

Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(8) (2020) 553-556 DOI: 10.22060/mej.2018.14469.5881

Dynamic Behavior of a Micro-Beam Subjected to Voltage and Fluid Flow as a Micro Vortex Generator

M. Rezaee*, N. Sharafkhani, M. Taghi Shervani-Tabar

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

ABSTRACT: The present work investigated the nonlinear vibration of a cantilever cylindrical microbeam subjected to voltage and fluid flow as a micro vortex generator. As the microbeam is subjected to the fluid with a given velocity, in addition to the load due to fluid added mass, the lift and drag forces as the two basic flow-induced factors affecting the dynamics of the micro-beam were modeled using Van der pol equation. The Euler-Bernoulli beam theory was used to model the cross fluid motion of beam under nonlinear electrostatic force as a result of the applied voltage. The Galerkin method was used to convert the partial differential equation to regular differential equations as well as to solve the coupled nonlinear equations governing the micro-beam motion and the wake oscillation to evaluate the response of the coupled structure to a combined applied voltage and fluid flow. The effect of fluid flow on the Reynolds number and fluid vortex frequency as two main parameters in the creation of the Lock-in phenomenon was studied. In addition to the effect of different fluid velocities, the response of the microbeam to different input voltages in the presence of fluid flow was investigated and it was shown that for a given flowing fluid, the applied voltage can be used to control the lock-in regime.

Review History:

Received: 2018/06/02 Revised: 2018/08/13 Accepted: 2018/09/07 Available Online: 2018/09/23

Keywords:

Micro vortex generator
Micro-beam
Voltage
Fluid flow
Lock-in

1-Introduction

Today the electrostatic force is highly used as an actuating force in different micro electromechanical systems due to its simple mechanism, high efficiency, reliability and less energy consumption [1].

Most researches dealing with fluid-structure interaction in micro-scale have studied the vibration of micro-structures immersed in the stationary fluid. Golzar et al. [2] studied dynamical behavior and instability of electrostatically actuated micro-beam in the incompressible viscous fluid cavity. Up to now, only a few studies investigated the effect of fluid flow on micro-structures, considering the physical characteristics of the vortex phenomenon. The only research regarding fluid flow effect on vibrational behavior of microstructure is conducted by Rezaee and Sharafkhani [3] in which the dynamic behavior of cylindrical micro-beams as micro-energy-harvester under the simultaneous influence of the voltage and fluid flow is investigated.

In this paper, the dynamic behavior and vibrational characteristics of a micro-vortex generator are studied, and governing equations are solved using numerical methods helping MATLAB software.

2- Methodology

As illustrated in Fig. 1, when a cylindrical micro-beam with density of ρ and a diameter of D immersed in fluid with given constant velocity of U and kinetic viscosity of

*Corresponding author's email: m rezaee@tabrizu.ac.ir

v, vortex phenomenon could be happened under certain conditions influenced by the Reynolds number, Re = UD/v.



Fig. 1. A side view of a micro vortex generator subjected to fluid flow and voltage

Accordingly, in addition to the inertia force caused by still fluid, lift force [4] with frequency same as the frequency of vortex, $\omega_{vor} = 2\pi U_{rel} St/D$ [4, 5], and drag force with frequency twice of the vortex frequency will be created. The equation of motion for the lateral oscillations, w, of the cantilever Euler-Bernoulli cylindrical micro-beam with a cross-section area of A, subjected to the electrostatic force, f_{e} and fluid with a density of ρ_c is:

$$(EI) w_{xxx} + \rho A \left(1 + \frac{\rho_{f}}{\rho} \right) w_{x} + \left[\frac{1}{2} \rho_{f} C_{D} D U_{nd} \right] w_{i} = f_{e} + \left(\frac{1}{4} \rho_{f} C_{i} D U_{nd} U \right) Q \quad (1)$$

Where C_{l_0} and C_{D} are lift and drag force constants respectively, and Q will be obtained from the Van der Pol equation:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \eta \omega_{vor} \left(Q^2 - 1 \right) \frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_{vor}^2 Q = \frac{P}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2}$$



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://mej.aut.ac.ir/article_3089.html.

P and η are vortex phenomenon constants [4].

To convert the partial differential equation to a regular differential equation, the Galerkin's weighted residual method is used.

3- Results and Discussion

When fluid with Reynolds numbers between 40 and 300 encounters the micro-structure, with regards to high resulted pressure at the edge, fluid particles are led to the sides and there appears a phenomenon which is known as vortex channel. Fig. 2 depicts the micro-beam vibration response under the given voltage, $\hat{V} = 3.8$, and fluid flow with four different velocities.





Fig. 2. Comparison of micro-beam vibration response under given voltage, $\hat{V} = 3.8$, and fluid with different velocities: (a) $\hat{U} = 2.5$ (b) $\hat{U} = 3.5$ (c) $\hat{U} = 5.5$ (d) $\hat{U} = 8.5$

As the applied voltage is constant, the structure fundamental frequency does not change, yet with increasing the fluid velocity, the fluid vortex frequency and the Reynolds number increase. As shown in Fig. 2, by increasing the fluid flow velocity from $\hat{U} = 2.5$ to $\hat{U} = 5.5$, the micro-beam vibration amplitude increases gradually and then decreases for $\hat{U} = 8.5$. Fig. 3 illustrates diagrams of dimensionless micro-beam dynamic amplitude, $(\hat{W}_{max} - \hat{W}_{min})/2$, against the fluid velocity. As it is shown, by increasing the fluid reduced velocity up to that corresponding to the peak point, the dynamic amplitude will increase constantly. In other words, the lock-in phenomenon occurs when the structure vibration and the wake oscillation are in-phase and could reinforce each other in terms of amplitude. Differences in peak points are caused by the fact that as the voltage increases the fundamental frequency of the structure decreases, and as a result, the lock-in phenomenon occurs at lower velocities.



Fig. 3. Effect of the fluid reduced velocity on the dynamic amplitude of the micro-beam subjected to dc voltage

Beyond the peak point, by increasing the fluid reduced velocity, due to the receding of the structure frequency and the frequency of the fluid vortex from each other and thus, receding from the lock-in zone, the amplitude starts decreasing. The mentioned behavior is completely like the experimental results obtained in the references [4, 6].

4- Conclusions

In this study, for the first time, the governing equations of the micro-beam motion as a micro vortex generator under voltage considering fluid flow effect including drag and lift forces were derived using Van der Pol equation, Hamilton's principle, and Euler-Bernoulli beam theory. The coupled equations were solved helping numerical methods and the following results were obtained:

Under specific conditions related to fluid and structure characteristics, fluid flow can affect the micro-beam vibration. If the structure fundamental frequency is higher than the fluid vortex frequency, by increasing the fluid flow velocity which increases the vortex frequency and the Reynolds number, the micro-beam vibration amplitude will increase gradually and then decrease after reaching the peak point. The variable peak point and the proportional velocity is a function of fluid and structure characteristics.

The indicated increase of the amplitude and the followed reduction is due to the lock-in phenomenon which is the result of approaching or receding the fluid vortex frequency and the structure fundamental frequency. In other words, the lock-in phenomenon occurs when the structure vibration and the wake oscillation could reinforce each other.

By fixing the fluid flow, applying voltage may result in amplitude variation. The applied voltage, in addition to its main role as an applied external force, by changing the electrical stiffness, changes the fundamental frequency of the structure. Therefore, voltage as a regulating parameter can be used for occurring or receding from the lock-in phenomenon. Determination of the fluid characteristics in micro electromechanical systems is important as with fixing them, the accuracy of the applied voltage effect can be tuned by choosing the suitable structure geometrical features as well as proportional vibrational frequency.

5- References

- W.-C. Chuang, H.-L. Lee, P.-Z. Chang, Y.-C. Hu, Review on the Modeling of Electrostatic MEMS, Sensors, 10(6) (2010) 6149.
- [2] F.G. Golzar, R. Shabani, H. Hatami, G. Rezazadeh, Dynamic Response of an Electrostatically Actuated Micro-Beam in an Incompressible Viscous Fluid Cavity, Journal of Microelectromechanical Systems, 23(3) (2014) 555-562.
- [3] R. Mousa, S. Naser, Electrostatically frequency tunable microbeam-based piezoelectric fluid flow energy harvester, Smart Materials and Structures, 26(7) (2017) 075008.
- [4] M.L. Facchinetti, E. de Langre, F. Biolley, Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations, Journal of Fluids and Structures, 19(2) (2004) 123-140.
- [5] M.P. Païdoussis, S.J. Price, E. de Langre, Fluid Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities, Cambridge University Press, New York., 2011.
- [6] S. Kaneko, I. Nakamura, T.F.M. Kato, K. Ishihara, T. Nishihara, N.W. Mureithi, M.A. Langthjem, Fluid-Induced Vibrations, Classifications and lessons from practical experiences, Elsevier, 2014.

This page intentionally left blank

نشريه مهندسي مكانيك اميركبير

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۸، سال ۱۳۹۹، صفحات ۲۲۳۱ تا ۲۲۴۲ DOI: 10.22060/mej.2018.14469.5881



بررسی رفتار دینامیکی میکروتیر تحت اثر ولتاژ و جریان سیال به عنوان میکروتولیدکننده گردابه

> موسی رضائی*، ناصر شرفخانی، محمدتقی شروانی تبار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخچه داوری: خلاصه: در این تحقیق ارتعاشات غیرخطی میکروتیر یکسر گیردار تحت اثر همزمان ولتاژ و جریان سیال به عنوان دریافت: ۱۳۹۷-۰۳-۱۳۹۷ میکروتولیدکننده گردابه مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به اینکه میکروتیر موردنظر در معرض جریان سیال با بازنگری: ۲۲–۱۳۹۷–۱۳۹۷ سرعت معین قرار دارد، علاوه بر نیروی ناشی از جرم افزوده سیال، اثر نیروهای برآ و پسا به عنوان دو پارامتر مهم ناشی پذیرش: ۱۳۹۷-۰۶-۱۳۹۷ از جریان سیال بر ارتعاش میکروتیر با استفاده از معادله واندرپل شبیهسازی گردید. از تئوری تیر اویلر-برنولی جهت ارائه آنلاین: ۰۱–۰۷–۱۳۹۷ مدلسازي ارتعاش ميكروتير تحت اثر نيروي غيرخطي الكترواستاتيك ناشي از اعمال ولتاژ در جهت عمود بر جريان سيال كلمات كليدى: استفاده گردیده و نشان داده شد که با توجه به اثر متقابل حرکت ساختار و نوسان سیال، معادلات حاکم به هم وابسته ميكروتوليدكننده گردابه می اشند. جهت تبدیل معادلات با مشتق جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی از روش عددی گلرکین استفاده نموده ميكروتير و پاسخ سیستم به اثر ولتاژ در حضور جریان سیال مورد بررسی قرار گرفت. اثر جریان سیال بر عدد رینولدز و فرکانس ولتاژ گردابه سیال به عنوان دو عامل مهم در ایجاد پدیده گردابه مورد مطالعه قرار گرفته و پاسخ سیستم به سیال با سرعتهای جريان سيال جریان مختلف به دست آمد. همچنین اثر ولتاژهای اعمالی مختلف بر پاسخ سیستم تحت اثر جریان سیال معین مورد قفلشدگی بررسی قرار گرفته و از آن برای کنترل ناحیهای که در آن پدیده قفل شدگی اتفاق میافتد استفاده گردید.

۱– مقدمه

نیروی الکترواستاتیک با توجه به مکانیزم ساده، کارایی بالا، قابلیت اطمینان و مصرف کمتر انرژی، به عنوان نیروی محرک کاربرد زیادی در سیستمهای مختلف میکروالکترومکانیکی دارد [۴–۱]. در طی سالهای گذشته، میکروتیرهای تحت اثر نیروی الکترواستاتیک ناشی از اعمال ولتاژ به عنوان یکی از مهمترین اجزای تشکیل دهنده میکروساختارها در سیستمهای مختلف میکروالکترومکانیکی مورد توجه محققان بسیاری بوده است [۵ و ۶].

در تحقیقاتی که تاکنون در مقیاس میکرو به بررسی اثر سیال بر رفتار دینامیکی ساختار پرداخته شده است عمدتاً محدود به بررسی اثر سیال ساکن بوده است. گلزار و همکاران [۷] به بررسی رفتار دینامیکی و ناپایداری میکروتیر تحت اثر نیروی الکترواستاتیک و سیال میرای تراکمناپذیر پرداختند. آنها با فرض میرا بودن سیال و جایگذاری نیروی معادل ناشی از میرایی فیلم فشرده در معادلات ارتعاش عرضی به بررسی فرکانس طبیعی ساختار کوپل پرداختند و *نویسنده عهدهدار مکاتبت: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

با اعمال ولتاژهای مختلف مشخصههای مربوط به ناپایداری را برای سیال با چگالیهای مختلف به دست آوردند. چون و همکاران [۸] با استفاده از نتایج تجربی به بررسی صحت روشهای مورد استفاده در تحلیل فرکانسی میکروتیر در معرض جریان سیال پرداخته و نشان دادند که برای سیال با عدد رینولدز بالا میتوان از اثر میرایی صرفنظر کرد و نتایج به دست آمده برای سیال میرا و غیرمیرا یکسان میباشد.

تحقیقات معدودی به بررسی میکروساختارهای در معرض جریان سیال پرداختهاند که در ادامه به آنها اشاره میشود. گوان و همکاران [۹] به بررسی میکرواستوانه تحت اثر جریان سیال و حرارت به صورت مجزا و توأم در یک کانال مستطیل شکل پرداخته و نشان دادند که زاویه و طول ناحیه ایجاد گردابه در پشت میکرواستوانه متأثر از سرعت سیال و ویژگیهای هندسی میکرواستوانه و کانال میباشد. تمایل و همکاران [۱۰] کاهش فشار سیال در داخل میکروکانال ناشی از عبور سیال از میان گروهی از میکرواستوانهها را به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داده و با نتایج تجربی مقایسه نمودند. آلفیری و همکاران

Creative Commons License) حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیر کبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) کی یکی حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیر کبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) کی یکی حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیر کبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) کی یکی حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیر کبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) کی یکی مردمی (Creative Commons License) کی یکی از توان کی یکی در مانید.



شکل ۱: جریان واقعی سیال با در نظر گرفتن ارتعاش میکروتیر

۲ – مدل سازی ۲ – ۱ – اثر گردابه

وقتی میکروتیر استوانه یه قطر D در مسیر جریان سیال با سرعت ثابت U قرار می گیرد، تحت شرایطی که متأثر از عدد رینولدز سیال، رابطه (۱)، می باشد می تواند باعث ایجاد گردابه در ناحیه پشت میکروتیر گردد [۱۶].

$$Re = \frac{UD}{\upsilon} \tag{1}$$

در رابطه اخیر، v میرایی جنبشی سیال بوده و Re عدد رینولدز سیال میباشد که با توجه به ابعاد میکروتیر، مقدار کوچکی خواهد داشت [۱۰]. با توجه به اینکه در این تحقیق، سیال مورد بررسی جریانی با سرعت U دارد علاوه بر اثر نیروی ناشی از جرم افزوده سیال ساکن، f_1 ، نیروی برآ، f_L ، و نیروی پسا، f_D ، نیز بر میکروتیر اثر خواهند گذاشت:

 $f_f = f_I + f_D + f_L \tag{(1)}$

همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است ارتعاش میکروتیر در جهت Z بر بردار سرعت واقعی سیال نسبت به ساختار اثر خواهد گذاشت و خواهیم داشت:

 $\vec{U}_{rel} = U\vec{j} - w_t \,\vec{k} \tag{(1-7)}$

 $U_{rel} = \sqrt{U^2 + w_t^2}$ (ب-٣)

توسط آب پرداخته و با ارائه مدلی تجربی به بررسی اثر پارامترهای هندسی میکرواستوانهها و نحوه قرارگیری آنها در افزایش انتقال حرارت از آب پرداختند. پیرس [۱۲] به مطالعه ایجاد پدیده گردابه با عبور دادن جریان سیال از روی میکروساختارهای استوانهای و مثلثی شکل جهت مخلوط کردن و همگنسازی مایعاتی که به هر دلیلی محتویات آنها دچار رسوب شدهاند پرداخت. شنگ و همکاران [۱۳] با استفاده از تحریک پیزوالکتریک و به صورت تجربی به ایجاد یدیده گردابه در میکروساختارها یرداخته است. ونگ و همکاران [۱۴] با کمک ایجاد پدیده گردابه، جداسازی ذرات با اندازه و چگالی مختلف در داخل میکروسیال را مورد مطالعه قرار دادند. لازم به ذکر است که در تحقیقات مذکور، مشخصات فیزیکی پدیده گردابه در میکروساختارها بررسی شده است و رفتار دینامیکی و مشخصههای ارتعاشی ساختار مورد بررسی قرار نگرفته است. در زمینه اثر جریان سیال بر رفتار ارتعاشی میکروساختار، رضائی و شرفخانی [۱۵] ارتعاش میکروتیرهای استوانهای شکل تحت اثر همزمان ولتاژ و جریان سیال را به عنوان میکروتولیدکننده انرژی بررسی نمودهاند.

در تحقیق حاضر با در نظر گرفتن اثر ولتاژ، رفتار و مشخصههای ارتعاشی میکروتولیدکننده گردابه ۲ بررسی شده و معادلات حاکم بر ارتعاشات میکروتیر و نوسان سیال با استفاده از تئوریهای تیر اویلر-برنولی و واندرپل استخراج و با استفاده از روشهای عددی و با کمک نرمافزار متلب^۲ حل گردید.

1 Micro vortex generator

2 MATLAB

نیز در نظر گرفته شود. با توجه به شرایط ذکر شده، از معادله واندرپل جهت مدلسازی رفتار سیال به صورت زیر استفاده میگردد [۱۸]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \eta \omega_{vor} \left(Q^2 - 1 \right) \frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_{vor}^2 Q = \frac{P}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{Y}$$

که در آن، $\frac{P}{D} \frac{\partial^{v} W}{\partial t^{v}}$ ، نیروی اعمالی ناشی از ارتعاش ساختار بر سیال است. مقدار η به عنوان ضریب میرایی جریان سیال اضافه شده، وابسته به ضریب پسای متوسط بوده و مقدار آن تقریباً برابر شده، وابسته به نتایج تجربی ۲۱= P میباشد [۱۸]. بنابراین، نیروی برآ برابر خواهد بود با [۱۸]:

$$f_L = \frac{1}{2} \rho_f C_l D U_{rel}^2, \tag{A}$$

که در آن مقدار C_l با توجه به مدل پیشنهادی فاچینتتی^۴ به صورت زیر به دست میآید [۱۸]: $C_l = \frac{1}{2}C_{l_0}Q$ (۹)

که در آن C_{l_0} ثابت نیروی برآ بوده و مقدار Qاز معادله (۲) به دست میآید.

۲-۱-۲ - نیروی پسا

برخورد سیال بر ساختار میکروتیر علاوه بر نیروی برآ باعث به وجود آمدن نیروی پسا نیز میشود که مقدار آن از رابطه زیر پیروی می کند [۲۰, ۲۰]:

$$f_D = \frac{1}{2}\rho_f C_D D U_{rel}^2, \qquad (1\cdot)$$

که در آن C_D مقدار میانگین ثابت نیروی پسا میباشد.

۲-۲- میکروتیر تحت اثر جریان سیال و ولتاژ

شکل ۲ میکروتیر یک سرگیردار با سطح مقطع دایرهای با طول g. و قطر D را نشان میدهد که محور مرکزی آن در فاصله g از الکترود ثابت موازی پایینی قرار گرفته است. میکروتیر مورد نظر تحت اثر نیروی پیوسته الکترواستاتیک ناشی از اعمال ولتاژ V و جریال سیال با سرعت U قرار دارد که عمود بر محور مرکزی میکروتیر عبور

4 Facchinetti

$$\sin \alpha = \frac{W_t}{U_{rel}} \tag{(z-r)}$$

۲–۱–۱– جرم افزوده

وقتی که میکروتیر در داخل سیال ارتعاش میکند بر سیال پیرامون خود اثر گذاشته و باعث حرکت آن میشود، در نتیجه شتاب ایجاد شده در سیال بر خود میکروتیر نیز اثر گذاشته و باعث به وجود آمدن نیروی عکسالعمل بر روی آن میشود که از رابطه زیر به دست میآید [۱۷]: $f_I = -m_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$ (۴)

که در آن m_f جرم افزوده ناشی از اثر سیال است که مقدار آن برای تیرها با سطح مقطعهای مختلف متفاوت بوده و برای میکروتیر با سطح مقطع دایرهای به صورت رابطه زیر است [۱۷]: $m_f = C_m \rho_f A$ (۵)

که در آن C_m ضریب تصحیح اثر جرم افزوده میباشد و مقدار آن با توجه به فاصله میکروتیر از دیواره کناری (الکترود ثابت پایینی) متغیر خواهد بود.

۲-۱-۲ نیروی برآ

قرار گرفتن میکروتیر در معرض عبور جریان سیال باعث به وجود آمدن نیروی برآ میشود که در جهت عمود بر جریان سیال و با فرکانسی برابر با فرکانس گردابه سیال، رابطه (۶) ، بر میکروتیر عمل مینماید [۱۸]:

$$\omega_{vor} = \frac{2\pi U_{rel} St}{D} \tag{9}$$

که در آن، U_{rel} ، نشاندهنده سرعت نسبی سیال و St عدد استروهال^۱ میباشد که متغیر با عدد رینولدز سیال است [۱۹]. جهت مدلسازی نوسان سیال، علاوه بر اینکه معادله ارائه شده باید ماهیت خودتحریکی^۲ و خود محدودکنندگی^۳ پدیده گردابه را حفظ نماید، لازم است جهت بالا بردن دقت نتایج، اثر ارتعاش ساختار

^{1 &}lt;sup>1</sup> Strouhal number

^{2 &}lt;sup>2</sup> Self exciting

^{3 &}lt;sup>3</sup>Self limiting



شکل ۲: نمای جانبی میکروتیر یکسرگیردار (میکروتولیدکننده گردابه) تحت اثر ولتاژ و جریان سیال

$$(EI)_{w_{xxxx}} + \rho A \left(1 + \frac{\rho_f}{\rho}\right)_{w_{tt}} + \left[\frac{1}{2}\rho_f C_D D U_{rel}\right]_{w_t} = f_e + \left(\frac{1}{4}\rho_f C_{l_0} D U_{rel}U\right)Q \quad (1\%)$$

$$\sum b c_t \tilde{l}_{tt} = 0 \quad \text{(1\%)}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \eta \omega_{vor} \left(Q^2 - 1\right)\frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_{vor}^2 Q = \frac{P}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1\%)$$

دو معادله (۱۳) و (۱۴) نشان دهنده کوپل بودن ارتعاش میکروتیر و نوسان سیال است.

۳- بیبعد سازی معادلات حاکم

برای بیبعد کردن معادلات حاکم بر ارتعاش میکروتیر تحت اثر ولتاژ و جریان سیال، پارامترهای بیبعد زیر را معرفی میکنیم:

$$\hat{x} = \frac{x}{l}, \ \hat{w} = \frac{w}{g_0}, \ \hat{r} = \frac{r}{g_0}, \ \hat{t} = \frac{t}{\overline{t}}, \ \overline{t} = \sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}}, \qquad (1\Delta)$$
$$\hat{U}_{rel} = \frac{2\pi U_{rel}}{\omega_{st} D}, \ \hat{U} = \frac{2\pi U}{\omega_{st} D}, \ \hat{V} = \sqrt{\frac{\varepsilon_e \pi l^4}{EIg_0^2}} V$$

که در آن، ω_{st} و U_{rel} به ترتیب فرکانس ارتعاش میکروتیر، سرعت ویژه سیال و سرعت واقعی ویژه سیال (با در نظر گرفتن اثر حرکت میکروساختار) میباشد. با جایگذاری پارامترهای تعریف شده در روابط (۱۳) و (۱۴) با جایگذاری پارامترهای تعریف شده در روابط (۱۳) و (۱۴) با جایگذاری پارامترهای تعریف شده در روابط (۱۳) و (۱۴) $\hat{w}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} + C\hat{w}_{\hat{t}} + (1+\rho_{rel})\hat{w}_{\hat{t}\hat{t}} = \hat{f}_e + \Upsilon'Q$

$$Q_{\hat{t}\hat{t}} + \eta \Omega_{vor} \left(Q^2 - 1 \right) Q_{\hat{t}} + \Omega_{vor}^2 Q = \beta \hat{w}_{\hat{t}\hat{t}}, \qquad (\gamma - 1)$$

مینماید. علاوه بر این، سیال مورد نظر نامیرا و غیرقابلتراکم در نظر گرفته شده و چگالی آن ho_{f} فرض میشود.

نیروی خارجی F_Z با توجه به شکل ۳ از رابطه زیر به دست میآید:

$$F_z = f_L \cos \alpha - f_D \sin \alpha - f_e \tag{11}$$

که در آن،
$$f_e$$
 ، نیروی الکترواستاتیک ناشی از اعمال ولتاژ میباشد
که از رابطه زیر به دست میآید [۲۱]:

$$f_e = \frac{\varepsilon_e \pi V^2}{\sqrt{\left[\left(g_0 - w\right)^2 + 2\left(g_0 - w\right)r\right]} \times \operatorname{arccosh}^2 \left[1 + \frac{\left(g_0 - w\right)}{r}\right]} \quad (1\Upsilon)$$

و
$$rac{D}{7}$$
 به ترتیب نشاندهنده ثابت دیالکتریک ماده بین \mathcal{E}_e الکتریک ماده بین الکترودها و شعاع میکروتیر بوده و V ولتاژ اعمالی میباشد.

با توجه به رابطه (۱۲)، با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر- برنولی [۲۲]، برای ارتعاش عرضی میکروتیر تحت اثر نیروی الکترواستاتیک و جریان سیال خواهیم داشت:



شکل ۳: اثر نیروهای برآ و پسا بر میکروتیر

$$C = \frac{\rho_f C_D D^2 \hat{U}_{rel} \Omega_{ul} t^4}{4EI \pi \overline{t}^2}, \quad \Upsilon' = \frac{\rho_f C_b \hat{U} \hat{U}_{rel} \Omega_{ul}^2 D^3 t^4}{16EI \pi^2 g_0 \overline{t}^2}, \quad \rho_{rel} = \frac{\rho_f}{\rho}, \quad \beta = \frac{Pg_0}{D}$$

$$\hat{f}_e = \frac{\hat{V}^2}{\sqrt{\left[\left(1 - \hat{w}\right)^2 + 2\left(1 - \hat{w}\right)\hat{r}\right]} \times \operatorname{arccosh}^2 \left[1 + \frac{(1 - \hat{w})}{\hat{r}}\right]}, \quad \Omega_{vor} = \omega_{vor} \overline{t}, \quad \Omega_{ul} = \omega_{ul} \overline{t},$$

$$(1 \vee)$$

و Ω_{vor} و Ω_{st} به ترتیب نشاندهنده فرکانس بیبعد میکروتیر و فرکانس بیبعد میکروتیر و فرکانس بیبعد گردابه سیال میباشد.

۴- حل معادلات

برای تبدیل معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی از روش باقیمانده وزنی گلرکین [۲۲] استفاده کرده و توابع \hat{w} و Q را به صورت زیر معرفی میکنیم:

$$\hat{w}(\hat{x},\hat{t}) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\hat{x}) q_j(\hat{t})$$
(i)

$$Q(\hat{x},\hat{t}) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\hat{x}) \chi_j(\hat{t}) \qquad (-1 \lambda)$$

که در آن (\hat{x}) شکل مود ارتعاشی تیر یکسرگیردار است که از حل معادله مقدار ویژه با توجه به شرایط مرزی زیر به دست میآید و (\hat{t}) و (\hat{t}) مختصات تعمیم یافته هستند:

$$\hat{w}(0,t) = \hat{w}_{\hat{x}}(0,\hat{t}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}(1,\hat{t})}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\partial^3 \hat{w}(1,\hat{t})}{\partial \hat{x}^3} = 0, \quad (19)$$

Dimensionless Fluid Vortex Frequency 250 200 Reynolds Number 150 100 50 0 L 2 0∟ 2 4 6 8 10 12 4 8 10 12 14 14 6 Reduced Velocity Reduced Velocity (الف) (ب)

جدول ۱: ویژگیهای مادی [۷] و هندسی میکروساختار مدل سازی شده

مقدار	ویژگی
450 μm	طول (1)
14 µm	قطر (D)
50 µm	$(g_{_0})$ فاصله اوليه
169 GPa	مدول الاستيسيته (E)
2330 kg/m^3	چگالی میکرو-تیر (م)
1020 kg/m^3	(ho_f) چگالی-سیال چ
$80 \times 8.85 \text{pF/m}$	ثابت دى الكتريك (٤)
$1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	ویسکوزیته دینامیکی (۷)

با جایگذاری روابط (۱۸) در معادلات (۱۶) و ضرب طرفین معادلات
در
$$(\hat{x})_{i} = \hat{x}$$
 تا $\hat{x} = 1$ در $\hat{\phi}_{i}(\hat{x})$ و انتگرال گیری در بازه $\hat{x} = \hat{x}$ تا $\hat{x} = \hat{x}$ خواهیم داشت:
 $\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(\hat{x}) \hat{y}_{j}(\hat{i}) + \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\hat{x}) \hat{a}_{j}(\hat{i}) + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(\hat{x}) \hat{q}_{j}(\hat{i}) = F_{i_{e}} + \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^{*}(\hat{x}) \hat{z}_{j}(\hat{i})$ (1)-14)

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(\hat{x}) \ddot{\chi}_{j}(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij}(\hat{x}) \dot{\chi}_{j}(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}(\hat{x}) \chi_{j}(\hat{t}) = F_{i} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\hat{x}) \ddot{q}(\hat{t}) \quad (-\Upsilon \cdot)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(\hat{x}) \ddot{\chi}_{j}(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij}(\hat{x}) \dot{\chi}_{j}(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}(\hat{x}) \chi_{j}(\hat{t}) = F_{i} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\hat{x}) \ddot{q}(\hat{t}) \quad (-\Upsilon \cdot)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(\hat{x}) \dot{\chi}_{j}(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij}(\hat{x}) \dot{\chi}_{j}(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}(\hat{x}) \chi_{j}(\hat{t}) = F_{i} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\hat{x}) \ddot{q}(\hat{t}) \quad (-\Upsilon \cdot)$$

$$\begin{split} \Delta_{ij} &= \int_{0}^{1} \phi_{j} \phi_{j} d\hat{\mathbf{x}}, \quad M_{ij} = (1 + \rho_{rel}) \Delta_{ij}, \quad C_{ij} = C \Delta_{ij}, \quad K_{ij} = \int_{0}^{1} \phi_{j} \phi_{j}^{I\prime} d\hat{\mathbf{x}}, \quad F_{i_{c}} = \int_{0}^{1} \phi_{i} \hat{f}_{c} d\hat{\mathbf{x}}, \quad \beta_{ij} = \beta \Delta_{ij}, \\ \Lambda_{ij} &= -\eta \Omega_{vor} \Delta_{ij}, \quad \Pi_{ij} = \Omega_{vor}^{2} \Delta_{ij}, \quad F_{i} = \int_{0}^{1} \phi_{i} \left(-\eta \Omega_{vor} Q^{2} \frac{\partial Q}{\partial \hat{t}} \right) d\hat{\mathbf{x}}, \quad Y_{ij}' = \Upsilon \Delta_{ij}, \end{split}$$



شکل ۵: نمودار پاسخ زمانی ارتعاش میکروتیر تحت اثر ولتاژ معین، ۸ / ۳ = \hat{V} و جریان سیال با سرعتهای ویژه مختلف (الف) ۵ / ۲ = \hat{U} (ب) $\hat{U} = \Lambda / \Lambda$ (ک) $\hat{U} = \Lambda / \Lambda$ (ح) $\hat{U} = \Lambda / \Lambda$ (ح) $\hat{U} = \Lambda / \Lambda$

گردابه) تحت اثر ولتاژ در معرض جریان سیال حل و رفتار ارتعاشی آن در جهت عمود بر جریان سیال تحت اثر شرایط مختلف مورد بررسی قرار می گیرد.

ویژگیهای هندسی و ماده میکروساختار مورد نظر در جدول شماره ۱ نشان داده شده است. با حل همزمان معادلات فوق رفتار ارتعاشی میکروتیر و همچنین ثابتهای مربوط به نوسان گر سیال به دست میآید.

۵- نتایج
در این قسمت معادلات حاکم بر ارتعاش میکروتیر (میکروتولید کننده

۵-۱- فرکانس گردابه و عدد رینولدز سیال تابعی از جریان سیال

برای سیال با اعداد رینولدز بین ۴۰ و ۲۵۰ که محدوده مورد بررسی در این مقاله نیز است با برخورد سیال به ساختار و در نتیجه فشاری که از طرف آن به سیال وارد می شود، ذرات سیال با جدا شدن از لبههای استوانه به دو طرف آن هدایت شده و حالت آرامی از گردابه به وجود می آید که به کانال گردابه [۲۳] معروف است.

شکل ۴–الف و ۴–ب به ترتیب عدد رینولدز، Re، و فرکانس \hat{U} ، را برای سیال با سرعتهای ویژه مختلف، \hat{U}

، نشان میدهد. همان طور که مشخص است مقادیر عدد رینولدز و فرکانس گردابه سیال، به صورت دو پارامتر مهم در ایجاد پدیده گردابه و قفل شدگی، با افزایش سرعت ویژه سیال به صورت خطی افزایش یافته است.

۵-۲- دامنه ارتعاش میکروتیر بر حسب سرعت جریان سیال

در این قسمت اثر جریان سیال با چهار سرعت ویژه مختلف بر ارتعاش میکروتیر تحت اثر ولتاژ در جهت عمود بر جریان سیال



شکل ۶: صفحه فاز ارتعاش میکروتیر تحت اثر ولتاژ معین، ۸ $\hat{V}= r/٨$ و جریان سیال با سرعتهای ویژه مختلف

 $\hat{U} = \lambda / \Delta$ (د) $\hat{U} = \Delta / \Delta$ (ج) $\hat{U} = \nabla / \Delta$ (ب) $\hat{U} = \nabla / \Delta$ (الف) $\hat{U} = \nabla / \Delta$ (الف)



شکل ۷: دامنه دینامیکی ارتعاش میکروتیر بر حسب سرعت ویژه سیال برای ولتاژهای اعمالی مختلف

بررسی میشود. فرض میشود که میکروتیر همزمان تحت اثر ولتاژ معین، $\Lambda' = \sqrt[2]{}$ ، در حال ارتعاش بوده و در معرض سیال با سرعت ویژه ثابت قرار دارد. در این حالت با توجه به ثابت بودن ولتاژ اعمالی، فرکانس ارتعاش ساختار ثابت بوده ولی مقدار فرکانس گردابه سیال و عدد رینولدز با افزایش سرعت جریان سیال افزایش مییابد. این افزایش تا زمانی که فرکانس سیال کوچکتر از فرکانس ساختار باشد سبب افرایش دامنه میشود ولی با گذر از فرکانس ساختار و دور شدن از آن با کاهش دامنه ارتعاش همراه خواهد بود. همان طور که در نمودارهای شکل ۵ نشان داده شده است جریان سیال اثر محسوسی بر رفتار ارتعاشی میکروتیر شیس به ۵/۵ $\hat{U} = \hat{U}$ ، دامنه بیبعد ارتعاش نیز افزایش مییابد، اما کاهش شده است.

سرعت ارتعاش حالت ماندگار نوک میکروتیر نیز همانطور که در نمودارهای شکل ۶ مشخص است برخلاف دامنه ارتعاش با افزایش سرعت جریان سیال به صورت پیوسته افزایش یافته و محدوده پایداری سیستم نیز تغییر یافته است.

همان طور که در نمودار دامنه-سرعت سیال، شکل ۷، نشان داده شده است با افزایش سرعت ویژه سیال، تا حد معینی از

سرعت که نقطه اوج نمودار دامنه بی بعد بر حسب سرعت سیال نیز می باشد دامنه دینامیکی، ۲/($\hat{W}_{max} - \hat{W}_{min}$)، به صورت پیوسته افزایش یافته است که نقطه اوج اشاره شده و همچنین شیب افزایش و کاهش دامنه برای ولتاژهای اعمالی مختلف متفاوت می باشد. به عبارت دیگر با افزایش ولتاژ اعمالی، فرکانس ارتعاشی ساختار کاهش یافته و در نتیجه در سرعتهای ویژه پایین تری پدیده قفل شدگی اتفاق می افتد. نتایج به دست آمده مشابه رفتار نشان داده شده در نتایج تجربی ارائه شده در تحقیقات گذشته (۱۶ و ۱۸] می باشد.

پدیده قفل شدگی را میتوان این گونه نیز تفسیر نمود که با نزدیک شدن فرکانس سیال و ساختار به یکدیگر، نوسان سیال و ارتعاش ساختار اثرات همدیگر را تقویت کرده و باعث افزایش دامنه یکدیگر میشوند، ولی با خروج از ناحیه قفل شدگی، سیال و ساختار اثرات یکدیگر را خنثی نموده و دامنه ارتعاش کاهش مییابد که این پدیده در شکل ۸ نشان داده شده است. نمودارهای نشان داده شده ارتعاش میکروتیر و سیال را بدون در نظر گرفتن اثرات متقابل و به ترتیب بر اساس ولتاژ و جریان سیال به صورت مجزا نشان میدهد، به عبارت دیگر برای بررسی نوسان سیال، میکروساختار را صلب فرض کرده و جهت بررسی ارتعاش میکروساختار، اثر سیال نادیده گرفته شده است. همان طور که



شکل ۸: مقایسه تاریخچه زمانی بیشترین دامنه ارتعاش میکروتیر تحت اثر ولتاژ، $\hat{V}=\pi/\lambda$ و ارتعاش سیال بدون در نظر گرفتن اثرات یکدیگر برای دو $\hat{U}=17/4$ (ب) $\hat{U}=17/4$ (ب)

بودن فرکانس ارتعاش ساختار، فرکانس ارتعاش آنها از هم دورتر شده است. با توجه به وقوع این پدیده، قابل پیشبینی خواهد بود که در شرایط معینی از ارتعاش، حرکت میکروساختار و سیال با خنثی کردن اثر یکدیگر، سبب کاهش دامنه ارتعاش کل سیستم شامل میکروساختار و سیال تحت اثر همزمان ولتاژ و جریان سیال گردد. در شکل ۸-الف مشخص است ارتعاش سیال با سرعت معین، در شکل ۸-الف مشخص است ارتعاش سیال با سرعت معین، $\hat{U} = 0/70$ مین $\hat{U} = 7/8$ ، با ارتعاش میکروساختار تحت اثر ولتاژ معین، $\hat{V} = 7/8$ ، میگیرد. با افزایش سرعت سیال به ۱۲/۵ $\hat{U} = 17/8$ و ثابت نگه داشتن ولتاژ اعمالی به میکروتیر، همان طور که در شکل ۸-ب نشان داده شده است، فرکانس ارتعاش سیال افزایش یافته و با توجه به ثابت

principles, Physics Reports, 503(4) (2011) 115-163.

- [2] W.C. Chuang, H.L. Lee, P.Z. Chang, Y.C. Hu, Review on the modeling of electrostatic MEMS, Sensors, 10 (2010) 6149-6171.
- [3] A. Nisar, N. Afzulpurkar, B. Mahaisavariya, A. Tuantranont, MEMS-based micropumps in drug delivery and biomedical applications, Sensors and Actuators B: Chemical, 130(2) (2008) 917-942.
- [4] O.Y. Loh, H.D. Espinosa, Nanoelectromechanical contact switches, Nature Nanotechnology, 7 (2012) 283.
- [5] M.I. Younis, E.M. Abdel-Rahman, A. Nayfeh, A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS, Journal of Microelectromechanical Systems, 12(5) (2003) 672-680.
- [6] W.C. Chuang, Y.C. Hu, C.Y. Lee, W.P. Shih, P.Z. Chang, Electromechanical behavior of the curled cantilever beam, Journal of Micro/Nanolithography, MEMS MOEMS, 8 (2009) 033020-033028.
- [7] F.G. Golzar, R. Shabani, H. Hatami, G. Rezazadeh, Dynamic Response of an Electrostatically Actuated Micro-Beam in an Incompressible Viscous Fluid Cavity, Journal of Microelectromechanical Systems, 23(3) (2014) 555-562.
- [8] J.W.M. Chon, P. Mulvaney, J.E. Sader, Experimental validation of theoretical models for the frequency response of atomic force microscope cantilever beams immersed in fluids, Journal of Applied Physics, 87(8) (2000) 3978-3988.
- [9] N. Guan, T. Luan, Z.e.a. Liu, Vortex distribution and mixed convection of liquid flow across microcylinders in a rectangular channel, Heat Mass Transfer, 52 (3) (2016) 657-670
- [10] A. Tamayol, J. Yeom, M. Akbari, M. Bahrami, Low Reynolds number flows across ordered arrays of micro-cylinders embedded in a rectangular micro/ minichannel, International Journal of Heat and Mass Transfer, 58(1) (2013) 420-426.
- [11] F. Alfieri, M.K. Tiwari, A. Renfer, T. Brunschwiler,

۶- نتیجهگیری

در تحقیق حاضر برای اولین بار معادلات حاکم بر ارتعاش میکروتولیدکننده گردابه تحت اثر ولتاژ با در نظر گرفتن اثرات ناشی از جریان سیال به صورت نیروهای برآ و پسا، با استفاده از معادله واندرپل، اصل همیلتون و تئوری اویلر-برنولی استخراج شده و با کمک روشهای عددی حل و نتایج زیر حاصل شد:

• جریان سیال تحت شرایطی که متأثر از ویژگیهای سیال و ساختار میباشد میتواند باعث تغییر دامنه ارتعاش میکروتیر تحت اثر ولتاژ گردد. به عبارت دیگر، با این فرض که فرکانس ارتعاش میکروتیر بزرگتر از فرکانس سیال در حال جریان میباشد، با افزایش سرعت جریان سیال که منجر به افزایش فرکانس گردابه و عدد رینولدز سیال میشود، دامنه به تدریج افزایش یافته و بعد از رسیدن به نقطه اوج، مجدداً شروع به کاهش مینماید. نقطه اوج و سرعت متناظر با آن متغیر بوده و تابع ولتاژ و ویژگیهای ساختار و سیال است.

 افزایش و کاهش دامنه اشاره شده ناشی از ایجاد پدیده قفلشدگی میباشد که نتیجه نزدیکی و یا دوری فرکانس ساختار و سیال نسبت به یکدیگر میباشد. به عبارت دیگر پدیده قفلشدگی زمانی اتفاق میافتد که ارتعاش ساختار و سیال از لحاظ دامنه بتوانند اثر یکدیگر را تقویت نمایند.

• با فرض ثابت ماندن جریان سیال، اعمال ولتاژ نیز می تواند منجر به افزایش و کاهش دامنه گردد. بدین صورت که ولتاژ اعمالی به میکروتیر علاوه بر اثری که به عنوان نیروی خارجی بر میکروتیر دارد و باعث ارتعاش آن می شود، با تغییر سفتی الکتریکی ساختار، موجب تغییر فرکانس ارتعاشی آن نیز می گردد، در نتیجه با توجه به نوع و سرعت جریان سیال می توان از ولتاژ به عنوان پارامتر تنظیم کننده جهت وقوع یا دوری از پدیده قفل شدگی استفاده کرد.

 مشخص نمودن نوع و سرعت جریان سیال در سیستمهای میکروالکترومکانیکی از این جهت حائز اهمیت است که با تعیین آنها میتوان دقت اثر ولتاژ اعمالی را با انتخاب مناسب ویژگیهای هندسی میکروتیر و فرکانس ارتعاشی متناظر با آن بالاتر برد.

مراجع

 K. Eom, H.S. Park, D.S. Yoon, T. Kwon, Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics Wake, Annual Review of Fluid Mechanics, 28(1) (1996) 477-539.

- [18] M.L. Facchinetti, E. de Langre, F. Biolley, Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations, Journal of Fluids and Structures, 19(2) (2004) 123-140.
- [19] M.P. Païdoussis, S.J. Price, E. de Langre, Fluid Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities, Cambridge University Press, New York., 2011.
- [20] R.D. Blevins, Flow-induced Vibration, Van Nostrand Reinhold, Florida., 2001.
- [21] C. Ke, H.D. Espinosa, N. Pugno, Numerical Analysis of Nanotube Based NEMS Devices — Part II: Role of Finite Kinematics, Stretching and Charge Concentrations, Journal of Applied Mechanics, 72(5) (2005) 726-731.
- [22] L. Meirovitch, Analytical methods in vibration, Macmillan, New York., 1967.
- [23] J. Lienhard, Synopsis of lift, drag and vortex frequency data for rigid circular cylinder, Washington State University, 1966.

B. Michel, D. Poulikakos, Computational modeling of vortex shedding in water cooling of 3D integrated electronics, International Journal of Heat and Fluid Flow, 44 (2013) 745-755.

- [12] J. Pierce, Experimental study of micro-vortex generators, The University of Texas, 2010.
- [13] X. Shang, X. Huang, C. Yang, Vortex generation and control in a microfluidic chamber with actuations, Physics of Fluids, 28(12) (2016) 122001.
- [14] X. Wang, J. Zhou, I. Papautsky, Vortex-aided inertial microfluidic device for continuous particle separation with high size-selectivity, efficiency, and purity, Biomicrofluidics, 7(4) (2013) 044119.
- [15] M. Rezaee, N. Sharafkhani, Electrostatically frequency tunable micro-beam-based piezoelectric fluid flow energy harvester, Smart Materials and Structures, 26(7) (2017) 075008.
- [16] S. Kaneko, I. Nakamura, T.F.M. Kato, K. Ishihara, T. Nishihara, N.W. Mureithi, M.A. Langthjem, Fluid-Induced Vibrations, Classifications and lessons from practical experiences, Elsevier, 2014.
- [17] C.H.K. Williamson, Vortex Dynamics in the Cylinder

بی موجعه محمد ا