



روشی نیمه تحلیلی مبتنی بر فرمول بندی ترکیبی جهت تحلیل الاستیک ترک در محیط همگن ناهمسانگرد

صدیقه قاسمی، محمد طاهر کمالی*، بابک شکرالهی زاده

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۰۷

بازنگری: ۱۳۹۷/۰۲/۲۶

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۴/۱۲

کلمات کلیدی:

ضریب شدت تنش

فرمولاسیون ترکیبی

ماده الاستیک ناهمسانگرد

اصل تغییرات رایزنر

خلاصه: در این مطالعه، یک روش نیمه تحلیلی مبتنی بر فرمول بندی ترکیبی رایزنر جهت تحلیل الاستیک مواد جامد همگن ناهمسانگرد دارای ترک لبه و یا ترک داخلی ارائه شده است. میدان های جابجایی و تنش به صورت مجموعی از یک تابع معلوم و یک سری توابع با ضرایب مجهول بیان می شوند. این توابع طوری انتخاب می شوند که تکنیکی میدان تنش در نوک ترک و ناپیوستگی میدان جابجایی در راستای عمود بر وجوه ترک برآورده شود. در این روش شرایط مرزی اساسی و طبیعی همگن و غیرهمگن به طور دقیق ارضا می شوند و معادلات تعادل و سازگاری به فرم معادله تغییراتی رایزنر با دقت مورد نظر قابل اعمال است. حل معادله تغییراتی منجر به یک دستگاه معادلات خطی بر حسب ضرایب مجهول می شود. با بدست آوردن ضرایب مجهول، توابع جابجایی و تنش در جسم معلوم می شوند و حداکثر بازشدگی ترک و ضرایب شدت تنش محاسبه خواهند شد. برای صحت سنجی و بررسی کارایی روش ارائه شده، جسم ترک دار در حالت های مختلف مود اول و مود ترکیبی بررسی شد. نتایج نشان می دهد که ضرایب شدت تنش دارای سرعت همگرایی بالایی هستند و نتایج روش ارائه شده دارای انطباق خوبی با نتایج تحلیلی موجود در مراجع می باشد.

۱- مقدمه

پیامدهای ناشی از شکست سازه ها در اثر وجود ترک در اعضای آن ها می تواند باعث خسارات جانی و مالی گسترده و جبران ناپذیری گردد. وجود ترک باعث کاهش مقاومت نهایی و در نتیجه گسیختگی مواد در تنش هایی کمتر از تنش های مجاز می شود.

در تحلیل مسائل ترک، پیچیدگی های بسیاری در روند محاسبات وجود دارد که اغلب یافتن پاسخی تحلیلی را برای آن ها بسیار دشوار یا ناممکن می نماید. پیشرفت های چشم گیر در توان محاسباتی، راه را برای استفاده از روش های عددی در حل مسائل پیچیده و دشوار مکانیک شکست هموار کرده است. امروزه در بسیاری از صنایع پیشرفته سعی بر آن است که بتوان سازه هایی سبک تر که قابلیت تحمل بارهای بیشتری را نیز داشته باشند، جایگزین سازه های موجود نمود. بنابراین نوعی از مصالح مهندسی که عمدتاً به نام کامپوزیت ها شناخته می شوند و معمولاً از جنس مواد ناهمسانگرد هستند، به سرعت در حال توسعه و به کارگیری در بخش های مختلف سازه های پیشرفته

* نویسنده دار مکاتبات: kamali@hormozgan.ac.ir

مهندسی هستند. از این رو اتلوری و همکاران [۱] با استفاده از روش اجزاء محدود به تحلیل مسائل مکانیک شکست در مواد کامپوزیت در حالت دو بعدی پرداختند. با توجه به تکنیکی تنش در نوک ترک و ناپیوستگی جابجایی در راستای عمود بر وجوه ترک، استفاده از روش اجزاء محدود کلاسیک در حل مسائل ترک و گسترش آن محدود شده است. در این راستا، روش اجزاء محدود توسعه یافته جهت حل مسائل ترک بوجود آمد. سوکومار و همکاران [۲] نیز با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته به مدل سازی سه بعدی مسائل ترک و تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک سه بعدی سطحی پرداختند. همچنین اسدیپور و محمدی [۳]، هیون و بلیچکو [۴]، معتمدی و محمدی [۵] از روش اجزاء محدود توسعه یافته برای تحلیل مسائل دارای ترک، در مواد ناهمسانگرد استفاده کردند.

وجود مشکلات ناشی از وابستگی به مش در روش های اجزاء محدود، منجر به گسترش روش های عددی فاقد المان شده است. در روش های فاقد المان، معمولاً به جای المان از توزیع ذرات درون جسم استفاده می شود و بنابراین مشکلات مش بندی مجدد و اعوجاج

در جسم بصورت مجموع یک سری توابع معلوم با ضرایب مجهول بیان می‌شوند. این توابع طوری انتخاب می‌شوند که تکینگی میدان تنش در نوک ترک و ناپیوستگی میدان جابجایی در راستای عمود بر وجوه ترک برآورده شود. در این روش شرایط مرزی اساسی و طبیعی همگن و غیر همگن به صورت دقیق ارضا می‌شوند و معادلات تعادل و سازگاری به فرم معادله تغییراتی با دقت مورد نظر قابل اعمال است. حل معادله تغییراتی منجر به یک دستگاه معادلات خطی می‌شود. در محاسبه برخی عناصر ماتریس، انتگرالی وجود دارد که توابع زیر انتگرال در نوک ترک تکین هستند. برای محاسبه انتگرال‌های تکین از تبدیل دافی^۱ [۹ و ۱۰] استفاده شده است. با بدست آوردن ضرایب مجهول، توابع جابه‌جایی و تنش در جسم معلوم می‌شوند و به سهولت بازشدگی ترک و ضرایب شدت تنش محاسبه خواهند شد.

۲- فرمولاسیون ترکیبی

ریزنر فرمول‌بندی ترکیبی را بر اساس معادله تغییرات انرژی پتانسیل مینیمم و با تعریف میدان جابه‌جایی و تنش‌های خارج از صفحه در صفحات چند لایه بسط داد. ریزنر معادله تغییراتی خود را در یک جسم سه بعدی، در غیاب نیروهای خارجی و حجمی به صورت رابطه (۱) ارائه داده است [۱۱ و ۱۲]:

$$\delta \iiint \left\{ U + (u_{z,z} - \varepsilon) \sigma + (u_{z,i} + u_{i,z} - \gamma_i) \tau_i \right\} dz dx_1 dx_2 = 0, i = 1, 2 \quad (1)$$

$$\sigma \equiv \sigma_{zz}, \varepsilon \equiv \varepsilon_{zz}, \tau_2 \equiv \sigma_{yz}, \gamma_1 \equiv \gamma_{xz}, \gamma_2 \equiv \gamma_{yz}$$

که در آن δ ، بیانگر تغییرات و U انرژی کرنشی جسم بر اساس کرنش‌های بدست آمده از روابط کرنش-جابجایی و تنش‌های تعریف شده در مدل می‌باشد. σ و τ_i $i = 1, 2$ تنش‌های خارج از صفحه هستند که در مدل تعریف می‌شوند. ε و γ_i $i = (1, 2)$ کرنش‌های بدست آمده از قانون هوک، بر حسب تنش‌های تعریف شده در مدل هستند. در این پژوهش، برای حل مسئله صفحه ترک‌دار، با استفاده از اصل تغییرات ریزنر و فرمولاسیون ترکیبی [۱۳]، معادله تغییراتی زیر ارائه می‌شود:

$$\delta \iint \left(\frac{1}{2} \varepsilon_G^T \sigma_M + \sigma_M^T (\varepsilon_G - \varepsilon_H) \right) dA - \delta L_e = 0 \quad (2)$$

المان‌ها، موجود در روش اجزاء محدود، در این روش وجود ندارد. بر این اساس بلیچکو و همکاران [۶] از روش بدون المان گالرکین برای بررسی مسائل مکانیک شکست و رشد ترک در حالت دو بعدی در مصالح همسانگرد استفاده کردند. فلمینگ و همکاران [۷] نیز روش بدون المان غنی شده گالرکین را برای بررسی میدان‌های الاستیک نوک ترک به کار بردند. فکور و مهری خوانساری [۸] نیز با ارائه یک روش عددی بر اساس تئوری ویسکوالاستیک و با استناد به سری‌های پرونی، به شبیه‌سازی خواص مکانیکی ناحیه اطراف نوک ترک در مواد ارتوتروپ پرداختند. کمالی و شجاع [۹] یک روش نیمه تحلیلی فاقد المان‌بندی و گره‌گذاری را بر اساس روش تغییراتی مبتنی بر جابجایی (ریتز) برای تعیین میدان‌های الاستیک در یک جسم همگن ناهمسانگرد دارای ترک گسترش دادند. میدان جابجایی درون جسم به صورتی انتخاب شده است که تکینگی تنش در نوک ترک و ناپیوستگی جابجایی در راستای عمود بر وجوه ترک قابل اعمال باشد. با توجه به اینکه در روش‌های تغییراتی مبتنی بر جابجایی، همگرایی مقادیر تنش‌ها کندتر از مقادیر جابجایی است، جهت برآورد دقیق‌تر تنش‌ها و به دنبال آن ضرایب شدت تنش، در مطالعه حاضر، بر اساس تعمیم کار انجام شده در مرجع [۹]، یک روش نیمه تحلیلی فاقد المان‌بندی مبتنی بر فرمول‌بندی ترکیبی در جسم همگن ناهمسانگرد دارای ترک لبه یا ترک داخلی ارائه شده است. در مرجع [۹] بر اساس روش تغییراتی مبتنی بر جابجایی، فقط میدان جابجایی درون جسم تقریب زده می‌شود و میدان تنش با استفاده از روابط ساختاری بر حسب مشتق میدان جابجایی بدست می‌آید. در کار حاضر، با استفاده از فرمول‌بندی ترکیبی ریزنر، علاوه بر میدان جابجایی، میدان تنش نیز درون جسم تقریب زده می‌شود. در روش حاضر، میدان تنش مستقیماً تقریب زده می‌شود ولی در مرجع [۹]، میدان تنش از مشتق میدان جابجایی بدست می‌آید و با توجه تقریبی بودن میدان جابجایی از دقت میدان تنش کاسته می‌شود و لذا سرعت همگرایی روش حاضر بیشتر از روش مرجع [۹] می‌باشد. همچنین در روش حاضر، بر خلاف روش مرجع [۹]، امکان اعمال شرایط مرزی طبیعی نیز وجود دارد. مزیت روش حاضر نسبت به روش المان محدود توسعه‌یافته، عدم نیاز به تولید المان است و در مقایسه با روش‌های بدون المان، این روش نیازی به تولید ذرات ندارد و اعمال شرایط مرزی اساسی نیز با سهولت بیشتری قابل اعمال است. در این مطالعه، میدان‌های جابجایی و تنش

$$u_i = f_i(x_1, x_2) + B_i(x_1, x_2) \times \left\{ \sqrt{\frac{r}{a}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m [A_{mn}^i F_n(\theta) + B_{mn}^i G_n(\theta)] + \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^{p-j} \beta_{jk}^{u_i} x_1^j x_2^k \right\}, i = 1, 2 \quad (6)$$

و در حالت فرمول‌بندی ترکیبی، علاوه بر بیان میدان جابجایی به صورت رابطه (۶)، میدان تنش نیز به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = g_{ij}(x_1, x_2) + h_{ij}(x_1, x_2) z_{ij}(\theta) \times \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m [E_{mn}^{ij} F_n(\theta) + D_{mn}^{ij} G_n(\theta)] + \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{p-k} \beta_{kl}^{\sigma_{ij}} x_1^k x_2^l \right\}, i, j = 1, 2 \quad (7)$$

ترم‌های شامل \sqrt{r} و $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ، به ترتیب در معادلات (۶) و (۷)، تکنیکی تنش در نوک ترک را مدل می‌کنند.

تابع $F_n(\theta)$ ، $n = 2, 4, \dots$ ناپوستگی میدان‌های الاستیک را در امتداد عمود بر وجوه ترک در نظر می‌گیرد و $F_n(\theta)$ متناظر با n های فرد در امتداد عمود بر وجوه ترک پیوسته است و $G_n(\theta)$ نیز تابعی پیوسته می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_n(\theta) = \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \quad (8)$$

$$G_n(\theta) = \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right), -\pi \leq \theta \leq \pi$$

توابع $f_i(x_1, x_2)$ و $g_{ij}(x_1, x_2)$ ، به ترتیب برای ارضای شرایط مرزی اساسی و طبیعی ناهمگن، توابع $B_i(x_1, x_2)$ و $h_{ij}(x_1, x_2)$ ، به ترتیب جهت ارضای شرایط مرزی اساسی و طبیعی همگن در نظر گرفته شده‌اند. تابع $Z_{ij}(\theta)$ جهت ارضای شرط مرزی طبیعی همگن در وجوه ترک، در نظر گرفته شده است و باید مقدار آن در بازه $[-\pi, \pi]$ تنها در وجوه ترک یعنی $\theta = \pm\pi$ برابر صفر شود. این تابع منحصر بفرد نیست و در واقع هر تابع پیوسته‌ای که در بازه $[-\pi, \pi]$ تنها دارای ریشه‌های $\theta = \pm\pi$ باشد، مناسب است و بصورت رابطه (۹) قابل بیان است.

که در آن زیرنویس G نمایانگر کرنش‌های بدست آمده از روابط کرنش-جابجایی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ijG} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

زیرنویس H نشان‌دهنده کرنش‌های محاسبه شده از معکوس قانون هوک است:

$$[\varepsilon_H] = [S][\sigma_M] \quad (4)$$

اندیس M معرف تنش‌های تعریف شده در مدل، S ماتریس ضرایب الاستیک و L_e نیز بیانگر کار نیروهای خارجی وارد بر جسم است.

مؤلفه‌های رابطه (۲) به صورت ماتریسی زیر می‌باشد:

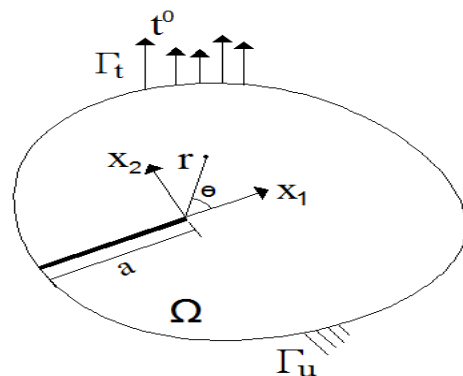
$$\sigma_M = [\sigma_{11M} \quad \sigma_{22M} \quad \sigma_{12M}]^T \quad (5)$$

$$\varepsilon_G = [\varepsilon_{11G} \quad \varepsilon_{22G} \quad \varepsilon_{12G}]^T$$

$$\varepsilon_H = [\varepsilon_{11H} \quad \varepsilon_{22H} \quad \varepsilon_{12H}]^T$$

۳- میدان‌های جابجایی و تنش برای ترک لبه

مطابق شکل ۱، یک محیط همگن الاستیک دارای ترک لبه به طول a در نظر گرفته می‌شود. مبدأ دستگاه مختصات قطبی و دستگاه مختصات دکارتی در نوک ترک فرض شده است. x_1 در امتداد ترک در نظر گرفته می‌شود و $-\pi < \theta < \pi$. در حالت فرمول‌بندی مبتنی بر روش جابجایی [۹]، توابع جابجایی در جسم، به صورت مجموعی از یک سری طیفی و یک سری چند جمله‌ای به صورت رابطه (۶) قابل بیان است.



شکل ۱: جسمی جامد الاستیک همگن همسانگرد دارای ترک لبه با راستای دلخواه

Fig. 1. An anisotropic homogeneous elastic solid with an arbitrarily oriented edge crack

۴- تعریف میدان‌های جابجایی و تنش برای ترک داخلی

یک محیط دو بعدی همگن الاستیک شامل ترک داخلی به طول $2a$ را مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید. مبدأ دستگاه مختصات کارتزین در وسط ترک و محور x_1 در امتداد ترک انتخاب شده است. فرض می‌شود دستگاه‌های مختصات قطبی (r_1, θ_1) و (r_2, θ_2) ، مطابق شکل ۲ در دو نوک ترک قرار دارند و $-\pi < \theta_i < \pi$ ، $i = 1, 2$. مشابه حالت ترک لبه، توابع جابجایی [۹] و تنش برای ترک داخلی نیز به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) تعریف می‌شوند

$$u_i = F_i(x_1, x_2) + B_i(x_1, x_2) \times \left\{ \sqrt{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \left[\left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m \right) \left[A_{mn}^i F_n(\theta_1) + B_{mn}^i G_n(\theta_1) \right] (1 - \cos(\theta_2)) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m \left[E_{mn}^i F_n(\theta_2) + D_{mn}^i G_n(\theta_2) \right] (1 - \cos(\theta_1)) \right] + \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^{p-j} \beta_{jk}^{u_i} x_1^j x_2^k \right\}, i = 1, 2 \quad (11)$$

$$\sigma_{ij} = G_{ij}(x_1, x_2) + H_{ij}(x_1, x_2) Z_{ij}(\theta_1, \theta_2) \times \left\{ \sqrt{\frac{a^2}{r_1 r_2}} \left[\left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m \right) \left[A_{mn}^{ij} F_n(\theta_1) + B_{mn}^{ij} G_n(\theta_1) \right] (1 - \cos(\theta_2)) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m \left[E_{mn}^{ij} F_n(\theta_2) + D_{mn}^{ij} G_n(\theta_2) \right] (1 - \cos(\theta_1)) \right] + \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{p-k} \beta_{kl}^{\sigma_{ij}} x_1^k x_2^l \right\}, i = 1, 2 \quad (12)$$

توابع $G_n(\theta_i)$ و $F_n(\theta_i)$ بصورت ذکر شده در معادله (۸) می‌باشند. از آنجایی‌که توابع جابجایی و تنش باید روی ناحیه $|x_1| \geq a$ پیوسته باشد، ترم ناپیوسته توابع $F_n(\theta_i)$ به صورت $F_n(\theta_1) (1 - \cos\theta_1)$ و $F_n(\theta_2) (1 - \cos\theta_2)$ اصلاح می‌شود. توابع $F_i(x_1, x_2)$ و $G_{ij}(x_1, x_2)$ ، به ترتیب برای ارضای شرایط مرزی اساسی و طبیعی نا همگن، توابع $B_i(x_1, x_2)$ و $H_{ij}(x_1, x_2)$ ، به ترتیب جهت ارضای شرایط مرزی اساسی و طبیعی همگن در نظر گرفته شده‌اند. تابع $Z_{ij}(\theta_1, \theta_2)$ جهت ارضای شرط مرزی طبیعی

$$z_{ij}(\theta) = 1 + \cos\theta \quad (9)$$

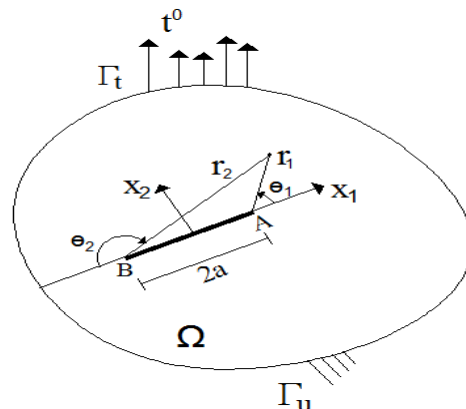
$$\theta \rightarrow \pm\pi; \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} z_{ij}(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} (1 + \cos\theta) = 0, i = 1, 2, j = 2$$

با استفاده از میدان جابجایی تعریف شده u_i $i = 1, 2$ کرنش‌های ϵ_G به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\epsilon_{11G} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial \theta} \sin\theta \\ \epsilon_{22G} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial \theta} \cos\theta \\ 2\epsilon_{12G} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial \theta} \cos\theta \\ + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r, \theta)}{\partial \theta} \sin\theta \quad (10)$$

کرنش‌های ϵ_H نیز با استفاده از قانون هوک و ماتریس نرمی محاسبه می‌شوند. قراردادن کرنش‌های ϵ_G و ϵ_H و تنش‌های تعریف شده σ_M ، در معادله تغییراتی رابطه (۲)، منجر به یک دستگاه معادلات خطی بر حسب ضرایب مجهول می‌شود، که با حل آن مقدار ضرایب مجهول تعیین می‌شود و به راحتی می‌توان میدان الاستیک را در هر نقطه بدست آورد.



شکل ۲: جسمی جامد الاستیک همگن همسانگرد دارای ترک داخلی با راستای دلخواه

Fig. 2. An anisotropic homogeneous elastic solid with an arbitrarily oriented interior crack

روابط (۱۷) تا (۲۰) محاسبه کرد:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}|_{\theta=0} = 2\sqrt{2\pi a} h_{22}(0,0) \sum_{n=0}^{n_0} D_{0n}^{22} \quad (15)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}|_{\theta=0} = 2\sqrt{2\pi a} h_{12}(0,0) \sum_{n=0}^{n_0} D_{0n}^{12} \quad (16)$$

$$K_I^A = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_1} \sigma_{22}|_{\theta_1=0} = \sqrt{\pi a} H_{22}(a,0) \sum_{n=0}^{n_0} 2B_{0n}^{22} \quad (17)$$

$$K_{II}^A = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_1} \sigma_{12}|_{\theta_1=0} = \sqrt{\pi a} H_{12}(a,0) \sum_{n=0}^{n_0} 2B_{0n}^{12} \quad (18)$$

$$K_I^B = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_2} \sigma_{22}|_{\theta_2=0} = \sqrt{\pi a} H_{22}(-a,0) \sum_{n=0}^{n_0} 2D_{0n}^{22} \quad (19)$$

$$K_{II}^B = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_2} \sigma_{12}|_{\theta_2=0} = \sqrt{\pi a} H_{12}(-a,0) \sum_{n=0}^{n_0} 2D_{0n}^{12} \quad (20)$$

۶- مطالعه عددی

به منظور صحت‌سنجی و بررسی کارایی روش ارائه شده در این مقاله در تعیین میدان‌های الاستیک جسمی دوبعدی دارای ترک، به بررسی دو مسئله مد اول ترک در یک ورق مستطیلی دارای ترک گوشه و ترک مرکزی پرداخته شده است (مثال‌های ۱-۶ و ۲-۶). علاوه بر این یک مسئله مد ترکیبی ترک در یک ورق مستطیلی دارای ترک لبه را در دو حالت ایزوتروپ و ارتوتروپ نیز بررسی شده است (مثال ۳-۶). در مثال‌های عددی، ضرایب شدت تنش و حداکثر باز شدگی ترک^۲ به صورت روابط (۲۱) و (۲۲) نرمال شده‌اند.

$$\bar{K}_\alpha = K_\alpha / (\sigma_0 \sqrt{\pi a}), \alpha = I, II \quad (21)$$

$$\overline{COD}_{\max} = COD_{\max} * E / (\sigma_0 a) \quad (22)$$

۶-۱- ورق مستطیلی با ترک لبه تحت تنش کششی یکنواخت

در این مثال یک ورق مستطیلی به عرض $W = 20$ واحد و طول $H = 40$ واحد دارای ترک لبه به طول a در نظر گرفته شده است شکل ۳. مبدأ مختصات دکارتی و قطبی در نوک ترک و محور x_1 در امتداد ترک قرار دارد و $-\pi < \theta < \pi$ می‌باشد. جسم از مصالح ایزوتروپ با ضریب پواسون $\nu = 0.25$ ساخته شده است. این ورق تحت تنش کششی یکنواخت σ_0 در لبه‌های $x_1 = \pm H/2$ قرار گرفته است. این مثال یک مسئله مد اول ترک می‌باشد.

همگن در وجوه ترک، در نظر گرفته شده است و باید مقدار آن در بازه $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ تنها در وجوه ترک یعنی $(\theta_1, \theta_2) = \pm(\pi, \pi)$ برابر صفر شود. این تابع منحصر بفرد نیست و در واقع هر تابع پیوسته‌ای که در بازه $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ تنها دارای ریشه‌های $(\theta_1, \theta_2) = \pm(\pi, \pi)$ باشد، مناسب است و بصورت رابطه (۱۳) قابل بیان است.

$$Z_{ij}(\theta_1, \theta_2) = 1 + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (13)$$

$$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \pm(\pi, \pi); \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$$

$$\lim_{(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \pm(\pi, \pi)} Z_{ij}(\theta_1, \theta_2) = \lim_{(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \pm(\pi, \pi)}$$

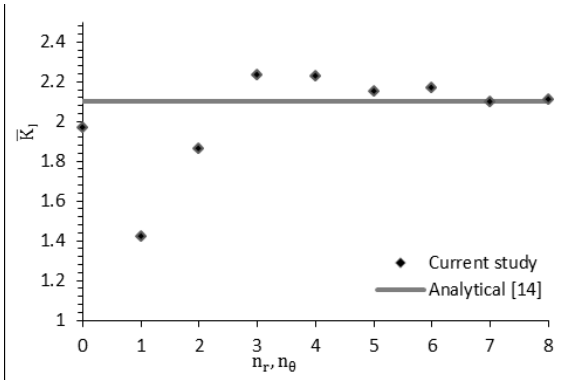
$$\left(1 + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) = 0, i = 1, 2, j = 2$$

برای ترک داخلی میدان کرنش از رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11G} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_1} \cos \theta_1 \\ &\quad - \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 - \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_2} \cos \theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{r_2} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \\ \varepsilon_{22G} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_1} \sin \theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \cos \theta_1 + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_2} \sin \theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{r_2} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \cos \theta_2 \\ 2\varepsilon_{12G} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_1} \sin \theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \cos \theta_1 + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_2} \sin \theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{r_2} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \cos \theta_2 + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial x_1} \\ &\quad + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_1} \cos \theta_1 - \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 \\ &\quad - \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial r_2} \cos \theta_2 + \frac{1}{r_2} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (14)$$

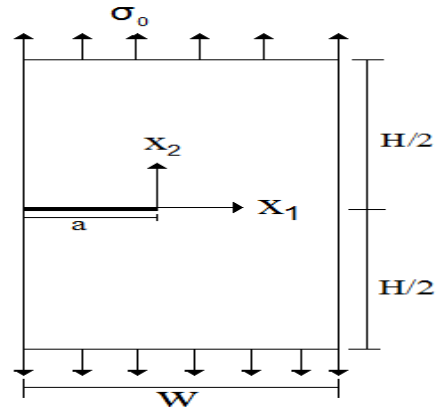
۵- محاسبه ضریب شدت تنش

ضریب شدت تنش^۱ از فاکتورهای بسیار مهم در علم مکانیک شکست می‌باشد. در روش حاضر، متعاقباً با محاسبه میدان‌های تنش در صفحه ترک‌دار، می‌توان ضرایب شدت تنش را در هر دو مود اول و دوم ترک برای ترک لبه با روابط (۱۵) و (۱۶) و برای ترک داخلی با



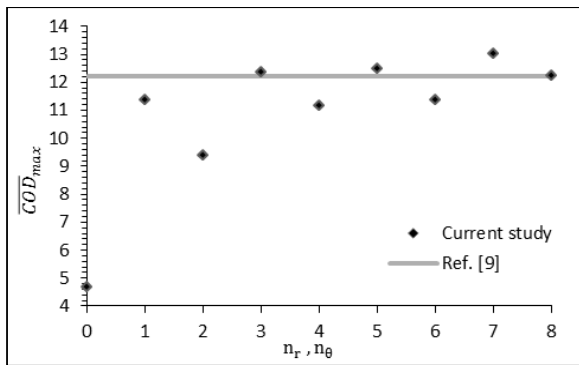
شکل ۴: روند همگرایی \bar{K}_I برای صفحه مستطیلی دارای ترک لبه تحت تنش کششی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{w} = 0.4$

Fig. 4. Trend of convergence of \bar{K}_I for the rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress for the case of $\frac{a}{w} = 0.4$



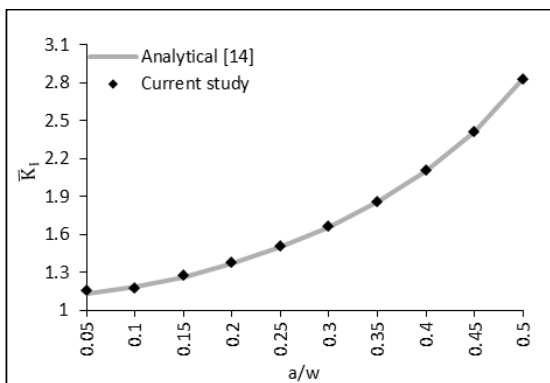
شکل ۳: ورق مستطیلی همسانگرد دارای ترک لبه تحت تنش کششی یکنواخت

Fig. 3. An isotropic rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress



شکل ۵: روند همگرایی \overline{COD}_{max} برای صفحه مستطیلی دارای ترک لبه تحت تنش کششی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{w} = 0.4$

Fig. 5. Trend of convergence of \overline{COD}_{max} for the rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress for the case of $\frac{a}{w} = 0.4$



شکل ۶: تغییرات \bar{K}_I بر حسب $\frac{a}{w}$ برای صفحه مستطیلی دارای ترک لبه تحت تنش کششی یکنواخت

Fig. 6. Variation of \bar{K}_I versus $\frac{a}{w}$ for the rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress

شرایط مرزی طبیعی حاکم بر مسئله به صورت زیر است:

$$\text{on } x_2 = \pm \frac{H}{2}; \quad \sigma_{22} = \sigma_0, \sigma_{12} = 0 \quad (23)$$

$$\text{on } x_1 = -a, W - a; \quad \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0$$

$$\text{on } -a \leq x_1 < 0, x_2 \rightarrow 0; \quad \sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0$$

با توجه به شرایط مرزی حاکم بر مسئله و تقارن نسبت به محور،

میدان‌های جابجایی و تنش به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u_1 = \sqrt{\frac{r}{a}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m (B_{mn}^1 \cos \frac{n}{2} \theta) + \beta_{10}^{u_1} x_1 \quad (24)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{r}{a}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m (A_{mn}^2 \sin \frac{n+1}{2} \theta) + \beta_{01}^{u_2} x_2 \quad (25)$$

$$\sigma_{11} = (x_1 + a)(x_1 - (w - a))$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m [D_{mn}^{11} \cos(\frac{n}{2} \theta)] + \beta_{10}^{\sigma_{11}} x_1 + \beta_{00}^{\sigma_{11}} \right\} \quad (26)$$

$$\sigma_{12} = (x_1 + a)(x_1 - (w - a))(1 + \cos(\theta))$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m [E_{mn}^{12} \sin(\frac{n+1}{2} \theta)] + \beta_{01}^{\sigma_{12}} x_2 \right\} \quad (27)$$

$$\sigma_{22} = \frac{4\sigma_0}{H^2} x_2^2 + \left(x_2^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 \right)$$

$$\times (1 + \cos(\theta)) \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a}\right)^m \right.$$

$$\left. [D_{mn}^{22} \cos(\frac{n}{2} \theta)] + \beta_{10}^{\sigma_{22}} x_1 + \beta_{00}^{\sigma_{22}} \right\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{on } x_2 &= \pm \frac{H}{2}; & \sigma_{22} &= \sigma_0, \sigma_{21} = 0 \\ \text{on } x_1 &= \pm W; & \sigma_{11} &= 0, \sigma_{12} = 0 \\ \text{on } |x_1| < a, x_2 &\rightarrow 0; & \sigma_{22} &= 0, \sigma_{21} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

میدان‌های جابجایی و تنش بر اساس شرایط تقارن و شرایط مرزی برای به صورت روابط (۳۰) تا (۳۴) بیان می‌شوند:

$$u_1 = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m [B_{mn}^1 \cos(\frac{n}{2} \theta_1)] (1 - \cos(\theta_2)) \right] + \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m [D_{mn}^2 \cos(\frac{n}{2} \theta_2)] (1 - \cos(\theta_1)) \right] + \beta_{10}^u x_1 \quad (30)$$

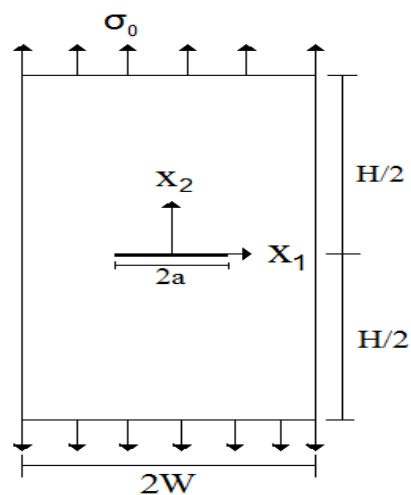
$$u_2 = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{a^2}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m [A_{mn}^2 \sin(\frac{n+1}{2} \theta_1)] (1 - \cos(\theta_2)) \right] + \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m [E_{mn}^2 \sin(\frac{n+1}{2} \theta_2)] (1 - \cos(\theta_1)) \right] + \beta_{01}^u x_2 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(\left(\frac{W}{2} \right)^2 - x^2 \right) \left\{ \sqrt{\frac{a^2}{r_1 r_2}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m [B_{mn}^{11} \cos(\frac{n}{2} \theta_1)] (1 - \cos(\theta_2)) \right] \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m [D_{mn}^{ij} \cos(\frac{n}{2} \theta_2)] (1 - \cos(\theta_1)) \right] + \beta_{10}^{\sigma_{11}} x_1 + \beta_{00}^{\sigma_{11}} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \left(\frac{4\sigma_0}{H^2} x_2^2 \right) + \left(x_2^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right) \\ &\left(1 + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right) \left\{ \sqrt{\frac{a^2}{r_1 r_2}} \right. \\ &\left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m [B_{mn}^{22} \cos(\frac{n}{2} \theta_1)] (1 - \cos(\theta_2)) \right] \\ &+ \left. \left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m [D_{mn}^{22} \cos(\frac{n}{2} \theta_2)] (1 - \cos(\theta_1)) \right] \right. \\ &\left. + \beta_{10}^{\sigma_{22}} x_1 + \beta_{00}^{\sigma_{22}} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

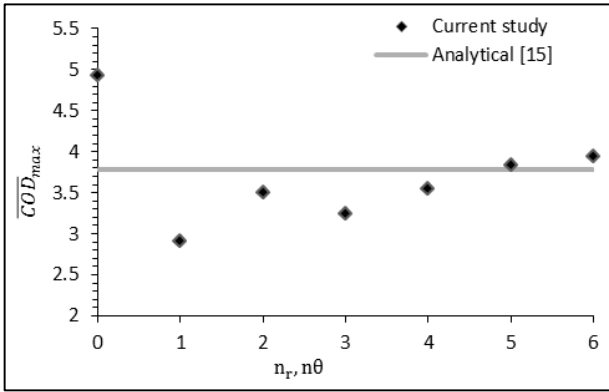
در حالت $a/W = 0.4$ ، در شکل ۴ روند همگرایی ضریب شدت تنش نرمال شده مود اول، \bar{K}_I نشان داده شده است. به مقدار $2/1.039$ همگرا شده است که با مقدار تحلیلی مرجع [۱۴]، $2/1.098$ دارای خطای نسبی 0.28% است، که بیانگر انطباق خوبی می‌باشد. شکل ۵ روند همگرایی حداکثر باز شدگی نرمال شده ترک، \overline{COD}_{max} را نشان می‌دهد. مقدار \overline{COD}_{max} توسط کمالی و شجاع [۹] برای این مسئله $12/230$ گزارش شده است و همانطور که از مقادیر شکل ۵ مشاهده می‌شود مقادیر \overline{COD}_{max} دارای همگرایی نسبتاً خوبی می‌باشد. در شکل ۶ تغییرات \bar{K}_I برحسب طول ترک نرمال شده، a/W نشان داده شده است و با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است که نشان از همخوانی خوب نتایج دارد.

۶-۲- ورق مستطیلی با ترک داخلی تحت تنش کششی یکنواخت
در این مثال، مطابق شکل ۷ یک ورق مستطیلی به عرض 20 و $W=2$ واحد و طول $H=40$ واحد دارای ترک مرکزی به طول $2a$ در نظر گرفته شده است. مبدا مختصات دکارتی (x_1, x_2) در مرکز ترک و محور x_1 در امتداد ترک قرار دارد و مبدا مختصات قطبی (r_1, θ_1) و (r_2, θ_2) در دو نوک ترک، مطابق شکل ۷ قرار دارند و $-\delta < \theta_i < \delta$ ، $i = 1, 2$ می‌باشد. فرض می‌شود که جسم ترک‌دار، ایزوتروپ و دارای ضریب پواسون $\nu = 0.25$ می‌باشد. ورق در راستای طول تحت تنش یکنواخت σ_0 قرار دارد. شرایط مرزی طبیعی حاکم بر این مسئله به صورت زیر قابل بیان است.



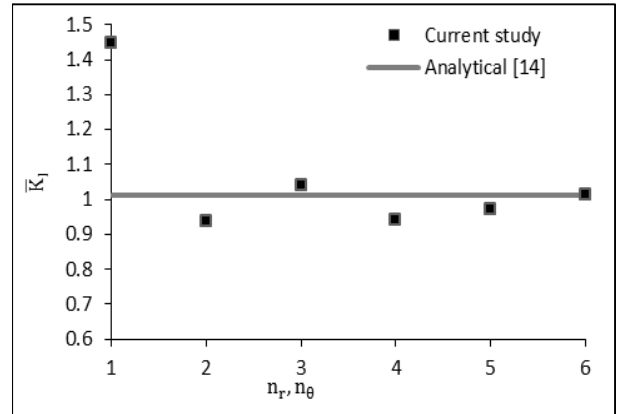
شکل ۷: ورق مستطیلی همسانگرد دارای ترک مرکزی تحت تنش کششی یکنواخت

Fig. 7. An isotropic rectangular plate with a center crack under uniform tensile stress



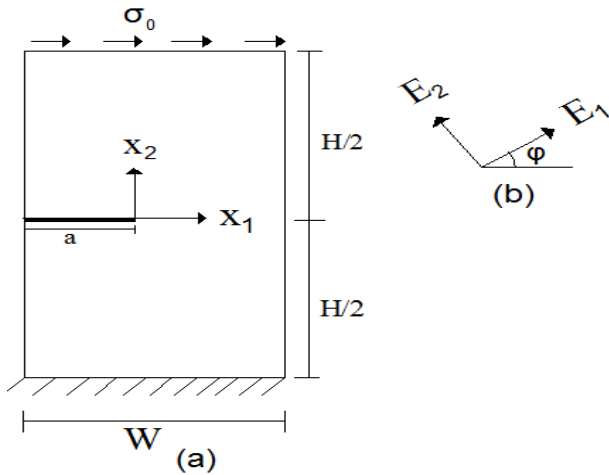
شکل ۹: روند همگرایی \overline{COD}_{max} برای صفحه مستطیلی دارای ترک مرکزی تحت تنش کششی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{W} = 0.1$

Fig. 9. Trend of convergence of \overline{COD}_{max} for the rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress for the case of $\frac{a}{W} = 0.1$



شکل ۸: روند همگرایی \overline{K}_I برای صفحه مستطیلی دارای ترک مرکزی تحت تنش کششی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{W} = 0.1$

Fig. 8. Trend of convergence of \overline{K}_I for the rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress for the case of $\frac{a}{W} = 0.1$



شکل ۱۰: صفحه مستطیلی طره‌ای ارتوتروپیک دارای ترک گوشه تحت تنش برشی یکنواخت -a جزئیات هندسی -b جهت‌گیری فیبر

Fig. 10. An orthotropic cantilever rectangular plate with an edge crack under uniform shear stress: (a) geometric details, (b) fiber orientation

نظر گرفته شده است. دستگاه مختصات دکارتی در نوک ترک تنظیم شده است بطوریکه ترک قبل از بارگذاری در ناحیه $x_1 < 0$ و $x_2 = 0$ قرار دارد. یک لبه از ورق به مختصات $x_2 = -H/4$ گیردار شده است. لبه دیگر در مختصات $x_2 = H/4$ تحت تنش برشی یکنواخت σ_0 قرار دارد. در این حالت، مسئله ترک ترکیبی مود اول و دوم می‌باشد که هر دو شرایط مرزی طبیعی و شرایط مرزی اساسی همگن را دارا می‌باشد. شرایط مرزی این مسئله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{12} = \left(\left(\frac{W}{2} \right)^2 - x^2 \right) \left(1 + \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right) \quad (34)$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{a^2}{r_1 r_2}} \left[\left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_1}{a} \right)^m \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[A_{mn}^{12} \sin \left(\frac{n+1}{2} \theta_1 \right) \right] (1 - \cos(\theta_2)) \right] \right.$$

$$\left. \left. + \left(\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r_2}{a} \right)^m \right) \left[E_{mn}^{12} \sin \left(\frac{n+1}{2} \theta_2 \right) \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. (1 - \cos(\theta_1)) \right] + \beta_{01}^{\sigma_{12}} x_2 \right\}$$

به منظور مطالعه ترک میانی در محیط بینهایت، $a/W = 0.1$ انتخاب شده است. در شکل ۸ روند همگرایی ضریب شدت تنش نرمال شده مود اول، \overline{K}_I در حالت $a/W = 0.1$ نشان داده شده است. \overline{K}_I به مقدار $1/0.191$ همگرا شده است که با مقدار تحلیلی مرجع [۱۴]، $1/0.114$ دارای خطای نسبی 0.76% است، که دارای انطباق خوبی می‌باشد.

شکل ۹ روند همگرایی باز شدگی نرمال شده ترک، \overline{COD}_{max} را نشان می‌دهد. مقدار \overline{COD}_{max} بدست آمده در این روش برابر با $3/79$ می‌باشد که دارای انطباق خوبی با حل دقیق، $3/75$ [۱۵] می‌باشد. ۳-۶ صفحه مستطیلی یک سر گیردار تحت ترک ترکیبی مود اول و دوم مطابق شکل ۱۰، یک ورق همگن ناهمسانگرد با ابعاد $W=7$ واحد و $H=16$ واحد که دارای یک ترک گوشه به طول $a=W/4$ می‌باشد در

$$\sigma_{12} = \left(\frac{2x_2}{H} \sigma_0 \right) + \left(x_2 - \frac{H}{2} \right) (1 + \cos(\theta)) \quad (۴۰)$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a} \right)^m [A^{12}_{mn} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) + B^{12}_{mn} \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)] \right] + (\beta_{10}^{\sigma_{12}} x_1 + \beta_{01}^{\sigma_{12}} x_2 + \beta_{00}^{\sigma_{12}}) \right\}$$

$$\text{on } x_2 = -\frac{H}{2}; u_1 = 0, u_2 = 0, \quad (۳۵)$$

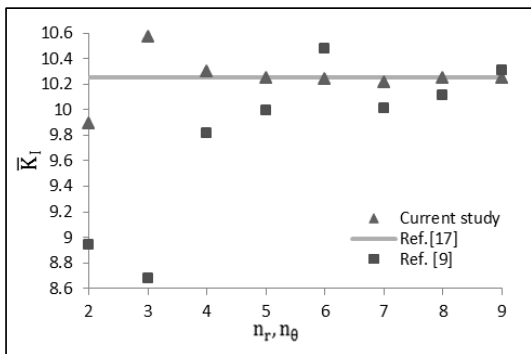
$$\text{on } x_2 = \frac{H}{2}; \sigma_{12} = \sigma_0, \sigma_{22} = 0,$$

$$\text{on } x_1 = \pm \frac{W}{2}; \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0,$$

$$\text{on } -a \leq x_1 < 0, x_2 \rightarrow 0; \sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0.$$

در حالتی که ورق همسانگرد می‌باشد، روند همگرایی ضرایب شدت تنش نرمال شده موده‌های ۱ و ۲، به ترتیب، \bar{K}_I و \bar{K}_{II} بر

با توجه به شرایط مرزی اساسی و طبیعی و عدم وجود تقارن، توابع جابجایی و تنش به صورت روابط (۳۶) تا (۴۰) تعریف می‌شوند:



شکل ۱۱: مقایسه روند همگرایی \bar{K}_I برای صفحه مستطیلی طره‌ای همسانگرد دارای ترک لبه تحت تنش برشی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{W} = 0.5$ بین روش حاضر و روش مرجع [۹]

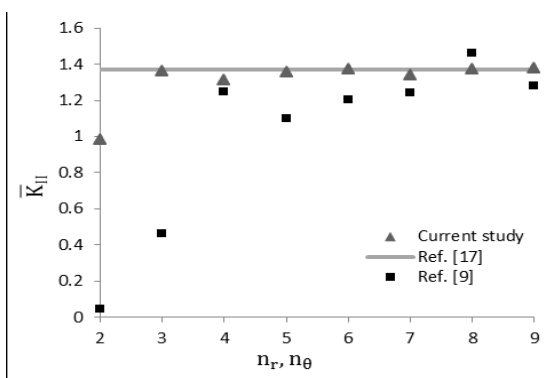
Fig. 11. Comparison of the trend of convergence of \bar{K}_I for the isotropic cantilever rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress between the present work and the work of Ref.[9] for the case of $\frac{a}{W} = 0.5$

$$u_1 = \sqrt{\frac{r}{a}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a} \right)^m [A^1_{mn} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) + B^1_{mn} \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)] \right] \left(x_2 + \frac{H}{2} \right) \quad (۳۶)$$

$$+ \left(x_2 + \frac{H}{2} \right) (\beta_{10}^{u_1} x_1 + \beta_{01}^{u_1} x_2 + \beta_{00}^{u_1})$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{r}{a}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a} \right)^m [A^2_{mn} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) + B^2_{mn} \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)] \right] \left(x_2 + \frac{H}{2} \right) \quad (۳۷)$$

$$+ \left(x_2 + \frac{H}{2} \right) (\beta_{10}^{u_2} x_1 + \beta_{01}^{u_2} x_2 + \beta_{00}^{u_2})$$



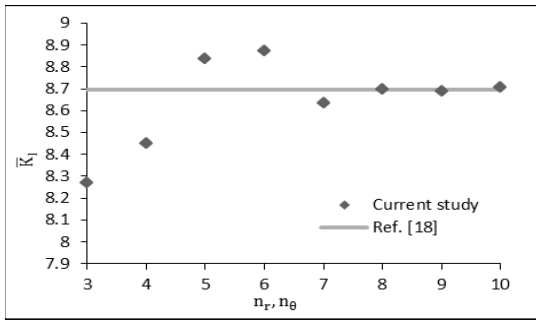
شکل ۱۲: مقایسه روند همگرایی \bar{K}_{II} برای صفحه مستطیلی طره‌ای همسانگرد دارای ترک لبه تحت تنش برشی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{W} = 0.5$ بین روش حاضر و روش مرجع [۹]

Fig. 12. Comparison of the trend of convergence of \bar{K}_{II} for the isotropic cantilever rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress between the present work and the work of Ref.[9] for the case of $\frac{a}{W} = 0.5$

$$\sigma_{11} = \left(\left(\frac{W}{2} \right)^2 - x_1^2 \right) \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a} \right)^m [A^{11}_{mn} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) + B^{11}_{mn} \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)] \right] + (\beta_{10}^{\sigma_{11}} x_1 + \beta_{01}^{\sigma_{11}} x_2 + \beta_{00}^{\sigma_{11}}) \right\} \quad (۳۸)$$

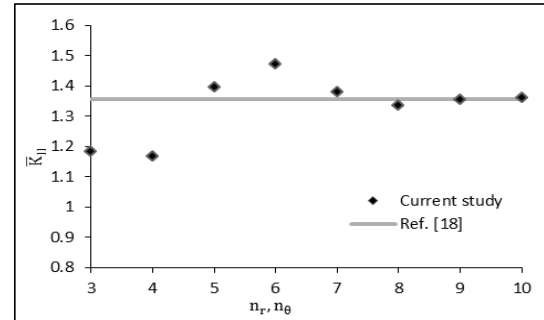
$$\sigma_{22} = \left(x_2 - \left(\frac{H}{2} \right) \right) (1 + \cos(\theta)) \quad (۳۹)$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\sum_{m=0}^{n_r} \sum_{n=0}^{n_\theta} \left(\frac{r}{a} \right)^m [A^{22}_{mn} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) + B^{22}_{mn} \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)] \right] + (\beta_{10}^{\sigma_{22}} x_1 + \beta_{01}^{\sigma_{22}} x_2 + \beta_{00}^{\sigma_{22}}) \right\}$$



شکل ۱۳: روند همگرایی \bar{K}_I برای صفحه مستطیلی طره‌ای ارتوتروپ دارای ترک لبه تحت تنش برشی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{W} = 0.5$

Fig. 13. Trend of convergence of \bar{K}_I for the orthotropic cantilever rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress for the case of $\frac{a}{W} = 0.5$



شکل ۱۴: روند همگرایی \bar{K}_{II} برای صفحه مستطیلی طره‌ای ارتوتروپ دارای ترک لبه تحت تنش برشی یکنواخت برای حالت $\frac{a}{W} = 0.5$

Fig. 14. Trend of convergence of \bar{K}_{II} for the orthotropic cantilever rectangular plate with an edge crack under uniform tensile stress for the case of $\frac{a}{W} = 0.5$

$G_{12} = 9/66 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.21$, $E_2 = 11/7 \text{ GPa}$, $E_1 = 144/8$ ساخته شده باشد، و راستای فیبرها در امتداد محورهای X_1 و X_2 باشد، همگرایی پارامترهای شکست، \bar{K}_I و \bar{K}_{II} در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. مقادیر \bar{K}_I و \bar{K}_{II} به ترتیب به مقادیر $1/3621$ و $8/7059$ همگرا شده است که تطابق خوبی با نتایج مرجع [۱۸]، $\bar{K}_I = 8/958$ و مرجع [۱۹]، $\bar{K}_{II} = 1/358$ و $\bar{K}_I = 8/695$ و مرجع [۱۸] $\bar{K}_{II} = 1/356$ دارد. البته نتایج روش حاضر به نتایج مرجع [۱۸]

اساس روش حاضر با روش مرجع [۹] در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ مقایسه شده است. شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهند که سرعت همگرایی روش حاضر بیشتر از روش مرجع [۹] می‌باشد و مقادیر \bar{K}_I و \bar{K}_{II} بر اساس روش حاضر به ترتیب به مقادیر $1/376$ و $1/252$ همگرا شده است که همخوانی خوبی با نتایج مراجع [۷، ۱۶، ۱۷]، $\bar{K}_{II} = 1/372$ و $\bar{K}_I = 10/250$ دارد.

در حالتی که ورق از ماده ارتوتروپیک با خواص الاستیک GPa

جدول ۱: مقادیر \bar{K}_I و \bar{K}_{II} برای صفحه مستطیلی طره‌ای ارتوتروپ با ترک لبه تحت تنش برشی یکنواخت برای حالات مختلف امتداد فیبر، ϕ
Table 1. Values of \bar{K}_I , \bar{K}_{II} for the orthotropic cantilever rectangular plate with an edge crack under uniform shear stress for different cases of fiber orientation, ϕ

ϕ	مرج ع [۱۸]	مرجع [۱۹]	روش حاضر	\bar{K}_I	خطای نسبی (%) با مرجع [۱۸]	خطای نسبی (%) با مرجع [۱۹]	مرجع [۱۸]	مرجع [۱۹]	روش حاضر	\bar{K}_{II}	خطای نسبی (%) با مرجع [۱۸]	خطای نسبی (%) با مرجع [۱۹]
۰	۸/۶۹۵	۸/۹۵۸	۸/۷۰۵۹	۱/۳۶۲۱	۰/۱۲	۲/۸	۱/۳۵۸	۱/۳۵۶	۱/۳۶۲۱	۰/۳	۰/۴۵	
۱۰	۸/۷۸۷	۹/۰۴۷	۸/۸۱۷۶	۱/۳۷۰۳	۰/۳۵	۲/۵	۱/۳۶۴	۱/۳۷۲	۱/۳۷۰۳	۰/۴۵	-۰/۱۲	
۲۰	۹/۰۱۴	۹/۲۱۹	۹/۰۳۸۴	۱/۳۹۸۸	۰/۲۷	-۱/۹	۱/۳۹۵	۱/۴۰۳	۱/۳۹۸۸	۰/۲۷	-۰/۳	
۳۰	۹/۲۷۸	۹/۳۸۱	۹/۲۹۴۹	۱/۴۳۷۵	۰/۱۸	-۰/۹	۱/۴۳۲	۱/۴۳۱	۱/۴۳۷۵	۰/۳۸	۰/۴۵	
۴۰	۹/۴۷۵	۹/۵۱۳	۹/۴۹۳۹	۱/۴۴۵۹	۰/۲	-۰/۲	۱/۴۳۸	۱/۴۳۸	۱/۴۴۵۹	۰/۵۵	۰/۵۴	
۵۰	۹/۴۵۱	۹/۴۶۲	۹/۴۷۰۹	۱/۴۶۸	۰/۲۱	-۰/۹	۱/۴۳۲	۱/۴۱۷	۱/۴۶۸	۰/۳۲	۱/۳۹	
۶۰	۹/۳۰۵	۹/۲۹۴	۹/۳۲۷۷	۱/۳۶۹	۰/۳۶	۰/۳۶	۱/۳۸۳	۱/۳۶۹	۱/۳۶۹	۰/۳۱	۱/۳۴	
۷۰	۹/۱۱۴	۹/۱۲۴	۹/۱۳۱۵	۱/۲۶۴۳	۰/۱۹	۰/۸	۱/۲۶۰	۱/۲۴۲	۱/۲۶۴۳	۰/۳۴	۱/۷۹	
۸۰	۸/۹۴۳	۹/۹۵۷	۸/۹۵۵۸	۱/۱۱۲۴	۰/۱۴	-۱/۰	۱/۱۰۹	۱/۰۹۳	۱/۱۱۲۴	۰/۳	۱/۷۷	
۹۰	۸/۸۶۶	۸/۸۶۷	۸/۸۷۹۶	۱/۰۴۰۱	۰/۱۵	۰/۱۴	۱/۰۳۷	۱/۰۲۴	۱/۰۴۰۱	۰/۲۹	۱/۵۷	

- element method for fracture in composite materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(2) (2009) 214-239.
- [5] D. Motamedi, S. Mohammadi, Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method, *International Journal of Fracture*, 161(1) (2010) 21-39.
- [6] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, M. Tabbara, Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture, *International Journal of Solids and Structures*, 32(17-18) (1995) 2547-2570.
- [7] M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran, T. Belytschko, Enriched element free Galerkin methods for crack tip fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(8) (1997) 1483-1504.
- [8] M. Fakoor, N. Mehri Khansari, Simulation of orthotropic damaged zone behavior using viscoelastic models, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4) (2017) 401-410 (in Persian).
- [9] M.T. Kamali, H.M. Shodja, An accurate semi-analytical method for an arbitrarily oriented edge or interior crack in an anisotropic homogeneous elastic solid, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 45 (2014) 133-142.
- [10] S.E. Mousavi, N. Sukumar, Generalized Duffy transformation for integrating vertex singularities, *Computational Mechanics*, 45(2-3) (2010) 127-141.
- [11] E. Reissner, On a certain mixed variational theorem and a proposed application, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(7) (1984) 1366-1368.
- [12] E. Reissner, On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(2) (1986) 193-198.
- [13] E. Carrera, Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis, *AIAA journal*, 36(5) (1998) 830-839.
- [14] E.E. Gdoutos, *Fracture Mechanics-An Introduction*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

نزدیک تر است. در جدول ۱ نتایج \bar{K}_I و \bar{K}_{II} برای مقادیر مختلف زاویه بین راستای فیبرها با امتداد محور x_1 ، ϕ داده شده است و با مقادیر مراجع [۱۸ و ۱۹] مقایسه شده است. جدول ۱ نشان می‌دهد که نتایج روش حاضر با نتایج مرجع [۱۸] انطباق بیشتری دارد.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک روش نیمه تحلیلی مبتنی بر فرمول‌بندی ترکیبی برای تعیین میدان‌های الاستیک در یک جسم دو بعدی همگن ناهمسانگرد دارای ترک لبه یا ترک داخلی ارائه شده است. ویژگی‌های روش ارائه شده شامل این موارد است: (۱) لحاظ کردن تکینگی تنش در نوک ترک، (۲) مدل کردن ناپیوستگی میدان جابجایی در راستای عمود بر وجوه ترک، (۳) ارضای دقیق شرایط مرزی اساسی همگن و غیرهمگن، (۴) ارضای دقیق شرایط مرزی طبیعی همگن و غیرهمگن و (۵) ارضای معادلات تعادل و معادلات سازگاری با استفاده از معادلات تغییراتی رایزنر با دقت مورد نظر. در روش حاضر بر خلاف روش‌های اجزاء محدود و روش‌های فاقد المان گالرگین و بازتولید ذره هسته، نیازی به مش‌بندی و ایجاد گره ندارد. ضرایب شدت تنش بدست آمده از روش حاضر که مبتنی بر فرمول‌بندی ترکیبی می‌باشد، دارای سرعت همگرایی بیشتری نسبت به روش تغییراتی مبتنی بر جابجایی می‌باشند و دارای انطباق خوبی با نتایج تحلیلی موجود در مراجع هستند.

مراجع

- [1] S.N. Atluri, A.S. Kobayashi, M.A. Nakagaki, A finite-element program for fracture mechanics analysis of composite material, in: *Fracture mechanics of composites*, ASTM International, 1975.
- [2] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, T. Belytschko, Extended finite element method for three dimensional crack modelling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11) (2000) 1549-1570.
- [3] A. Asadpoure, S. Mohammadi, Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10) (2007) 2150-2172.
- [4] D.B.P. Huynh, T. Belytschko, The extended finite

- Mechanics, 78(1) (2011) 175-190.
- [18] S.J. Chu, C.S. Hong, Application of the Jk integral to mixed mode crack problems for anisotropic composite laminates, *Engineering Fracture Mechanics*, 35(6) (1990) 1093-1103.
- [19] P. Sollero, M.H. Aliabadi, Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method, *International Journal of Fracture*, 64(4) (1993) 269-284.
- [15] T.L. Anderson, *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC press, 2005.
- [16] H.K. Ching, R.C. Batra, Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2) (2001) 273-289.
- [17] Y.T. Gu, W. Wang, L.C. Zhang, X.Q. Feng, An enriched radial point interpolation method (e-RPIM) for analysis of crack tip fields, *Engineering Fracture*