

## طراحی مسیر پرواز گروهی هواپیماها با الگوریتم ترکیبی لیپانوف و پتانسیل

مسیح فتحی، مریم ملک‌زاده\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۱۰  
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۲/۲۳  
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۲۳  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۲/۳۰

### کلمات کلیدی:

طراحی مسیر  
الگوریتم میدان برداری لیپانوف  
الگوریتم پتانسیل بهبودیافته  
پرواز گروهی هواپیماهای بدون سرنشین  
تعقیب هدف متحرک  
دوری از موانع

**خلاصه:** در این مقاله به بحث، بررسی و توسعه الگوریتم طراحی مسیر برای مأموریت تعقیب هدف متحرک پرواز گروهی هواپیماهای بدون سرنشین پرداخته می‌شود. مطابق با الزامات هواپیمای بدون سرنشین بال ثابت، برای تعقیب هدف متحرک و همچنین مأموریت دوری از موانع در محیط‌های پیچیده، الگوریتم جدیدی از ترکیب الگوریتم میدان برداری لیپانوف با الگوریتم میدان پتانسیل بهبود یافته ارائه می‌شود. الگوریتم دینامیکی جدید ارائه شده از مزایای الگوریتم پتانسیل بهبود یافته برای دوری از موانع و همچنین از قابلیت الگوریتم میدان برداری لیپانوف برای تعقیب اهداف متحرک استفاده می‌نماید. از مزایای این الگوریتم، در لحظه یا برخط بودن و پویایی آن برای تعقیب هدف متحرک و در عین حال دوری از موانع و همچنین قابلیت محاسباتی سریع می‌باشد که سبب می‌شود الگوریتم در محیط‌های پیچیده به خوبی عمل نماید. در ادامه الگوریتم ارائه شده برای پرواز گروهی هواپیماهای بدون سرنشین طراحی می‌شود. نتایج ارائه شده به خوبی بیانگر آن است که الگوریتم ترکیبی ارائه شده، قابلیت پیاده‌سازی در محیط‌های پیچیده را دارا می‌باشد.

### ۱- مقدمه

موضوع طراحی مسیر، نقش مهم و اساسی در هواپیماهای بدون سرنشین را دارا می‌باشد. توسعه روش‌های تعقیب بر روی خط دید<sup>۱</sup> به هواپیماهای بدون سرنشین اجازه می‌دهد تا اهداف در حال حرکت را با حفظ پوشش حس‌گرها و همچنین خارج از محدوده تهدید بودن تعقیب نمایند [۱ و ۲]. الگوریتم‌های موجود در بحث طراحی مسیر، به دو دسته طراحی مسیر بر مبنای مأموریت دوری از موانع و طراحی مسیر بر مبنای مأموریت تعقیب هدف تفکیک می‌شوند:

### الگوریتم‌های طراحی مسیر بر مبنای مأموریت دوری از موانع

الگوریتم‌های موجود در بحث طراحی مسیر بر مبنای این دیدگاه شامل الگوریتم‌های جستجوی سلسله مراتبی<sup>۲</sup> [۳]، جستجو بر مبنای

نقشه مسیر<sup>۳</sup> [۴]، برنامه‌ریزی احتمالی<sup>۴</sup> [۵-۷] و بهینه‌سازی<sup>۵</sup> [۸] می‌شوند. الگوریتم‌های یاد شده را می‌توان در حوزه الگوریتم‌های غیر برخط نام برد.

از الگوریتم‌های برخط می‌توان به الگوریتم طراحی مسیر بر مبنای میدان‌های پتانسیل [۹-۱۱] و روش نیروی مجازی<sup>۶</sup> [۱۴-۱۲] اشاره کرد. از مزایای اصلی این الگوریتم‌های دینامیکی، طبیعت محاسباتی سریع آن‌ها است. این الگوریتم‌ها در ابتدا بر مبنای رفتارهای سیالاتی شکل گرفت. در مراجع [۱۵ و ۱۶] بر روی توسعه میدان‌های پتانسیل تمرکز شده است. در روش نیروی مجازی، بیشتر تمرکز بر روی مسئله دوری از موانع در ربات‌ها است. در [۱۷] روش پتانسیل و روش نیروی مجازی به صورت مستقل برای طراحی مسیر در حالت دو بعدی استفاده شده است. از معایب این روش‌ها می‌توان به وجود ناحیه تکین

3 Roadmap methods  
4 Probabilistic programming  
5 Optimization algorithms  
6 Virtual force field(vff)

1 Stand-off line-of-sight  
2 Heuristic search methods

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.malekzadeh@eng.ui.ac.ir



در آن‌ها اشاره نمود. در [۱۸]، از روش اصلاح شده پتانسیل برای حل این مشکل استفاده شده است. به طور کلی در این راه حل‌ها سعی می‌کنند تا وسیله را از ناحیه مینیمم نسبی دوری کنند که در هر صورت باز هم مسئله به صورت دقیق و صحیح حل نمی‌شود و تنها به دوری از این ناحیه اکتفا می‌شود که در بعضی مسائل سبب بهینه نشدن مسیر طراحی شده می‌شود.

### الگوریتم‌های طراحی مسیر بر مبنای مأموریت تعقیب هدف

از کاربردهای جذاب بدون سرنشین‌ها، تعقیب اهداف متحرک زمینی در محیط نامعین می‌باشد. در این مسئله‌ها به روش‌های برخط و یا روش‌های دینامیکی برای طراحی مسیر نیاز است. یکی از روش‌های برخط، روش استند آف می‌باشد. برای عملکرد بهتر حسگرهای جیمبال از این روش استفاده می‌شود. در این روش به جای دسترسی به یک نقطه، محدوده هدف مد نظر می‌باشد. در این روش بدون سرنشین تسلط کافی بر محیط پیدا می‌کند ولی به نقطه هدف نمی‌رسد.

اولین روش مهم در حوزه رهگیری هدف متحرک، روش میدان برداری لیاپانوف [۱۹ و ۲۰] است که به علت همگرایی فوق‌العاده این روش به دایره پرسه مورد توجه قرار گرفت ولی ضعف این روش آن است که در این الگوریتم امکان در نظر گرفتن مانع وجود ندارد، به همین دلیل در این روش فرض می‌شود که بدون سرنشین در ارتفاع بالا نسبت به هدف پرواز کند که در این ارتفاع معمولاً مانعی در مسیر حرکت بدون سرنشین وجود ندارد.

از مشکلات روش پتانسیل این است که طراحی مسیر در نقاط مینیمم محلی نمی‌تواند صورت بگیرد و مأموریت از دست می‌رود. در این مقاله الگوریتم جدید ترکیبی میدان برداری لیاپانوف و الگوریتم اصلاح شده پتانسیل بیان می‌شود. این الگوریتم جدید ضعف الگوریتم میدان برداری لیاپانوف را در حضور موانع برطرف می‌نماید. به این ترتیب می‌توان الگوریتم جدید را برای تعقیب هدف متحرک در حضور موانع استفاده نمود. در الگوریتم برداری لیاپانوف پیشین مانع وجود نداشت که این ایراد در الگوریتم ارائه شده برطرف شده است.

### الگوریتم‌های طراحی مسیر برای پرواز گروهی بدون سرنشین‌ها

عملکرد گروهی هواپیماهای بدون سرنشین با توانایی اجرای

عملیات‌های کم هزینه و گسترده بسیار مهم است. در مراجع [۲۴]- [۲۱] بدون سرنشین‌ها حول یک هدف ثابت در مدار دایره‌ای به صورت همگرا قرار می‌گیرند، این روش به حرکت جمعی<sup>۱</sup> موسوم است. در این تحقیقات، روش حرکت جمعی برای یک فضای متقارن بین بدون سرنشین‌ها اعمال شده است، ولی در آن‌ها به حداقل سه بدون سرنشین نیاز است. در مرجع [۲۵] روش حرکت جمعی که در مراجع [۲۱ و ۲۲ و ۲۴] برای ردیابی دایره پرسه ارائه شده است، برای حالت دو بدون سرنشین طراحی شده است، ولی پایداری حاصل نشده است. در این مقاله از روش هدایت میدان برداری لیاپانوف استفاده می‌شود. این روش برای دو بدون سرنشین نیز پایدار می‌باشد. سرعت مطلوب بدون سرنشین در هر موقعیت دامنه حرکت به دست آمده و این سرعت به عنوان سرعت مطلوب و زاویه مطلوب برای سیستم‌های کنترلی سطح پائین برای ردیابی مسیر اعمال می‌شود، این رویکرد ایده گرفته شده از روش پتانسیل [۲۶ و ۲۷] در روبات‌های متحرک است. این میدان سبب تولید خطوط جریان برای همگرایی بدون سرنشین به دایره پرسه می‌شود. این الگوریتم جدید بر روی پرواز هماهنگ هواپیمای بدون سرنشین طراحی و عملکرد آن در محیطی با هدف و مانع‌های متحرک بررسی می‌شود. در الگوریتم ترکیبی ارائه شده محدودیتی در قبال شکل موانع وجود ندارد و همه اشکال موانع به خوبی قابلیت پیاده سازی دارند.

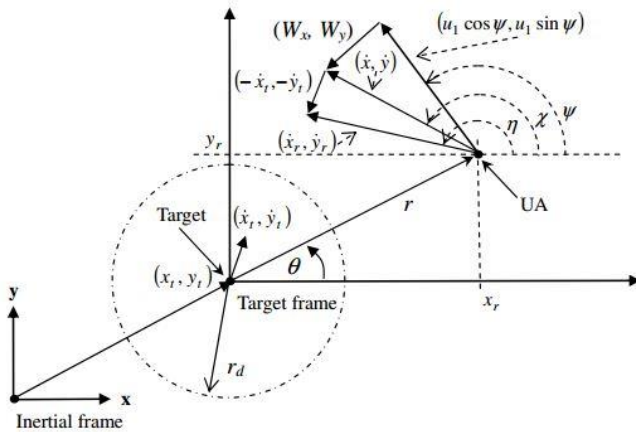
در بخش اول این مقاله ابتدا مدل سینماتیکی هواپیما بیان شده، سپس بیان مختصری از الگوریتم میدان برداری لیاپانوف صورت گرفته در قسمت بعدی الگوریتم اصلاح شده پتانسیل ارائه شده تا بتوان مقایسه‌ایی از مزایای الگوریتمی که در نهایت ارائه می‌شود با الگوریتم پتانسیل و همچنین لیاپانوف داشته و در نهایت الگوریتم جدید ترکیبی میدان برداری لیاپانوف و الگوریتم اصلاح شده پتانسیل بیان شده است. الگوریتم جدید برای تعقیب هدف متحرک در هواپیمای بدون سرنشین بال ثابت در حضور موانع استفاده و در نهایت مدل‌سازی برای پرواز گروهی نیز صورت گرفته است.

### ۲- مدل سینماتیکی هواپیما

در این مقاله هواپیمای بدون سرنشین از نوع بال ثابت<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده است. از ویژگی‌های این نوع از بدون سرنشین‌ها

1 Collective motion

2 Fixed-wing



شکل ۱. مدل هندسی سینماتیکی (مبدأ مختصات روی مکان هدف قرار گرفته است) [۱۹]

Fig 1. The geometric kinematic model (the coordinates origin is located on the target position [19])

که  $[x_r, y_r]^T = [x - x_t, y - y_t]^T$  موقعیت بدون سرنشین در چارچوب هدف است. برای ساده‌سازی معادلات، از سرعت فرضی  $[T_x, T_y]^T = [\dot{x}_t - w_x, \dot{y}_t - w_y]^T \in \mathbb{R}^2$  استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن معادلات نسبی حرکت هواپیما نسبت به هدف، رابطه (۳) می‌تواند به شکل زیر نیز نوشته شود که  $V_r$  و  $\eta$  به ترتیب نشان دهنده سرعت و زاویه نسبی با در نظر گرفتن سرعت هواپیما و باد پس زمینه است.

$$V_r^2 = u_1^2 + T_x^2 + T_y^2 - 2u_1(T_x \cos(\psi) + T_y \sin(\psi))$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{y_r}{x_r}\right) = \arctan\left(\frac{u_1 \sin(\psi) - T_y}{u_1 \cos(\psi) - T_x}\right) \quad (4)$$

$$k_\eta(\psi) = \frac{u_1^2 + u_1(T_x \cos(\psi) + T_y \sin(\psi))}{V_r^2}$$

### ۳- تعقیب هماهنگ دایره پرسه به روش میدان برداری

#### لیاپانوفی

در این بخش، روش میدان برداری لیاپانوف در دو حالت هدف ثابت و متحرک فرموله و شرح داده می‌شود:

#### ۳-۱- موقعیت هدف به صورت ثابت باشد

زمانی که هدف ثابت و باد نیز در پس زمینه وجود نداشته باشد، مانور کنترلی در ارتفاع  $h_0$  با سرعت دستور داده شده نامی  $u_1 = v_0$

می‌توان بازده پروازی بالاتر و مداومت پروازی بیشتر را نام برد، اما محدودیت‌های بیشتری نسبت به بال چرخان‌ها<sup>۱</sup> در مقابل با سرعت هوا دارند. همچنین فرض شده است که هواپیمای بدون سرنشین مجهز به سیستم کنترلی پروازی سطح پایین<sup>۲</sup> است که باعث می‌شود زوایای رول، پیچ و یاو پایدار باشند. برای هدایت هواپیما، این سیستم کنترلی سبب می‌شود که سرعت، نرخ صعود و نرخ پیچش به صورت صریح وجود داشته باشد.

در این مقاله از مدل سینماتیکی دو بعدی هواپیما استفاده شده است (شکل ۱). با فرضیات ذکر شده، مدل سینماتیکی مطلق به شرح زیر است [۱۹]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \psi + W_x \\ \dot{y} &= u_1 \sin \psi + W_y \\ \dot{\psi} &= u_2 \\ \dot{h} &= u_3 \end{aligned} \quad (1)$$

که  $[x, y, h]^T \in \mathbb{R}^3$  موقعیت سه بعدی اینرسی،  $\psi \in [0, 2\pi)$  زاویه سر<sup>۳</sup> هواپیما،  $[W_x, W_y]^T \in \mathbb{R}^2$  سرعت پایدار باد در مختصات دکارتی و  $u_i (m/s) \in U_i, i = 1$  و  $2$  و  $3$  در نظر گرفته می‌شوند به شرح زیر است (شکل ۱):

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u_1 \in \mathbb{R} \mid 0 \leq v_{\min} \leq u_1 \leq v_{\max}\} \\ U_2 &= \{u_2 \in \mathbb{R} \mid |u_2| \leq \omega_{\max}\} \\ U_3 &= \{u_3 \in \mathbb{R} \mid |u_3| \leq \dot{h}_{\max}\} \end{aligned} \quad (2)$$

می‌توان نرخ صعود را با یک فیدبک تناسبی  $u_3 = -k_h(h - h_0)$  نشان داد که  $h_0$  (ارتفاع مشخص شده می‌باشد).

اگر هدف با سرعت ثابت  $[x_t, y_t]^T \in \mathbb{R}^2$  حرکت کند و فاصله نسبی تا هدف<sup>۴</sup> به صورت  $p_t = [x_t, y_t]^T$  فرض شود، مدل سینماتیکی رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= u_1 \cos(\psi) + W_x - \dot{x}_t \\ \dot{y}_r &= u_1 \sin(\psi) + W_y - \dot{y}_t \\ \dot{\psi} &= u_2 \end{aligned} \quad (3)$$

- 1 Rotorcraft
- 2 Low-level flight control system (FCS)
- 3 Heading angle
- 4 Target

5 Commanded nominal air speed

و شعاع دایره پرسه  $r_d$  رخ می دهد.

$$g(r, \theta) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix}_{des} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix}_{des} = \alpha v_0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{r^2 - r_d^2}{r^2 + r_d^2} \\ \frac{2rr_d}{r^2 + r_d^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

فرض می شود تابع نامزد لیاپانوفی به صورت  $V(x, y) = (r^2 - r_d^2)^2$  وجود داشته باشد و  $r = \sqrt{(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2} = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$  فاصله شعاعی بدون سرنشین از موقعیت هدف باشد. مشتق زمانی تابع نامزد لیاپانوف به صورت  $\dot{V} = \nabla V \cdot [x, y]^T$  می باشد. اگر مقادیر سرعت نسبی مطلوب ( $y_r = y_d$  و  $x_r = x_d$ ) طبق میدان برداری راهنما ( $f(x_r, y_r)$ ) انتخاب شود، مشتق زمانی تابع لیاپانوف منفی می شود [۱۹].

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-4\alpha v_0 r (r^2 - r_d^2)^2}{r^2 + r_d^2} \quad (10)$$

زاویه مطلوب  $\psi_d$  از رابطه (۵) به صورت زیر می باشد [۱۹]:

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d}\right) \quad (11)$$

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{y_r \cdot (r^2 - r_d^2) - x_r \cdot 2rr_d}{x_r \cdot (r^2 - r_d^2) + y_r \cdot 2rr_d}\right)$$

$$f(x_r, y_r) = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} = \alpha \left(\frac{-v_0}{r}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_r \cdot \left(\frac{r^2 - r_d^2}{r^2 + r_d^2}\right) + y_r \cdot \left(\frac{2rr_d}{r^2 + r_d^2}\right) \\ y_r \cdot \left(\frac{r^2 - r_d^2}{r^2 + r_d^2}\right) - x_r \cdot \left(\frac{2rr_d}{r^2 + r_d^2}\right) \end{bmatrix} \quad (5)$$

با تلفیق رابطه (۱۱) و رابطه (۶)، می توان نوشت (مشتق زمانی زاویه پیچش هواپیما به شرح زیر به دست می آید):

در رابطه (۵)،  $\alpha$  و  $v_0$  اعدادی مثبت هستند. می توان نشان داد که اندازه سرعت مطلوب نسبی در هر نقطه از این میدان برداری به صورت  $|f(x_r, y_r)| = \alpha v_0$  است به جز وقتی که  $r = 0$  باشد. در رابطه (۶)،  $\theta, \phi$  دو زاویه فرضی برای ساده سازی ها هستند.

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d}\right)$$

$$\dot{\psi}_d = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d \cdot \dot{x}_d - \ddot{x}_d \cdot \dot{y}_d}{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}\right)$$

$$\dot{\psi}_d = \frac{(\alpha v_0)^2 (\dot{\theta} - \dot{\phi}) [(\cos(\theta - \phi))^2 + (\sin(\theta - \phi))^2]}{(\alpha v_0)^2}$$

$$\dot{\psi}_d = \dot{\theta} - \dot{\phi} \quad (12)$$

$$\dot{\theta} = \frac{2\alpha v_0 r_d}{r^2 + r_d^2}$$

$$\cos(\phi) = \frac{r^2 - r_d^2}{r^2 + r_d^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{2\alpha v_0 r_d (r^2 - r_d^2)}{(r^2 + r_d^2)}$$

$$\dot{\psi} = \frac{4\alpha v_0 r_d^3}{(r^2 + r_d^2)^2}$$

$$\cos(\phi) = \frac{r^2 - r_d^2}{r^2 + r_d^2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{2rr_d}{r^2 + r_d^2} \quad (6)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

با استفاده از فرضیات رابطه (۶)، رابطه (۳) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{x}_d = \frac{-\alpha v_0}{r(r^2 + r_d^2)} [x_r (r^2 - r_d^2) + y_r (2rr_d)] = -\alpha v_0 \cos(\theta - \phi) \quad (7)$$

$$\dot{y}_d = \frac{-\alpha v_0}{r(r^2 + r_d^2)} [y_r (r^2 - r_d^2) - x_r (2rr_d)] = -\alpha v_0 \sin(\theta - \phi)$$

از کنترلر تناسبی رابطه (۱۳)، برای به دست آوردن نرخ گردش استفاده می شود:

با استفاده از رابطه (۷) اندازه میدان عبارت است از:

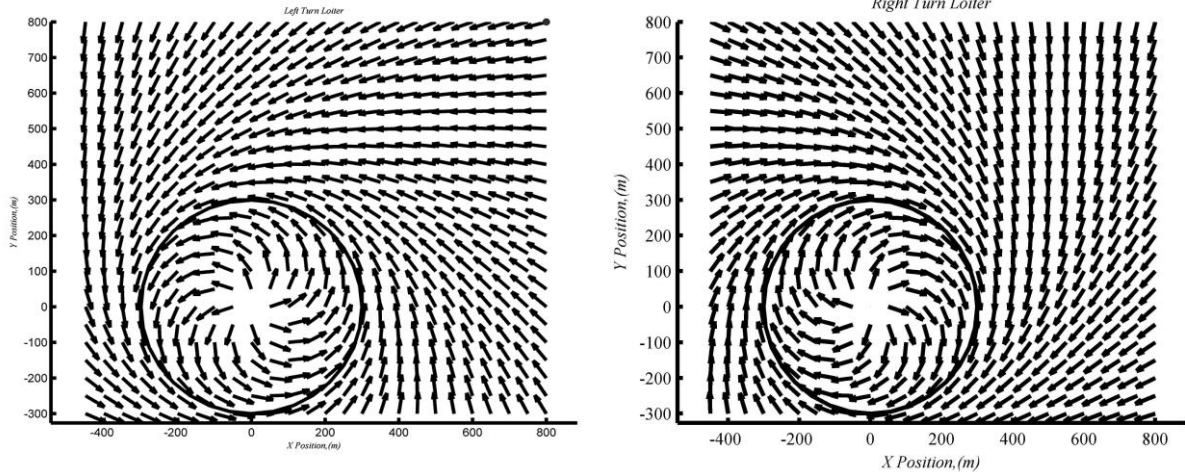
$$u_2 = -K(\psi - \psi_d) + \dot{\psi}_d \quad (13)$$

با تعریف  $e_\psi = \psi - \psi_d$  و با استفاده از رابطه (۳) ( $\dot{\psi} = u_2$ )، مشتق خطا عبارت است از:

$$\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2 = (\alpha v_0)^2 \cdot ((\cos(\theta - \phi))^2 + (\sin(\theta - \phi))^2) = (\alpha v_0)^2 \quad (8)$$

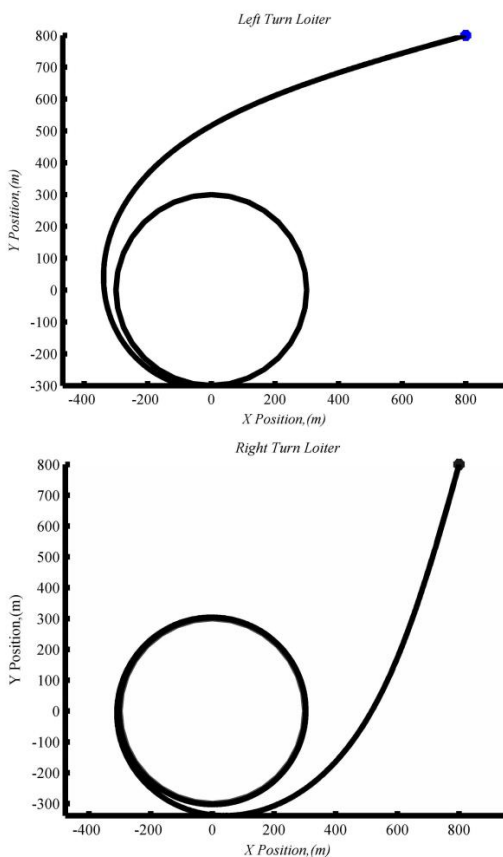
در مختصات قطبی، میدان رابطه (۵) و نرخ تغییرات آن به صورت روابط (۹) و (۱۰) نوشته می شود:

$$\dot{e}_\psi = -K \langle e_\psi \rangle$$



شکل ۲. الف) نمایش میدان برداری لیاپانوف در جهت چپ گرد ب) نمایش میدان برداری لیاپانوف در جهت راست گرد  
Fig 2. a) left turn Lyapunov vector field b) Lyapunov vector field in the right turn direction

$$\dot{\psi} = \frac{4\alpha v_0 r_d r^2}{(r^2 + r_d^2)^2} \quad (14)$$



شکل ۳. الف) نمایش مسیر ایده آل در حالت میدان به صورت راست گرد ب) نمایش مسیر ایده آل در حالت میدان به صورت چپ گرد می باشد  
Fig 3. a) The ideal trajectory in the right turn field b) The ideal trajectory in the left turn field

شکل ۳-ب) نمایش مسیر ایده آل برای یک بدون سرنشین در

بنابراین زاویه پیچش بدون سرنشین به صورت نمایی به نرخ مطلوبی که از میدان برداری لیاپانوفی به دست آمده همگرا می شود، با توجه به محدودیت نرخ زاویه سر هواپیما بدون سرنشین (رابطه (۲)) مقدار  $K$  در رابطه (۱۳) انتخاب می شود [۱۹].

شکل ۲-الف) نمایش میدان برداری لیاپانوفی در جهت چپ گرد می باشد. این شکل با فرضیات  $\alpha = 1$  و  $v_0 = 20$  شعاع دایره پرسیه برابر با ۳۰۰ متر رسم شده است. همان طور که در شکل ۲-الف مشاهده می شود میدان های برداری در نواحی داخل دایره پرسیه به سرعت به دایره همگرا می شوند و در نواحی بیرون از دایره نیز میدان ها به نحوی هستند که به دایره پرسیه می رسند.

شکل ۲-ب) نمایش میدان برداری لیاپانوفی در جهت راست گرد می باشد که با فرضیات  $\alpha = 1$  و  $v_0 = 20$  شعاع دایره پرسیه برابر با ۳۰۰ متر رسم شده است. همان گونه که مشاهده می شود میدان های برداری در نواحی داخل دایره پرسیه به سرعت به دایره همگرا می شوند و در نواحی بیرون از دایره میدان ها به نحوی هستند که به دایره پرسیه می رسند.

شکل ۳-الف) نمایش مسیر ایده آل برای یک بدون سرنشین در حالت میدان راست گرد می باشد. زاویه اولیه بدون سرنشین در جهت میدان می باشد. این شکل با فرضیات، موقعیت اولیه (۸۰۰، ۸۰۰) و  $\alpha = 1$  و  $v_0 = 20$  شعاع دایره پرسیه برابر با ۳۰۰ متر رسم شده است.

در ادامه مشتق زمانی زاویه پیچش هواپیما برای حالت میدان به صورت راست گرد نیز آورده شده است:

$(\dot{x}, \dot{y})$  توسط حس‌گرهای معمولی نصب شده بر روی هواپیمای بدون سرنشین، به دست می‌آید (به طور مثال از جی‌پی‌اس). با فرض دانستن سرعت هدف، سرعت نسبی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \dot{x} - \dot{x}_t \\ \dot{y}_r &= \dot{y} - \dot{y}_t \end{aligned} \quad (18)$$

از رابطه (۱۸) برای محاسبه زاویه نسبی در حضور باد، برای مقایسه با زاویه مطلوب نسبی در قانون کنترلی استفاده می‌شود:

$$u_2 = -K(\eta - \eta_d) + \frac{\dot{\eta}_d}{k_\eta(\psi)} \quad (19)$$

معادله خطا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$e_\eta = \eta - \eta_d \quad (20)$$

پایداری قانون کنترلی رابطه (۱۹) با در نظر گرفتن رابطه (۲۰) اثبات می‌شود [۱۹].

#### ۴- پرواز هماهنگ برای چند هواپیمای بدون سرنشین

روش استفاده شده به این شرح است که اگر بدون سرنشین بخواهد سرعت زاویه خود را کاهش دهد، بنابراین باید شعاع دایره پرسه را افزایش داده و سرعت را کاهش دهد. به بیانی دیگر، اگر بدون سرنشین بخواهد سرعت زاویه را افزایش دهد، بنابراین باید شعاع دایره پرسه را کاهش و سرعت را افزایش دهد. برای رسیدن به این هدف، کنترل‌رهایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$r_{dn} = r_0 + K_r \langle \theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{dn} \rangle \quad (21)$$

$$v_{rn} = v_0 - K_v \left( \frac{r_{dn}}{r} \right)^2 \langle \theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{dn} \rangle r_{dn} \quad (22)$$

در روابط (۲۱) و (۲۲)،  $r_0$  شعاع دایره پرسه،  $\theta_{dn}$  زاویه مطلوب،  $K_r$  و  $K_v$  ضرایب مثبت،  $v_0$  سرعت و اندیس  $n$  شماره اختصاصی بدون سرنشین می‌باشد. در این حالت یک کنترلر برای کنترل شعاع دایره پرسه اضافه شده که سبب بهبود عملکرد و افزایش سرعت در

حالت میدان به صورت چپ‌گرد می‌باشد زاویه اولیه بدون سرنشین در جهت میدان می‌باشد و شکل ۳-ب با فرضیات، موقعیت اولیه  $(800, 800)$  و  $\alpha = 1$  و  $v_0 = 20$  شعاع دایره پرسه برابر با ۳۰۰ متر رسم شده است.

#### ۳-۲- تعقیب اهداف با سرعت ثابت

وقتی که اطلاعات راجع به موقعیت هدف و باد پس زمینه موجود باشد، ترم تصحیح کننده‌ای به میدان سرعت مطلوب نسبی اضافه می‌شود که تضمین می‌کند هواپیمای بدون سرنشین بیرون از فاصله استند آف قرار می‌گیرد. در این حالت طبق روش قبلی با در نظر گرفتن  $\dot{x}_r = \dot{x}_d, \dot{y}_r = \dot{y}_d$  می‌توان به همگرایی کلی رسید.

$$\begin{aligned} u_1 \cdot \cos(\psi) &= \dot{x}_d - W_x + \dot{x}_t \\ u_1 \cdot \sin(\psi) &= \dot{y}_d - W_y + \dot{y}_t \end{aligned} \quad (15)$$

رابطه (۱۵) سبب می‌شود که سرعت ثابت و برابر  $v_0$  نباشد. با تعیین ضریب  $\alpha$  موجود در میدان، اندازه سرعت برابر  $v_0$  می‌شود. بدین ترتیب همگرایی کلی میدان به دایره پرسه باقی می‌ماند.

$$\begin{bmatrix} u_1 \cdot \cos(\psi) \\ u_1 \cdot \sin(\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \dot{x}_d + \dot{x}_t - W_x \\ \alpha \cdot \dot{y}_d + \dot{y}_t - W_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \dot{x}_d + T_x \\ \alpha \cdot \dot{y}_d + T_y \end{bmatrix} \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)،  $T_x, T_y$  سرعت‌های ثابت نسبی هستند. محاسبه اندازه میدان در رابطه (۱۶) و برابر گذاشتن  $u_1$  با  $v_0$  معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 \cdot (\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2) + 2 \cdot \alpha \cdot (T_x \cdot \dot{x}_d + T_y \cdot \dot{y}_d) \\ &+ (T_x^2 + T_y^2) - v_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ضریب  $\alpha$  یک عدد مثبت و همچنین مخالف صفر می‌باشد. رابطه (۱۷) یک جواب حقیقی برای  $\alpha$  دارد به شرطی که  $v_0$  بزرگ‌تر از سرعت هدف باشد. با توجه به رابطه (۱۰) مشاهده می‌شود که جواب به دست آمده برای  $\alpha$  تاثیری در همگرایی کلی میدان ندارد. از ضریب  $\alpha$ ، در رابطه (۱۶) برای به دست آوردن زاویه مطلوب میدان  $\psi_d$  استفاده می‌شود. دقیقاً مشابه حالت هدف ثابت، از یک کنترلر برای تعقیب میدان استفاده می‌شود. سرعت اینرسی هواپیما

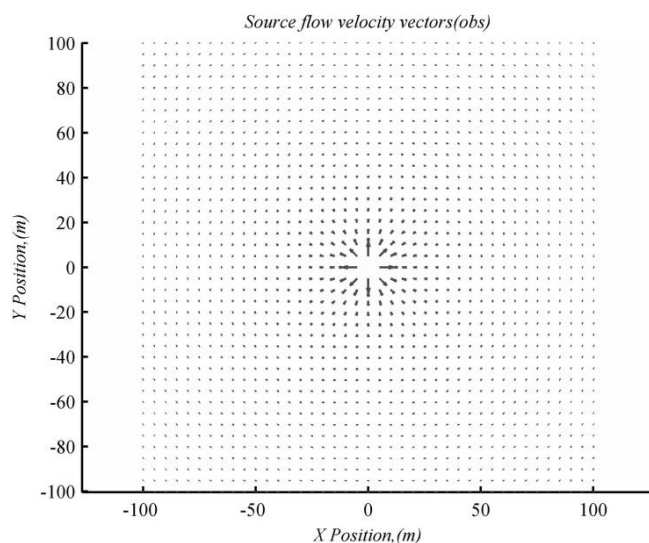
به عبارت دیگر، موانع به صورت یک سری اشیاء [۱۶] ساخته می‌شود و سپس از میدان‌های دافعه حول این اشیاء استفاده و هواپیمای بدون سرنشین به هدف می‌رسد. شکل ۴ نمایش دهنده یک میدان پتانسیل اطراف یک سری موانع است. از زاویه خروجی میدان به عنوان زاویه پیچش ایده آل استفاده می‌شود.

تئوری جریان پتانسیل بیان کننده ارتباط بردارهای سرعت با تابع پتانسیل  $\phi$  یا تابع جریان  $\psi$  می‌باشد. از آنجایی که جهت بردارهای سرعت تنها پارامتری است که برای به دست آوردن زاویه پیچش ایده آل نیاز است، بنابراین تنها اجزای  $u$  و  $v$  از سرعت مورد نیاز بوده که به صورت زیر می‌باشند [۱۸]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (24)$$

برای هر مانعی که توسط حسگرها دیده می‌شود، یک المان جریان منبع<sup>۲</sup> در موقعیت مانع قرار می‌گیرد ( $Q_{source}$ ). این المان به این صورت است که هرچه فاصله از منبع افزایش پیدا می‌کند، اندازه جریان کاهش می‌یابد. این المان‌ها توسط روابط (۲۵) و (۲۶) در مختصات دکارتی نشان داده می‌شوند.

$$u = Q_{source} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (25)$$



شکل ۵. یک نمونه المان منبع  
Fig 5. A typical source element

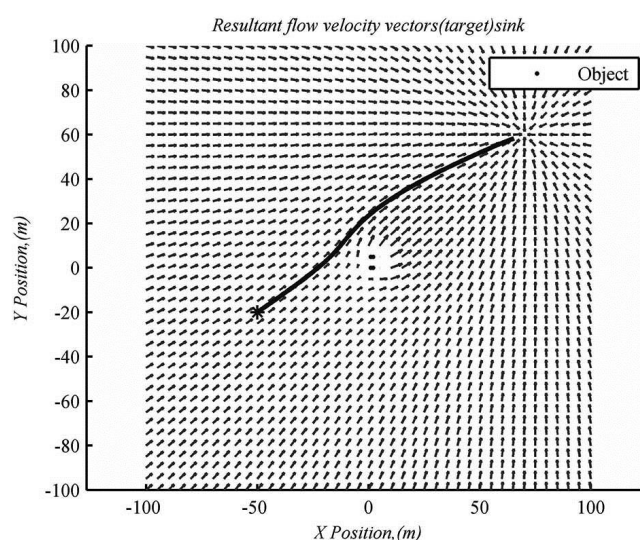
همگرایی می‌شود. در این حالت زاویه‌ای، فضای بین بدون سرنشین‌ها سریع‌تر به  $\theta_{dn}$  همگرا می‌شود. علاوه بر این، با اضافه کردن کنترلر برای دایره پرسه، می‌توان تغییرات سرعت در کنترلر سرعت را نیز کاهش داد.

برای اثبات همگرایی یک تابع نامزد لیاپانوف جدید به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V_{ro} = \frac{1}{2}(r_n - r_{dn})^2 + \frac{1}{2}(\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_d)^2 \quad (23)$$

### ۵- روش پتانسیل بهبود یافته

همان‌طور که مشاهده کردید در روش میدانی لیاپانوف هیچ مانعی در مسیر در نظر گرفته نمی‌شد و اساساً روش لیاپانوف در حضور موانع کاربرد نداشت. برای رفع این مشکل اساسی در طراحی مسیر، در این بخش روش لیاپانوف را با روش پتانسیل ترکیب کرده و از مزایای هر دو روش استفاده می‌شود. از تئوری جریان پتانسیل بهبود یافته [۱۸] برای تولید یک میدان برداری برآیند با استفاده از المان‌های ساده استفاده می‌شود. در نتیجه از زاویه میدان، به عنوان زاویه ایده آل سر هواپیمای بدون سرنشین استفاده می‌شود. لذا میدان‌هایی اطراف اشیاء در نظر گرفته می‌شود و از این میدان‌ها برای دوری از موانع استفاده می‌شود.



شکل ۴. نمایش میدان پتانسیل حول موانع مربعی شکل  
Fig 4. The potential field around the square obstacle

- 1 Objects
- 2 Source element

بگیرد و مأموریت از دست می‌رود. مشکل دیگر این الگوریتم طراحی مسیر آن است که نمی‌توان این روش را برای اهداف متحرک به کار برد و اصولاً این الگوریتم طراحی مسیر برای رسیدن از یک نقطه به یک نقطه انتهایی است.

در ادامه از مزایای روش پتانسیل برای دوری از موانع استفاده کرده و این روش را با روش میدان برداری لیاپانوف برای تعقیب هدف متحرک در مورد حرکت دایره‌ای ترکیب کرده، به عبارت دیگر این دو روش را با هم ترکیب کرده و روشی کاملاً جدید ارائه می‌شود.

#### ۶- ترکیب روش میدان برداری لیاپانوف با روش پتانسیل بهبود یافته<sup>۲</sup>

ایده اصلی و مبنایی استفاده شده در ترکیب این دو روش با همدیگر، جایگزینی میدان چشمه با میدان برداری لیاپانوف است. در این حالت به علت همگرایی روش لیاپانوف به دایره پرسه و همچنین مزیت استفاده از میدان منبع برای موانع، این دو روش به خوبی با یکدیگر ترکیب شده و ضعف‌های الگوریتم میدان برداری لیاپانوف حذف می‌شود.

در ابتدا برای شروع، میدان منبع (روابط (۲۵) و (۲۶)) به حالت میدان قطبی تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \frac{Q_{source}}{r_i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

در رابطه (۲۹)،  $Q_{source}$  و  $r_i$  به ترتیب فاصله تا هر مانع و قدرت منبع می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{y - y_i}{r} = \frac{y_r}{r} \\ \cos(\theta) &= \frac{x - x_i}{r} = \frac{x_r}{r} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\dot{\theta} = \frac{2Q_{sink} r_d}{r^2 + r_d^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{2rr_d}{r^2 + r_d^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{r^2 - r_d^2}{r^2 + r_d^2} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_r^2 + y_r^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{2Q_{sink} r_d (r^2 - r_d^2)}{(r^2 + r_d^2)^2} \end{aligned}$$

$$v = Q_{source} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (26)$$

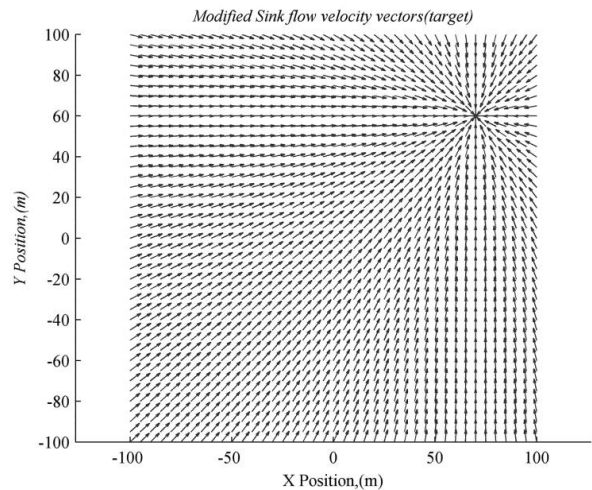
در معادلات بالا  $Q_{source}$  قدرت منبع می‌باشد. شکل ۵ نمایش دهنده یک نمونه میدان منبع می‌باشد.

بر خلاف المان چشمه نرمال که اندازه‌اش با افزایش فاصله کاهش می‌یابد، اندازه المان چشمه اصلاح شده<sup>۱</sup> کاهش پیدا نمی‌کند و در حوزه میدان ثابت باقی می‌ماند. المان چشمه اصلاح شده توسط روابط (۲۷) و (۲۸) در مختصات دکارتی نمایش داده می‌شود که در این معادلات  $Q_{sink}$  قدرت میدان چشمه می‌باشد.

$$u = Q_{sink} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (27)$$

$$v = Q_{sink} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (28)$$

المان چشمه اصلاح شده در موقعیت نهایی<sup>۲</sup> قرار می‌گیرد (شکل ۶). این المان جهت جریان را به نقطه نهایی تغییر می‌دهد. استفاده از این المان سبب می‌شود که میدان در هر نقطه‌ای به سمت موقعیت نهایی تغییر جهت دهد.

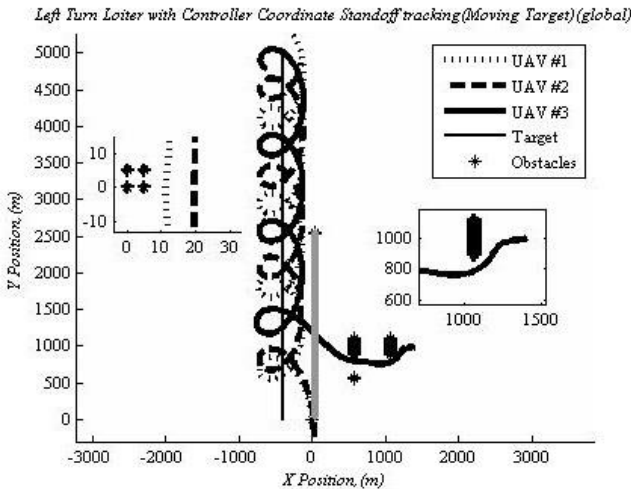


شکل ۶. میدان برداری سرعت چشمه اصلاح شده  
Fig 6. The modified sink field

در روش پتانسیل بهبود یافته اکثر نقاط مینیمم نسبی در بعضی حالت‌ها کاملاً حذف یا به تأخیر می‌افتند. از مشکلات روش پتانسیل این است که طراحی مسیر در نقاط مینیمم محلی نمی‌تواند صورت

- 1 Modified sink element
- 2 Waypoint





شکل ۷. اعمال الگوریتم ترکیب شده روش میدان برداری با روش پتانسیل اصلاح شده

Fig 7. The composed of the vector field and modified potential methods performance

### ۷- نتایج و بحث

شکل ۷ با اعمال الگوریتم جدید ترکیبی میدان برداری لیاپانوف با الگوریتم اصلاح شده پتانسیل برای پرواز گروهی به دست آمده است. کنترلر استفاده شده برای پرواز گروهی کنترلی است که در قسمت پرواز هماهنگ برای چند هواپیمای بدون سرنشین شرح داده شده به دست آمد. هدف نمایش همگرایی و همچنین دوری از مانع در روش ترکیب شده است. در شبیه‌سازی یکی از بدون سرنشین‌ها از نقطه (۱۰۰۰، ۱۴۰۰)، دیگری از نقطه (۲۰۰ و ۳۰۰) و دیگری از نقطه (۳۰۰ و ۳۰۰) شروع به حرکت کرده و موانع به صورت دو مانع به شکل دیوار مانند و یک مانع مربعی شکل در مسیر دو بدون سرنشین پایینی است (در شکل ۸ همین شکل با بزرگنمایی بیشتر رسم شده است). علاوه بر موانع ذکر شده یک مانع متحرک به صورت مربعی شکل که با سرعت ۵ متر بر ثانیه در جهت عمودی حرکت می‌کند وجود دارد که در شکل ۷، با یک خط ممتد نمایش داده شده است.

در مدل‌سازی، ماکزیمم نرخ چرخش  $0.2 \text{ rad/s}$  شعاع دایره پرسیه ۳۰۰ متر، سرعت دستور داده شده بدون سرنشین ۲۰ (m/s) فرض شده است. همچنین هدف از نقطه (۰ و -۴۰۰) شروع به حرکت و با سرعت ثابت  $10 \text{ (m/s)}$  در جهت +y حرکت می‌کند. مدل‌سازی در حالتی هست که باد در پس زمینه وجود ندارد و  $Q_{source} = 20/4$  و  $Q_{sink} = 20$  و  $K_v = 0.005$  و  $K_r = 20$  همچنین زاویه مطلوب نسبی بین بدون سرنشین‌ها ۱۲۰ درجه داده شده است.

$$\sin(\eta_i) = \frac{y - y_i}{r_i} = \frac{y_{ri}}{r_i}$$

$$\cos(\eta_i) = \frac{x - x_i}{r_i} = \frac{x_{ri}}{r_i} \quad (32)$$

$$r_i = \sqrt{x_{ri}^2 + y_{ri}^2}$$

پس از ساده‌سازی و با استفاده از روابط (۳۰) تا (۳۲)، میدان برداری ترکیبی به صورت رابطه (۳۳) می‌باشد. در معادلات زیر اندیس k بیانگر تعداد اشیاء است.

$$u = Q_{source} \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} \cos(\eta_i) - Q_{sink} \cos(\theta - \phi) \quad (33)$$

$$v = Q_{source} \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} \sin(\eta_i) - Q_{sink} \sin(\theta - \phi) \quad (34)$$

زاویه مطلوب سر هواپیما ( $\psi_d$ ) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \quad (35)$$

با استفاده از رابطه (۳۵)، نرخ زاویه مطلوب سر هواپیما عبارتست از:

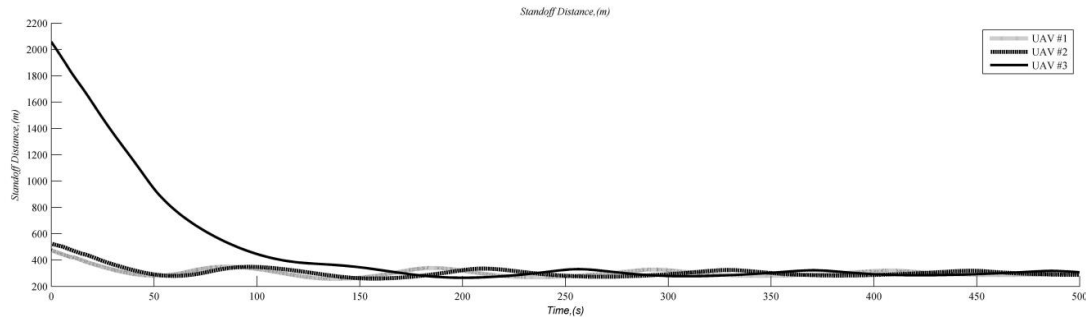
$$\dot{\psi}_d = \frac{\dot{v}u - \dot{u}v}{u^2 + v^2} \quad (36)$$

برای محاسبه نرخ زاویه پیچش هواپیما، به نرخ روابط (۳۳) و (۳۴) نیاز است:

$$\dot{u} = -Q_{source}^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i^3} \cos(\eta_i) + Q_{sink} (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \sin(\theta - \phi) \quad (37)$$

$$\dot{v} = -Q_{source}^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i^3} \sin(\eta_i) - Q_{sink} (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \cos(\theta - \phi) \quad (38)$$

بدین ترتیب با استفاده از معادلاتی که در این مقاله ارائه شد نرخ زاویه مطلوب سر هواپیما و زاویه پیچش هواپیما محاسبه شد. عملاً دو روش با همدیگر ترکیب شده و مزایای هر دو روش در کنار هم وجود دارد.



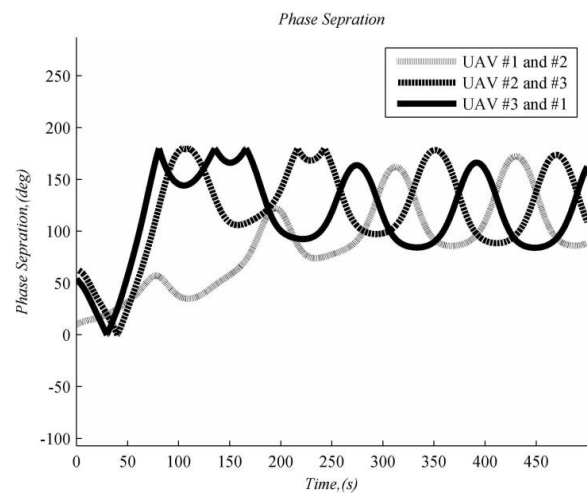
شکل ۸. فاصله هر یک از بدون سرنشین‌ها تا مرکز دایره استند آف  
Fig 8. The UAV distances from the loiter circle

در تعقیب هدف متحرک توانا بوده ولی پاسخی در حضور موانع ندارد. الگوریتم میدان پتانسیل در حضور موانع به خوبی عمل می‌کند. لذا در این مقاله دو روش طراحی مسیر میدان برداری لیاپانوف و پتانسیل بهبود یافته ترکیب شده تا معایب روش میدان برداری لیاپانوف، اصلاح و قابلیت‌های آن تقویت یابد. در نهایت توانایی الگوریتم ترکیبی طراحی شده، در مأموریت پرواز گروهی هواپیماهای بدون سرنشین بال ثابت، برای تعقیب هدف متحرک در حضور مانع متحرک نشان داده شده است.

#### مراجع:

- [1] E. Frew, D. Lawrence, Cooperative Stand-off Tracking of Moving Targets by a Team of Autonomous Aircraft, in: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
- [2] R. Rysdyk, C. Lum, J. Vagners, Autonomous Orbit Coordination for Two Unmanned Aerial Vehicles, in: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
- [3] M.K. Ardakani, M. Tavana, A decremental approach with the A algorithm for speeding-up the optimization process in dynamic shortest path problems, Measurement, 60 (2015) 299-307.
- [4] M. Shaoa, D. Shin, K. Shin, Autonomous Navigation of Nonholonomic Mobile Robots Using Generalized Voronoi Diagrams, Journal of the Korean Society of Manufacturing Technology Engineers, 24(1) (2015) 98-102.
- [5] A.B. Curtis, Path planning for unmanned air and ground vehicles in urban environments, Brigham Young University, 2008.

در مدل‌سازی جهت سرعت اولیه بدون سرنشین‌ها در جهت میدان قرار گرفت. در شکل ۸، نمایش همگرایی به دایره پرسه آورده شده است.



شکل ۹. اختلاف زاویه فاز بین بدون سرنشین‌ها  
Fig 9. The phase angle difference between the unmanned aerial vehicles

همان‌طور که مشاهده می‌نمایید همه بدون سرنشین‌ها با الگوریتم ترکیب شده به خوبی به فاصله استند آف همگرا می‌شوند. در شکل ۹، اختلاف زاویه فاز بین بدون سرنشین‌ها نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل ۹ مشاهده می‌شود، بدون سرنشین‌ها پس از طی کردن زمانی مشخص به محدوده همگرایی می‌رسند و زاویه بین  $20 \pm 120$  پیدا می‌کنند، مدت زمان مدل‌سازی نیز ۵۰۰ ثانیه می‌باشد.

#### ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتم جدیدی برای طراحی مسیر در مأموریت تعقیب هدف متحرک ارائه می‌شود. الگوریتم میدان برداری لیاپانوف

- planning method for mobile robot based on artificial potential field, in: 2011 International Conference on Multimedia Technology, 2011, pp. 3192-3195.
- [17] E. Burgos, S. Bhandari, Potential flow field navigation with virtual force field for UAS collision avoidance, in: 2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2016, pp. 505-513.
- [18] Q. Li, L. Wang, B. Chen, Z. Zhou, An improved artificial potential field method for solving local minimum problem, in: 2011 2nd International Conference on Intelligent Control and Information Processing, 2011, pp. 420-424.
- [19] E.W. Frew, D.A. Lawrence, S. Morris, Coordinated Standoff Tracking of Moving Targets Using Lyapunov Guidance Vector Fields, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(2) (2008) 290-306.
- [20] D. Lawrence, Lyapunov Vector Fields for UAV Flock Coordination, in: 2nd AIAA "Unmanned Unlimited" Conf. and Workshop & Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- [21] E.W. Justh, P.S. Krishnaprasad, Steering laws and continuum models for planar formations, in: *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, 2003, pp. 3609-3614 vol.3604.
- [22] D.A. Paley, N.E. Leonard, R. Sepulchre, Oscillator Models and Collective Motion: Splay State Stabilization of Self-Propelled Particles, in: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, pp. 3935-3940.
- [23] D.A. Paley, N.E. Leonard, R. Sepulchre, D. Grunbaum, J.K. Parrish, Oscillator Models and Collective Motion, *IEEE Control Systems*, 27(4) (2007) 89-105.
- [24] R. Sepulchre, D. Paley, N. Leonard, Collective Motion and Oscillator Synchronization, in: V. Kumar, N. Leonard, A.S. Morse (Eds.) *Cooperative Control: A Post-Workshop Volume 2003 Block Island Workshop on Cooperative Control*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 189-205.
- [25] R. Wise, R. Rysdyk, UAV Coordination for Autonomous Target Tracking, in: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [26] E. Rimon, D.E. Koditschek, Exact robot navigation using artificial potential functions, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(5) (1992) 501-518.
- [27] S. Waydo, R.M. Murray, Vehicle motion planning
- [6] C.b. Moon, W. Chung, Kinodynamic Planner Dual-Tree RRT (DT-RRT) for Two-Wheeled Mobile Robots Using the Rapidly Exploring Random Tree, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(2) (2015) 1080-1090.
- [7] P. Yao, H. Wang, Z. Su, Hybrid UAV path planning based on interfered fluid dynamical system and improved RRT, in: *IECON 2015 - 41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2015, pp. 000829-000834.
- [8] J. Ni, K. Wang, H. Huang, L. Wu, C. Luo, Robot path planning based on an improved genetic algorithm with variable length chromosome, in: 2016 12th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD), 2016, pp. 145-149.
- [9] D.P. Horner, A.J. Healey, Use of artificial potential fields for UAV guidance and optimization of WLAN communications, in: 2004 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles (IEEE Cat. No.04CH37578), 2004, pp. 88-95.
- [10] M. Nieuwenhuisen, M. Schadler, S. Behnke, Predictive potential field-based collision avoidance for multicopters, *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci.*, (2013).
- [11] T. Paul, T.R. Krogstad, J.T. Gravdahl, UAV formation flight using 3D potential field, in: 2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2008, pp. 1240-1245.
- [12] Y. Koren, J. Borenstein, Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation, in: *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1991, pp. 1398-1404 vol.1392.
- [13] J. Ni, W. Wu, J. Shen, X. Fan, An improved VFF approach for robot path planning in unknown and dynamic environments, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014 (2014).
- [14] J. Ni, W. Wu, J. Shen, X. Fan, An Improved VFF Approach for Robot Path Planning in Unknown and Dynamic Environments, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014 (2014) 10.
- [15] S. Patil, J.v.d. Berg, S. Curtis, M.C. Lin, D. Manocha, Directing Crowd Simulations Using Navigation Fields, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(2) (2011) 244-254.
- [16] B.-q. Ye, M.-f. Zhao, Y. Wang, Research of path

using stream functions, in: Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on, 2003, pp. 2484-2491 vol.2482.