



تحلیل غیرموضعی ارتعاشات آشوبناک، رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک نانولوله‌های کربنی تک‌لایه با در نظر گرفتن اثرات حرارتی

حبیب رمضان نژاد آزابنی^{۱*}، حماد کشاورزپور^۲، محمد رحیم‌زاده^۳

^۱ گروه مهندسی مکانیک، واحد رامسر، دانشگاه آزاد اسلامی، رامسر، ایران.

^۲ گروه مهندسی مکانیک، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران.

^۳ گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی گرگان، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۲۲

بازنگری: ۱۳۹۷/۰۲/۰۷

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۴/۱۰

کلمات کلیدی:

نانولوله کربنی

آشوب

دیاگرام‌های دوشاخه‌ای

پدیده پرش

رزونانس سوپرهارمونیک

خلاصه: در این مقاله با ارائه یک مدل غیرخطی از رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه با فرض دامنه ارتعاشی زیاد روی بستر ویسکوالاستیک تحت اعمال بار خارجی هارمونیک در یک محیط حرارتی به تحلیل رفتار آشوبناک و همچنین تحلیل رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک آن‌ها پرداخته شده است. با استفاده از روش گالریکین با توابع شکل مثلثاتی و رانگ کوتای مرتبه چهار معادلات حاکم حل شده است. با به‌کارگیری دیاگرام‌های دوشاخه‌ای و بزرگ‌ترین نمای لیپانوف پارامترهای آشوب از پارامترهای پریودیک شناسایی شده و رفتار پریودیک و آشوب نانولوله‌های کربنی توسط نمودارهای فاز و نگاشت پوانکاره نشان داده شده است. در ادامه با استفاده از روش مقیاس چندگانه به تحلیل رفتار رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک نانولوله‌های کربنی به‌منظور امکان‌سنجی بروز پدیده پرش پرداخته شده است. حساسیت رفتار دینامیکی نسبت به پارامترهای مختلف شامل ضرایب بستر ویسکوالاستیک، پارامتر کنترلی فرکانس و دامنه نیروی خارجی در وقوع پدیده پرش در نانولوله‌های کربنی تک‌لایه بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که دامنه نیروی خارجی، ضرایب بستر ویسکوالاستیک، پارامتر کنترلی فرکانس و تغییرات دما در دو حالت دما بالا و دما پایین دارای اثری قابل توجه بر پاسخ فرکانسی با حضور پدیده پرش دارند. همچنین دامنه تحریک می‌تواند یک عامل کنترل‌کننده بر بروز پدیده آشوب باشد.

۱- مقدمه

نانولوله‌های کربنی به‌واسطه دارا بودن خواص مکانیکی، شیمیایی، گرمایی و الکتریکی بسیار منحصربه‌فرد مانند مقاومت بالا در برابر چگالی پایین، نفوذپذیری زیاد، پایداری مکانیکی و حرارتی بالا، دوام زیاد در برابر گرما، قابلیت تمیز کردن و استفاده مجدد در فرایند تصفیه آب، هدایت الکتریکی بالا و ... کاربرد بسیار وسیعی در صنایع مختلف دارند. نانولوله‌های کربنی کاربردهای متنوعی مانند به‌کارگیری آن‌ها در ذخیره‌کننده و پیل سوختی، نانو کاتالیست برای جذب و ذخیره‌سازی گاز طبیعی و هیدروژن و ... دارند. با توجه به استفاده از نانولوله‌های کربنی به‌عنوان یک سیستم الکترومکانیکی در ساخت سنسورهای سرعت‌بالا و اجزای اصلی سیستم‌های پردازش سیگنال به‌صورت تک‌جداره یا چندجداره، تحلیل ارتعاشات و پایداری آن‌ها از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. به همین دلیل تحلیل ارتعاشات و پایداری نانولوله‌های کربنی با دو رویکرد مدل‌سازی خطی و غیرخطی مورد توجه تحقیقات دانشمندان در این زمینه بوده است. با رویکرد غیرخطی در

مدل‌سازی سیستم‌های گسسته و پیوسته و تولید دانش فنی حل معادلات غیرخطی توسط دانشمندان پدیده‌هایی مشاهده شد که در مدل‌سازی خطی قابل مشاهده نبود. ازجمله این پدیده‌ها وقوع رفتار دینامیکی آشوبناک است که در ارتعاشات اجباری سیستم‌های غیرخطی در حوزه مکانیک رخ می‌دهد. محققین زیادی به بررسی ارتعاشات غیرخطی اجباری سیستم‌های مکانیکی به‌منظور امکان‌سنجی وقوع پدیده‌های غیرخطی مانند آشوب، رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک، وابستگی فرکانس غیرخطی به دامنه، پدیده پرش و ... پرداخته‌اند.

از اولین تحقیقات در این زمینه می‌توان به بررسی اثرات عواملی مانند هندسه و نیروی بین‌لایه‌ای وان‌دروالس^۱ غیرخطی بر ارتعاشات هم‌محور و ناهم‌محور نانولوله‌های کربنی دوجداره حامل سیال اشاره نمود که توسط کوانگ و همکارانش [۱] انجام شده است. آن‌ها نشان دادند که در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های عرضی و محوری کوپل‌شده به شکل قابل‌توجهی منجر به وقوع دامنه‌های ارتعاشی بزرگ‌تری نسبت به حالت کوپل‌نشده در نانولوله

1 van der Waals (vdW)

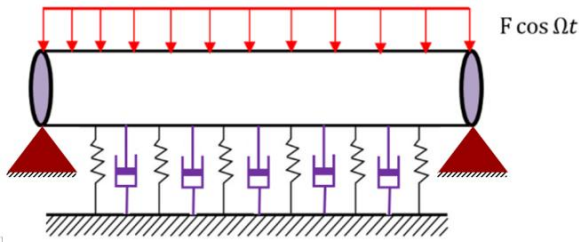
* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h.ramezannejad@iauramsar.ac.ir



استفاده قرار گرفته است. ایشان همچنین از دیاگرام دوشاخه‌ای، مسیره‌های صفحه-فاز و نمودارهای مقاطع پوانکاره جهت شناسایی و پیش‌بینی محدوده‌های آشوبناک ارتعاشات نانولوله کربنی بهره برده‌اند. ارتعاشات خطی و غیرخطی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره حامل سیال به همراه اثرات گرمایی توسط عسکری و اسماعیل‌زاده [۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. نانولوله با شرایط مرزی عمومی و مستقر بر بستر وینکلر-پسترناک توسط تئوری کلاسیک تیر اوپلر-برنولی با در نظر گرفتن اثرات سطح مدل‌سازی شده و آنالیز حساسیت پارامترهای مختلف مؤثر بر فرکانس طبیعی خطی و رزونانس اولیه ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی زیگزاگ صورت گرفته است. ژو و یونس [۸] پاسخ فرکانسی غیرخطی یک نانولوله کربنی تک‌جداره تحت اثر نیروهای بزرگ الکترواستاتیکی را مطالعه کرده‌اند. در مدل تیر اوپلر-برنولی آن‌ها، عوامل غیرخطی ناشی از هندسه و نیروی الکترواستاتیکی بوده است. آن‌ها رفتارهای فنر نرم‌شونده و سخت‌شونده متفاوتی را در رزونانس‌های اول و دوم سیستم مشاهده کردند. یک نانولوله کربنی شبه-سرنگ و حامل سیال توسط هو و دنگ [۹] مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها محدوده‌های آشوبناک نانولوله تک‌جداره بر اثر سرعت سیال را با استفاده از یک مدل سمپلکتیک چندگانه به دست آوردند. ایشان دریافته‌اند که هر قدر طول نانولوله بیشتر باشد محدوده پایداری بزرگ‌تری خواهد داشت. به‌علاوه، تحلیل‌های عددی آن‌ها نشان داد که تعداد بیشتر نیروهای عرضی تأثیر مثبتی بر کاهش محدوده وقوع آشوب و در نتیجه دقت نوسرنگ دارد. هو و همکارانش [۱۰] با اضافه کردن فنرهای الاستیک خطی و پیچشی در دو انتهای یک نانولوله کربنی تک‌جداره و تحت بارگذاری مکانیکی عرضی، امکان وقوع پدیده آشوب را با استفاده از مدل سمپلکتیک چندگانه را تحلیل کردند. مقادیر بحرانی دامنه و فرکانس نیروی تحریک محاسبه شده و میزان اثر پارامترهای سفتی خمشی نسبی و مطلق نانولوله بر پدیده‌های غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، ایشان دو مسیر متفاوت انتقال آشوب برای نانولوله‌های با تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار مشاهده کردند. ارتعاشات اجباری یک نانولوله کربنی حامل سیال و مستقر در بستر وینکلر-پسترناک را در محدوده‌های خطی و غیرخطی مطالعه کرده‌اند. اثر سطح، ویسکوزیته سیال و اثرات دمایی بر مشخصات ماده در استخراج معادلات غیرموضعی اوپلر-برنولی در نظر گرفته شده است. تحلیل حساسیت پارامتریک به جهت آنالیز اثرات کمیت‌های مختلف از قبیل تغییرات دما، شرایط مرزی، ضرایب بستر و سرعت سیال بر فرکانس طبیعی و رزونانس اولیه نانولوله‌های زیگزاگ مختلفی انجام شده است. صادقی گوهری و همکارانش [۱۱] اثر جریان سیال مغناطیسی بر

می‌شود. به‌علاوه، تعامل بین اثر غیرخطی هندسی و نیروی وان‌دروالس غیرخطی در ارتعاشات هم‌محور و ناهم‌محور نانولوله‌های دوجداره کشف شد، اگرچه، بررسی‌های آن‌ها نشان داد که عامل نیروی بین‌لایه‌ای غیرخطی اثر بیشتری بر دینامیک نانولوله‌های دوجداره حامل سیال دارد. وانگ و لی [۲] بر مبنای مدل غیرموضعی، رزونانس غیرخطی اولیه یک تیر اوپلر-برنولی تحت بارگذاری محوری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ دامنه فرکانسی را برای رزونانس اول تیر استخراج کرده و پایداری آن تحت تأثیر عواملی همچون اثرات مقیاس کوچک، بارگذاری محوری اولیه، عدد مود، ثابت بستر وینکلر و نسبت قطر به طول تیر را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. سوآیه و کاسم [۳] با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی هندسی و الکترواستاتیکی یک مدل اوپلر-برنولی چندفیزیکی از یک سنسور جرمی ساخته شده از نانولوله کربنی را در فرکانس تشدید اولیه توسعه دادند. ایشان در مدل خود با در نظر گرفتن هندسه و نیروی الکترواستاتیکی غیرخطی از روش گالرکین و توازن هارمونیک جهت حل معادلات ریاضی مسئله بهره برده‌اند. سپس انتقال فرکانسی در پاسخ دینامیکی نانولوله به دلیل جرم و مکان قرارگیری یک ذره اضافی روی آن را مورد مطالعه قرار داده و دریافته‌اند که حداقل به سه مود ارتعاشی جهت تعیین صحیح جرم و مکان این ذره نیاز است. سعادت‌نیا و همکاران [۴] ارتعاشات اجباری یک نانولوله تک‌جداره با شکل دلخواه و حامل سیال را مطالعه کردند. ایشان از معادلات موسوم به نربز^۱ جهت تعریف انحنای دلخواه نانولوله با تکیه‌گاه ساده بهره برده و از طریق روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ فرکانسی آن را به دست آوردند. همچنین تأثیرات پارامترهای مختلفی همچون سرعت سیال و میزان تغییرات انحنای نانولوله در پاسخ فرکانسی سیستم نیز بررسی شده است. ارتعاشات غیرخطی یک نانولوله گیردار حامل سیال و تحت تأثیر نیروی میدان الکترومغناطیس را سعادت‌نیا و همکارانش [۵] مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. روش گالرکین به همراه مقیاس‌های چندگانه شیوه‌های مورد استفاده ایشان جهت مدل‌سازی و حل مسئله دینامیک غیرخطی نانولوله تک‌جداره گیردار بوده است. مشخص شد که نیروهای میدان الکترومغناطیس تمایل زیادی به افزایش مشخصات غیرخطی سیستم و پاسخ دینامیکی آن دارند. ارتعاشات غیرخطی و حرکات آشوبناک یک نانولوله کربنی تحت اثر نیروهای محوری و واقع شده بر بستر الاستیک وینکلر-پسترناک را عسکری و اسماعیل‌زاده [۶] بررسی کرده‌اند. نانولوله با تکیه‌گاه ساده از طریق تئوری تیر اوپلر-برنولی مدل‌سازی شده و روش گالرکین در حل معادلات حاکم مورد

1 Non-uniform rational basis spline (NURBS)



شکل ۱: نانو لوله کربنی تک لایه تحت تحریک هارمونیک خارجی

Fig. 1. Schematic of carbon nanotube under viscoelastic foundation

آشوب و منظم در نمودارهای فضای فازی و نگاشت پوانکاره نمایش داده شده است. در ادامه به منظور تحلیل امکان‌سنجی پدیده پرش با در نظر گرفتن حالت تشدید اولیه و سوپرهارمونیک به حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش مقیاس چندگانه پرداخته شد. با استخراج روابط تحلیلی به بررسی میزان حساسیت وقوع پدیده پرش نسبت به پارامترهایی مانند دامنه تحریک، ضرایب ویسکوالاستیک و پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس و چگونگی رشد و زوال آن پرداخته شد. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که معیار بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف در تشخیص پارامترهای آشوب از پارامترهای منظم از معیار نمودار دوشاخه‌ای دقیق‌تر است. همچنین با توجه به حساسیت زیاد سیستم‌های غیرخطی نسبت به تغییر پارامترهای هندسی و مکانیکی در بروز پدیده‌های غیرخطی آشوب و پرش می‌توان با تحلیل دقیق و انتخاب مناسب از این پارامترها وقوع این پدیده‌های نامطلوب را تا حد زیادی کنترل و تعدیل نمود.

۲- استخراج معادلات حاکم

شکل ۱ نمایی از یک نانولوله کربنی تک لایه تحت تحریک خارجی هارمونیک به طول L با طول L ، مدول یانگ E ، چگالی و سطح مقطع A را روی بستر ویسکوالاستیک نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن اثر دما، بر اساس مدل غیرخطی و غیر موضعی تیر اویلر-برنولی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت نانولوله کربنی تک لایه را می‌توان به فرم زیر بیان نمود [۷].

$$\rho A \left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right) C \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right) \left[\frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx + N_t \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p(x, t) + F(t) \quad (1)$$

ناپایداری یک نانولوله کربنی حامل سیال در یک میدان مغناطیسی محوری را مورد بررسی قرار داده‌اند. در مدل سازه-سیال آن‌ها، معادلات جریان ناویر-استوکس و تیر اویلر-برنولی با یکدیگر کوپل شده و اثرات اندازه هم در سازه و هم در سیال مغناطیسی به ترتیب از طریق پارامتر غیرموضعی و عدد نادسن منظور شده است. نتایج به دست آمده آن‌ها نشان داد که نیروهای میدان مغناطیسی سرعت بحرانی جریان و سفتی خمشی نانولوله را افزایش داده و منجر به پایداری بیشتر می‌شوند. همچنین اثرات اندازه کوچک در سازه و سیال را بررسی شده و کاهش سرعت بحرانی سیال و سفتی خمشی سازه تحت اثر اندازه مشاهده گردیده است. ارتعاشات غیرخطی اجباری و گرمایی زنجیره کربنی در نانولوله‌های کربنی به وسیله دو مدل تیر اویلر و دینامیک مولکولی^۱ توسط لیو و همکارانش [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. همخوانی مناسبی بین نتایج حاصل از دو مدل به دست آمده و رفتار غیرخطی از نوع سخت‌شونده در پاسخ فرکانسی زنجیره کربنی نانولوله مشاهده شده است. اخیراً، روش تابع گرین به دلیل دقت بالا و مناسب بودن در محاسبات عددی به وسیله حسینی و همکاران [۱۳] در تحلیل ارتعاشات اجباری نانولوله کربنی حامل سیال در محیط گرمایی و مستقر بر روی یک بستر ویسکو-الاستیک مورد استفاده قرار گرفته است. در مدل توسعه داده شده ایشان از تئوری الاستیسیته غیرموضعی به همراه عدد نادسن جهت در نظر گرفتن اثرات اندازه بهره گرفته شده و مزیت‌های روش تابع گرین در حل معادلات حاکم سیستم نشان داده شده است. همچنین، اثرات پارامترهای مختلف مانند شرایط مرزی، تغییرات دما، عدد نادسن، سرعت سیال و غیره بر پاسخ دینامیکی نانولوله کربنی تک‌جداره بررسی شده است.

در این مقاله با ارائه مدل دینامیکی غیرخطی و غیرموضعی از رفتار نانولوله‌های کربنی بر اساس تیر اویلر برنولی تک لایه روی بستر ویسکوالاستیک تحت اعمال بارگذاری عرضی خارجی هارمونیک، به تحلیل رفتارهای غیرخطی شامل ارتعاشات آشوبناک و پدیده پرش پرداخته شده است. در این تحلیل اثرات غیرموضعی، محیط حرارتی، بستر ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است. ابتدا با استفاده از روش گالرکین به همراه توابع شکل متناظر با تکیه‌گاه ساده معادلات جزئی حاکم بر رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی به معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان کاهش داده شد. سپس با استفاده از روش رانگ کوتاه معادلات دیفرانسیل معمولی حل شد. برای استخراج پارامترهای آشوب و رفتار منظم از دو روش نمودارهای دوشاخه‌ای و بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف استفاده شده است. رفتار سیستم در پارامترهای

1 Molecular dynamics (MD)

$$\omega_k = \sqrt{\frac{K_E}{\rho A}} \quad (۸)$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k^2 \pi^2 N_t}{\eta AL^2}} \quad (۹)$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{k^4 \pi^4 E}{4\eta L^4}} \quad (۱۰)$$

$$\omega_C^2 = \frac{C}{\rho A} \quad (۱۱)$$

$$\Gamma = \frac{F}{\eta A} \quad (۱۲)$$

در رابطه (۶) Γ و ω به ترتیب دامنه و فرکانس تحریک است. به منظور تحلیل بهتر معادله غیرخطی حاکم بر حرکت نانولوله کربنی تک لایه می‌توان با تعریف پارامترهای زیر معادله غیرخطی بی‌بعد را استخراج نمود.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0 = \sqrt{(\omega_L^2 + \omega_k^2 + \omega_N^2)},$$

$$\mu = \frac{\omega_C^2}{\omega_0^2}, \alpha = \frac{\omega_\alpha^2 r^2}{\omega_0^2}, \Lambda = \frac{\Gamma}{r \omega_0^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \tau = \omega_0 t, W = nu$$

با اعمال این پارامترها می‌توان معادله بی‌بعد حاکم بر رفتار غیرخطی نانولوله کربنی تک لایه را به فرم زیر استخراج نمود.

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} + \mu \frac{du_k}{d\tau} + u_k + \alpha u_k^3 = \Lambda_k \cos \Omega \tau \quad (۱۳)$$

۳- حل پاسخ فرکانسی با استفاده از روش مقیاس چندگانه برای رزونانس اولیه

به منظور ارائه رابطه‌ای تحلیلی از پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی تک لایه تحت بار هارمونیک از روش مقیاس چندگانه استفاده شده است. برای این منظور ابتدا با در نظر گرفتن $\mu = \varepsilon \mu, \alpha = \varepsilon \alpha, \Lambda = \varepsilon \Lambda$ که ε پارامتری بسیار کوچک است معادله دیفرانسیل بی‌بعد حاکم بر رفتار نانولوله کربنی تک لایه به فرم زیر قابل بازنویسی است.

در رابطه (۱) چگالی، ρ چگالی، A سطح مقطع، $e_0 a$ پارامتر غیرموضعی، $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ، w جابجایی عرضی تیر، t زمان، C ضریب دمپینگ بستر ویسکوالاستیک، I ممان اینرسی، L طول نانولوله، $F(t)$ نیروی خارجی و عکس‌العمل بین نانولوله کربنی و بستر ویسکوالاستیک با توجه به مدل وینکلر به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$p(x, t) = -K_E (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) w \quad (۲)$$

که K_E ضریب الاستیک بستر ویسکوالاستیک و همچنین N_t نیروی ناشی از دما نیز به فرم زیر است [۱۰].

$$N_t = -\frac{EA}{1-2\nu} \alpha_x \Delta T \theta_x \quad (۳)$$

که در آن α_x ضریب نفوذ دمایی در راستای x ، ΔT تغییر دما، ν ضریب پواسون و θ_x شیب منحنی هستند. برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای مدل تیر اویلر-برنولی برای نانولوله کربنی تک لایه تابع شکلی به صورت در نظر گرفته می‌شود. این تابع شرایط مرزی جابجایی صفر در دو انتهای تیر را برآورده می‌کند. با اعمال این تابع در معادله دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی (رابطه (۱)) معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی حاکم بر رفتار نانولوله کربنی تک لایه به صورت $w(x, t) = \sum_{k=1}^K W_k(t) \sin \frac{k \pi x}{L}$ تابعی از زمان به فرم زیر به دست می‌آید.

$$\ddot{W}_k + \frac{C}{\rho A} \dot{W}_k + \left(\frac{k^4 \pi^4 EI}{\eta AL^4} + \frac{K_E}{\rho A} + \frac{k^2 \pi^2 N_t}{\eta AL^2} \right) W_k + \frac{k^4 \pi^4 E}{4\eta L^4} W_k^3 = \frac{F(t)}{\eta A} \quad (۴)$$

که

$$\eta = \rho \left(1 + \left(e_0 a \frac{k \pi}{L} \right)^2 \right) \quad (۵)$$

رابطه (۴) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد.

$$\ddot{W}_k + \omega_C^2 \dot{W}_k + (\omega_L^2 + \omega_k^2 + \omega_N^2) W_k + \omega_d^2 W_k^3 = \Gamma \cos \omega t \quad (۶)$$

که

$$\omega_L = \sqrt{\frac{k^4 \pi^4 EI}{\eta AL^4}} \quad (۷)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = \left[-2i\Psi' - i\mu\Psi - 3\alpha\Psi^2\bar{\Psi} + \frac{1}{2}\Lambda \exp(i\sigma T_1) \right] \exp(iT_0) - \mu\Psi^3 \exp(3iT_0) + \frac{1}{2} \exp(i(T_0 + \sigma T_1)) + CC \quad (23)$$

ضریب $\exp(iT_0)$ در رابطه بالا باید برابر صفر باشد زیرا در غیر این صورت پاسخ سیستم به فرم بیکران واگرا خواهد شد. با صفر قرار دادن این ترم معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود.

$$2i\left(\Psi' + \frac{1}{2}\mu\Psi\right) + 3\alpha\Psi^2\bar{\Psi} = \frac{1}{2}\Lambda \exp(i\sigma T_1) \quad (24)$$

به منظور حل رابطه (۲۴)، Ψ در فرم قطبی در نظر گرفته می‌شود.

$$\Psi = \frac{1}{2}a \exp(i\theta) \quad (25)$$

$$\Psi' = i\theta' \frac{1}{2}a \exp(i\theta) \quad (26)$$

با قرار دادن روابط اخیر در رابطه (۲۴) و جداسازی ترم‌های حقیقی و موهومی روابط زیر برای دامنه و فاز حاصل می‌شود.

$$a' = -\mu a + \left(\frac{1}{2}\Lambda\right) \sin(\sigma T_1 - \theta) \quad (27)$$

$$a\theta' = \frac{3}{8}\alpha a^3 - \left(\frac{1}{2}\Lambda\right) \cos(\sigma T_1 - \theta) \quad (28)$$

با در نظر گرفتن $\gamma = \sigma T_1 - \theta$ و $\gamma' = 0$ و $a'_n = 0$ برای حالت پایدار، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\mu a = \left(\frac{1}{2}\Lambda\right) \sin(\gamma) \quad (29)$$

$$a\sigma - \frac{3}{8}\alpha a^3 = \left(\frac{1}{2}\Lambda\right) \cos(\gamma) \quad (30)$$

با به توان دو رساندن روابط بالا و جمع طرفین، رابطه زیر برای پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی حاصل می‌شود.

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\Lambda a^2\right)^2 \right] a^2 = \frac{1}{4}\Lambda^2 \quad (31)$$

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} + u_k = -\varepsilon\mu \frac{du_k}{d\tau} - \varepsilon\alpha u_k^3 + \varepsilon\Lambda \cos \Omega\tau \quad (14)$$

با تعریف پارامتر σ به منظور تحلیل رزونانس اولیه می‌توان فرکانس تحریک بی‌بعد را به فرم زیر در نظر گرفت.

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon\sigma \quad (15)$$

که با توجه به رابطه (۱۴) $\omega_n = 1$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین متغیر مستقل جدید زمان نیز به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$T_n = \varepsilon^n \tau \quad (16)$$

با تعریف متغیر زمانی جدید مشتقات اول و دوم نسبت به متغیر τ به صورت زیر استخراج می‌شوند.

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dT_0}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

روش مقیاس چندگانه برای حل رابطه (۱۴) مورد استفاده قرار می‌گیرد. بری این منظور پاسخ سیستم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 \quad (18)$$

با اعمال روش مقیاس چندگانه معادله زیر قابل استخراج است.

$$(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2)(u_0 + \varepsilon u_1) + (u_0 + \varepsilon u_1) = -\varepsilon\alpha(u_0 + \varepsilon u_1)^3 - \varepsilon\mu(D_0 + \varepsilon D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) + \varepsilon\Lambda \cos(\Omega T_0) \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) ضرایب ε^0 و ε^1 به صورت زیر قابل جداسازی هستند.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (20)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3 - \mu D_0 u_0 + \Lambda \cos(\Omega T_0) \quad (21)$$

حل کلی رابطه (۲۰) به فرم زیر است.

$$u_0 = \Psi(T_1) \exp(iT_0) + CC \quad (22)$$

در رابطه (۲۱) $\Psi(T_1)$ یک پارامتر مجهول C بخش مزدوج ترم اول است. برای محاسبه پاسخ از رابطه (۲۲) در رابطه (۲۱) قرار داده می‌شود.

در این حالت رزونانس ترم سکولار به صورت زیر از رابطه (۳۵) قابل استخراج است.

$$2i\Psi' + i\mu\Psi + 6\alpha\Psi\Lambda^2 + 3\alpha\Psi\bar{\Psi} - \alpha\Lambda^3 \exp(3i\sigma T_1) = 0 \quad (38)$$

با در نظر گرفتن $\Psi = \frac{1}{2}a \exp(i\theta)$ و اعمال آن در رابطه (۳۸) و تفکیک قسمت حقیقی و موهومی دو رابطه زیر استخراج می شوند.

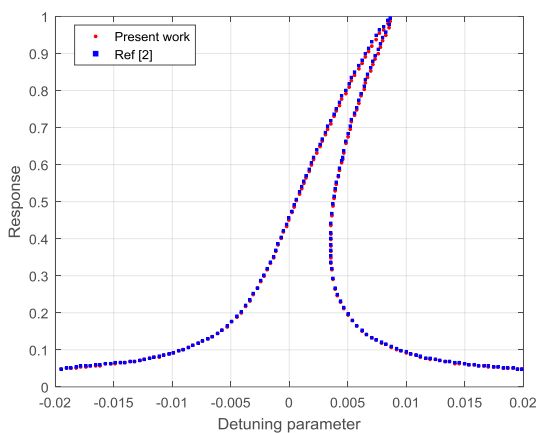
$$a' = -\frac{1}{2}\mu a - \alpha\Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \theta) \quad (39)$$

$$a\theta' = 3\alpha\left(\Lambda^2 + \frac{1}{8}a^2\right)a + \alpha\Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \theta) \quad (40)$$

با استفاده از روند ارائه شده در بخش قبلی پاسخ فرکانسی به فرم زیر استخراج می شود.

$$\left[\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 3\alpha\Lambda^2 - \frac{3\alpha}{8}a^2\right)^2\right]a^2 = \alpha^2\Lambda^6 \quad (41)$$

چند مقداره بودن منحنی پاسخ به دلیل بروز پرش از دیدگاه فیزیکی دارای اهمیت است. نانولوله کربنی تک لایه مورد مطالعه دارای ویژگی های مکانیکی و هندسی به صورت مدول الاستیسیته $E = 1/1 \text{ TPa}$ ، چگالی $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$ ، طول $L = 45$ ، قطر خارجی $d_0 = 3 \text{ nm}$ و قطر داخلی $d_i = 2/32 \text{ nm}$ ضریب نفوذ $\alpha_x = -1/6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ برای حالت دمایی $\alpha_x = 1/1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ برای حالت دمابالا، تغییرات دما 100 k



شکل ۲: اعتبارسنجی نتایج تحقیق حاضر در حالت رزونانس اولیه با مرجع [۲]

Fig. 2. Verification of results of present work in the case of primary resonance with Ref [2]

۴- حل پاسخ فرکانسی با استفاده از روش مقیاس چندگانه برای غیر رزونانس

در این حالت، فرکانس تحریک، Ω ، به اندازه کافی از محدوده فرکانس طبیعی، ω_0 ، سیستم فاصله دارد بنابراین اثرات تحریک بسیار ناچیز است مگر در وضعیتی که دامنه تحریک بزرگ باشد. در این حالت پاسخ سیستم به فرم رابطه (۱۸) در نظر گرفته می شود. برای این منظور دامنه نیروی خارجی اعمال شده بزرگ در نظر گرفته شده همچنین با در نظر گرفتن $\mu = \epsilon\lambda$ ، $\alpha = \epsilon\alpha$ و در ادامه با استفاده از روند بیان شده در بخش قبلی و تفکیک ضرایب ϵ^0 و ϵ^1 روابط زیر حاصل می شود.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = \Lambda \cos(\Omega T_0) \quad (32)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3 - \mu D_0 u_0 \quad (33)$$

پاسخ رابطه (۳۲) به فرم زیر است.

$$u_0 = \Psi(T_1) \exp(iT_0) + Y \exp(i\Omega T_0) + CC \quad (34)$$

که $Y = 1/5 \Gamma(\omega_k^2 - \Omega^2)^{-1}$ با قرار دادن رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳)، محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 = & -[2i\Psi' + i\mu\Psi + 6\alpha\Psi\Lambda^2 + 3\alpha\Psi\bar{\Psi}] \exp(iT_0) \\ & - \alpha\Psi^3 \exp(3iT_0) - \alpha\Lambda^3 \exp(3i\Omega T_0) \\ & - 3\alpha\Psi^2 \Lambda \exp[i(2+\Omega)T_0] \\ & - 3\alpha\bar{\Psi}^2 \Lambda \exp[i(\Omega-2)T_0] \\ & - 3\alpha\Psi\Lambda^2 \exp[i(1+2\Omega)T_0] \\ & - 3\alpha\Psi\Lambda^2 \exp[i(1-2\Omega)T_0] \\ & - \Lambda[2i\mu\Omega + 3\alpha\Lambda^2 + 6\alpha\Psi\bar{\Psi}] \exp(i\Omega T_0) + CC \end{aligned} \quad (35)$$

برای حالتی که فرکانس تحریک $\frac{1}{3}\omega_n$ نزدیک به است که تحت عنوان رزونانس سوپرهارمونیک نامیده می شود، می توان رابطه زیر را نوشت. توجه این که در این تحلیل $\omega_n = 1$ است.

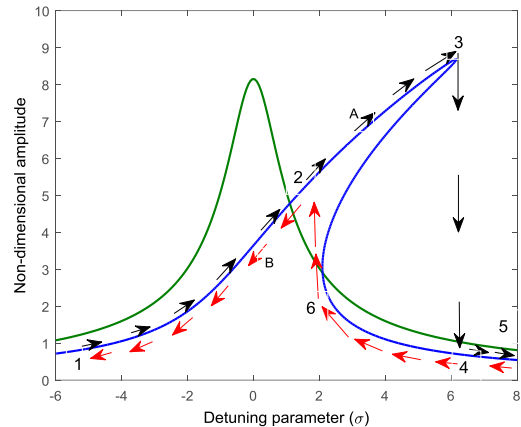
$$3\Omega = 1 + \epsilon\sigma \quad (36)$$

به منظور حذف ترم های سکولار در رابطه (۳۵) در این حالت $3\Omega T_0$ برحسب $\omega_n T_0$ به فرم زیر نوشته می شود.

$$3\Omega T_0 = \omega_n T_0 + \sigma T_1 \quad (37)$$

کاهش و افزایشی با تغییر پارامتر تنظیم کننده صورت گیرد. در حالت افزایشی منحنی تغییر دامنه حرکت از مسیر A و در حالت کاهش از مسیر B عبور خواهد کرد. در این دو حالت دامنه تحریک ثابت فرض می شود. با افزایش فرکانس تحریک از نقطه ۱ دامنه حرکت به آرامی افزایش یافته تا از نقطه ۲ عبور و به مقدار بیشینه خود در نقطه ۳ برسد. هرگاه در این وضعیت مقدار کمی افزایش یابد یک تغییر کاهشی بزرگ در دامنه حرکت ایجاد شده و دامنه حرکت از مکان ۳ به مکان ۴ پرش می کند. در ادامه با افزایش دامنه حرکت به آرامی کاهش یافته تا به نقطه ۵ برسد. هرگاه فرکانس تحریک با کاهش روند کاهشی از نقطه ۵ را طی کند. در ابتدا با کاهش دامنه حرکت به آرامی کاهش یافته تا از نقطه ۴ عبور و به نقطه ۶ برسد. با کاهش یک تغییر افزایشی بزرگ در دامنه حرکت ایجاد شده و دامنه حرکت از وضعیت ۶ به وضعیت ۲ پرش می کند. با ادامه روند کاهشی فرکانس تحریک دامنه حرکت به آرامی نزولی خود را تا نقطه ۱ طی خواهد کرد. بیشینه دامنه پاسخ متناظر با نقطه ۳ زمانی رخ می دهد که افزایش فرکانس تحریک با مقادیر کمتر فرکانس طبیعی صورت گیرد. بخش بین نقاط ۳ و ۴ جز نواحی ناپایدار است. به همین دلیل به طور آزمایشگاهی قابل تجربه نیست. همچنین با توجه به شکل ۳ می توان دریافت که پدیده پرش فقط با در نظر گرفتن اثر غیرخطی قابل تجربه بوده و در حالت خطی این پدیده قابل مشاهده نیست.

شکل ۴ اثر دامنه بی بعد نیروی خارجی را بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی تک لایه در رزونانس اولیه برای $\Lambda = 10$ ، $\Lambda = 20$ و $\Lambda = 30$ و سوپرهارمونیک برای $\Lambda = 7$ ، $\Lambda = 8$ و $\Lambda = 9$ نشان می دهد. بر اساس منحنی های پاسخ فرکانسی ارائه شده در شکل ۴ مشاهده می شود که افزایش دامنه تحریک موجب شدیدتر شدن پرش و افزایش ناپایداری سیستم می شود.

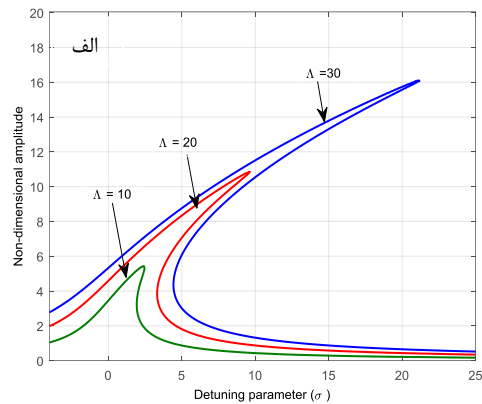
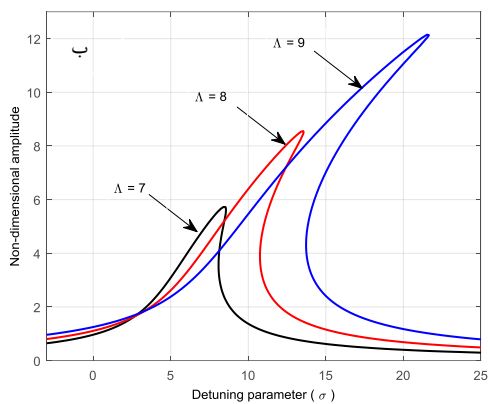


شکل ۳: اثر عامل غیرخطی بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی تک لایه

Fig. 3. Effect of nonlinear term on the frequency response of single walled carbon nanotube

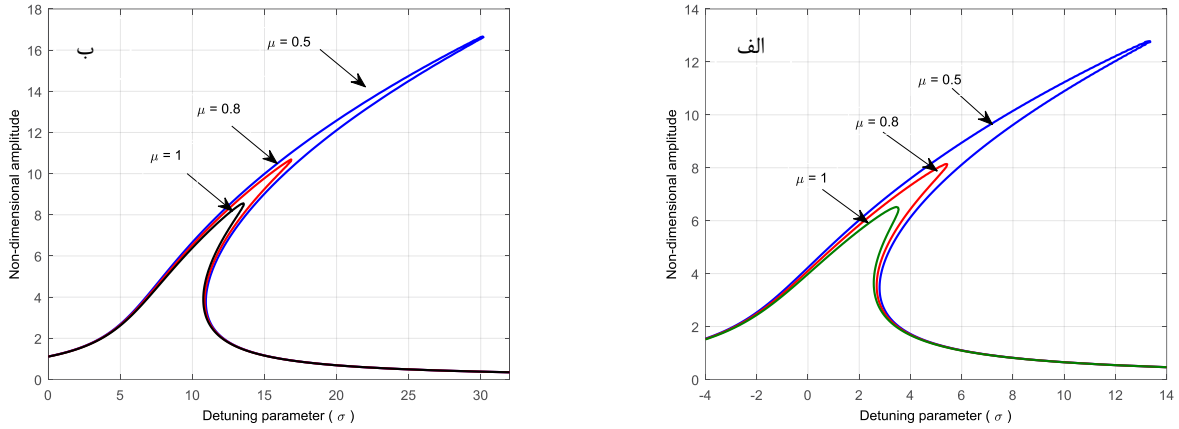
$\Delta T =$ ضریب پواسون و ضریب الاستیک بستر ویسکوالاستیک برابر Ns/m^2 و $K_E = 107 N/m^2$ و ضریب استهلاک بستر ویسکوالاستیک برابر $C = 3 \times 10^{-15}$ و پارامتر غیرموضعی $e_0 a = 1 nm$ است [۷ و ۱۵-۱۲]. شکل ۲ اعتبارسنجی نتایج تحقیق حاضر با در نظر گرفتن مقادیر عددی ارائه شده در مرجع [۲] برای حالت رزونانس اولیه پاسخ فرکانسی استخراج و با نتایج مرجع [۲] نشان می دهد. بر اساس منحنی پاسخ فرکانسی نشان داده شده در شکل ۲ می توان دریافت که تطابق بسیار نزدیکی بین نتایج وجود دارد. در مرجع [۲] اثر دما در معادلات حاکم بر رفتار نانولوله کربنی در نظر گرفته نشده است و تحلیل انجام شده فقط بر روی رزونانس اولیه معطوف شده است. بنابراین در نظر گرفتن اثر دما تفاوت در مسئله بین کار حاضر و مرجع [۲] است.

شکل ۳ اثر پارامتر تنظیم کننده فرکانس را دامنه بی بعد در دو وضعیت خطی و غیرخطی نشان می دهد. تغییر فرکانس تحریک می تواند به دو صورت



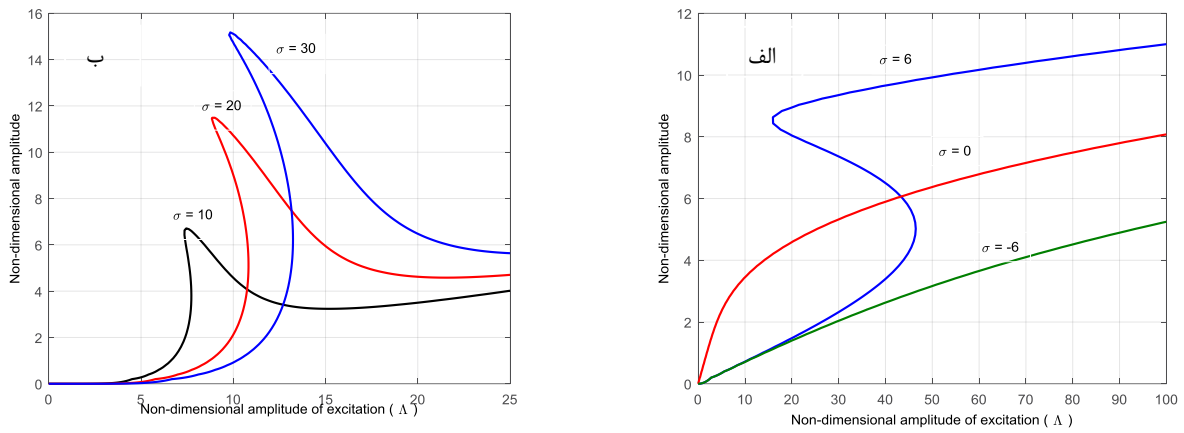
شکل ۴: اثر دامنه بی بعد نیروی خارجی بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در الف) رزونانس اولیه ب) سوپرهارمونیک

Fig. 4. Effect of non-dimensional amplitude of external force on the frequency response of carbon nanotube a) primary resonance b) superharmonic resonance



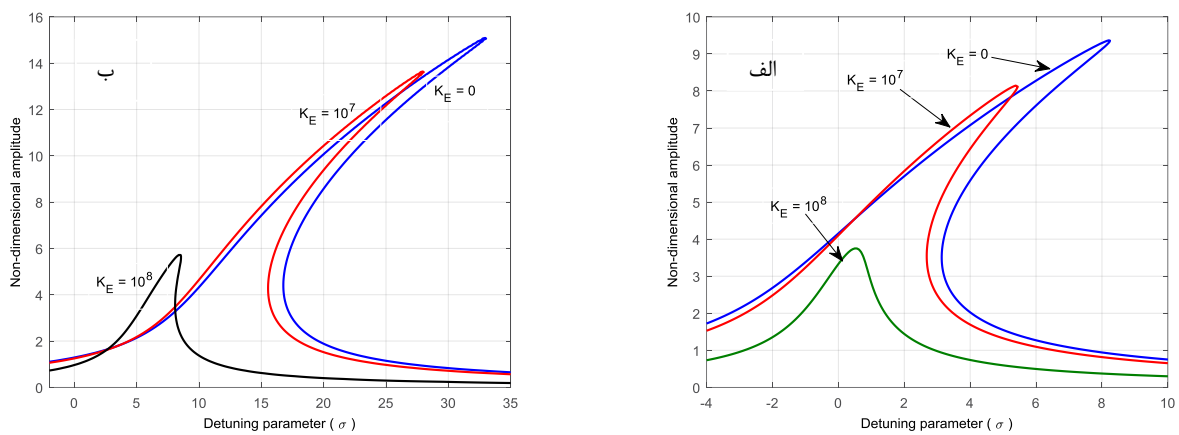
شکل ۵: اثر استهلاک بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در الف) رزونانس اولیه ب) سوپرهارمونیک

Fig. 5. Effect of damping on the frequency response of carbon nanotube a) primary resonance b) super-harmonic resonance



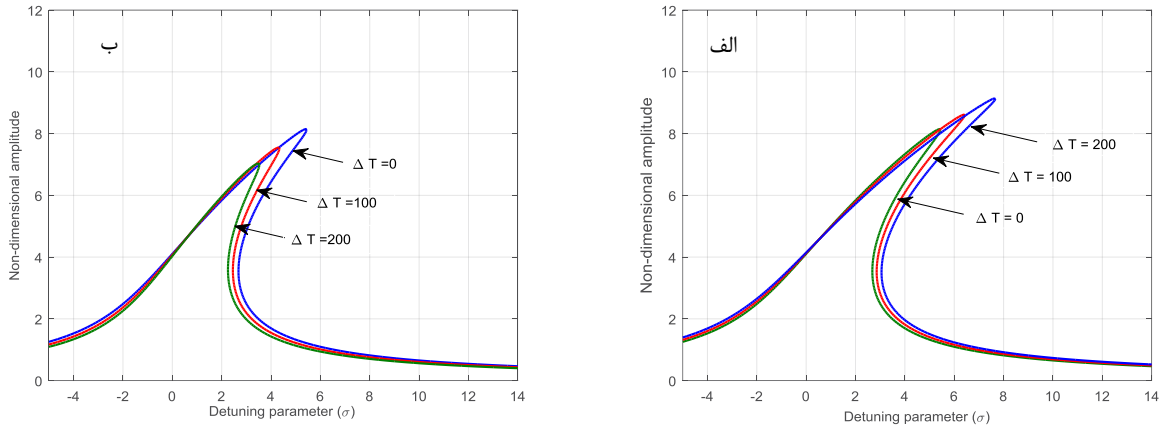
شکل ۶: اثر پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در الف) رزونانس اولیه ب) سوپرهارمونیک

Fig. 6. Effect of detuning parameter on the frequency response of carbon nanotube a) primary resonance b) super-harmonic resonance



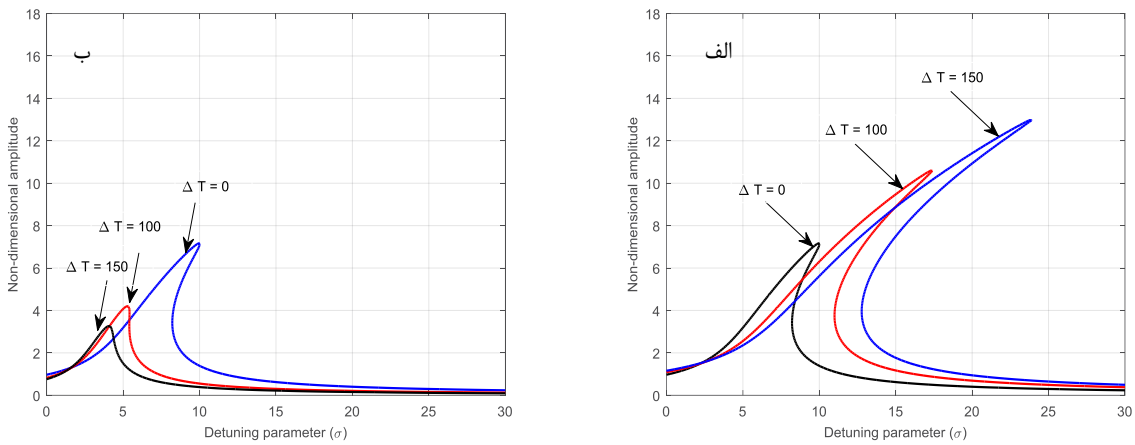
شکل ۷: اثر ضریب سفتی بستر ویسکوالاستیک بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در الف) رزونانس اولیه ب) سوپرهارمونیک

Fig. 7. Effect of stiffness of viscoelastic foundation on the frequency response of carbon nanotube a) primary resonance b) super-harmonic resonance



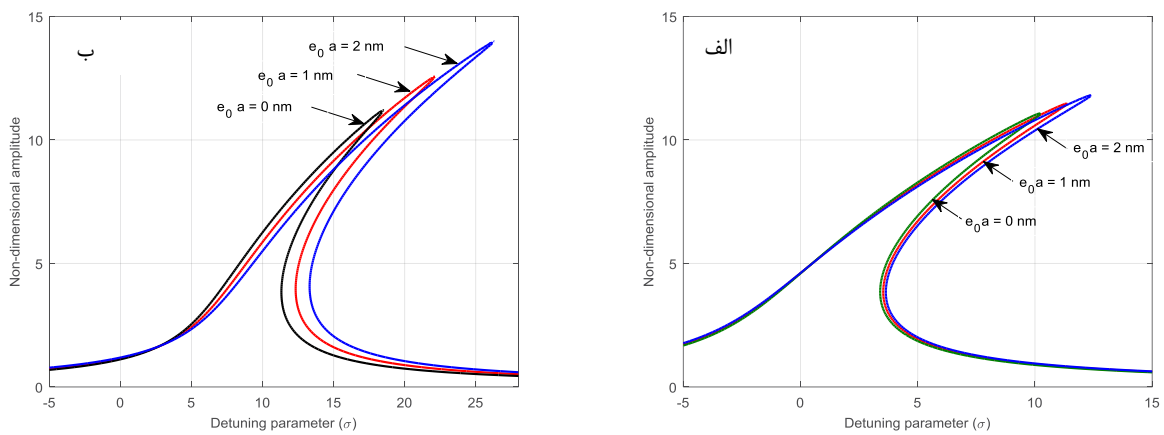
شکل ۸: اثر تغییر دما بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در رزونانس اولیه برای وضعیت الف) دما بالا ب) دما پایین

Fig. 8. Effect of temperature change on the frequency response of carbon nanotube in the case of primary resonance a) high temperature b) low temperature



شکل ۹: اثر تغییر دما بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در رزونانس سوپرهارمونیک برای وضعیت الف) دما بالا ب) دما پایین

Fig. 9. Effect of temperature change on the frequency response of carbon nanotube in the case of superharmonic resonance a) high temperature b) low temperature



شکل ۱۰: اثر پارامتر غیرموضعی بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی الف) رزونانس اولیه ب) رزونانس سوپرهارمونیک

Fig. 10. Effect of nonlocal parameter on the frequency response of carbon nanotube a) primary resonance b) super-harmonic resonance

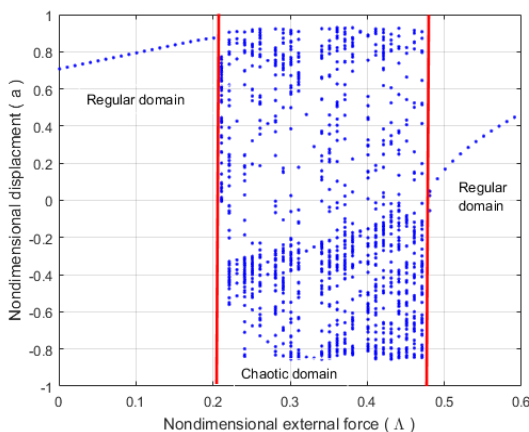
سوپرهارمونیک نسبت به رزونانس اولیه بیشتر است که نشان‌دهنده حساسیت بیشتر نسبت به ضریب بستر الاستیک در وضعیت سوپرهارمونیک است.

برای تحلیل کمی اثر تغییر دما بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در دو وضعیت دما بالا با ضریب نفوذ $K^{-1} = 6 \times 10^{-1} \alpha_x$ و دما پایین با ضریب نفوذ $K^{-1} = -6 \times 10^{-1} \alpha_x$ برای رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک شکل‌های ۸ و ۹ ارائه شده است. با توجه به این شکل‌ها تغییرات دما بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی در دو وضعیت دمابالا و دماپایین دو اثر مختلف دارد. برای وضعیت دمابالا در هر دو حالت رزونانس اولیه و رزونانس سوپرهارمونیک افزایش تغییر دما موجب افزایش ناپایداری شده و موجب تقویت پدیده نامطلوب پرش با دامنه بیشتر می‌شود. برعکس در وضعیت دماپایین افزایش دما موجب افزایش پایداری نانولوله کربنی شده و در تغییرات دمای به اندازه کافی بالا پدیده پرش از سیستم تقریباً حذف می‌شود.

اثر پارامتر غیرموضعی بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی برای دو حالت رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک در وضعیت دمابالا در شکل ۱۰ نشان داده شده است. با تحلیل منحنی‌های پاسخ فرکانسی ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که افزایش این پارامتر موجب تشدید پدیده پرش شده به طوری که تئوری کلاسیک با $e_0 a = 0 \text{ nm}$ پدیده پرش را با شدت کمتری نسبت به تئوری غیرموضعی ارائه می‌کند.

۵- نتایج و بحث در امکان‌سنجی آشوب

همان‌طور که در مقدمه بیان شد رفتار آشوبناک در یک سیستم غیرخطی ناشی از منابع مختلفی شامل رفتار غیرخطی مکانیکی عناصر سیستم،



شکل ۱۱: نمودار دوشاخه‌ای شدن برحسب پارامتر کنترلی دامنه تحریک نانولوله کربنی تک لایه

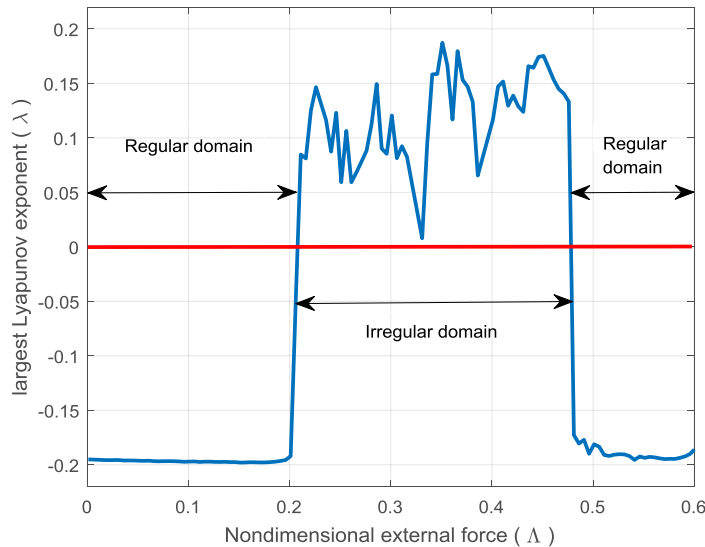
Fig. 11. Bifurcation diagram of carbon nanotube respect to the amplitude of external force

همچنین با کنترل دامنه تحریک در محدوده پایین می‌توان تا حد زیادی اثرات نامطلوب غیرخطی را تعدیل نمود. علاوه بر این منحنی مکان هندسی بیشینه دامنه برای رزونانس اولیه یک منحنی بوده ولی در حالت سوپرهارمونیک دارای منحنی‌های مختلف است. همچنین با توجه به مقادیر دامنه تحریک می‌توان دریافت که میزان حساسیت نسبت به تغییرات این پارامتر برای حالت تشدید سوپرهارمونیک نسبت به تشدید اولیه بیشتر است.

اثر عامل استهلاک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی تک لایه برای سه مقدار $\mu = 0/5$ ، $\mu = 0/8$ ، و $\mu = 1$ در شکل ۵ برای رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک نشان داده شده است. با توجه به منحنی‌های پاسخ فرکانسی می‌توان دریافت که با کاهش عامل استهلاک دامنه حرکت به سمت بی‌نهایت میل کرده و سیستم ناپایدارتر می‌شود. به عبارت دیگر با افزایش ضریب استهلاک دامنه حرکت کاهش یافته به طوری که در مقادیر بیشتر مانند $\mu = 1$ اثر پدیده نامطلوب پرش تا حد زیادی کاهش یافته و سیستم به سمت پایداری بیشتر میل می‌کند. مکان هندسی بیشینه دامنه برای هر دو حالت تشدید دارای یک منحنی است.

منحنی‌های تغییرات دامنه بی‌بعد برحسب دامنه تحریک برای رزونانس اولیه با سه مقدار $\sigma = 6$ ، $\sigma = 0$ ، و $\sigma = 6$ - برای رزونانس سوپرهارمونیک با $\sigma = 30$ ، $\sigma = 20$ ، و $\sigma = 10$ در شکل ۶ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که پدیده پرش در این منحنی‌ها به ازای $\sigma = 6$ برای حالت رزونانس اولیه ولی برای حالت رزونانس سوپرهارمونیک میزان تغییرات پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس اثر چشمگیری بر وقوع پرش ندارد. همچنین برای رزونانس اولیه با توجه به منحنی‌های پاسخ سیستم، پدیده پرش برای مقادیر فرکانس تحریک بیشتر از فرکانس طبیعی سیستم به وجود می‌آید و برای رزونانس سوپرهارمونیک پدیده پرش به صورت پسر و ظاهر می‌شود.

اثر ضریب سفتی بستر ویسکوالاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی تک لایه برای سه مقدار $K_E = 10 \text{ Mpa}$ ، $K_E = 0 \text{ Mpa}$ ، و $K_E = 100 \text{ Mpa}$ در شکل ۷ نمایش داده شده است. بر اساس منحنی‌های نمایش داده شده با افزایش ضریب سفتی بستر ویسکوالاستیک سیستم به سمت پایداری بیشتر میل کرده و رفتار غیرخطی سیستم به رفتار خطی آن نزدیک می‌شود، به طوری که در $K_E = 100 \text{ Mpa}$ تقریباً پدیده پرش از بین رفته است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سفتی سیستم عاملی مثبت در کاهش و حذف پدیده نامطلوب پرش و افزایش پایداری سیستم محسوب می‌شود. برای هر دو حالت رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک پدیده پرش به فرم پیشرو ظاهر شده است. علاوه بر این میزان دامنه پاسخ برای رزونانس



شکل ۱۲: نمودار بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف برحسب پارامتر کنترلی دامنه تحریک نانولوله کربنی تک لایه

Fig. 12. The largest Lyapunov exponent diagram of carbon nanotube respect to the amplitude of external force

زمانی متناظر محاسبه شده است. هر خط سیر ایجادشده در فضای فازی n بعدی دارای مقطع پوانکاره با بعد $n-1$ خواهد بود و نقاط روی این مقاطع با $n-1$ مختصه مشخص می‌شود. تبدیل یا نگاشتی که فصل مشترک جاری از یک مقطع پوانکاره را به فصل مشترک بعدی از همان مقطع پوانکاره بنگارد، نگاشت پوانکاره نامیده می‌شود. برای این تحقیق نقاط پوانکاره در هر پرپود از پاسخ زمانی جمع‌آوری می‌شود. برای یک حرکت پرپودیک نگاشت پوانکاره شامل تعداد محدودی از نقاط منفصل بوده درحالی‌که این نگاشت برای یک حرکت شبه پرپودیک شامل منحنی بسته از نقاط منفصل است؛ اما هرگاه نگاشت پوانکاره هیچ‌یک از دو حالت مذکور نباشد بلکه شامل تعداد زیادی از نقاط بدون نظم باشد حرکت متناظر با آن یک حرکت آشوبناک است [۱۴ و ۱۵]. برای ترسیم نمودار دوشاخه‌ای شدن در این تحقیق با تغییر دامنه تحریک معادله دیفرانسیل بالا حل شده و نقاط پوانکاره متناظر با آن ترسیم شده و بازه‌های رفتار پرپودیک از رفتار آشوب از روی آن با توجه به زیاد شدن نقاط پوانکاره قابل تشخیص است. نمودار دوشاخه‌ای شدن ارائه شده در شکل ۱۱ بیان می‌کند با توجه به تناظر یک‌به‌یک و محدود تعداد نقاط پوانکاره برای بازه‌های $0 < \Lambda < 0.21$ و $0.48 < \Lambda < 0.6$ رفتار سیستم منظم و با توجه به تناظر نامحدود تعداد نقاط پوانکاره برای $0.21 < \Lambda < 0.48$ رفتار سیستم غیرمنظم یا آشوبناک است.

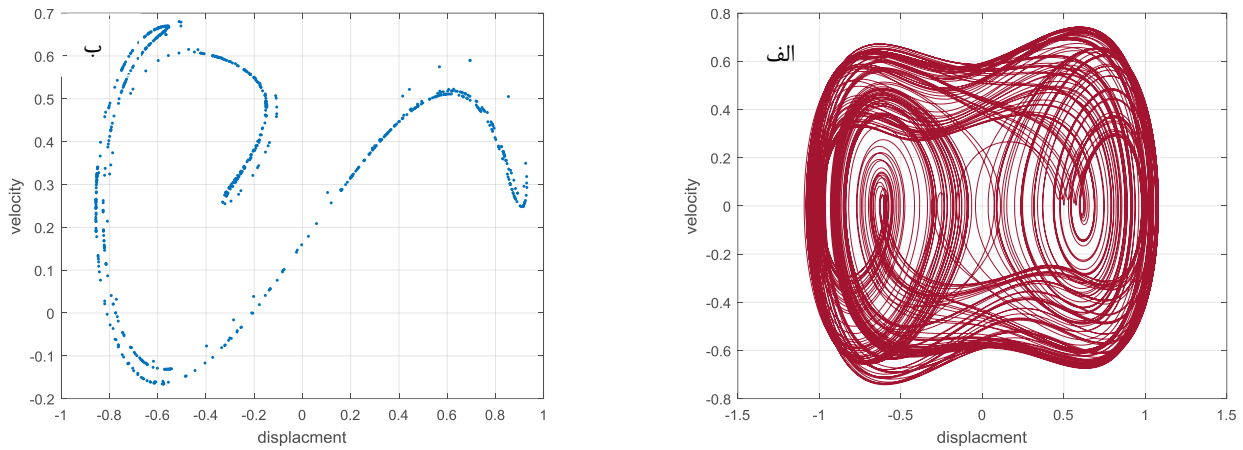
۵-۲- بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف

آشوب در سیستم‌های اجباری وابستگی شدیدی نسبت به شرایط اولیه

جابجایی‌های بزرگ، تغییرشکل‌های زیاد و... رخ می‌دهد. به‌منظور شناسایی پارامترهای بحرانی آشوب از پارامترهای رفتار پرپودیک و شبه‌پرپودیک و تعیین دامنه تغییرات این پارامترها با رفتار ارتعاشی آشوبناک از ابزاری مانند نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف می‌توان استفاده نمود. با تعیین پارامترهای بحرانی آشوب می‌توان رفتار ارتعاشی سیستم در این مقادیر را در قالب نمودارهای فازی جابجایی-سرعت، دیاگرام پوانکاره، پاسخ تاریخیچه زمانی و نمودارهای طیف توانی مشاهده نمود. بنابراین در گام اول ابتدا با استفاده از دو ابزار نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف به امکان‌سنجی وقوع پدیده آشوب با در نظر گرفتن دامنه تحریک به‌عنوان پارامتر متغیر در نانولوله کربنی تک‌لایه تحت بار هارمونیک پرداخته می‌شود.

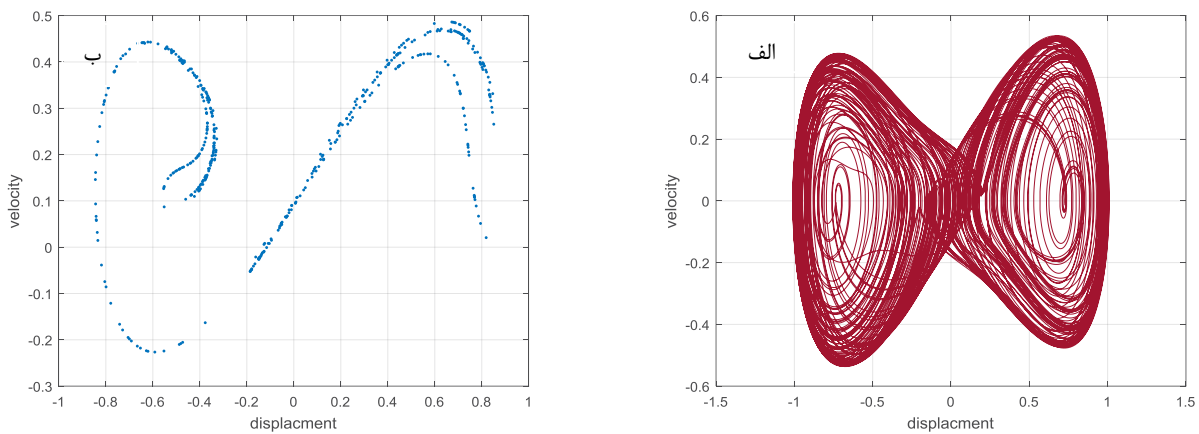
۵-۱- نمودارهای دوشاخه‌ای شدن

در یک سیستم دینامیکی پایداری نقاط تعادل و تعداد آن‌ها بستگی به پارامترهای سیستم دینامیکی دارد که در مسائل غیرخطی موضوع تئوری دوشاخه‌ای شدن است. نحوه تغییر این نقاط تعادل و چگونگی رفتار دینامیکی سیستم در این نقاط تعادل از درجه اهمیت بالایی برخوردار است. به همین دلیل مقادیری از پارامترهای یک سیستم دینامیکی که کیفیت رفتار دینامیکی سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد تحت عنوان مقادیر بحرانی یا مقادیر دوشاخه‌ای شدن معرفی می‌شوند. برای استخراج و ترسیم نمودار دوشاخه‌ای شدن ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت نانولوله کربنی، رابطه (۱۳)، با استفاده از روش رانگ کوتاه به روش عددی در نرم‌افزار متلب حل و پاسخ



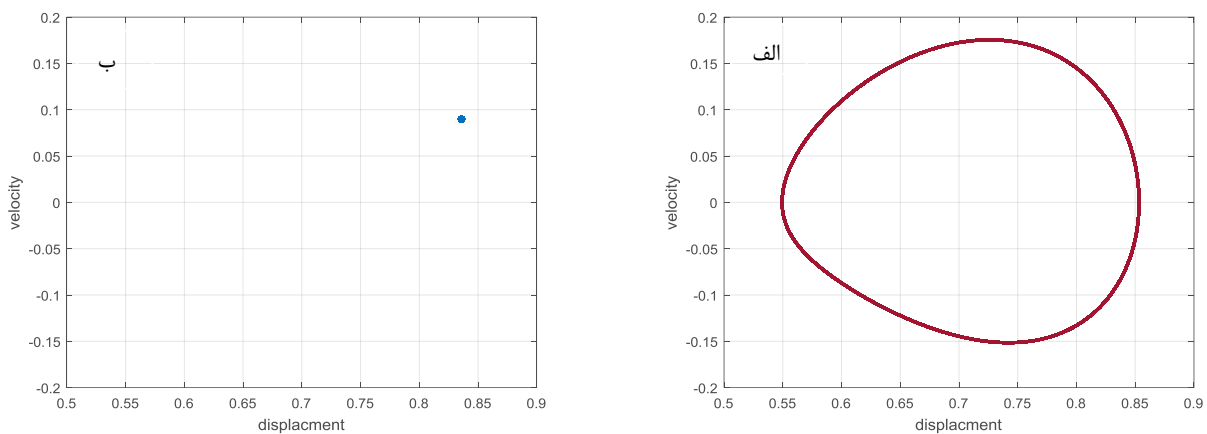
شکل ۱۳: نمودار فازی (الف) و نگاشت پوانکاره (ب) رفتار آشوبناک نانولوله کربنی تک لایه برای $\Lambda = 0.4$

Fig. 13. Phase portrait (a) and Poincaré map (b) of chaotic response of single walled carbon nanotube $\Lambda=0.4$



شکل ۱۴: نمودار فازی (الف) و نگاشت پوانکاره (ب) رفتار آشوبناک نانولوله کربنی تک لایه برای $\Lambda = 0.22$

Fig. 14. Phase portrait (a) and Poincaré map (b) of chaotic response of single walled carbon nanotube $\Lambda=0.22$



شکل ۱۵: نمودار فازی (الف) و نگاشت پوانکاره (ب) رفتار پریودیک نانولوله کربنی تک لایه برای $\Lambda = 0.15$

Fig. 15. Phase portrait (a) and Poincaré map (b) of periodic response of single walled carbon nanotube $\Lambda=0.15$

پیش‌بینی حاصل از نمودارهای دوشاخه‌ای شدن را تأیید می‌کند.

۵-۳- نمودارهای فازی و پوانکاره

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از نمودارهای دوشاخه‌ای شدن به مطالعه چگونگی رفتار سیستم با استفاده از نمودارهای فضای فازی و نگاشت پوانکاره پرداخته می‌شود. نمودارهای فضای فازی و نگاشت پوانکاره نیز با استفاده از روش عددی استخراج شده است. برای این منظور ابتدا با استفاده از روش رانگ کوتا معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم حل و با استخراج پاسخ زمانی که جابجایی و سرعت سیستم است نمودار فازی ترسیم می‌شود. همچنین نگاشت پوانکاره برای هر پارامتر در نظر گرفته شده نظیر استخراج نمودار دوشاخه‌ای شدن ترسیم شده است. نمودار دوشاخه‌ای شدن برای دامنه تحریک بی‌بعد سیستم به ازای $A = 0.4$ و $A = 0.22$ رفتار سیستم را به صورت آشوبناک و برای $A = 0.15$ رفتار سیستم را پریودیک پیش‌بینی می‌کند. این رفتارها را می‌توان در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ مشاهده نمود. در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نمودار فازی تمایل به پر کردن بخشی از فضای فازی را دارد بدون اینکه از رفتار مشخصی پیروی کند همچنین نمودار پوانکاره متناظر نیز دارای تعداد نقاط نامحدود بوده که از مشخصه‌های رفتار آشوبناک است. همچنین با توجه به نمودار فازی و نگاشت پوانکاره ارائه شده در شکل ۱۵ با توجه به یک سیکل منحنی بسته در نمودار فازی و یک نقطه پوانکاره متناظر در نمودار نگاشت پوانکاره می‌توان دریافت که سیستم دارای رفتاری پریودیک است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن اثرات محیط حرارتی و غیرموضعی، مدلی غیرخطی از رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک لایه رو بستر ویسکوالاستیک تحت اعمال نیروی هارمونیک خارجی ارائه شده و رفتارهای غیرخطی آشوبناک و پدیده پرش در رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک مورد تحلیل قرار گرفته است. برای این هدف ابتدا بر اساس مدل تیر اویلر برنولی غیرخطی غیرموضعی معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر رفتار نانولوله‌های کربنی تک لایه استخراج و سپس با استفاده از روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی این دستگاه معادلات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان کاهش داده شد. برای استخراج روابط تحلیلی مربوط به رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک از روش مقیاس چندگانه استفاده و برای تحلیل آشوب روش عددی رانگ کوتا بکار گرفته شده است. به‌منظور استخراج پارامترهای آشوب از دو روش نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و بزرگ‌ترین

دارند. به این معنی که اگر دو خط سیر در فضای فازی از دو نقطه نزدیک به هم شروع شوند با گذشت زمان به‌صورت نمایی از یکدیگر دور می‌شوند. نماهای لیاپانوف مقادیری حدی می‌باشند که در فضای فازی به‌صورت محلی تعریف می‌شوند. همچنین با گذشت زمان میزان رشد یا زوال یک فاصله کوچک از یک خط سیر در یک مکان خاص از صفحه فاز را به‌صورت نمایی مشخص می‌کنند. نماهای لیاپانوف را می‌توان برای یک سیستم مکانیکی با معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت مشخص و یا از داده‌های آزمایشگاهی محاسبه کرد. تحلیل‌های ارائه شده توسط نماهای لیاپانوف، تحلیل پایداری لیاپانوف نامیده می‌شوند. به کمک این نماها می‌توان بین نقاط ثابت، حرکت پریودیک، حرکت شبه پریودیک و آشوبناک تمایز قائل شد. برای محاسبه نمای لیاپانوف معادلات حاکم بر حرکت سیستم را با استفاده از روش رانگ کوتا حل و در هر بازه زمانی کوتاه فاصله دو نقطه نزدیک به هم در فضای فازی را که با شرایط اولیه مختلف شروع به حرکت کرده‌اند اندازه‌گیری شده و در پایان بازه زمانی حل تابعی متناظر با $d(t) = d_0 \times 2^{2t}$ با مقادیر فاصله در هر بازه انطباق داده می‌شود. در صورت واگرا بودن این فواصل مثبت بوده که مبین رفتاری آشوبناک است و در صورت صفر یا منفی بودن به ترتیب مبین رفتاری شبه پریودیک و پریودیک است [۱۴ و ۱۵]. پس اگر اندازه اولیه d_0 بین دو نقطه شروع باشد پس از گذشت t زمان فاصله بین آن‌ها به‌صورت $d(t) = d_0 \times 2^{2t}$ خواهد بود. انتخاب پایه دو یک انتخاب مناسب ولی دلخواه است. نماد را نمای لیاپانوف می‌نامند. جاذب‌ها با نماهای لیاپانوف مثبت مبین جاذب‌های عجیب یا همان جاذب‌های آشوبناک هستند. در این نوع جاذب‌ها نمای لیاپانوف مثبت باعث واگرایی نمایی دو خط سیر در فضای فازی می‌شوند. نمای مثبت نشانه واگرایی و نمای منفی نشانه همگرایی است و بزرگی قدر مطلق نما سرعت همگرایی یا واگرایی را نشان می‌دهد. صفر بودن نما، حالت گذرای سیستم را بیان می‌کند. سیستمی را که هم نمای لیاپانوف مثبت و هم منفی دارد رفتاری آشوبناک خواهد داشت. صحت پیش‌بینی رفتار سیستم با استفاده از نمودارهای دوشاخه‌ای شدن، توسط نمودار بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف مورد بررسی قرار گرفت. شکل ۱۲ تغییرات بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف را برحسب دامنه بی‌بعد تحریک نشان می‌دهد. مرز بین رفتار منظم از رفتار آشوبناک با خط صفر نمایش داده شده است. با توجه به مقدار منفی بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف برای بازه‌های $0.12 < A < 0.48$ و $0 < A < 0.16$ رفتار سیستم منظم و با توجه به مقدار مثبت بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف برای $0.48 < A < 0.21$ رفتار سیستم غیرمنظم یا آشوبناک است. پیش‌بینی نمودار بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف نتایج

۹- نمودار فازی آشوبناک دارای منحنی‌های غیرمنظم است که تمایل به پر نمودن بخش مشخصی از فضای فازی را بدون پیروی از الگوی مشخصی دارد که این رفتار برای دامنه‌های تحریک $A = 0/4$ و $A = 0/22$ مشاهده شد. همچنین برای $A = 0/15$ با توجه به جذب شدن به یک سیکل حدی مشخص رفتار سیستم پرئودیک است.

- استفاده از آزمایش خستگی فراصوتی سبب کاهش زمان بدلیل فرکانس بالای آن می‌شود.
- با توجه به کاهش زمان لازم به منظور دست‌یابی به تعداد چرخه خاص، رسیدن به چرخه‌های بالای 10^7 چرخه در مدت زمان به مراتب کمتری از گذشته امکان‌پذیر می‌باشد.
- کاهش قطر در قسمت میانی سبب ایجاد تنش اعمالی بزرگ‌تری به آن ناحیه می‌شود.
- افزایش انحنا در قسمت میانی سبب ایجاد تنش اعمالی بزرگ‌تری به آن ناحیه می‌شود.
- استحکام خستگی آی.آی.اس. آی. ۱۰۴۵ تا ۲۰۴ مگا پاسکال کاهش پیدا کرد.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی	
A	مساحت، m^2
a	دامنه بی‌بعد جابجایی
C	ضریب ویسکوزیته بستر ویسکوالاستیک N.s/m
d_i	قطر داخلی نانولوله nm
d_o	قطر خارجی نانولوله nm
D_0	اِپراتور مشتق نسبت T_0
D_1	اِپراتور مشتق نسبت T_1
D_2	اِپراتور مشتق نسبت T_2
E	مدول الاستیسیته، N/m^2
$e_0 a$	ضریب غیرموضعی nm
F	نیروی تحریک N
I	ممان اینرسی m^4
K_E	ضریب الاستیک بستر ویسکوالاستیک N/m
k	پارامتر حقیقی
K	پارامتر حقیقی
L	طول نانولوله nm
N_t	نیروی دمایی N
P	نیروی بستر ویسکوالاستیک N
r	ضریب تناسب
t	زمان sec
T_n	متغیر مستقل زمان
ΔT	تغییر دما K

نمای لیاپانوف استفاده شد و پس از استخراج بازه‌های رفتار منظم و آشوب پاسخ دینامیکی سیستم در قالب نمودارهای فضای فازی (جابجایی-سرعت) و نگاشت پوانکاره نمایش داده شد. نتایج مهم استخراج شده در این مقاله به شرح زیر است.

- ۱- پدیده نامطلوب پرش در مدل غیرخطی نانولوله‌های کربنی تک لایه می‌تواند به صورت پسر و پیشرو متأثر از پارامترهای ضرایب بستر ویسکوالاستیک، دامنه تحریک خارجی و پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس ظاهر شود.
- ۲- افزایش ضرایب بستر ویسکوالاستیک اثر مثبت بر کاهش و حذف پدیده پرش داشته درحالی‌که افزایش دامنه تحریک خارجی اثری منفی دارد. این اثرات برای هر دو حالت رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک مشاهده شد.
- ۳- تغییر پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس در نمودار دامنه پاسخ برحسب دامنه تحریک خارجی برای حالت رزونانس سوپرهارمونیک و اولیه موجب بروز پدیده پسر و پرش می‌شود.
- ۴- تغییر دما در دو حالت دمابالا و دمابالین دو اثر مختلف بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی برای هر دو حالت رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک داشته به طوری‌که افزایش تغییرات دما در حالت دمابالا موجب تشدید ناپایداری و در حالت دمابالین موجب کاهش ناپایداری می‌شود.
- ۵- تئوری کلاسیک نسبت به تئوری موضعی سطح پایداری بیشتری را هر دو وضعیت رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک پیش‌بینی کرده به طوری‌که با افزایش پارامتر غیرموضعی بر شدت پدیده پرش افزوده شده و بیشینه دامنه نانولوله کربنی افزایش می‌یابد.
- ۶- در نمودارهای دوشاخه‌ای شدن تعداد نامحدود نقاط پوانکاره نشان‌دهنده رفتار نامنظم و تعداد محدود آن نشان‌دهنده رفتار پرئودیک نانولوله‌های کربنی تک لایه است؛ که در بازه‌های $0/21 < A < 0/6$ و $0/48 < A < 0/48$ رفتار سیستم منظم در بازه $0/48 < A < 0/21$ رفتار سیستم آشوبناک پیش‌بینی شد.
- ۷- در نمودارهای بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف مقدار منفی نشان‌دهنده رفتار منظم و مقدار مثبت نشان‌دهنده رفتار آشوبناک برای نانولوله‌های کربنی تک لایه است که در بازه‌های $0/21 < A < 0/6$ و $0/48 < A < 0/48$ رفتار سیستم منظم در بازه $0/48 < A < 0/21$ رفتار سیستم آشوبناک پیش‌بینی شد.
- ۸- نتایج حاصل از نمودارهای دوشاخه‌ای شدن برای پیش‌بینی مقادیر دامنه تحریک با رفتار آشوبناک توسط نمودار بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف مورد تأیید قرار گرفت.

on Nanotechnology, IEEE, 2014, pp. 689-692.

- [5] Z. Saadatnia, E. Esmailzadeh, D. Younesian, Nonlinear Forced Vibration Analysis of Fluid Conveying Nanotubes Under Electromagnetic Actuation, in: ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2014.
- [6] H. Askari, E. Esmailzadeh, Chaotic and periodic vibration of a carbon nanotube supported by nonlinear foundation, in: 14th IEEE International Conference on Nanotechnology, IEEE, 2014, pp. 632-635.
- [7] H. Askari, E. Esmailzadeh, Forced vibration of fluid conveying carbon nanotubes considering thermal effect and nonlinear foundations, Composites Part B: Engineering, 113 (2017) 31-43.
- [8] T. Xu, M.I. Younis, Nonlinear dynamics of carbon nanotubes under large electrostatic force, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 11(2) (2016) 021009.
- [9] W. Hu, Z. Deng, Chaos in embedded fluid-conveying single-walled carbon nanotube under transverse harmonic load series, Nonlinear Dynamics, 79(1) (2015) 325-333.
- [10] W. Hu, M. Song, Z. Deng, H. Zou, B. Wei, Chaotic region of elastically restrained single-walled carbon nanotube, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 27(2) (2017) 023118.
- [11] M. Sadeghi-Goughari, S. Jeon, H.-J. Kwon, Effects of magnetic-fluid flow on structural instability of a carbon nanotube conveying nanoflow under a longitudinal magnetic field, Physics Letters A, 381(35) (2017) 2898-2905.
- [12] R. Liu, J. Zhao, L. Wang, Nonlinear vibrations of carbon chain resonators tuned by temperature, Materials

جابجایی بی‌بعد	u
جابجایی بی‌بعد	u_k
جابجایی عرضی nm	w
تابع زمان جابجایی	W_k
مختصه در راستای محوری nm	x
علائم یونانی	
ضریب غیرخطی	α
ضریب نفوذ دمایی 1/K	α_x
زاویه فاز	γ
دامنه تحریک بی‌بعد	Λ
پارامتر بسیار کوچک	ε
ضریب وابسته به پارامتر غیرموضعی	η
زاویه فاز	θ
ضریب بی‌بعد استهلاک	μ
ضریب پواسون	ν
چگالی، kg/m ³	ρ
پارامتر تنظیم فرکانس	σ
پارامتر بی‌بعد زمان	τ
ضریب تابع زمان جابجایی	Ψ
مزدوج ضریب تابع زمان جابجایی	$\bar{\Psi}$
فرکانس تحریک rad/s	ω
ترم فرکانس طبیعی وابسته به انرژی پتانسیل	ω_L
ترم فرکانس طبیعی وابسته به نیروی الاستیک بستر	ω_K

منابع

- [1] Y. Kuang, X. He, C. Chen, G. Li, Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid, Computational Materials Science, 45(4) (2009) 875-880.
- [2] Y.-Z. Wang, F.-M. Li, Nonlinear primary resonance of nano beam with axial initial load by nonlocal continuum theory, International Journal of Non-Linear Mechanics, 61 (2014) 74-79.
- [3] S. Souayah, N. Kacem, Computational models for large amplitude nonlinear vibrations of electrostatically actuated carbon nanotube-based mass sensors, Sensors and Actuators A: Physical, 208 (2014) 10-20.
- [4] Z. Saadatnia, A. Barari, E. Esmailzadeh, Nonlinear forced vibration analysis of free-form nanotube conveying fluid, in: 14th IEEE International Conference

- [15] X. Yao, Q. Han, Buckling analysis of multiwalled carbon nanotubes under torsional load coupling with temperature change, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 128(3) (2006) 419-427.
- [16] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [17] F.C. Moon, *Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers*, Wiley, 1987.
- [13] M. Hosseini, R. Bahaadini, M. Makkiabadi, Application of the Green function method to flow-thermoelastic forced vibration analysis of viscoelastic carbon nanotubes, *Microfluidics and Nanofluidics*, 22(1) (2018) 6.
- [14] L. Wang, Q. Ni, M. Li, Q. Qian, The thermal effect on vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 40(10) (2008) 3179-3182.
- Research Express, 4(10) (2017) 105026.