



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سال چهل و پنج، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۱۵ تا ۲۷
Vol. 45, No.1, Summer 2013, pp. 15-27



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)
(AJSR - ME)

شبیه‌سازی عددی جریان دو فاز حدود صوت حاوی شوک در نازل همگرا-واگرا

صبح حمیدی^۱، محمد جعفر کرمانی^{۲*}، حسین بهشتی امیری^۳

۱ دانشجوی دکترا، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، گروه مهندسی مکانیک، تهران، ایران

۲ استادیار دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۳ کارشناس ارشد دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت ۱۳۸۹/۱۲/۸، پذیرش ۹۱/۹/۱۱)

چکیده

در این مقاله حل عددی جریان تراکم‌پذیر، گذرا، غیر لزج، دو فاز و حدود صوت حاوی شوک مخلوط بخار و آب در یک نازل همگرا-واگرا با روش عددی **Roe** بررسی شد. برای گسسته‌سازی مکانی و محاسبه خواص اصلی جریان در مرز المان‌ها این خواص با دقت مرتبه سوم **Roe** برون‌یابی شده است، همچنین انتگرال‌گیری زمانی با استفاده از روش صریح دو مرحله‌ای لکس - وندرف^۱ با دقت مرتبه دوم انجام شده است. برای ناحیه خشک (تک فاز)، خواص اصلی فشار (**P**)، دما (**T**) و سرعت (**u**) و برای ناحیه دو فاز، دما (**T**)، سرعت (**u**) و کیفیت (χ) به مرز المان برون‌یابی شده است. در این مطالعه معادلات پیوستگی، مومنتم و انرژی به صورت ابقایی نوشته شده، جریان داخل نازل شبه یک بعدی و با فرض ترمودینامیک تعادلی برای مخلوط بخار و آب مورد بررسی قرار گرفته است. مطالعه حاضر به دنبال تحقیقات قبلی است که در آن‌ها جریان حدود صوت تقطیر شونده در حالت بدون شوک در نازل همگرا-واگرا مورد مطالعه قرار گرفته است. هدف اصلی این مقاله استخراج حلی برای جریان حدود صوت تقطیر شونده حاوی شوک در نازل همگرا-واگرا بوده و ارائه شرح کاملی از فیزیک مسأله (به عنوان مثال اینکه آب مایع در گذر از شوک تبخیر می‌شود) است. نتایج حاصل از این روش با نتایج موجود در تاریخچه برابری خوبی را دارد.

کلمات کلیدی

روش **Roe**، جریان غیر لزج و تراکم‌پذیر، شوک قائم، جریان دو فاز، ترمودینامیک تعادلی، کیفیت

* نویسنده مسئول وعهده دار مکاتبات Email: mkermani@aut.ac.ir

۱- مقدمه

پدیده تقطیر سیال در طیف گسترده‌ای از تجهیزات صنعتی از جمله نازل بخار، توربین بخار، پیل‌های سوختی و مبدل‌های حرارتی اتفاق می‌افتد. در این موارد پیش‌بینی دقیق مقدار رطوبت ضروری است. برای این منظور شناخت صحیحی از فیزیک مسأله، هم‌چنین استفاده از یک روش عددی برای پیش‌بینی رطوبت لازم است. یکی از روش‌های عددی مورد استفاده برای این مورد، روش Roe است [۱]. از آنجا که روش Roe یک روش عددی با تقریب بالادست^۲ است. برای جریان تراکم‌پذیر با عدد ماخ بزرگ‌تر از ۰/۵، روش دقیقی به شمار می‌آید [۲]. در جریان حدود صوت بخار، به علت تغییرات شدید در فشار و دما، پدیده تقطیر دور از انتظار نیست. این پدیده، به علت انتقال گرمای نهان بخار تقطیر شده، ساختار جریان را تغییر داده و باعث بازگشت‌ناپذیری و افت انرژی در جریان می‌شود. تقطیر در قسمت فشار پایین توربین بخار (انتهای توربین) قابل چشم‌پوشی نیست زیرا در این قسمت، توان قابل توجهی تولید می‌شود و وجود قطرات مایع اثر معکوس در عملکرد و کارایی توربین دارند بنابراین تقطیر در این قسمت از نظر اقتصادی مقرون به صرفه نخواهد بود [۳]. هم‌چنین قطرات مایع در این‌جا باعث فرسایش پره‌های توربین شده، وبا توجه به سرعتی که دارند می‌توانند باعث ایجاد ارتعاش، تنش و پدیده خستگی در پره‌های توربین شوند [۴]. بنابراین کنترل رطوبت به خصوص در قسمت فشار پایین توربین، از موارد بسیار مهم در توربین‌های بخار است.

استفاده از نازل همگرا-واگرا برای مشاهده تقطیر به آزمایش‌های تجربی استودلا در سال ۱۹۰۵ باز می‌گردد. در جریان مافوق صوت بخار در نازل‌های همگرا-واگرا یا کانال‌های توربین بخار، نرخ انبساط سریع‌تر از آن است که بخار در شرایط تعادلی بماند، بدین صورت که بدون تغییر فاز تا زیر خط اشباع سرد شده و در شرایط نامتعادل موسوم به فوق اشباع یا فوق سرد قرار می‌گیرد و با افزایش درج فوق سردی قطرات مایع به وجود می‌آیند. رها شدن گرمای نهان قطرات تشکیل شده و انتقال آن به بخار مافوق صوت باعث ایجاد شوک شده و فشار بخار را افزایش می‌دهد. با توجه به افزایش یکباره فشار سیال در یک ناحیه خاص و با توجه به اهمیت آن، از این پدیده با نام شوک تقطیر^۳ یاد می‌نمایند [۵]. این شوک توسط روش ترمودینامیکی غیر تعادلی قابل پیش‌بینی است و در این مطالعه که روش ترمودینامیک تعادلی (که در آن تقطیر بخار در حین عبور از خط بخار اشباع اتفاق می‌افتد) مدنظر است، این حالت از شوک قابل پیش‌بینی نیست.

رابطه حاکم بر فرایند آیزنتروپیک^۴ در گازهای ایده‌ال عبارت است از:

(۱)

$$Pv^\gamma = \text{ثابت}$$

که در این رابطه P و v ، به ترتیب فشار و حجم مخصوص بوده و γ نسبت ظرفیت گرمای ویژه گاز است، مقدار γ برای هوا برابر با ۱/۴ و برای بخار خشک ۱/۳۲ است. لیکن در جریان دو فازی، رابطه ساده آیزنتروپیک فوق بین فشار و حجم مخصوص معتبر نیست و باید تصحیح شود، زیرا γ در مسیر فرایند ثابت نیست [۶]. در این مقاله مشابه مطالعات قبلی انجام شده [۱]، دما و فشار سکون جریان ورودی به نازل بخار، به نحوی انتخاب شده‌اند که جریان در حین عبور از قسمت همگرای نازل دو فاز شده و منجر به تشکیل فاز مایع در داخل نازل می‌شود. با استفاده از روش عددی Roe، خواص مختلف جریان مانند فشار، عدد ماخ، رطوبت و آنتروپی^۵ برای جریان آیزنتروپیک و جریان حاوی شوک در طول نازل محاسبه شده و برای بررسی درستی نتایج بدست آمده به مقایسه آن‌ها با نتایج موجود در تاریخچه پرداخته شده است. نمودارهای موجود نشان‌دهنده برابری خوب نتایج تجربی و عددی انجام شده هستند. گفتنی است که در ناحیه خشک (تک‌فاز)، خاصیت‌های فشار (P)، دما (T) و سرعت (u) به عنوان خواص اصلی در مرز المان، با برون‌یابی مرتبه سوم بدست می‌آیند و در ناحیه دو فاز، به دلیل اینکه دما و فشار کمیت‌های وابسته هستند، بنابراین در این ناحیه، فشار، جای خود را به کیفیت (X) می‌دهد و سه خاصیت کیفیت (X)، دما (T) و سرعت (u) برای برون‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرند. خواصی که برای برون‌یابی استفاده شده‌اند منحصر به جریان بدون شوک نیست بلکه برای جریان حاوی شوک نیز می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، بدین ترتیب که برای ناحیه دو فاز خواص دما، کیفیت و سرعت و برای ناحیه تک‌فاز، خواص فشار، دما و سرعت با دقت مرتبه سوم برون‌یابی شده‌اند. پس از بدست آوردن این مقادیر در مرز المان بقیه خواص را می‌توان با استفاده از روابط جبری حاکم محاسبه نمود. برون‌یابی مقادیر در مرز المان پایه محاسبات برای مقادیر میانگین Roe است. برای محاسبه خواص ترمودینامیکی مانند فشار، انرژی داخلی تبخیر در ناحیه دو فاز از روابط موجود در پیوست استفاده شده است [۱].

دقت محاسبات مکانی انجام شده در این روش، مرتبه ۳ و دقت زمانی مرتبه ۲ است. روش‌های عددی با دقت بالا همواره دارای نوسانات ناشی از محاسبات صرفاً عددی است که با محدودکننده شار وان آلباد^۶ در این مطالعه از بین رفته و حل عددی پایدار بدست آمده است [۷]، هم‌چنین برای روش عددی Roe در نقطه‌ای که سرعت جریان حدود صوت است یکی از مقادیر ویژه، صفر شده که منجر به یک شوک غیر فیزیکی انبساطی می‌شود که با استفاده از رابطه تصحیح آنتروپی رفع شده است [۸]. نتایج برای جریان آیزنتروپیک با نتایج تجربی

روش ترمودینامیک تعادلی یکسان در نظر گرفته شده است. تغییرات آنتالپی از مایع اشباع تا بخار اشباع (آنتالپی تبخیر) از رابطه (۸) محاسبه شده است:

$$h_{fg} = e_{fg} + RT \quad (۸)$$

که در آن، e_{fg} ، تغییرات انرژی داخلی از مایع اشباع تا بخار اشباع بوده که با رابطه داده شده در پیوست (بخش ۱۰) قابل محاسبه است. انرژی داخلی و آنتالپی بخار را می‌توان با استفاده از روابط گاز کامل به صورت زیر محاسبه نمود:

$$e_g = C_v T, C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.32 \quad (۹)$$

$$h_g = C_p T \quad (۱۰)$$

و به همین ترتیب آنتالپی و انرژی داخلی مایع اشباع از روابط (۱۱) و (۱۲) محاسبه شده است:

$$e_f = e_g - e_{fg} \quad (۱۱)$$

$$h_f = h_g - h_{fg} \quad (۱۲)$$

رابطه فشار بر حسب دما و هم‌چنین نحوه محاسبه آنتروپی در ناحیه دو فاز نیز در پیوست آمده است.

۳- گسسته‌سازی زمانی و مکانی

گسسته‌سازی در حوزه زمان با روش صریح و دقت مرتبه دوم لکس-وندرف که دارای دو مرحله پیش‌بینی و تصحیح^۱ از مرحله n تا $n+1$ است، انجام شده است. مرحله پیش‌بینی، شرایط جریان را در زمان $n+1/2$ مشخص می‌نماید:

$$Q_i^{n+1/2} = Q_i^n - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{E,i}^n - F_{W,i}^n) - 0.5 \Delta t H_i^n \quad (۱۳)$$

در رابطه فوق، i ، شماره گره دلخواه است و FE و FW ، به ترتیب شار عددی محاسبه شده در سمت راست و چپ مرز المان مورد نظر هستند [۱۲]:

$$F_E = \frac{1}{2} (F_E^R + F_E^L) - \frac{A_E}{2} \sum_{k=1}^3 |\hat{\lambda}_E^{(k)}| \delta w_E^{(k)} \hat{T}_E^{(k)} \quad (۱۴)$$

که در آن $\hat{\lambda}$ ، مقادیر ویژه، T ، بردار ویژه، δw ، بردار نوسان موج، A مساحت سطح مقطع نازل و k شماره بردارها هستند. در این مطالعه، FW از رابطه (۱۵) بدست آمده است:

$$F_{W,i} = F_{E,i-1} \quad (۱۵)$$

مرحله تصحیح، شامل بدست آوردن مقادیر در مرحله $n+1$ با گسسته‌سازی زمانی مرکزی ۹ حول زمان $n+1/2$ به صورت زیر است:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{E,i}^{n+1/2} - F_{W,i}^{n+1/2}) - \Delta t H_i^{n+1/2} \quad (۱۶)$$

گسسته‌سازی مکانی با دقت مرتبه سوم انجام شده است. مقادیر

[۹]، برابری بسیار خوبی دارد و برای جریان حاوی شوک نیز نتایج حاصل از حل عددی با نتایج تجربی [۹] تا قبل از وقوع شوک مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم

معادله حاکم بر جریان شبه یک بعدی، گذرا، غیر لزج و قابل تراکم داخل نازل همگرا-واگرا با در نظر گرفتن معادلات پیوستگی، مومنتم و انرژی با صرف‌نظر از نیروهای وزنی در حالت کاملاً پایستار عبارت است از [۱۰]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + H = 0 \quad (۲)$$

$$Q = A \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$F = A \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u h_t \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

Q ، بردار پایستار، F ، بردار شار و H ، بردار چشمه هستند. t و x ، مؤلفه‌های مکان و زمان، A ، مساحت سطح مقطع نازل، ρ ، چگالی مخلوط، u ، سرعت، e_t و h_t ، به ترتیب انرژی داخلی کل و آنتالپی^۲ کل (آنتالپی سکون) به ازای واحد جرم هستند. معادله (۲) با روش عددی Roe با دقت مرتبه سه حل شده است. در مطالعه حاضر فشار بخار کمتر از ۲۵ kPa است و مقادیر بحرانی فشار و دما برای بخار آب به ترتیب، ۲۲/۱ MPa و ۶۴۷/۳ K هستند، با توجه به نسبت فشار بخار به فشار بحرانی و دمای بخار به دمای بحرانی در طول نازل، مقدار ضریب تراکم‌پذیری در معادله حالت به طور تقریب برابر با یک است. بنابراین فرض گاز ایده‌ال برای جزء بخار دقت بالایی دارد:

$$p = \rho_g RT \quad (۶)$$

در رابطه فوق، ρ_g ، چگالی گاز (بخار) و R ، ثابت گاز است، که برای بخار برابر با ۴۶۱/۳۹۹ J/kg.K است. دقت داریم که در ناحیه خشک (تک‌فاز) چگالی گاز (ρ_g) با چگالی مخلوط (ρ) برابر است. در ناحیه دوفاز با صرف نظر از حجم مایع، رابطه چگالی گاز و چگالی مخلوط عبارت است از:

$$\rho_g = \rho \chi \quad (۷)$$

که در این رابطه، χ ، کیفیت بخار است. گفتنی است که سرعت بخار و مایع، هم‌چنین دمای بخار و مایع در ناحیه دو فازی طبق

میانگین Roe بکار می‌آیند و این مقادیر میانگین برای محاسبه شار عددی جریان بکار می‌روند. در ناحیه دو فازی، چگالی جریان برابر با چگالی مخلوط بخار و آب و همچنین آنتالپی کل برابر با آنتالپی کل مخلوط بخار و آب است. در این شرایط مقادیر میانگین Roe در سمت راست مرز المان از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{\rho}_E = \sqrt{\rho_E^L \rho_E^R} \quad (20)$$

$$\hat{h}_{tE} = \frac{\sqrt{\rho_E^L} h_{tE}^L + \sqrt{\rho_E^R} h_{tE}^R}{\sqrt{\rho_E^L} + \sqrt{\rho_E^R}} \quad (21)$$

مقادیر چگالی و آنتالپی در ناحیه تک‌فاز از روابط مربوط به گاز کامل بدست می‌آیند ولی در ناحیه دو فازی این خواص با توجه به روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_E^L = \frac{(\rho_g)_E^L}{\chi_E^L} \quad (22)$$

$$h_{tE}^L = (h_f)_E^L + (\chi_E^L (h_{fg})_E^L) + \frac{1}{2} (u_E^L)^2 \quad (23)$$

که ρg از معادله حالت برای گاز ایده‌ال بدست می‌آید. در معادله (۲۳) عبارت $h_f + \chi h_{fg}$ نشان‌دهنده آنتالپی مخلوط (h_m) است.

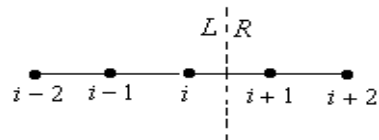
۵- تصحیح آنتروپی

برخلاف تمام نقاط قوت روش Roe، در جریان‌های ساکن یا حدود صوت، یکی از مقادیر ویژه صفر خواهد شد. با صفر شدن هر کدام از مقادیر ویژه این روش قادر به طراحی مناسب جریان نبوده و در این نقطه، جریان دارای یک شوک انبساطی غیر فیزیکی می‌شود. برای رفع این مشکل روابط تصحیح‌کننده زیادی ارائه شده است یکی از این روابط مشهور، رابطه هارتن و هایمن است [۱۳]. رابطه مورد استفاده برای تصحیح آنتروپی در ناحیه حدود صوت در این مطالعه عبارت زیر است [۸]:

$$\hat{\lambda}_{new} = \begin{cases} (\hat{\lambda}^2 + \varepsilon^2)/2\varepsilon & |\hat{\lambda}| < \varepsilon \\ \hat{\lambda} & |\hat{\lambda}| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (24)$$

$$\varepsilon = 4 \max[0, (\hat{\lambda} - \lambda^L), (\lambda^R - \hat{\lambda})] \quad (25)$$

سمت راست و چپ مرز المان نشان داده شده در شکل (۱) با دقت مرتبه سوم برون‌یابی شده‌اند [۱۱]. این مقادیر برای محاسبه مقادیر میانگین Roe در مرز المان بکار رفته‌اند. در ناحیه خشک (تک‌فاز)، دما، فشار و سرعت، و در ناحیه دو فاز، کیفیت، دما و سرعت در سمت راست و چپ مرز المان‌ها برون‌یابی می‌شوند و بقیه خواص طبق روابط گازهای کامل و روابط ترمودینامیکی قابل محاسبه است.



شکل (۱): نمایش سمت چپ و راست مرز المان

در روش عددی با دقت مرتبه سوم، ناپایداری عددی با محدودکننده شار وان آلبادا میرا شده و حل عددی پایدار می‌شود [۷]. با استفاده از این روش رابطه اصلاح شده و مورد استفاده برای برون‌یابی خواص در سمت راست و چپ مرز المان‌ها، عبارت است از:

$$q_E^R = q_{i+1} - \frac{\phi_{i+1}}{4} [(1-k_0)\Delta_{EE}q + (1+k_0)\Delta_Eq] \quad (17)$$

$$q_E^L = q_i + \frac{\phi_i}{4} [(1-k_0)\Delta_Wq + (1+k_0)\Delta_Eq]$$

در رابطه فوق، q ، نشان‌دهنده یک خاصیت دلخواه مانند دما، فشار و سرعت در ناحیه تک‌فاز و کیفیت، دما و سرعت در ناحیه دو فاز است، E و W به ترتیب نشان‌دهنده سمت شرق و غرب حجم کنترل موردنظر است. در دقت مرتبه سوم مقدار k_0 برابر با $1/3$ است. مقادیر Δ_Wq ، Δ_Eq و $\Delta_{EE}q$ عبارتند از:

$$\Delta_Wq = q_i - q_{i-1}$$

$$\Delta_Eq = q_{i+1} - q_i$$

$$\Delta_{EE}q = q_{i+2} - q_{i+1}$$

و مقدار تابع محدودکننده ϕ ، از رابطه (۱۹) محاسبه شده است:

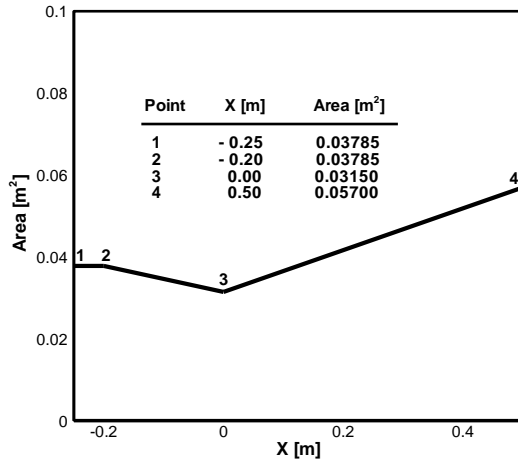
$$\phi = \frac{2(\Delta_Wq)(\Delta_Eq) + \varepsilon_0}{(\Delta_Wq)^2 + (\Delta_Eq)^2 + \varepsilon_0} \quad (19)$$

ε_0 عدد دلخواه بسیار کوچکی است (به عنوان مثال $\varepsilon_0 = 10^{-6}$) که هر گاه $\Delta_Eq = \Delta_Wq = 0$ شوند، از مبهم شدن کسر جلوگیری می‌نماید.

۴- مقادیر میانگین Roe

مقادیر سمت راست و چپ مرز المان‌ها برای محاسبه مقادیر

است که جریان ورودی مادون صوت بخار با شرایط سکون مشخص $(T_{0,in}=354.6 \text{ K}, P_{0,in}=25 \text{ kPa})$ وارد یک نازل عایق همگرا-واگرا با سطح مقطع نشان داده شده در شکل (۲) می‌شود (نازل A مور^{۱۱} از مرجع [۹]).



شکل (۲): سطح مقطع نازل

در این مطالعه سه حالت خروجی مختلف بررسی شده است: حالت اول، خروجی مافوق صوت، حالت دوم، خروجی مادون صوت با پس فشار $P_{out}=18 \text{ kPa}$ و حالت سوم، خروجی مادون صوت با پس فشار $P_{out}=20 \text{ kPa}$ است. مقادیر دما، فشار و سرعت بخار ورودی به نازل به ترتیب $2.337/5 \text{ K}$ ، $20/4 \text{ kPa}$ و $254/8 \text{ m/s}$ بدست آمده است.

۸- نتایج

با مقایسه نتایج حاصل از روش عددی حاضر و نتایج تجربی مرجع [۹] (نتایج تجربی توزیع فشار در جریان دو فاز بدون شوک داخل نازل)، می‌توان به برابری بسیار خوب بین نتایج پی برد (شکل (۳)) که این مطلب نشان از برابری مناسب طرح ریاضی ارائه شده با فیزیک جریان است. با توجه به شکل (۴) دیده می‌شود که برای جریان آیزنتروپیک و خروجی مافوق صوت، با فشار و دمای سکون اعمال شده، جریان قبل از گلوگاه^{۱۲} دو فاز خواهد شد. با توجه به شکل‌های (۳) و (۵) دیده می‌شود که نتایج توزیع فشار، دما و عدد ماخ در جریان آیزنتروپیک دو فاز داخل نازل با خروجی مافوق صوت، از نظر رفتاری به طور کامل مشابه نتایج جریان تکفاز هستند، بدین صورت که فشار و دما در طول نازل کاهش یافته و عدد ماخ افزایش می‌یابد. تنها تفاوت بارزی که با حالت تکفاز وجود دارد، این است که در این حالت جریان حاوی رطوبت (۱- χ) است (شکل (۴)).

همانطور که در شکل (۵) نشان داده شده، سرعت صوت در

در روابط فوق، $\hat{\lambda}$ مقادیر ویژه حاصل از مقادیر میانگین Roe $(\hat{\lambda}_1 = \hat{u}, \hat{\lambda}_2 = \hat{u} + \hat{c}, \hat{\lambda}_3 = \hat{u} - \hat{c})$ و \hat{c} و \hat{u} مقادیر ویژه در سمت چپ و راست مرز المان هستند. در این مطالعه سهم بخار برای محاسبه سرعت صوت در جریان دو فاز بکار رفته است^{۱۳}، به عبارت دیگر سرعت صوت از رابطه $c = \sqrt{\gamma RT}$ بدست آمده است، برخلاف اینکه این رابطه برای جریان دو فاز به طور کامل صحیح نیست ولی اثری در جواب همگرا شده ندارد [۱]. اهمیت سرعت صوت، برای مشخص نمودن مقادیر ویژه در مختصات $x-t$ مشخص می‌نماید و اثری در جواب همگرا شده در جریان دو فازی حاوی شوک و بدون شوک ندارد. برای جریان دو فازی روابط دیگری مانند روابط گوها ارائه شده است [۱۴]:

$$c = \sqrt{\frac{\chi \gamma RT}{\gamma \left[1 - \frac{RT}{h_{fg}} \left(2 - \frac{(C_p + (1-\chi)C_f/\chi)T}{h_{fg}} \right) \right]}} \quad (26)$$

در رابطه فوق، C_p و C_f به ترتیب گرمای ویژه فشار ثابت بخار و گرمای ویژه فاز مایع هستند. رابطه فوق نیز مورد بررسی قرار گرفته و مشاهده شده است که اثری در جواب همگرا شده ندارد.

۶- تثبیت شرایط ترمودینامیکی

با توجه به روابط (۱۳) و (۱۶)، مقادیر Q جدید در هر مرحله زمانی بدست می‌آیند، با بدست آوردن این بردار به ترتیب می‌توان چگالی مخلوط، سرعت مخلوط و سپس انرژی داخلی کل را بدست آورد. با کم نمودن انرژی جنبشی از مقدار انرژی داخلی کل می‌توان انرژی داخلی مخلوط را محاسبه نمود. با محاسبه انرژی داخلی، اگر جریان دو فاز باشد، کیفیت از رابطه (۲۷) قابل محاسبه است:

$$\chi = \frac{e_m - e_f}{e_{fg}} \quad (27)$$

که در مورد بدست آوردن e_{fg} و e_f در بخش ۲ (معادلات حاکم) توضیح داده شد، e_m نیز انرژی داخلی مخلوط است.

۷- شرایط مرزی

شرایط مرزی در ورود برای حل عددی جریان بدین صورت

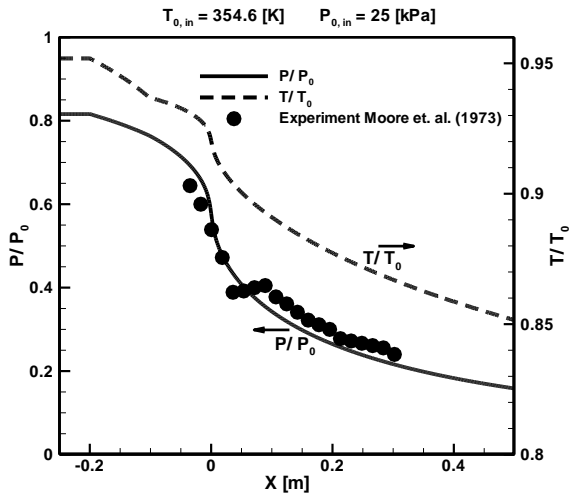
قسمت واگرای نازل به سرعت صوت می‌رسد ($M=1$). که این پدیده بدین صورت قابل توجیه است که در جریان تراکم‌پذیر بین سطح مقطع نازل، عدد ماخ و دمای سکون رابطه زیر برقرار است [۱۵]:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dM}{M} \frac{M^2 - 1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} + \frac{dT_0}{T_0} \frac{\gamma M^2 - 1}{2} \quad (28)$$

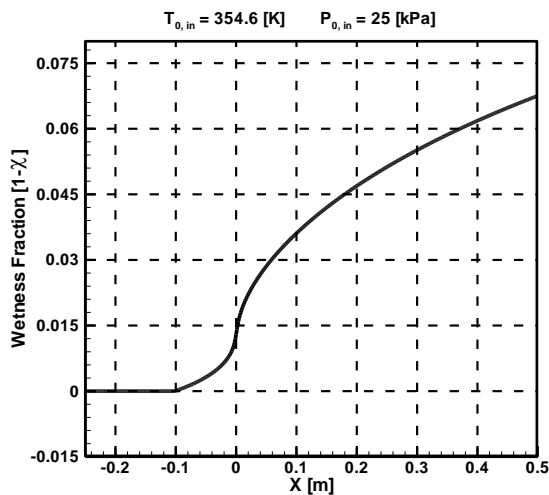
با توجه به معادله فوق در جریان خشک آیزنتروپیک تغییر دمای سکون صفر است ($dT_0=0$) و جریان در جایی به سرعت صوت می‌رسد ($M=1$) که $dA=0$ ، به عبارت دیگر در گلوگاه سرعت جریان به سرعت صوت می‌رسد اما در جریان حاوی تقطیر دمای سکون محلی بخار به علت انتقال گرمای نهان مایع به بخار افزایش می‌یابد ($dT_0 > 0$) بنابراین جریان در قسمت واگرای نازل ($dA > 0$) به سرعت صوت می‌رسد. در این مطالعه با توجه به اینکه در گلوگاه تقطیر وجود دارد بنابراین جریان در قسمت واگرای نازل به سرعت صوت رسیده است که نتایج بدست آمده با معادله فوق کاملاً هم‌خوانی دارد.

در شکل (۶) توزیع آنتروپی فاز بخار (SG) و مخلوط بخار و مایع (SM) نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این نمودار، افزایش آنتروپی فاز بخار در ناحیه دو فازی است، این پدیده را بدین صورت می‌توان توجیه نمود که با تقطیر، گرمای نهان مایع تشکیل شده به فاز بخار داده شده و همین موضوع آنتروپی فاز بخار را افزایش می‌دهد، ولی از آنجا که جریان مخلوط، آیزنتروپیک فرض شده است، آنتروپی مخلوط مقدار ثابتی است. با توجه به اینکه جریان ورودی به نازل خشک بوده، آنتروپی مایع در طول نازل نشان داده نشده است، اما از محل شروع تقطیر به بعد نتایج نشان می‌دهد که آنتروپی مایع در طول نازل کاهش می‌یابد زیرا گرمای نهان بخار تقطیر شده از مایع به بخار به صورت بازگشت‌پذیر انتقال می‌یابد. مقادیر آنتروپی در این مطالعه به صورت نسبی نشان داده شده است.

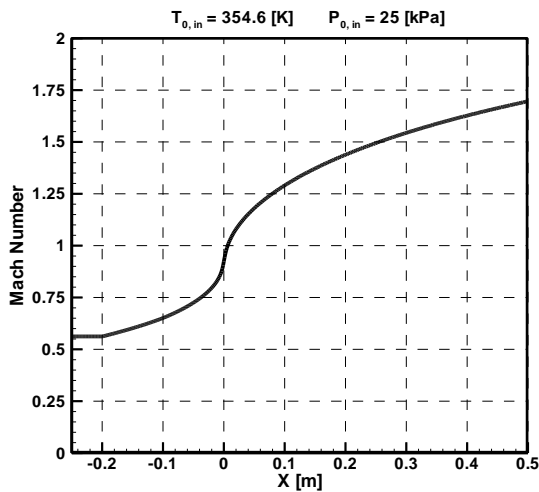
در شکل (۷) نحوه تغییرات آنتالپی مخلوط (h_m)، آنتالپی فاز بخار ($h_g=C_p T$) و آنتالپی سکون (آنتالپی کل) (h_0) در طول نازل برای جریان بدون شوک نشان داده شده است. با توجه به قانون بقای انرژی برای یک حجم کنترل با پیش‌فرض‌های فرایند دائم، آدیاباتیک و انجام نشدن کار خواهیم داشت؛ $h_0 = h_m + u^2/2$ که h_0 آنتالپی سکون بخار در بالادست است. همانطور که انتظار می‌رود، در طول یک نازل با پیش‌فرض‌های گفته شده مقدار h_0 همواره ثابت است، با مشاهده نمودار شکل (۷) نیز می‌توان به ثابت بودن



شکل (۳): تغییرات نسبت، دما به دمای سکون و فشار به فشار سکون برای حل تجربی و حل عددی (تحلیل حاضر)



شکل (۴): تغییرات رطوبت ($1-\gamma$) در طول نازل برای جریان آیزنتروپیک

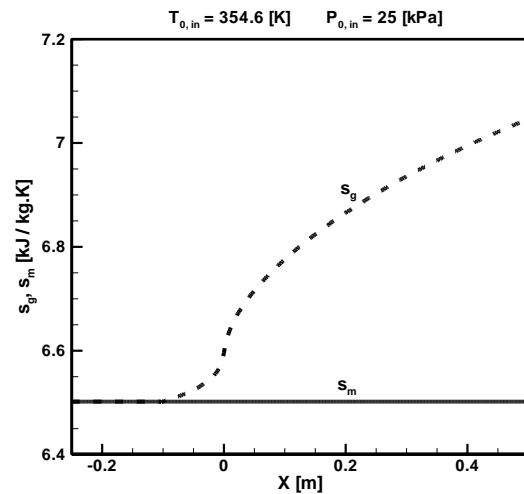


دو حالت نشان می‌دهد که بعد از شوک، بعلاوه بالا رفتن دما و آنتروپی، جریان از ناحیه دو فازی به ناحیه خشک (تکفاز) تغییر حالت می‌دهد که با توجه به نمودار دما بر حسب آنتروپی ($T-S$) در شکل (۸)، این نتیجه کاملاً قابل پیش‌بینی است. با توجه به این شکل، جریان حاوی شوک را می‌توان به صورت کامل تجسم نمود، بدین صورت که جریان با دما و فشار سکون مشخص، از بالادست جریان می‌یابد و با فشار ورودی (P_{in}) و دمای ورودی (T_{in}) وارد نازل شده (که در این مطالعه فشار و دمای ورودی به نازل به ترتیب $۲۰/۴$ kPa و $۳۳۷/۵$ K هستند) و در نقطه S قبل از گلوگاه با خط اشباع برخورد نموده و جریان بعد از این نقطه دو فاز خواهد شد، از ورودی نازل تا قبل از رسیدن به محل شوک جریان آیزنتروپیک بوده و نتایج، با نتایج مراجع [۱] و [۹] یکسان است، با وقوع شوک، آنتروپی و دمای سیال افزایش می‌یابد [۱۶]، با افزایش آنتروپی و دما، جهت حرکت سیال باید در راستای خط نشان داده شده در شکل (۸) باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت که بعد از شوک ممکن است (با توجه به قدرت شوک) سیال از ناحیه دو فازی به ناحیه مافوق گرم (تکفاز) منتقل شود.

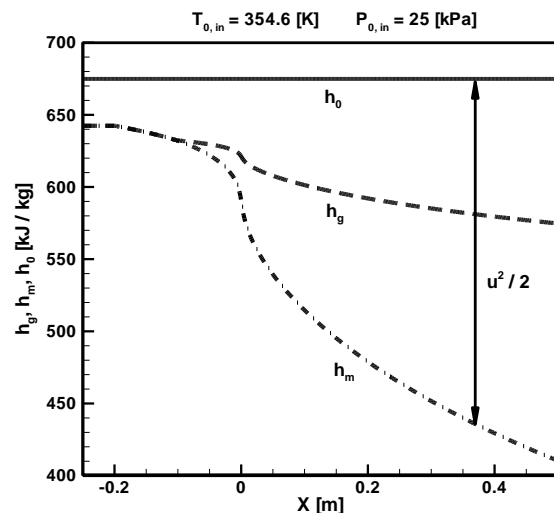
نتایج تجربی برای جریان حاوی شوک در تاریخچه موجود نیست، اما با توجه به مقایسه نتایج تجربی و عددی قبل از وقوع شوک در شکل (۹)، دیده می‌شود که بین نتایج تجربی و عددی برابری مناسبی برقرار است. همچنین مسیر حرکت سیال بعد از وقوع شوک طبق مسیر نشان داده شده در شکل (۸) است بدین صورت که فشار، دما و آنتروپی افزایش یافته و جریان از ناحیه دو فاز به ناحیه خشک منتقل شده است، که درستی محاسبات انجام شده را نشان می‌دهد. احتمال دوفاز ماندن جریان حاوی شوک با کاهش دمای ورودی و افزایش فشار ورودی به نازل افزایش می‌یابد زیرا در این شرایط رطوبت در طول نازل افزایش یافته و با افزایش رطوبت، فاصله از خط بخار اشباع نیز افزایش می‌یابد. بنابراین وقوع شوک ممکن است که نتواند جریان را از حالت دو فازی به حالت مافوق گرم (تکفاز) منتقل نماید.

با توجه به اینکه تغییرات عوامل مختلف جریان از جمله فشار، دما، چگالی و سرعت در محل شوک زیاد است و این تغییرات شدید باعث ناپایداری در حل عددی می‌شوند نوشتن معادلات به صورت پایستار برای حل عددی پایدار مؤثر است. برای مثال در محل شوک، چگالی جریان (ρ) افزایش یافته و سرعت جریان (u) کاهش می‌یابد اما با توجه به معادله پیوستگی برای مقطعی که در آن شوک رخ می‌دهد، $\rho u = cte$ ، نوشتن معادلات به صورت پایستار به کاهش نوسانات صرفاً

شکل (۵): تغییرات عدد ماخ در طول نازل برای جریان آیزنتروپیک



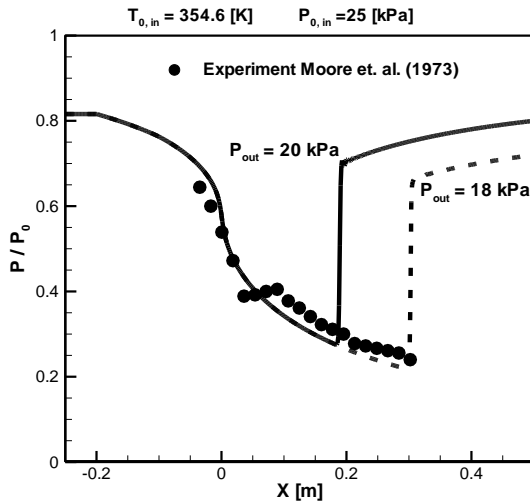
شکل (۶): تغییرات آنتروپی بخار (s_g) و مخلوط بخار و مایع (s_m) در طول نازل برای جریان آیزنتروپیک



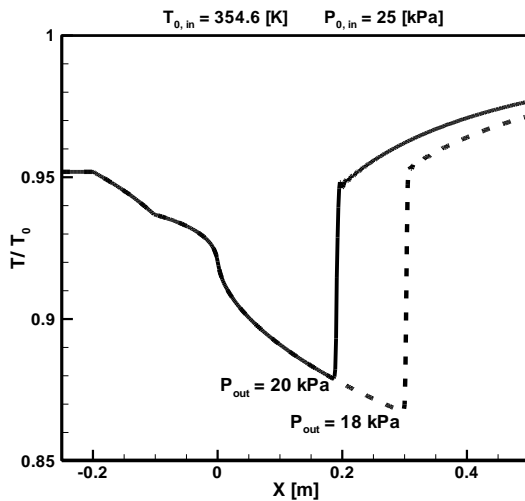
شکل (۷): تغییرات آنتالپی سکون (h_0)، آنتالپی بخار (h_g) و آنتالپی مخلوط بخار و مایع (h_m) در طول نازل برای جریان آیزنتروپیک

همانطور که در شکل‌های (۶) و (۷) دیده می‌شود قبل از شروع تقطیر، آنتروپی و آنتالپی فاز بخار با آنتروپی و آنتالپی مخلوط یکسان هستند زیرا قبل از شروع تقطیر جریان تک‌فاز است، اما بعد از تقطیر آنتروپی و آنتالپی فاز بخار بیشتر از مخلوط است.

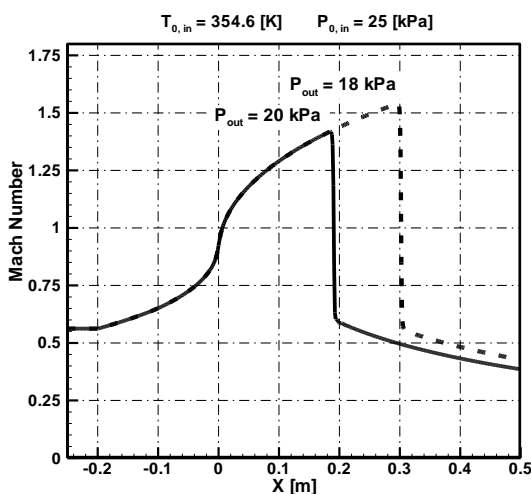
در این مطالعه جریان دو فاز حاوی شوک قائم با فرض ترمودینامیک تعادلی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای جریان حاوی شوک، نتایج برای دو پس فشار مختلف kPa $P_{out} = ۱۸$ و $P_{out} = ۲۰$ به نمایش در آمده است. نتایج برای این



شکل (۹): تغییرات نسبت فشار به فشار سکون در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشارهای ۲۰ kPa و ۱۸ kPa



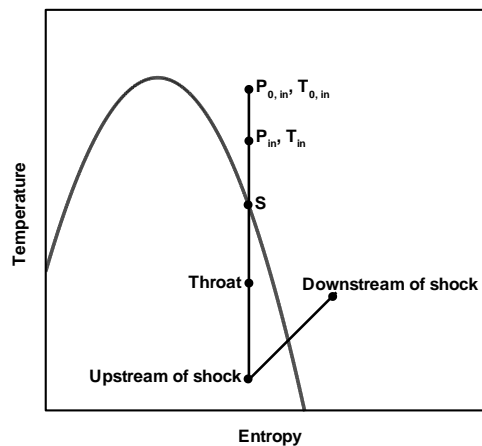
شکل (۱۰): تغییرات نسبت دما به دمای سکون در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشارهای ۲۰ kPa و ۱۸ kPa



شکل (۱۱): تغییرات عدد ماخ در طول نازل برای جریان حاوی شوک با

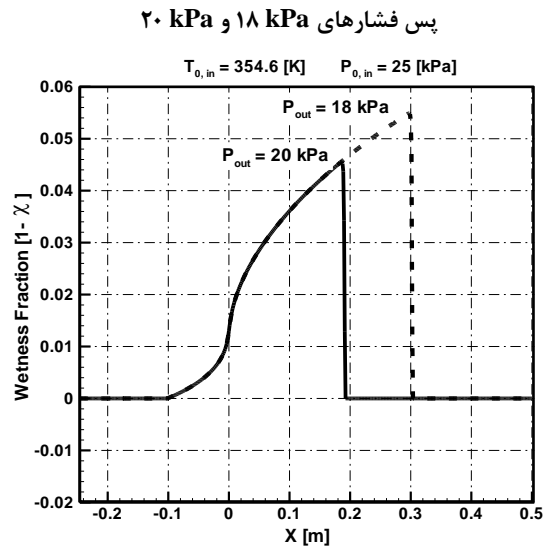
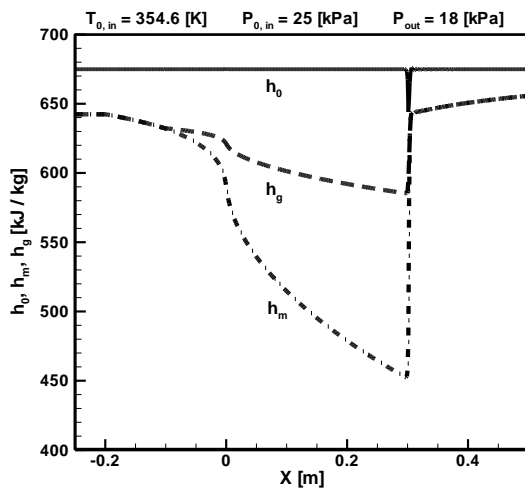
عددی منجر شده و محل شوک و میزان تغییرات عوامل مختلف جریان را در محل وقوع شوک به خوبی نشان می‌دهد. فرض ترمودینامیک تعادلی قبل از وقوع شوک برای جریان دو فاز و بعد از وقوع شوک نیز که جریان تکفاز شده تقریب درستی است، در محل وقوع شوک نیز قوانین بقای جرم، مومنتم و انرژی به خوبی ارضاء شده است.

نتایج برای جریان حاوی شوک برای دو پس فشار متفاوت در شکل‌های (۹) الی (۱۶) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها دیده می‌شود که محل شوک به ازای $P_{out}=18 \text{ kPa}$ نزدیکتر به دهانه خروجی نازل است و با افزایش پس فشار، به مقدار $P_{out}=20 \text{ kPa}$ ، محل شوک به بالادست (به سمت گلوگاه) منتقل شده است. با عبور جریان دو فاز از شوک قائم، فشار و دما مشابه حالت تکفاز افزایش یافته و عدد ماخ جریان کاهش می‌یابد (شکل‌های (۹) الی (۱۱)). در شکل (۱۲) دیده می‌شود که با عبور جریان دو فاز از شوک قائم، جریان تکفاز شده ($\chi=1$) و مقدار رطوبت (χ) به صفر می‌رسد که با توجه به نمودار شکل (۸) توجیه شد.



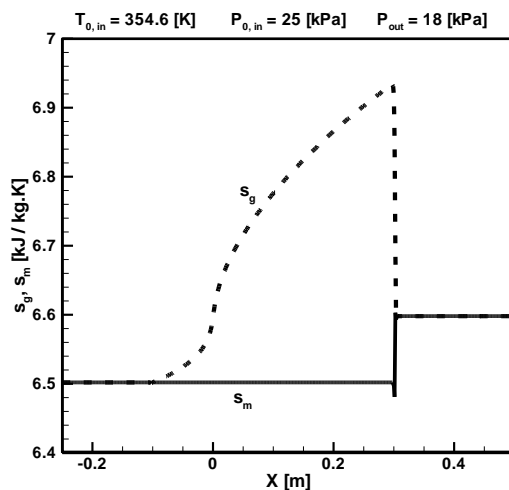
شکل (۸): نمایش دما بر حسب آنترنوپي (T-S) در جریان بخار حاوی شوک در نازل با گلوگاه خیس (گلوگاه حاوی رطوبت)

شده و دبی مایع بعد از وقوع شوک صفر شده و دبی کل با دبی بخار برابر خواهد شد. هدف از ارائه این شکل‌ها تجسم بهتر جریان بخار، مایع و بررسی بقای جرم در این جریان است.



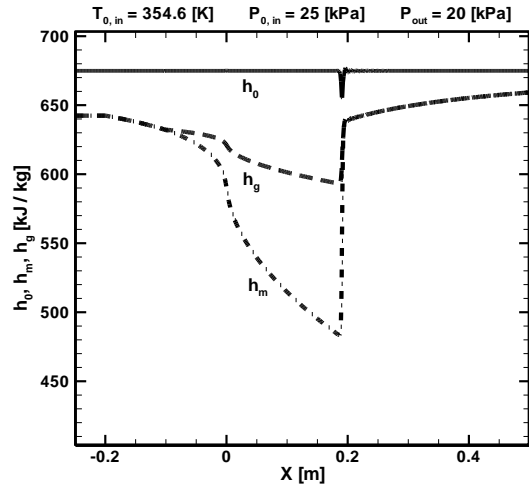
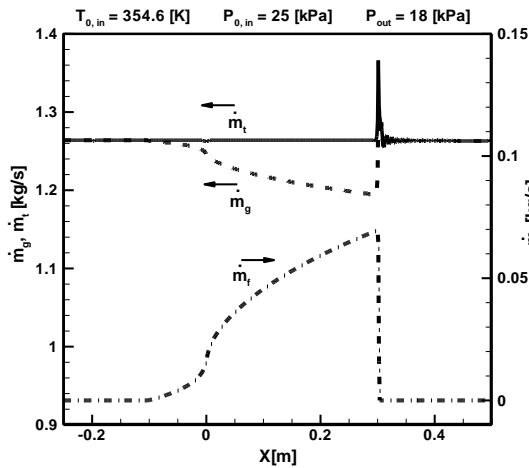
شکل (۱۲): تغییرات رطوبت در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشارهای ۱۸ kPa و ۲۰ kPa

شکل (۱۳): نمودار تغییرات آنتالپی سکون، آنتالپی گاز و آنتالپی مخلوط در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشار ۱۸ kPa



شکل (۱۴): تغییرات آنتروپی بخار و مخلوط در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشار ۱۸ kPa

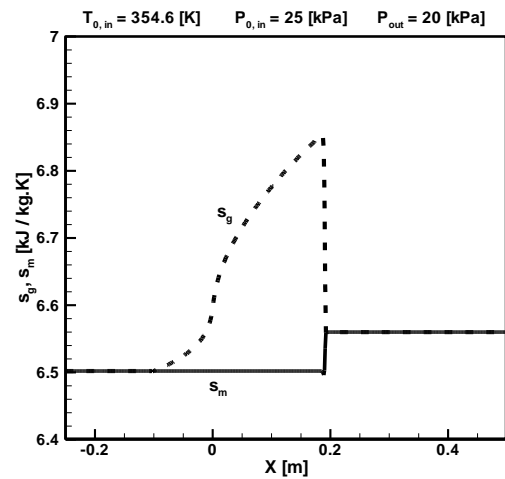
با توجه به شکل‌های (۱۳) الی (۱۶)، می‌توان به این مطلب پی برد که بعد از شوک با توجه به اینکه جریان کاملاً به حالت تک‌فاز تغییر حالت می‌دهد، آنتروپی مخلوط با آنتروپی بخار و همچنین آنتالپی مخلوط با آنتالپی بخار کاملاً یکسان هستند. با توجه به شکل‌های (۱۳) و (۱۵) دیده می‌شود که در جریان حاوی شوک نیز آنتالپی سکون در طول نازل ثابت است که با توجه به عایق بودن نازل نتیجه کاملاً منطقی است. شکل‌های (۱۷) و (۱۸) تغییرات سه عامل، دبی کل $(\dot{m}_t = \dot{m}_g + \dot{m}_f = \rho u A)$ ، دبی بخار آب $(\dot{m}_g = \chi \dot{m}_t)$ و دبی آب مایع $(\dot{m}_f = \dot{m}_t - \dot{m}_g = (1 - \chi) \dot{m}_t)$ را در امتداد نازل به ترتیب برای جریان آیزنتروپیک و جریان حاوی شوک نشان می‌دهند. همان‌طور که در این شکل‌ها نشان داده شده است و با توجه به قانون بقای جرم (پیوستگی)، دبی کل ثابت مانده است. با جاری شدن بخار داخل نازل، جریان در حوالی $x = -0.1$ m دو فازی شده و دبی مایع افزایش می‌یابد و با افزایش دبی مایع، دبی بخار کاهش یافته ولی همواره مجموع آنها (\dot{m}_t) مقدار ثابتی باقی مانده تا همواره قانون پیوستگی ارضا شود. در شکل (۱۷) (جریان آیزنتروپیک)، همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش دبی مایع، دبی بخار کاهش یافته و این تغییر به طور پیوسته در طول نازل ادامه می‌یابد. در شکل (۱۸) (جریان حاوی شوک) وضعیت به نحو دیگری به نمایش در آمده است، به این ترتیب که با شروع جریان دو فازی دبی بخار کاهش یافته و دبی مایع افزایش می‌یابد و این نحوه تغییر تا محل شوک شبیه جریان آیزنتروپیک است. بعد از شوک به علت افزایش آنتروپی و دما، جریان تک‌فاز



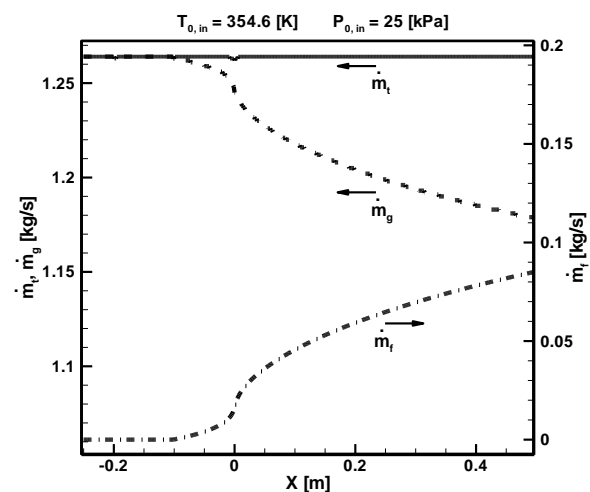
شکل (۱۸): تغییرات دبی بخار آب (\dot{m}_g)، دبی آب مایع (\dot{m}_f) و دبی کل (\dot{m}_t) در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشار ۱۸ kPa

شکل (۱۵): نمودار تغییرات آنتالپی سکون، آنتالپی بخار و آنتالپی مخلوط در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشار ۲۰ kPa

شکل (۱۹) تاریخچه همگرایی دبی ورودی و خروجی را برحسب زمان در جریان آیزنتروپیک نشان می‌دهد، با توجه به این منحنی می‌توان گفت که دبی ورودی به نازل و دبی خروجی از نازل برای مقادیر $t \geq 0.06$ sec برابرند، به عبارت دیگر جریان در زمان حدود $t = 0.06$ sec به حالت پایا رسیده است. در ضمن اختلاف بسیار کم بین \dot{m}_{out} و \dot{m}_{in} نشان می‌دهد که جریان بخوبی به جواب پایا همگرا شده است. شکل (۲۰) تاریخچه همگرایی دبی ورودی و خروجی را برحسب زمان در جریان حاوی شوک نشان می‌دهد، با توجه به این منحنی می‌توان گفت که دبی ورودی به نازل و دبی خروجی از نازل برای مقادیر $t \geq 0.12$ sec، مقادیر یکسانی دارند، به عبارت دیگر، جریان در زمان حدود $t = 0.12$ sec به حالت پایا رسیده است. با مقایسه این شکل با شکل (۱۹) می‌توان دید که برای جریان حاوی شوک، زمان همگرایی بیشتر است زیرا به علت وجود شوک یک سری نوسانات عددی وجود خواهد داشت که زمان لازم را برای همگرا شدن جواب افزایش می‌دهند.



شکل (۱۶): تغییرات آنتروپی بخار و مخلوط در طول نازل برای جریان حاوی شوک با پس فشار ۲۰ kPa



شکل (۱۷): نمودار تغییرات دبی بخار آب (\dot{m}_g)، دبی آب مایع (\dot{m}_f) و دبی کل (\dot{m}_t) در طول نازل برای جریان آیزنتروپیک

با افزایش پس فشار موقعیت شوک به گلوگاه نزدیک‌تر خواهد شد.

بعد از شوک، دما، فشار و آنترپی مخلوط افزایش یافته و جریان بعد از شوک مادون صوت خواهد شد.

برای حالت‌های مطالعه شده و با توجه به شکل (۱۲)، بعد از شوک کیفیت برابر با یک و رطوبت برابر با صفر شده، یا به عبارت دیگر، با ایجاد شوک جریان از ناحیه دو فازی به تک فازی تغییر می‌نماید که علت این مهم را این طور می‌توان بیان نمود که با ایجاد شوک آنترپی و دما افزایش یافته و همین امر جریان را از ناحیه دو فازی به تک فازی تغییر خواهد داد.

با توجه به نمودارهای (۱۹) و (۲۰) مشاهده می‌شود که زمان همگرا شدن دبی ورودی و خروجی در جریان حاوی شوک بیشتر است.

۱- پیوست

فشار اشباع در ناحیه دو فازی با تابع زیر محاسبه شده است. این تابع با برازش معادله درجه ۵ بر منحنی دما و فشار در ناحیه دو فازی بدست آمده است [۱]:

$$P_{sat} = A_5(T-t_0)^5 + A_4(T-t_0)^4 + A_3(T-t_0)^3 + A_2(T-t_0)^2 + A_1(T-t_0) + A_0 \quad (29)$$

در معادله فوق فشار (P)، بر حسب پاسکال (Pa)، دما (T)، بر حسب کلوین (K) و مقدار $t_0 = 273/15$ برابر با می‌باشد. این معادله در محدوده $T = (293-423)$ از دقت بسیار بالایی برخوردار است. ضرایب این تابع به صورت زیر است:

$$A_5 = 1/777491 \times 10^{-6} \quad (30)$$

$$A_4 = 5/118105 \times 10^{-4}$$

$$A_3 = -1/508110 \times 10^{-3}$$

$$A_2 = 3/282639$$

$$A_1 = 1/313810$$

$$A_0 = 9/635917 \times 10^{-2}$$

به همین ترتیب تابع انرژی داخلی تبخیر بر حسب دما با رابطه زیر در ناحیه دو فازی محاسبه شده است [۱]:

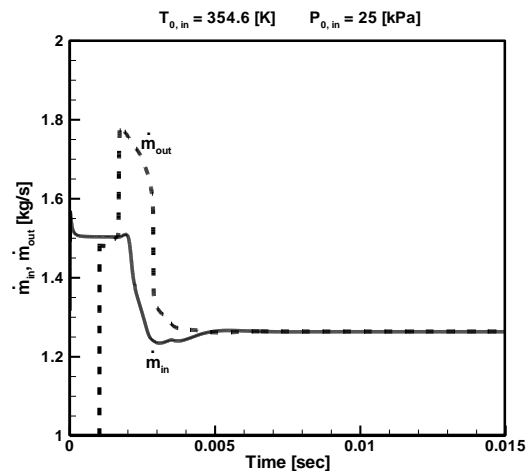
$$e_{fg} = E_2(T-t_0)^2 + E_1(T-t_0) + E_0 \quad (31)$$

در رابطه (۳۱) دما بر حسب کلوین و انرژی داخلی بر حسب J/kg است و مقدار ضرایب برابر است با:

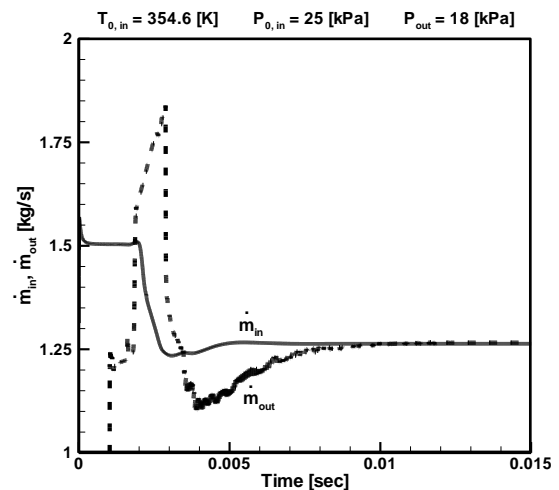
$$E_2 = -1/964125 \quad (32)$$

$$E_1 = -2/661665 \times 10^{-3}$$

$$E_0 = 2/372678 \times 10^{-6}$$



شکل (۱۹): تاریخچه همگرایی دبی ورودی و خروجی نسبت زمان برای جریان آیزنتروپیک



شکل (۲۰): تاریخچه همگرایی دبی ورودی و خروجی نسبت به زمان ای جریان حاوی شوک با پس فشار ۱۸ kPa

۹- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، روش عددی Roe با دقت مرتبه سوم مکانی و دقت مرتبه دوم زمانی برای حل جریان دو فاز بدون شوک (جریان آیزنتروپیک) و حاوی شوک با دو پس فشار متفاوت (P_{out}) در نازل همگرا-واگرا توسعه داده شده، و نتایج برای حالت خروجی مافوق صوت، با نتایج تجربی مقایسه شده است.

در پایان برای نتیجه‌گیری می‌توان به نکات زیر اشاره نمود:

۱. با توجه به شکل‌های (۷)، (۱۳) و (۱۵)، آنتالپی سکون، برای جریان حاوی شوک و جریان بدون شوک ثابت است.
- با توجه به شکل‌های (۱۹) و (۲۰)، دبی ورودی و خروجی برای جریان بدون شوک و با شوک با هم برابرند.

λ	مقادیر ویژه	با بدست آوردن انرژی داخلی تبخیر، آنتالپی تبخیر نیز براحتی از رابطه زیر تعیین می‌شود:
ρ	چگالی مخلوط، kg/m^3	
ϕ	تابع محدود کننده	
χ	کیفیت بخار	$h_{fg} = e_{fg} + RT \quad (33)$
Δq	تغییرات خواص اصلی (فشار، دما، سرعت و کیفیت)	با بدست آوردن آنتالپی تبخیر، آنتروپی تبخیر نیز با رابطه $s_{fg} = h_{fg}/T$ بدست می‌آید و آنتروپی بخار نیز با فرض گاز کامل از رابطه $s_g = C_p \ln T - R \ln P$ محاسبه شده و به همین ترتیب آنتروپی مایع اشباع از رابطه $s_f = s_g - s_{fg}$ بدست می‌آید. با این عبارات آنتروپی مخلوط در ناحیه دو فاز به راحتی از رابطه $s_m = s_f + \chi s_{fg}$ قابل محاسبه است.
Δt	بازه زمانی، sec	
Δx	بازه مکانی، m	
δw	بردار نوسان موج	

زیرنویس

E	سمت شرق حجم کنترل
EE	شرق سمت شرق حجم کنترل
f	فاز مایع
fg	اختلاف گرمای نهان
g	فاز بخار
i	نقطه دلخواه در راستای محور نازل
in	جریان ورودی
m	مخلوط مایع و بخار
out	جریان خروجی
sat	حالت اشباع
t	کل
W	سمت غرب حجم کنترل
0	حالت سکون

بالانویس

k	شمارنده بردارها
L	سمت چپ مرز المان
R	سمت راست مرز المان
n	مرحله زمانی
\wedge	شرایط میانگین Roe

۱-۱-۱۰ فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت، m^2
A_0-A_5	ضرایب منحنی فشار بر حسب دما در ناحیه دو فاز
C_p	گرمای ویژه فشار ثابت بخار، J/kg.K
C_v	گرمای ویژه حجم ثابت بخار، J/kg.K
C_f	گرمای ویژه آب مایع، J/kg.K
e	انرژی داخلی، J/kg
E_0-E_2	ضرایب منحنی انرژی داخلی تبخیر
F	بردار جریان
H	بردار چشمه
h_{fg}	آنتالپی تبخیر، J/kg
h_t	آنتالپی کل، J/kg
k_0	عدد بدون بعد
\dot{m}	دبی جرمی، kg/s
n	مرحله زمانی
P	فشار، Pa
P_{out}	پس فشار (فشار خروجی)، Pa
q	متغیر دلخواه (فشار، دما، سرعت یا کیفیت)
Q	بردار پایستار
R	ثابت بخار، J/kg.K
s	آنتروپی، J/kg.K
t	متغیر زمانی، sec
T	دما، K
T	بردار ویژه
u	سرعت، m/s
v	حجم مخصوص، m^3/kg
x	متغیر مکانی، m

علائم یونانی

γ	نسبت گرمای ویژه فشار ثابت به حجم ثابت
ε	مؤلفه تصحیح آنتروپی
ε_0	عدد دلخواه بسیار کوچک

۱۱- مراجع

- Moore, M.J., Walters, P.T., Crane, R.I. and Davidson, B.J., "Predicting the Fog Drop Size in Wet Steam Turbines," Inst. of Mechanical Engineers (UK), Wet Steam 4 Conference, University of Warwick, paper C37/73, 1973.
- Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., "Computational Fluid Dynamics for Engineers," Vol. II, Engineering Education Systems, Wichita, Kansas, USA, 1993.
- van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme, V, A Second Order Sequel to Godunov's Method," J. Comput. Phys., Vol. 32, pp. 110-136, 1979.
- Kermani, M.J., "Development and Assessment of Upwind Schemes with Application to Inviscid and Viscous Flows on Structured Meshes," Ph.D. thesis, Department of Mechanical & Aerospace Engineering, Carleton University, Canada, 2001.
- Harten, A. and Hyman, J.M., "Self-Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws," J. Comput. Phys., Vol. 50, pp. 235-269, 1983.
- Guha, A., "Two-Phase Flows with Phase Transition," von Karman Institute Lecture Series 1995-06, May 29-June 1, 1995.
- Saad, M. A., "Compressible fluid flow," Prentice-Hall, Inc, Englewood cliffs, New Jersey, 1985.
- Moran, M.J. and Shapiro, H.N., "Fundamentals of Engineering Thermodynamics," 4th Edition, John Wiley & Sons, 1998.
- [۹] Kermani, M.J. and Gerber, A.G. Stockie, J.M., "An Application of Roe's High Resolution Scheme to Transonic Two-Phase Flow through Nozzles," Iranian Journal of Mechanical Engineering: Transaction of the ISME, E-84-04, Vol. 7 (1), pp. 60-77, 2006.
- [۱۰] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," J. Comput. Phys., Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- [۱۱] Halama, Jan. and Benkhaldoun, Fayssal. and Fort, Jaroslav, "Numerical modeling of two-phase transonic flow" Mathematics and Computers in Simulation, 2009.
- [۱۲] Li, Na. and Zhou, Qulan. and Chen, Xi. and Xu, Tongmo. And Hui, Shien. And Zhang, Di., "Liquid drop impact on solid surface with application to water drop erosion on turbine blades, Part I: Nonlinear wave model and solution of one-dimensional impact" International Journal of Mechanical Sciences 50, 1526-1542, 2008.
- [۱۳] Simpson, D.A. and White, A.J., "Viscous and unsteady flow calculations of condensing steam in nozzles," International Journal of Heat and Fluid Flow 26, 71-79, 2005.
- [۱۴] Zayernouri, M., and Kermani, M.J., "Development of an Analytical Solution for Compressible Two-Phase Steam Flow," Canadian Journal of Mechanical Engineering: Transaction of the CSME, 2006.
- [۱۵] van Albada, G.D., van Leer, B. and Roberts, W.W., "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics," Astron. Astrophys., Vol. 108, pp. 76-84, 1982.
- [۱۶] Kermani, M.J. and Plett, E.G., "Modified Entropy Correction Formula for the Roe Scheme," AIAA Paper # 2001-0083, 2001.

۱۲- پی نوشت

- ^۱ Lax-Wendroff
^۲ Upwind
^۳ Condensation shock
^۴ Isentropic
^۵ Entropy
^۶ Van Albada flux limiter
^۷ Enthalpy
^۸ Predictor-corrector
^۹ Central
^{۱۰} Frozen Mach Number
^{۱۱} Moore, M.J.
^{۱۲} Throat