبتنی بر تئوری اغتشاشات حل نمود. در ضمیمه ب، این معادله با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه[1] حل شده و توابع زمانی $u_n(\tau)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}u_n(\tau,\varepsilon_n)&=a_n(\varepsilon_n\tau)\cos(\alpha_n\tau+\beta_n(\varepsilon_n\tau))\\&+\frac{1}{2}\varepsilon_na_n(\varepsilon_n\tau)\alpha_n^2\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\left(\alpha_n^2-(\alpha_n+\alpha_{pc})^2\right)}\cos((\alpha_n+\alpha_{pc})\tau+\beta_n(\varepsilon_n\tau))\right.\\&\left.+\sum_{\substack{p=1\\p\neq 2n}}^{\infty}\frac{h_p}{\left(\alpha_n^2-(\alpha_n-\alpha_{pc})^2\right)}\cos((\alpha_n-\alpha_{pc})\tau+\beta_n(\varepsilon_n\tau))\right\}+o(\varepsilon_n^2)\end{aligned} \quad (۱۶)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۲) پاسخ آزاد تیر ترک‌دار

1 the method of multiple scales

Table 1. The mechanical and geometrical properties of the beam

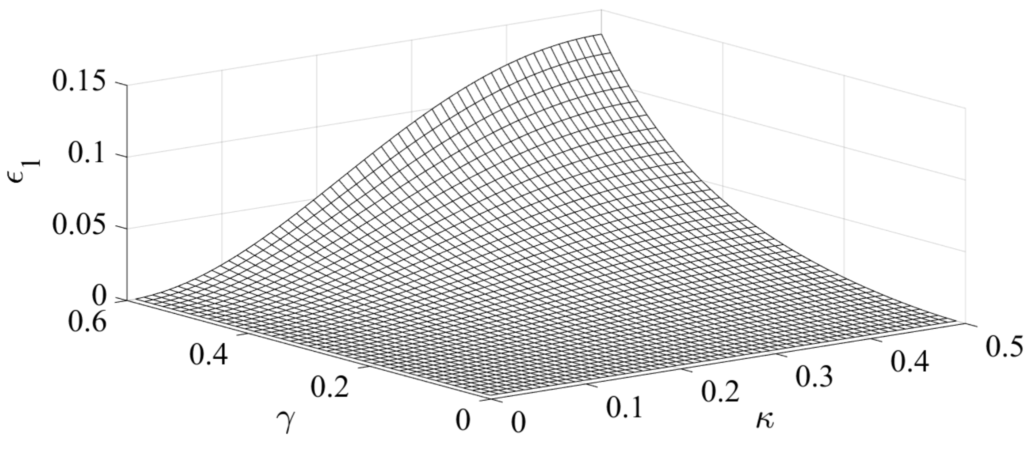
جدول ۱: مشخصات مکانیکی و هندسی تیر

جنس	طول (cm)	عرض(cm)	ضخامت(cm)	چگالی(kg/m^3)	مدول الاستیسیته(MPa)
Al 7075	۵۶	۲/۵۴	۰/۶۴	۲۷۸۰	۷۲۴۰۰

Table 2. The various cases of the cracked beam vibration analysis

جدول ۲: حالت‌های مختلف تحلیل ارتعاشات تیر ترک‌دار

حالت	عمق نسبی ترک	موقعیت نسبی ترک	مودهای درگیر
۱	۰/۳	۰/۱	۱
۲	۰/۳	۰/۲۵	۱
۳	۰/۳	۰/۴۵	۱
۴	۰	۰/۲۵	۱
۵	۰/۶	۰/۲۵	۱
۶	۰/۳	۰/۱	۱و۲
۷	۰/۳	۰/۲۵	۱و۲
۸	۰/۳	۰/۴۵	۱و۲
۹	۰	۰/۲۵	۱و۲
۱۰	۰/۶	۰/۲۵	۱و۲
۱۱	۰/۳	۰/۱	۱و۲و۳
۱۲	۰/۳	۰/۲۵	۱و۲و۳
۱۳	۰/۳	۰/۴۵	۱و۲و۳
۱۴	۰	۰/۲۵	۱و۲و۳
۱۵	۰/۶	۰/۲۵	۱و۲و۳



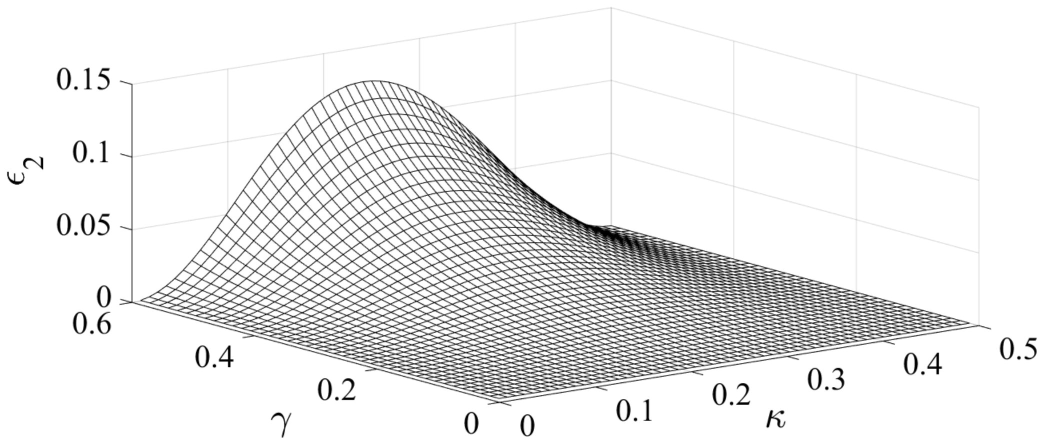
شکل ۲: تغییرات پارامتر ε_1 در برابر مقادیر مختلف موقعیت نسبی و عمق نسبی ترک

Fig. 2. Variation of ε_1 vs. the relative crack depth and position

به‌جابه‌جایی اولیه به دست می‌آید. در صورت استفاده از متغیرها و پارامترهای اولیه با بعد، تابع(w (t,x به صورت رابطه (۱۷) استخراج می‌شود:

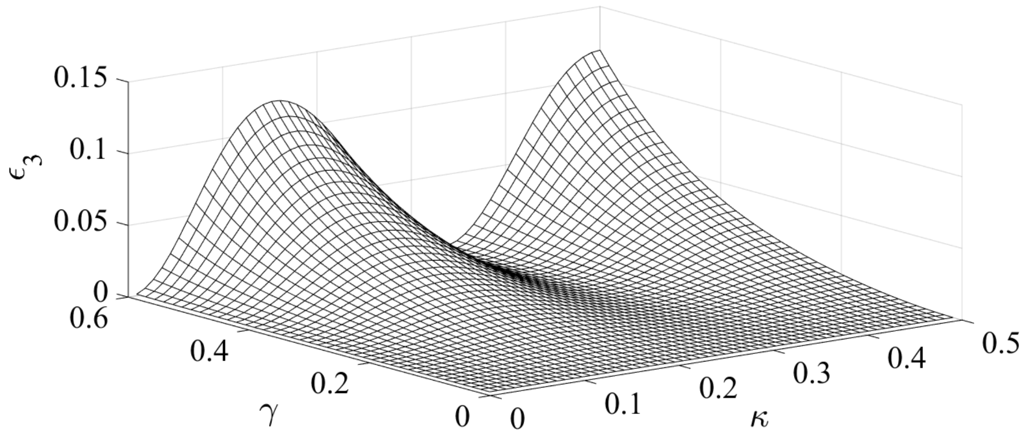
$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)u_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\left\{
\begin{aligned}
&a_n\cos(\omega_n t+\beta_n)+\frac{1}{2}\varepsilon_n a_n\alpha_n^2\times\ldots \\
&\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\left(\omega_n^2-(\omega_n+\omega_{pc})^2\right)}\cos((\omega_n+\omega_{pc})t+\beta_n)+\sum_{\substack{p=1\\p\neq 2n}}^{\infty}\frac{h_p}{\left(\omega_n^2-(\omega_n-\omega_{pc})^2\right)}\cos((\omega_n-\omega_{pc})\tau+\beta_n)\right]
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

رابطه (۱۷) بیان کننده ارتعاشات چند مودی تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده و تحت تحریک اولیه دلخواه است. در تابع تحلیلی رابطه



شکل ۳: تغییرات پارامتر ε_2 برای مقادیر مختلف موقعیت نسبی و عمق نسبی ترک

Fig. 3. Variation of ε_2 vs. the relative crack depth and position



شکل ٤: تغییرات پارامتر ε_3 برای مقادیر مختلف موقعیت نسبی و عمق نسبی ترک

Fig. 4. Variation of ε_3 vs. the relative crack depth and position

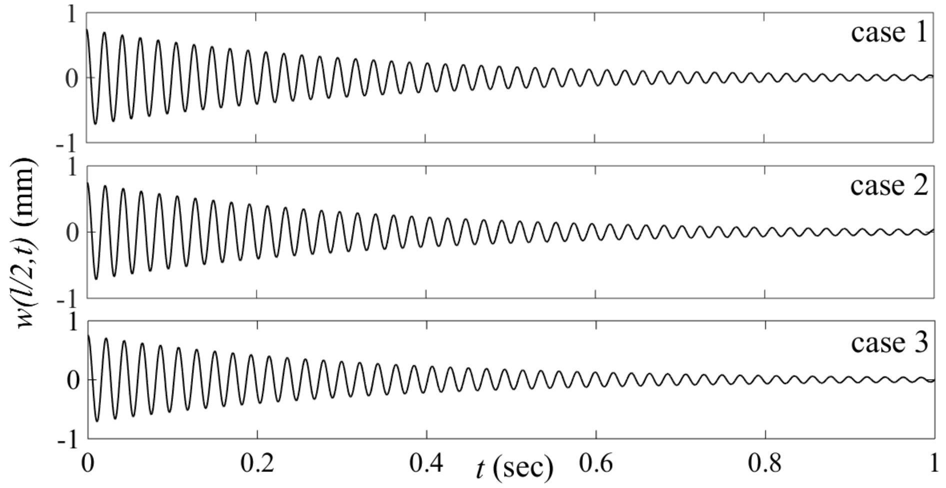
(۱۷)، تأثیر ترک در پاسخ ارتعاشی به طور مستقیم و توسط پارامترهای ε_n و h_p نمایان می‌شود. در بخش بعد، با استفاده از روابط حاصل، پاسخ ارتعاش آزاد تیر ترک‌دار با شرایط مرزی داده شده استخراج و تأثیر ترک (عمق و موقعیت آن) بر رفتار ارتعاشی تیر مورد مطالعه قرار گرفته می‌گیرد.

۳- مطالعه موردی

در این بخش، ارتعاشات یک تیر دو سر مفصل با ترک خستگی عرضی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر در جدول ۱ ارائه شده است. ابتدا برای اطمینان از امکان استفاده از روش اغتشاشات، مقادیر پارامتر ε_n برای موقعیت‌ها و عمق‌های مختلف ترک استخراج می‌شود. بایستی اشاره کرد که در رابطه (۹) برای استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر با ترک باز از مدل فنر پیچشی استفاده شده است [۳۳]. با توجه به شکل‌های ۲ تا ۴ بیشینه مقادیر ۳ و۲ و۱ $n = 1,2,3$, ε_n محدوده وسیعی از موقعیت‌ها (κ) و عمق‌های (γ) ترک کمتر از ۰/۱۴ بوده و بنابراین، فرض کوچک بودن آن صحیح است. از این رو در ادامه، ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار برای دو گروه‌بندی مختلف از ترک‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد: در گروه اول به منظور بررسی تأثیر موقعیت ترک در پاسخ ارتعاشی تیر، ترکی با عمق نسبی ۰/۳ در سه موقعیت نسبی مختلف: ۰/۱، ۰/۲۵ و ۰/۴۵ از انتهای سمت چپ تیر در نظر گرفته شده و در گروه دوم، برای بررسی تأثیر عمق ترک در پاسخ تیر، ترکی در موقعیت نسبی ۰/۲۵ با عمق‌های نسبی صفر (تیر سالم)، ۰/۳ و ۰/۶ در نظر گرفته می‌شود. برای هر یک از شش حالت اخیر، پاسخ ارتعاشی تیر در سه حالت مختلف: تحریک تیر در مود اول، تحریک هم‌زمان مودهای اول و دوم و تحریک هم‌زمان سه مود اول استخراج می‌شود. از این رو، ارتعاشات تیر ترک‌دار مطابق جدول ۲ در ۱۵ حالت مختلف مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر ترک (عمق و موقعیت) در رفتار ارتعاشی تیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

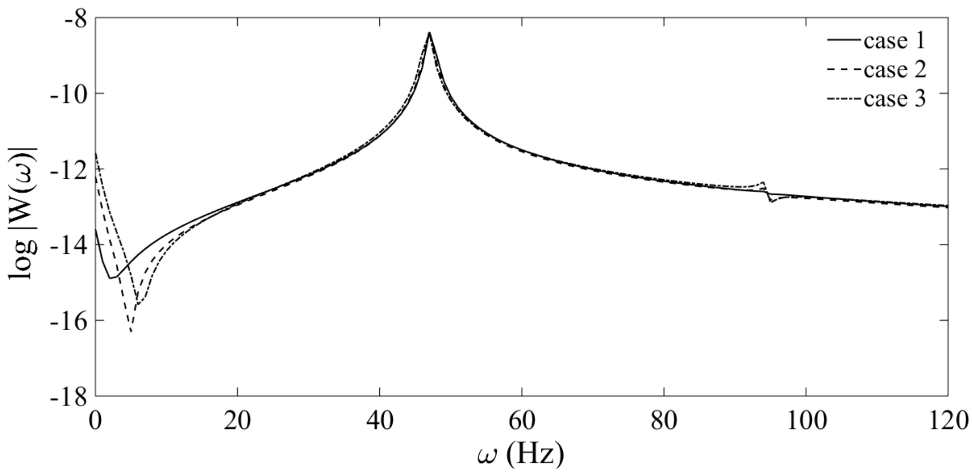
۳- ۱- ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار در مود اول

به منظور تحریک مود اول، تیر در ابتدا ساکن و خیز اولیه آن منطبق



شکل ۵: پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک با عمق ۰/۳ و موقعیت‌های مختلف در مود اول

Fig. 5. The response of the cracked beam with a relative crack depth of 0.3 at various positions for the first mode



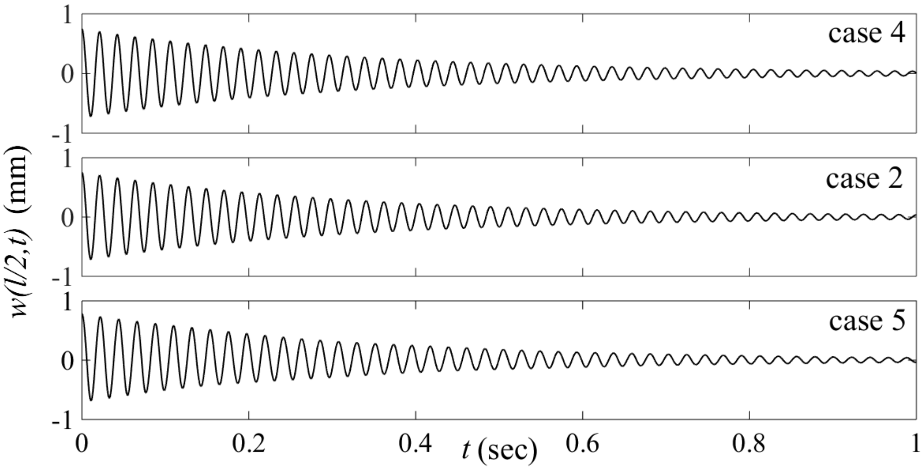
شکل ٦: نمودار پاسخ فرکانسی تیر با ترک با موقعیت‌های مختلف در مود اول

Fig. 6. Frequency response curve of the cracked beam with various crack positions for the first mode

بر شکل مود اول و با دامنه یک میلیمتر در نظر گرفته شده است. جابه‌جایی نقطه میانی تیر برای موقعیت‌های مختلف ترک مطابق با حالت‌های ۱ تا ۳ جدول ۲، با استفاده از رابطه (۱۷) محاسبه شده و تغییرات زمانی آن در شکل ۵ نشان داده شده است. با توجه به این شکل پاسخ ارتعاشی تیر در هر سه موقعیت ترک، رفتار مشابهی داشته و وجود ترک در پاسخ ارتعاشی تیر، تغییرات جزئی در فرکانس طبیعی اصلی تیر ایجاد می‌کند. این موضوع با بررسی نمودارهای پاسخ فرکانسی روشن‌تر می‌شود (شکل۶). با توجه به شکل ۶ علاوه بر تغییرات جزئی دامنه فرکانسی در $\omega = \omega_1$ برای موقعیت‌های مختلف ترک، وجود ترک سبب ایجاد مؤلفه استاتیک (با فرکانس صفر) و مؤلفه هارمونیک با فرکانس $2\omega_1$ در نمودار فرکانسی شده است که دامنه آن‌ها با تغییر موقعیت ترک تغییر می‌کند.

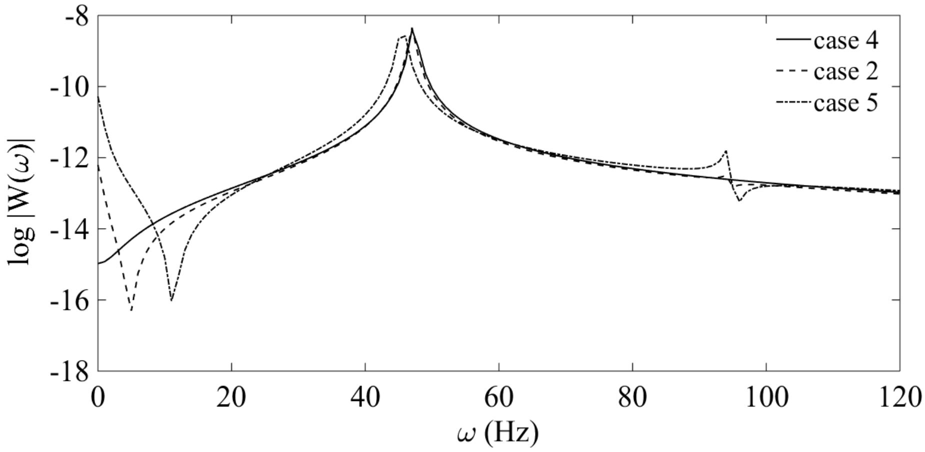
برای بررسی تأثیر عمق ترک در ارتعاشات مود اول تیر، پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار براساس حالت‌های ۴، ۲ و ۵ در شرایط اولیه مشابه حالت قبل استخراج شد. با توجه به شکل ۷ پاسخ آزاد تیر در حالت‌های مختلف رفتار هارمونیک خود را حفظ می‌کند.

در شکل ۸ نمودار پاسخ فرکانسی تیر ترک‌دار با عمق‌های مختلف نمایش داده شده است. با توجه به شکل ۸ تغییر عمق ترک نیز همانند تغییر موقعیت، تأثیر محسوسی در دامنه مؤلفه‌های ثابت و هارمونیک با فرکانس $2\omega_1$ می‌گذارد. از سوی دیگر، با مقایسه شکل‌های ۶ و ۸ می‌توان نتیجه گرفت که وجود ترک در موقعیت‌ها و عمق‌های مختلف گرچه سبب ایجاد مؤلفه‌های ثابت و هارمونیک در نمودار پاسخ فرکانسی تیر می‌شود اما دامنه‌های این مؤلفه‌ها برای حالت‌های مختلف ترک تغییرات مشابه‌ای دارد. به بیان دیگر، افزایش عمق ترک در یک موقعیت معین و جابه‌جایی موقعیت ترک، هر دو با الگوی مشابهی دامنه‌های مؤلفه‌های استاتیک و فراهارمونیک ($2\omega_1$) پاسخ



شکل ۷: پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک در موقعیت ۰/۲۵ و عمق‌های مختلف در مود اول

Fig. 7. The response of the cracked beam with various crack depths at a relative crack position of 0.25 for the first mode



شکل ۸: نمودار پاسخ فرکانسی تیر با ترک با عمق‌های مختلف در مود اول

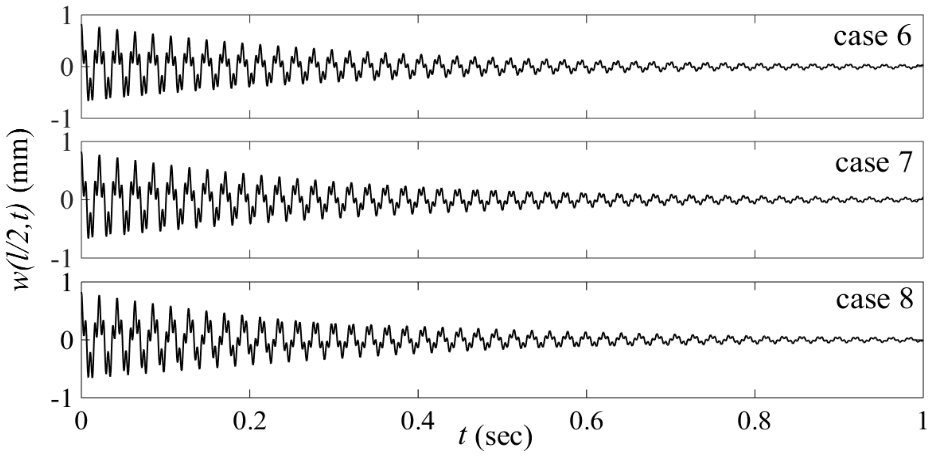
Fig. 8. Frequency response curve of the beam with a crack with various depths for the first mode

ارتعاشی تیر را افزایش داده‌اند. بنابراین چنین می‌توان نتیجه گرفت که رفتار ارتعاشی مود اول تیر ترک‌دار برای گستره وسیعی از موقعیت‌ها و عمق‌های مختلف ترک دارای رفتار مشابهی بوده و در نتیجه، با تحلیل ارتعاشات مود اول (و یا هر یک از مودهای دیگر) تیر ترک‌دار نمی‌توان اطلاعات کافی برای شناسایی کامل ترک به دست آورد.

۳-۲- ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار در مودهای اول و دوم

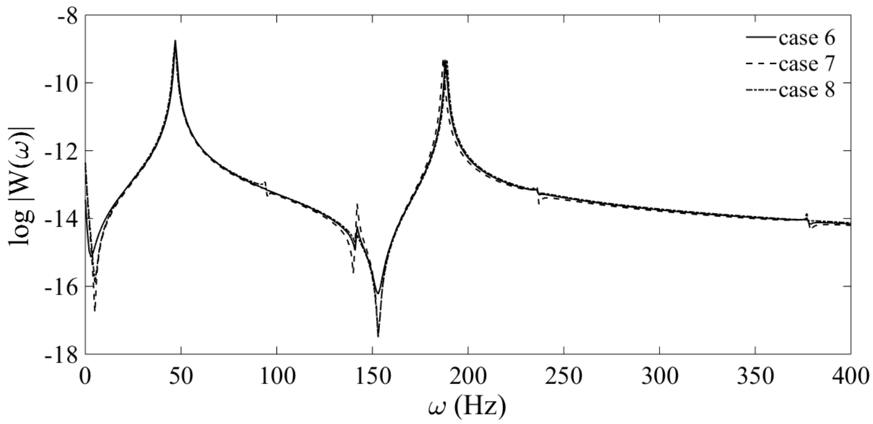
برای تحریک همزمان مودهای ارتعاشی اول و دوم تیر، خیز اولیه آن به صورت ترکیب خطی شکل مودهای اول و دوم و با نسبت‌های ۰/۷ و ۰/۳ در نظر گرفته شده و بیشینه جابه‌جایی اولیه تیر نیز برابر ۰/۹ میلیمتر در نظر گرفته شد. با استخراج پاسخ آزاد تیر مطابق حالت‌های ۶، ۷ و ۸، تغییرات زمانی پاسخ تیر و نمودارهای پاسخ فرکانسی آن برای موقعیت‌های مختلف ترک مطابق شکل‌های ۹ و ۱۰ به دست آمدند. با توجه به شکل ۱۰ دامنه مؤلفه‌های استاتیک و هارمونیک با فرکانس $2\omega_1$ برای ترک‌های واقع در ناحیه میانی تیر به بیشترین مقدار خود می‌رسد در حالی که مؤلفه‌های هارمونیک $\omega_2+\omega_1$، $\omega_2-\omega_1$ و $2\omega_2$ برای ترک‌های نزدیک به موقعیت نسبی ۰/۲۵ بیشترین مقدار خود را دارند.

برای بررسی تأثیر عمق ترک در ارتعاشات آزاد مود اول و دوم مطابق با حالت‌های ۹، ۷ و۱۰ ، پاسخ ارتعاشی تیر تحت شرایط اولیه مشابه با حالت‌های ۶ تا ۸ به دست آمد. شکل ۱۱، پاسخ ارتعاشی تیر با عمق‌های مختلف ترک را نشان می‌دهد. مقایسه شکل‌های ۷ و ۱۱ نشان می‌دهد در حالتی که تیر در یکی از مودهای خود ارتعاش می‌کند تحت شرایطی ممکن است اثر ترک در پاسخ ارتعاشی تیر ناچیز باشد در حالی که در حضور چند مود ارتعاشی، اثر ترک در پاسخ واضح‌تر خواهد بود. این موضوع با مقایسه نمودارهای پاسخ فرکانسی تیر، شکل‌های ۸ و ۱۲، روشن‌تر می‌شود. با توجه به شکل ۱۲ با افزایش عمق ترک، دامنه مؤلفه‌های هارمونیک مربوط به مود



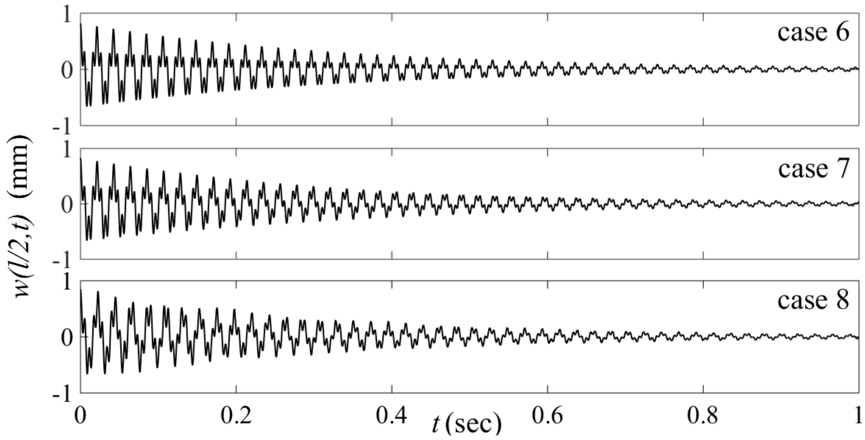
شکل ۹: پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک با عمق نسبی ۰/۳ و موقعیت‌های مختلف در مود اول و دوم

Fig. 9. The response of the cracked beam with a relative crack depth of 0.3 at various positions for the first and second modes



شکل ۱۰: نمودار پاسخ فرکانسی تیر با ترک با موقعیت‌های مختلف در مود اول و دوم

Fig. 10. Frequency response curve of the beam with a crack at various positions for the first and second modes



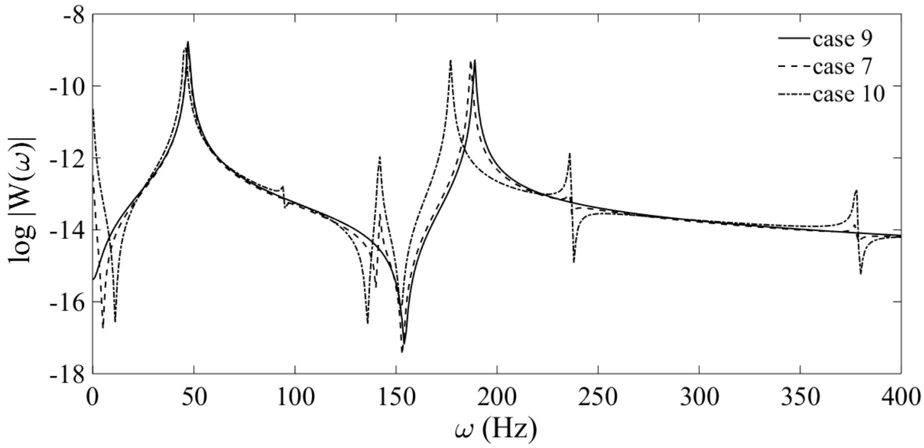
شکل ۱۱: پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک در موقعیت نسبی ۰/۲۵ و عمق‌های مختلف در مود اول و دومل

Fig. 11. The response of the cracked beam with various crack depths at relative crack position of 0.25 for the first and second modes

دوم تغییرات غالب‌تری نسبت به دامنه مؤلفه‌های هارمونیک مربوط به مود اول دارند.

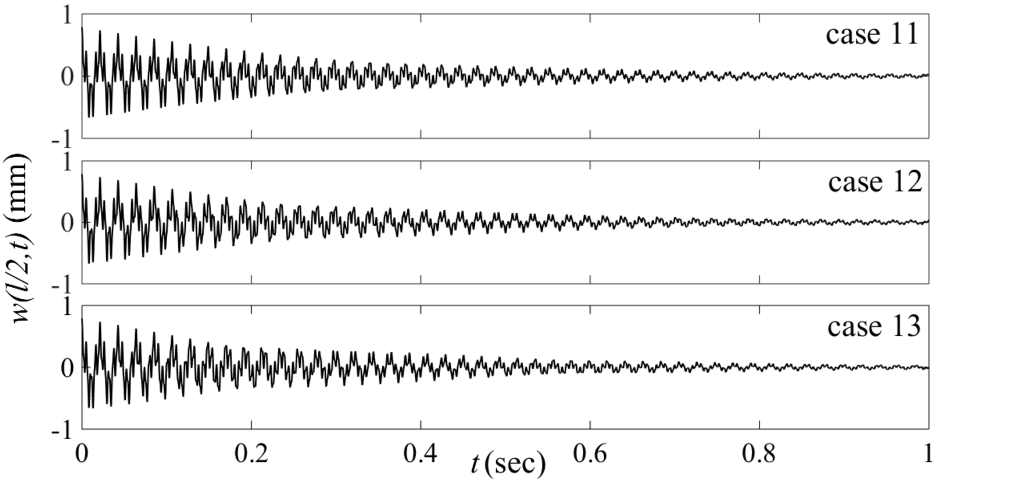
۳- ۳- ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار با تحریک هم‌زمان مودهای اول تا سوم

به منظور تحریک هم‌زمان مودهای ارتعاشی اول تا سوم تیر، خیز اولیه آن به صورت ترکیب خطی از شکل مودهای اول تا سوم و با نسبت‌های



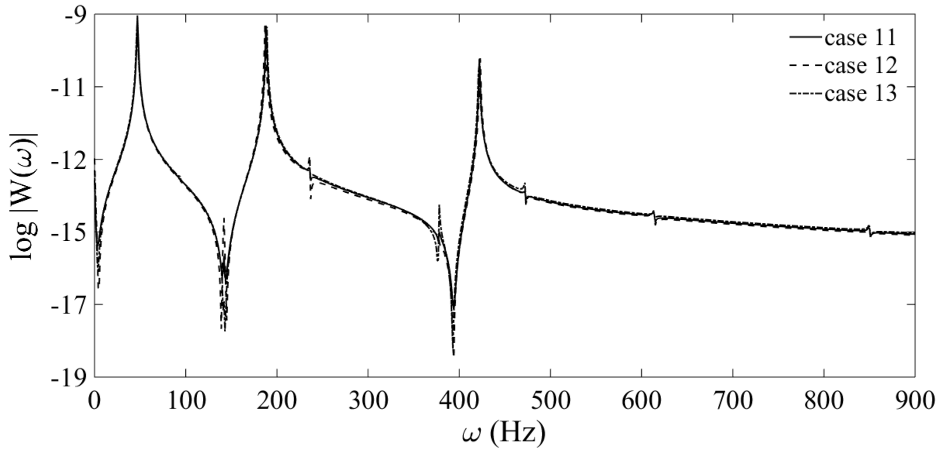
شکل ۱۲: نمودار پاسخ فرکانسی تیر با ترک با عمق‌های مختلف در مود اول و دوم

Fig. 12. Frequency response curve of the cracked beam with various crack depths for the modes 1 to 3



شکل ۱۳: پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک با عمق نسبی ۰/۳ و موقعیت‌های مختلف در مودهای اول تا سوم

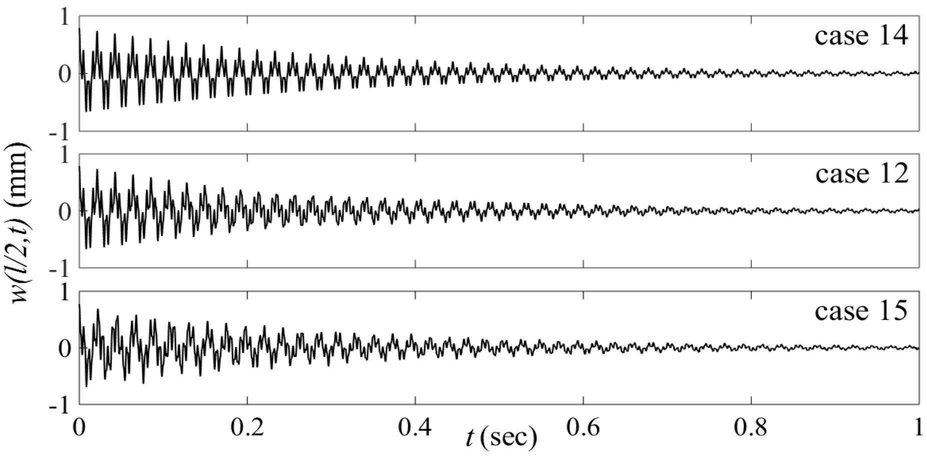
Fig. 13. The response of the cracked beam with a relative crack depth of 0.3 at various positions for the modes 1 to 3



شکل ١٤: نمودار پاسخ فرکانسی تیر با ترک با موقعیت‌های مختلف در مود اول تا سوم

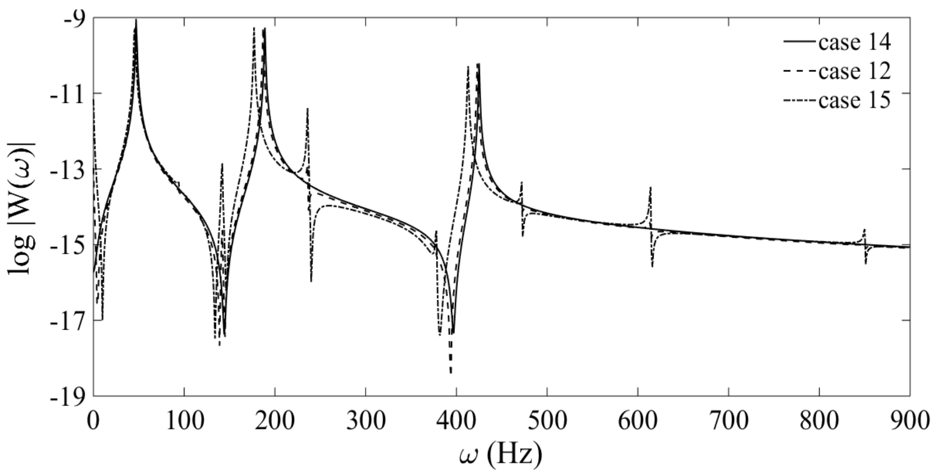
Fig. 14. Frequency response curve of the cracked beam at various crack positions for the modes 1 to 3

۰/۵، ۰/۳و ۰/۲ در نظر گرفته شده و بیشینه جابه‌جایی اولیه تیر برابر ۰/۸ میلیمتر فرض گردید. پاسخ ارتعاشی تیر با ترک در موقعیت‌های مختلف مطابق با حالت‌های ۱۱ تا ۱۳ در شکل ۱۳ نشان داده شده است. تغییر رفتار ارتعاشی تیر با تغییر موقعیت ترک در این حالت نیز همانند حالت تحریک مودهای اول و دوم کاملاً مشهود است. در شکل ۱۴ نمودار پاسخ فرکانسی تیر برای موقعیت‌های مختلف ترک نمایش داده شده است. با توجه به شکل



شکل ۱۵: پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک در موقعیت نسبی ۰/۲۵ و عمق‌های مختلف در مود اول تا سوم

Fig. 15. The response of the cracked beam with various crack depths at relative crack position of 0.25 for the modes 1 to 3



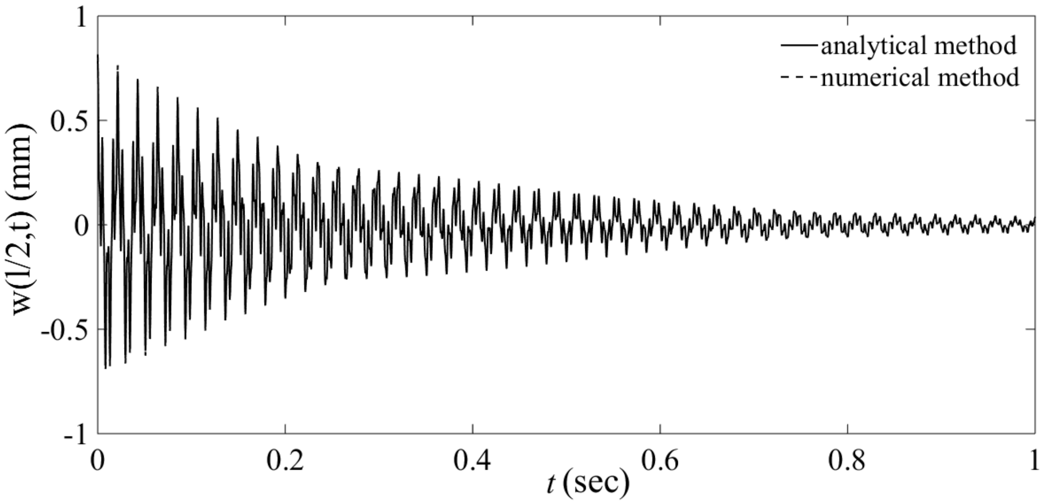
شکل ١٦: نمودار پاسخ فرکانسی تیر با ترک با موقعیت‌های مختلف در مود اول تا سوم

Fig. 16. Frequency response curve of the cracked beam with various crack depths for the modes 1 to 3

۱۴ با تحریک هم‌زمان سه مود اول، در نمودار پاسخ فرکانسی علاوه بر مؤلفه‌های هارمونیک مربوط به مودهای اول و دوم، مؤلفه‌های هارمونیک دیگری با فرکانس‌های $\omega_3+\omega_2$، $\omega_3+\omega_1$، $\omega_3-\omega_2$، $\omega_3-\omega_1$ و $2\omega_3$ وجود دارند که دامنه هر یک از آن‌ها در موقعیت‌های مختلف ترک تغییرات گوناگونی را خواهند داشت. در نهایت، با بررسی حالت‌های ۱۴، ۱۲ و ۱۵، تأثیر عمق ترک بر ارتعاشات هم‌زمان مودهای اول تا سوم تیر مورد مطالعه قرار گرفت. شرایط اولیه همانند حالت‌های ۱۱ تا ۱۳ در نظر گرفته شده و پاسخ ارتعاشات آزاد تیر مطابق شکل ۱۵ به دست آمد. نمودارهای پاسخ ارتعاشی به دست آمده در این حالت نیز همانند سایر حالت‌هایی که در آن‌ها بیش از یک مود ارتعاشی تیر تحریک می‌شوند، تأثیر ترک در رفتار ارتعاشی تیر را آشکار می‌سازند. شکل ۱۶ نمودار پاسخ فرکانسی تیر برای مقادیر مختلف عمق ترک را نشان می‌دهد که در آن، با افزایش عمق ترک، دامنه جملات هارمونیک مربوط به مود سوم افزایش قابل توجهی پیدا کرده‌اند.

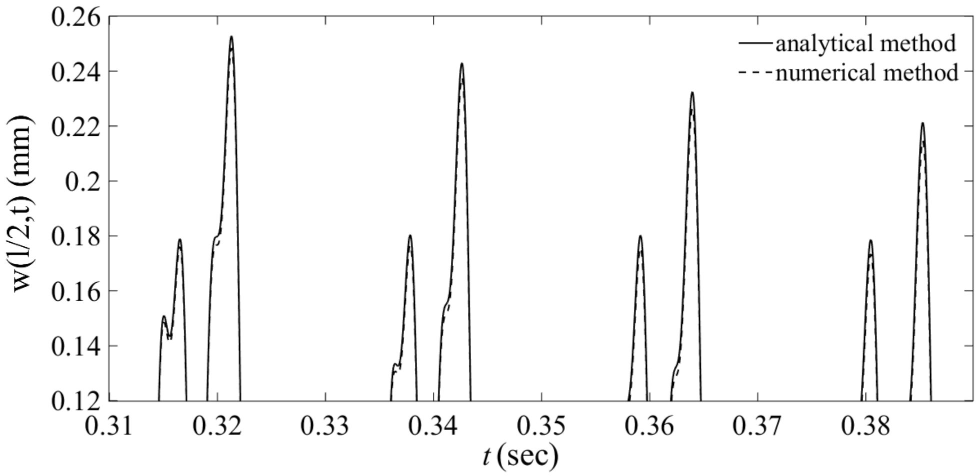
۳- ۴- شناسایی ترک با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی

با مروری بر نمودارهای پاسخ فرکانسی در هر یک از حالت‌های مختلف ترک می‌توان نتیجه گرفت که وجود ترک باز و بسته شونده و آثار غیرخطی ناشی از آن، سبب ایجاد مؤلفه‌های متعدد فراهارمونیک و زیرهارمونیک در نمودار پاسخ فرکانسی شده است. با توجه به وابستگی مؤلفه‌های هارمونیک فرعی به وجود ترک، می‌توان از آن‌ها به منظور شناسایی ترک در تیرها استفاده کرد. یکی از پارامترهای مهم و پرکاربرد در شناسایی ترک، نسبت دامنه مؤلفه‌های هارمونیک فرعی (مؤلفه‌های فراهارمونیک یا زیرهارمونیک) به دامنه مؤلفه هارمونیک اصلی در نمودار پاسخ فرکانسی تیر است [۳۴]. در حالتی که فقط یکی از مودهای ارتعاشی تیر تحریک شده باشد، با توجه به شکل‌های ۶ و ۸ تنها یک مؤلفه فراهارمونیک در نمودار پاسخ فرکانسی ایجاد شده و از این رو، تنها یک پارامتر ارتعاشی قابل استخراج خواهد بود.



شکل ۱۷: پاسخ ارتعاشات آزاد به دست آمده از روش‌های تحلیلی و عددی برای تیر با ترک در موقعیت نسبی ۰/۲۵ و با عمق نسبی ۰/۳

Fig. 17. The free vibrational responses of the cracked beam with a relative crack position of 0.25 and relative crack depth of 0.3 obtained by analytical and numerical methods



شکل ۱۸: نمودار بزرگنمایی شده پاسخ ارتعاشی آزاد تیر ترک‌دار

Fig. 18. The magnified vibration response curve of the cracked beam

با توجه به اینکه شناسایی کامل ترک با داشتن تنها یک پارامتر امکان پذیر نمی‌باشد، از این رو در بیشتر مراجع، به جای بررسی ارتعاشات آزاد تیر، پاسخ ارتعاشی تیر به تحریک هارمونیک با فرکانس‌های مختلف (فرکانس اصلی، فراهارمونیک و زیرهارمونیک) به دست آمده و با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی به دست آمده برای هر یک از پاسخ‌های ارتعاشی، یک پارامتر ارتعاشی به صورت نسبت دامنه مؤلفه فراهارمونیک به دامنه مؤلفه هارمونیک اصلی استخراج می‌شود که با داشتن ۳ پارامتر ارتعاشی، می‌توان موقعیت و عمق ترک را به طور دقیق تعیین نمود.

از سوی دیگر، در صورتی که ارتعاشات آزاد تیر در برگیرنده بیش از یک مود ارتعاشی باشد، در نمودارهای پاسخ فرکانسی مؤلفه‌های فراهارمونیک و زیرهارمونیک متعددی ایجاد می‌شود و با استفاده از آن‌ها می‌توان پارامترهای مورد نیاز برای شناسایی ترک را تعریف نمود. به منظور شناسایی ترک، در گام نخست مقادیر پارامترهای انتخاب شده (نسبت دامنه مؤلفه فراهارمونیک یا زیرهارمونیک به دامنه مؤلفه هارمونیک اصلی) به صورت تحلیلی یا تجربی برای مقادیر مختلف عمق و موقعیت ترک استخراج و نمودارهایی همانند شکل‌های ۲ تا ۴ برای بیان تغییرات این پارامترهای ارتعاشی برحسب مقادیر مختلف عمق و موقعیت ترک تشکیل می‌شود. این نمودارها در ادامه به عنوان نمودارهای مبنا برای شناسایی ترک در تیر استفاده می‌شود. به این ترتیب که در تیر ترک‌دار، با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی بدست آمده از پاسخ ارتعاشی تیر، مقادیر یکی از پارامترهای ارتعاشی استخراج و با مقایسه آن با نمودار مبنای مربوطه، حالت‌های ممکن عمق و موقعیت ترک بر اساس این پارامتر ارتعاشی به صورت یک منحنی در صفحه موقعیت

ترک – عمق ترک معین می‌شود. با استخراج این منحنی‌ها برای پارامترهای ارتعاشی دیگر، منحنی‌های دیگر نیز در صفحه موقعیت ترک – عمق ترک تشکیل می‌شوند. نقطه‌ای که همه منحنی‌ها از آن عبور می‌کنند نشان دهنده موقعیت و عمق ترک خواهد بود.

در نهایت به منظور صحه‌سنجی روش تحلیلی معرفی شده در این تحقیق، پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترکی به عمق نسبی ۰/۳ در موقعیت نسبی ۰/۲۵ با استفاده از روش عددی (رانگ– کوتا مرتبه ۴) به دست آمده و با نتایج تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج به دست آمده از روش‌های تحلیلی و عددی در شکل ۱۷ مقایسه شده‌اند. برای تمییز نمودارهای مربوط به دو روش، بخش کوچکی از نمودارهای پاسخ ارتعاشی به صورت بزرگنمایی شده در شکل ۱۸ نمایش داده شده است که در آن تطابق کامل پاسخ‌های به دست آمده دیده می‌شود.

٤- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد چند مودی تیر با ترک خستگی با فرض میرایی ویسکوز تحت شرایط اولیه دلخواه مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به تحریک هم‌زمان چند مود، فرآیند باز و بسته شدن ترک به صورت پریودیک است. از این رو در این مقاله، با توجه به تغییرات گشتاور خمشی در محل ترک، رابطه تحلیلی دقیقی که بیان کننده تغییرات لحظه‌ای مقدار بازشدگی ترک باشد استخراج گردید. سپس مدل استخراج شده برای ترک، در مجموعه معادلات مودال تیر ترک‌دار اعمال و این معادلات با استفاده از روش اغتشاشات حل شدند. به این ترتیب، پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار به تحریک اولیه دلخواه به صورت رابطه‌ای تحلیلی استخراج شد که در آن تأثیر ترک در رفتار ارتعاشی تیر به طور مستقیم از طریق مطالعه تغییرات پارامترهای وابسته به ترک قابل بررسی خواهد بود. با استفاده از روابط حاصل، پاسخ ارتعاشی تیر در سه حالت: تحریک مود اول، تحریک هم‌زمان مودهای اول و دوم و تحریک هم‌زمان سه مود اول به دست آمد. مطالعه رفتار پاسخ‌های ارتعاشی به دست آمده و به ویژه نمودارهای پاسخ فرکانسی نشان می‌دهد زمانی که فقط یکی از مودهای ارتعاشی مثلاً مود اول تحریک شود، وجود ترک سبب ایجاد مؤلفه‌های هارمونیک با دامنه‌های کوچک در پاسخ ارتعاشی می‌شود که دامنه مؤلفه‌های هارمونیک برای مقادیر مختلف عمق و موقعیت ترک، دارای تغییرات یکسانی است و بنابراین اطلاعات به دست آمده از تحلیل فرکانسی پاسخ برای شناسایی ترک کافی نخواهد بود. در حالی که اگر بیش از یک مود ارتعاشی به صورت هم‌زمان تحریک شود، وجود ترک سبب ایجاد چندین مؤلفه هارمونیک در پاسخ ارتعاشی تیر می‌شود که دامنه آنها علاوه بر اینکه نسبت به حالت ارتعاش یک مودی حساسیت بیشتری به وجود ترک دارند، هر یک دارای تأثیرپذیری منحصر به فردی از پارامترهای ترک هستند که این امر، امکان دستیابی به حجم بالایی از اطلاعات در زمینه شناسایی عمق و موقعیت ترک را فراهم می‌کند.

ضمائم

ضمیمه الف

به منظور دست‌یابی به رابطه‌ای برای بیان تغییرات زمانی باز و بسته شدن ترک، با توجه به وابستگی آن به گشتاور خمشی در محل ترک، در گام نخست تغییرات گشتاور خمشی بر حسب زمان استخراج می‌شود. گشتاور خمشی در هر مقطع تیر به صورت زیر است:

$$M = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n''(x)u_n(\tau) \qquad \text{(الف-۱)}$$

که در آن، بخش زمانی پاسخ ارتعاشی، تابع $u_n(\tau)$ را با فرض جابه‌جایی اولیه معین و سرعت اولیه صفر می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۳۲]:

$$u_n(t) = a_{n0}e^{-\varepsilon_n\mu_n\tau}\cos(\alpha_n\tau) \qquad \text{(الف-۲)}$$

برای تیر با ترک باز و بسته شونده، فرکانس نوسانی α_n به صورت میانگین فرکانس طبیعی n ام تیر در حالت‌های ترک باز و ترک بسته در نظر گرفته می‌شود:

$$\alpha_{nc} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \alpha_{no}\right) \qquad \text{(الف-۳)}$$

که در آن، α_{nc} فرکانس طبیعی nام تیر با ترک باز و بسته شونده، α_{no} فرکانس طبیعی nام تیر با ترک باز و α_n فرکانس طبیعی nام تیر با ترک بسته است. با توجه به رابطه (۸) داریم:

$$\begin{aligned}\alpha_{no}^2 &= \left(1-2\varepsilon_n\right)\alpha_n^2 \;\Rightarrow\\ \alpha_{no} &= \left(1-2\varepsilon_n\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_n \approx \left(1-\varepsilon_n\right)\alpha_n\end{aligned} \qquad \text{(الف-۴)}$$

بنابراین، فرکانس طبیعی تیر با ترک باز و بسته شونده با توجه به روابط (الف-۳) و (الف-۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha_{nc} = \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_n\right)\alpha_n \qquad \text{(الف-۵)}$$

با جایگذاری رابطه (الف–۵) در رابطه (الف–۲) و سپس، رابطه (الف–۱)، تغییرات زمانی گشتاور خمشی به دست می‌آید. با توجه به وابستگی تابع $h(\tau)$ به گشتاور خمشی، می‌توان نوشت:

$$h \propto \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}\phi_n''(x)\, e^{-\varepsilon_n\mu_n\tau}\cos(\alpha_{nc}\tau)$$ (الف–۶)

از سوی دیگر با توجه به اینکه بازه تغییرات $h(\tau)$ از ۱– تا ۱ است، تابع $h(\tau)$ به صورت زیر نرمالیزه می‌شود:

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n0}\phi_n''(x)\, e^{-\varepsilon_n\mu_n\tau}}{H(\tau)}\cos(\alpha_{nc}\tau)$$ (الف–۷)

که در آن:

$$H(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}\phi_n''(x)\, e^{-\varepsilon_n\mu_n\tau}$$ (الف–۸)

از سوی دیگر با توجه به روابط (۴) و (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$2\varepsilon_n\mu_n = \frac{2\bar{\mu}_n}{\omega_1} = \frac{2\bar{c}_n}{2\bar{m}_n\omega_1} = \frac{2\int_0^l C\,\phi_n^2(x)\,\mathrm{d}x}{2\omega_1\int_0^l m\,\phi_n^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{C\int_0^l \phi_n^2(x)\,\mathrm{d}x}{m\omega_1\int_0^l \phi_n^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{C}{m\omega_1}$$ (الف–۹)

با توجه به ثابت بودن ، می‌توان عبارت در روابط (الف–۷) و (الف–۸) را ساده نموده و در نهایت تابع را به صورت زیر تعریف کرد:

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos(\alpha_{nc}\tau)$$ (الف–۱۰)

که در آن:

$$h_n = \frac{a_{n0}\phi_n''(x)}{\sum_{p=1}^{\infty} a_{p0}\phi_p''(x)}$$ (الف–۱۱)

ضمیمه ب

برای حل رابطه (۱۲)، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود. برای این منظور، متغیرهای مستقل و وابسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_{np} = \varepsilon_n^p\tau$$ (ب–۱)

$$u_n(t,\varepsilon) = u_{n0}(T_{n0},T_{n1}) + \varepsilon_n u_{n1}(T_{n0},T_{n1}) + \ldots$$ (ب–۲)

با جایگذاری روابط (ب–۱) و (ب–۲) در رابطه (۱۲) و جداسازی جملات هم مرتبه، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2u_{n0} + \alpha_n^2u_{n0} = 0$$ (ب–۳)

$$D_0^2u_{n1} + 2D_0D_1u_{n0} + 2\mu_nD_0u_{n0} + \alpha_n^2u_{n1} = \alpha_n^2(1+h(T_{n0}))u_{n0}$$ (ب–۴)

$$\vdots$$

با حل رابطه (ب–۳)، تابع u_{n0} به صورت مختلط زیر به دست می‌آید:

$$u_{n0} = A_ne^{i\alpha_nT_{n0}} + \bar{A}_ne^{-i\alpha_nT_{n0}}$$ (ب–۵)

با جایگذاری روابط (ب–۵) و (الف–۱۰) در فرم نمایی آن در رابطه (ب–۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D_0^2u_{n1} + \alpha_n^2u_{n1} &= -2D_0D_1u_{n0} - 2\mu_nD_0u_{n0} + \alpha_n^2(1+h(T_{n0}))u_{n0} \\ &= -2i\,\alpha_n(A_n' + \mu_nA_n)e^{i\alpha_nT_{n0}} \\ &\quad + \alpha_n^2\Big(1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(h_pe^{i\alpha_{pc}T_{p0}} + h_pe^{-i\alpha_{pc}T_{p0}})\Big)A_ne^{i\alpha_nT_{n0}} + CC \end{aligned}$$ (ب–۶)

در رابطه فوق، عبارتCC معرف مزدوج عبارت‌های موجود در سمت راست معادله می‌باشد. قبل از حل معادله (ب–۶) بایستی جملات غیرحقیقی[1] انتخاب و حذف شوند. در تیر دو سر مفصل، $\alpha_n = n$ و $\alpha_{nc} = (1-\frac{1}{2}\varepsilon_n)\alpha_n$، بنابراین، برای مود دلخواه n داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{(2n)c} - \alpha_n &= (1-\frac{1}{2}\varepsilon_{2n})\alpha_{2n} - \alpha_n \\ &= (1-\frac{1}{2}\varepsilon_{2n})2\alpha_n - \alpha_n \\ &= \alpha_n - \varepsilon_{2n}\alpha_n \simeq \alpha_n \\ \Rightarrow\quad & e^{i(\alpha_{(2n)c}-\alpha_n)T_{n0}} = e^{i(1-\varepsilon_{2n})\alpha_nT_{n0}} \end{aligned}$$ (ب–۷)

با توجه به کوچک بودن پارامتر ε_{2n} ، جمله $e^{i(\alpha_{(2n)c}-\alpha_n)T_{n0}} \simeq e^{i\alpha_nT_{n0}}$ و در نتیجه، $e^{i(\alpha_{(2n)c}-\alpha_n)T_{n0}}$ نیز جمله غیرحقیقی است. در رابطه (ب–۶)، جملات غیرحقیقی به صورت زیر حذف می‌شوند:

$$\begin{aligned} -2i\,\alpha_n(A_n' + \mu_nA_n)e^{i\alpha_nT_{n0}} &+ \alpha_n^2A_ne^{i\alpha_nT_{n0}} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_n^2\bar{A}_nh_{2n}e^{i(1-\varepsilon_{2n})\alpha_nT_{n0}} = 0 \end{aligned}$$ (ب–۸)

1 Secular terms

که در آن: $A_n' = D_1 A_n = \frac{\partial A_n}{\partial T_{n1}}$ با حذف $e^{i\alpha_n T_{n0}}$ تعریف A_n به صورت نمایی $A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}$ و جایگذاری در رابطه (ب-۸) خواهیم داشت:

$$-2i\,\alpha_n\left(\frac{1}{2}a_n' e^{i\beta_n} + \frac{1}{2} i\,\beta_n' a_n e^{i\beta_n} + \frac{1}{2}\mu_n a_n e^{i\beta_n}\right) + \frac{1}{2}\alpha_n^2 a_n e^{i\beta_n} + \frac{1}{4}\alpha_n^2 a_n h_{2n} e^{-i(\varepsilon_{2n}\alpha_n T_{n0}+\beta_n)} = 0 \qquad (\text{ب-۹})$$

با ضرب طرفین در $e^{-i\beta_n}$ و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی، خواهیم داشت:

$$\alpha_n a_n' + \alpha_n \mu_n a_n + \frac{1}{4}\alpha_n^2 a_n h_{2n} \sin(\sigma_n T_{n1} + 2\beta_n) = 0 \qquad (\text{ب-۱۰})$$

$$\alpha_n \beta_n' a_n + \frac{1}{2}\alpha_n^2 a_n + \frac{1}{4}\alpha_n^2 a_n h_{2n} \cos(\sigma_n T_{n1} + 2\beta_n) = 0 \qquad (\text{ب-۱۱})$$

که در آن، $\sigma_n = \frac{\varepsilon_{2n}}{\varepsilon_n}\alpha_n$. با حل روابط (ب-۱۰) و (ب-۱۱) با استفاده از روش‌های عددی، تابع A_n به دست آمده و با قرار دادن آن در رابطه (ب-۵)، تابع u_{n0} به دست می‌آید. همچنین با قرار دادن تابع A_n در رابطه (ب-۶) و با توجه به اینکه مطابق رابطه (ب-۱)، است داریم:

$$D_0^2 u_{n1} + \alpha_n^2 u_{n1} = \frac{1}{2} A_n \alpha_n^2 \sum_{p=1}^{\infty} h_p e^{i(\alpha_n+\alpha_{pc})T_{p0}} + \frac{1}{2} A_n \alpha_n^2 \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq 2n}}^{\infty} h_p e^{i(\alpha_n-\alpha_{pc})T_{p0}} + CC \qquad (\text{ب-۱۲})$$

با حل رابطه (ب-۱۲) ، تابع u_{n1} را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$u_{n1} = \frac{1}{2} A_n \alpha_n^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\left(\alpha_n^2 - (\alpha_n + \alpha_{pc})^2\right)} e^{i(\alpha_n+\alpha_{pc})T_{p0}} + \frac{1}{2} A_n \alpha_n^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\left(\alpha_n^2 - (\alpha_n - \alpha_{pc})^2\right)} e^{i(\alpha_n-\alpha_{pc})T_{p0}} + CC \qquad (\text{ب-۱۳})$$

با جایگذاری روابط (ب-۵) و (ب-۱۳) در رابطه (ب-۲) و با ترکیب نمودن جملات مزدوج، توابع u_n به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u_n = a_n(\varepsilon_n\tau)\cos(\alpha_n\tau + \beta_n(\varepsilon_n\tau)) + \frac{1}{2}\varepsilon_n a_n(\varepsilon_n\tau)\alpha_n^2 \times \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\left(\alpha_n^2 - (\alpha_n+\alpha_{pc})^2\right)} \cos((\alpha_n+\alpha_{pc})\tau + \beta_n(\varepsilon_n\tau)) + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq 2n}}^{\infty} \frac{h_p}{\left(\alpha_n^2 - (\alpha_n-\alpha_{pc})^2\right)} \cos((\alpha_n-\alpha_{pc})\tau + \beta_n(\varepsilon_n\tau)) \right\} \qquad (\text{ب-۱۴})$$

فهرست علائم

علائم انگلیسی

a_{n0}	دامنه اولیه مود ارتعاشی nام
C	ضریب میرایی ویسکوز
$\bar{c}_n$	میرایی مودال nام، $Ns.m^{-1}$
E	مدول الاستیسیته تیر، $N.m^{-2}$
h	تابع نشان دهنده مقدار بازشدگی ترک
I	ممان اینرسی سطح مقطع تیر، m^{-4}
$\bar{k}_n$	سفتی مودال nام، $N.m^{-1}$
$\bar{k}_{cn}$	ضریب فنریت تیر در حالت ترک بسته، $N.m^{-1}$
$\bar{k}_{on}$	ضریب فنریت تیر در حالت ترک باز، $N.m^{-1}$
l	طول تیر، m
m	جرم واحد طول تیر، $kg.m^{-1}$
$\bar{m}_n$	جرم مودال nام، kg
T_{np}	مقیاس زمانی مرتبه p در روش مقیاس‌های چندگانه
t	زمان، s
u_n	تابع مودال زمانی nام
u_{np}	تابع مودال nام از مرتبه زمانی p در روش مقیاس‌های چندگانه
w	جابه‌جایی عرضی تیر، m
x	موقعیت طولی تیر، m

علائم یونانی

Φ_n	شکل مود خطی nام
α_n	فرکانس طبیعی بی‌بعد nام
γ	موقعیت نسبی ترک
ε_n	پارامتر کوچک مورد استفاده در روش اغتشاشات
κ	عمق نسبی ترک
$\bar{\mu}_n$	ضریب میرایی نرمالیزه شده nام، s^{-1}
τ	زمان بی بعد
ω_n	فرکانس طبیعی nام تیر سالم، s^{-1}
ω_{no}	فرکانس طبیعی nام تیر با ترک باز، s^{-1}

منابع

[1] Y.C. Chu, M.H.H. Shen, Analysis of forced bilinear oscillators and the application of cracked beam dynamics, AIAA Journal, 30(10) (1992) 2512-2519.

[2] A. Rivola, P.R. White, Bispectral analysis of the bilinear oscillator with application to the detection of fatigue cracks, Journal of Sound and Vibration, 216(5) (1998) 889-910.

[3] L. Gelman, S. Gorpinich, C. Thompson, Adaptive diagnosis of the bilinear mechanical systems, Mechanical Systems

[13] D.M. Joglekar, M. Mitra, Nonlinear analysis of flexural wave propagation through 1D waveguides with a breathing crack, Journal of Sound and Vibration, 344 (2015) 242–257.

[14] D.M. Joglekar, M. Mitra, Analysis of flexural wave propagation through beams with a breathing crack using wavelet spectral finite element method, Mechanical Systems and Signal Processing, 76–77 (2016) 576-591.

[15] J. Prawin, A.R.M. Rao, Development of Polynomial Model for Cantilever Beam with Breathing Crack, Procedia Engineering, 144 (2016) 1419-1425.

[16] J. Prawin, A.R.M. Rao, Nonlinear identification of MDOF systems using Volterra series approximation, Mechanical Systems and Signal Processing, 84 (2017) 58–77.

[17] S.M. Chengh, X.J. Wu, W. Wallace, Vibrational Response of a Beam With a Breathing Crack, Journal of Sound and Vibration, 225(1) (1999) 201-208.

[18] M. Rezaee, R. Hassannejad, A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method, Acta Mechanica Solida Sinica, 24(2) (2011) 185-194.

[19] M. Rezaee, R. Hassannejad, Free Vibration Analysis Of Simply Supported Beam With Breathing Crack Using Perturbation Method, Acta Mechanica Solida Sinica, 23(5) (2010) 459-470.

[20] J.J. Sinou, On the use of non-linear vibrations and the anti-resonances of higher-order frequency response functions for crack detection in pipeline beam, Mechanics Research Communications, 43 (2012) 87-95.

[21] E. Douka, L.J. Hadjileontiadis, Time–frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack, NDT & E International, 38 (2005) 3-10.

[22] S. Loutridis, E. Douka, L.J. Hadjileontiadis, Forced vibration behavior and crack detection of cracked beams and Signal proccessing, 23(5) (2009) 1548-1553.

[4] A.P. Bovsunovskii, Numerical study of vibrations of a non-linear mechanical system simulating a cracked body, Strength of Materials, 31(6) (1999) 571-581.

[5] A.P. Bovsunovskii, Vibrations of a non-linear mechanical system simulating a cracked body, Strength of Materials, 33(4) (2001) 370-379.

[6] P. Crespo, R. Ruotolo, C. Surace, Non-linear modeling of a cracked beam, in: Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, Usa, 1996.

[7] A. Chatterjee, Identification and parameter estimation of abilinear oscillatorusing Volterra series with harmonic probing, International Journal of Nonlinear Mechanics, 45 (2010) 12-20.

[8] C. Surace, R. Ruotolo, D. Storer, Detecting non-linear behavior using the Volterra series to assess damage in beam-like structures, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 49(3) (2011) 905-926.

[9] S.L. Lau, W.S. Zhang, Non-linear vibrations of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method, Journal of Applied Mechanics, 59 (1992) 153-160.

[10] D. Broda, L. Pieczonka, V. Hiwarkar, W.J. Staszewski, V.V. Silberschmidt, Generation of higher harmonics in longitudinal vibration of beams with breathing cracks, Journal of Sound and Vibration, 381 (2016) 206-219.

[11] F.E. Dotti, V.H. Cortínez, F. Reguera, Non-linear dynamic response to simple harmonic excitation of a thin-walled beam with a breathing crack, Applied Mathematical Modelling, 40(1) (2016) 451-467.

[12] S. Smith, G. Wang, D. Wu, Bayesian approach to breathing crack detection in beam structures, Engineering Structures, 148 (2017) 829–838.

using instantaneous frequency, NDT & E International, 38 (2005) 411-419.

[23] K. Vigneshwaran, R.K. Behera, Vibration Analysis of a Simply Supported Beam with Multiple Breathing Cracks, Procedia Engineering, 86 (2014) 835- 842.

[24] R. Ruotolo, C. Surace, P. Crespo, D. Storer, Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack, Computers & Structures, 61 (1996) 1057-1074.

[25] N.P. Plakhtienko, S.A. Yasinskii, Resonance of second order in vibrations of a beam containing a transverse crack, Strength of Materials, 27(3) (1995) 146-152.

[26] S. Caddemi, I. Calio, M. Marletta, The non-linear dynamic response of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks, International Journal of Nonlinear Mechanics, 45 (2010) 714-726.

[27] A.P. Bovsunovsky, C. Surace, Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack, Journal of Sound and Vibration, 288(4-5) (2005) 865-886.

[28] P.N. Saavedra, L.A. Cuitino, Crack detection and vibration behavior of cracked beams, Computers & Structures, 79 (2001) 1451-1459.

[29] N. Pugno, C. Surace, R. Ruotolo, Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks, Journal of Sound and Vibration, 235(5) (2000) 749-762.

[30] A.P. Bovsunovsky, C. Surace, O.A. Bovsunovsky, The effect of damping and force application point on the non-linear dynamic behavior of a cracked beam at sub and super Resonance Vibrations, Strength of Materials, 38(5) (2006) 492-497.

[31] U. Andreaus, P. Casini, F. Vestroni, Non-Linear Dynamics Of A Cracked Cantilever Beam Under Harmonic Excitation, International Journal of Nonlinear Mechanics, 42(3) (2007) 566-575.

[32] L. Meirovitch, Analytical methods in vibrations, Macmillan, London, 1967.

[33] H.P. Lin, S.C. Chang, J.D. Wu, Beam Vibrations with an Arbitrary Number of Cracks, Journal of Sound and Vibration, 258(5) (2002) 987-999.

[34] U. Andreaus, P. Baragatti, Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response, Journal of Sound and Vibration, 330 (2011) 721-742.