



بهره‌گیری از تابع شکل سینوسی در تحلیل پل‌های بتنی سه دهانه پیوسته در جهت عرضی

فرشاد غفاری^{۱*}، محمد قاسم وتر^۲، محمد رضا عدل پرور^۳

^۱ دانشجوی دکترای سازه دانشگاه قم

^۲ استادیار، دپارتمان پژوهشگاه بین‌المللی زلزله و زلزله‌شناسی، تهران، ایران

^۳ دانشیار، دپارتمان مهندسی عمران-سازه، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۳۱

بازنگری: ۱۳۹۷/۰۶/۱۶

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۷/۲۱

کلمات کلیدی:

انرژی درونی سازه

نیروهای برشی عرضی

تابع شکل سینوسی

تابع پتانسیل

مود اول تغییرشکل

خلاصه: با توجه به اهمیت پل‌های سه دهانه و پیچیدگی‌های تحلیل سازه‌های چند درجه آزادی به روش دستی، بکارگیری روش‌های دقیق عددی در تخمین نیروهای این گروه از پل‌ها بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در این مطالعه روشی تحلیلی معرفی خواهد شد که برای ارزیابی پل‌های سه دهانه پیوسته با پایه‌های جداسازی نشده و عرشه با مقطع ثابت و گشتاور ماند نسبتاً بالا در جهت عرضی می‌تواند کارآمد باشد. روش معرفی شده در این مطالعه براساس به کارگیری تابع شکل سینوسی برای تغییرشکل عرشه پل و همچنین نیروهای وارده متناظر با آن تغییرشکل خواهد بود. این روش با فرض مدل ساده تیر بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک میسر شده است و با تشکیل و به حداقل رساندن تابع پتانسیل ناشی از کلیه پارامترهای محرک و مقاوم در شکل‌گیری تغییرشکل، ایجاد شده است. با توجه به اینکه روش پیشنهادی آشتو در محاسبه نیروهای پل‌ها با بیش از دو دهانه روشی سه‌بعدی و نیازمند به کارگیری نرم‌افزارهای خاص در این رابطه می‌باشد، طرح روش دستی مناسب و دقیق برای ارزیابی نیروهای عرضی پل‌های سه دهانه می‌تواند ایده مقایسه‌ای بسیار مناسبی محسوب گردد. در نظر گرفتن ۵ نمونه حالت مختلف برای یک نمونه مثال و تحلیل آنها، و بدست آوردن نتایج حاصل از روش پیشنهادی با اختلاف کمتر از ۱۰٪ نسبت به روش دقیق، نشان از دقت بالای روش پیشنهادی و کارآمدی آن در کنترل محاسبات برای گروه پل‌های مذکور خواهد بود.

۱- مقدمه

چنین باری مقادیر نیروهای برشی عرضی ستون‌ها به صورت دقیق محاسبه خواهند شد [۱، ۲].

از آنجا که تابع شکل سینوسی برای یک تیر دو سر ساده طبق پاسخ عمومی معادله ارتعاش بهترین تقریب شکل مودی ارتعاش را ارائه می‌دهد و به بطور کلی مدهای تغییرشکل جرم‌های گسترده پیوسته با تکیه‌گاه‌های انتهایی مفصلی و بدون سختی‌های متمرکز میانی همواره مضربی از توابع سینوسی $(\phi(x) = \sin n\pi x/L; n=1,2,3,..)$ می‌باشند [۳، ۴]، لذا در این تحقیق نیز از فرض تغییرشکل سینوسی برای کفه پل مورد نظر در جهت عرضی استفاده شده است. در واقع هر تابع شکل که بتواند یک تقریب منطقی از شکل‌های مودی ارتعاش سازه را تخمین بزند و شرایط مرزی را تأمین نماید، می‌تواند به عنوان

روش ارائه شده توسط آشتو جهت ارزیابی دقیق پل‌های پیوسته چندین دهانه، تحلیل براساس مود اول تغییرشکل می‌باشد که این روش به (Single Mode Spectral Analysis) SMSA مرسوم می‌باشد. این روش با بهره‌گیری از نرم‌افزارهای تحلیل سه‌بعدی، با اعمال بار عرضی یکنواخت واحد در طول تیر تغییرشکل متناظر با آن از آنالیز سازه بدست خواهد آمد. این تغییرشکل در محاسبه پارامترهای معرفی شده در آشتو همچون α ، β و γ دخیل می‌باشد که از طریق آنها پریود ارتعاش پل قابل محاسبه خواهد بود. با تعیین تابع بارگذاری معادل با شکل مد اول سازه و تحلیل مجدد سازه تحت

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: dr.ghaffari.f@gmail.com



تابع تغییرشکل سازه لحاظ گردد؛ ولیکن فرض تابع شکل سینوسی برای مدل پل‌های سه دهانه (جرم‌های گسترده با سختی‌های متمرکز میانی) نیز با روش معرفی شده در ادامه تقریب بسیار نزدیکی نسبت به روش دقیق ارائه خواهد کرد.

روش بهره‌گیری از مود اول تغییرشکل سازه را می‌توان از طریق فرض تغییرشکل سینوسی برای کفه دال و نوشتن تابع کلی پتانسیل به صورت روشی که در این مطالعه پیشنهاد خواهد شد ساده سازی نمود. با در نظر گرفتن تابع تغییرشکل سینوسی، تابع پتانسیل سازه از مجموع انرژی کرنشی (U) و انرژی پتانسیل (V) محاسبه خواهد شد [۵]. انرژی کرنشی از مجموع انرژی کلیه اعضای مقاوم در جهت تغییرشکل و انرژی پتانسیل با منفی کار ناشی از کلیه بارهای خارجی وارد بر سازه برابر خواهد بود [۴، ۵].

روش فعلی در این مطالعه و روش رایلی هر دو بر پایه اصول پایستاری انرژی و تکیه بر تابع تغییرشکل فرضی استوار هستند، و در صورت فرض تغییرشکل سینوسی در هریک از دو روش، پروسه متفاوت حل و وجود پارامترهای مؤثر در شکل مدی از جمله سختی‌های متمرکز میانی ناشی از سختی پایه پل‌ها می‌تواند بر دامنه تغییرشکل سینوسی پل تأثیرگذار باشد و هر یک از دو روش نتایج متفاوتی را ارائه دهند، و لذا در این تحقیق نشان داده خواهد شد که با تکیه بر پارامترهای ارائه شده توسط آشتو برای تحلیل سازه، می‌توان به تقریب مناسبی از دامنه تغییرشکل سازه، پرپود ارتعاش و نیروهای برشی پایه‌ها در جهت عرضی دست یافت که می‌تواند نتایج بسیار نزدیکی در مقایسه با روش دقیق ارائه دهد. در این مطالعه قصد بر این است تا نیروهای داخلی ستون‌های پل سه‌دهانه پیوسته و پرپود آن در جهت عرضی به دو روش یکی روش معرفی شده توسط آشتو (روش دقیق) و دیگری روش انرژی (روش پیشنهادی) محاسبه شوند و نتایج با یکدیگر مورد مقایسه قرار گیرند. همان‌طور که از پروسه تحلیل سازه پل در روش دقیق دیده خواهد شد این روش بسیار پیچیده و زمانبر می‌باشد که نیازمند تخصص مربوطه نیز می‌باشد [۶، ۱]، در حالی که با بهره‌گیری از روش ساده دستی پیشنهادی به راحتی می‌توان تخمین بسیار دقیقی برای نیروهای برشی ستون‌ها و پرپود پل و سایر پارامترهای مربوطه داشت. این روش برای پل‌های سه دهانه پیوسته با عرشه‌های با مقطع ثابت و ممان اینرسی نسبتاً

بالا حول محور عمود بر صفحه دال دقت بالاتری دارد. در این مطالعه پس از صحت‌سنجی مدل‌های عددی توسط مثال کاربردی موجود در آیین‌نامه آشتو، روش مذکور برای آن مثال و ۴ نمونه تغییر یافته از آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت و نتایج آن با نتایج مستخرج از روش عددی دقیق مورد مقایسه قرار خواهند گرفت.

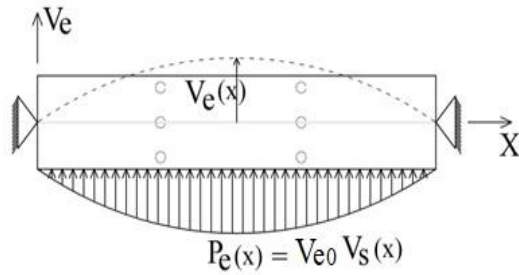
تعدادی مطالعات مشابه که در خصوص پل‌های با پایه‌های متصل به دال (پل‌های با پایه‌های جداسازی نشده) صورت گرفته است به قرار زیر می‌باشند. در اکثر این مطالعات از مدل تیر دوبعدی بر روی تکیه‌گاه‌های ساده بهره گرفته شده است.

در مطالعه‌ای جامع انواع روش‌های پیشنهادی آشتو شامل توزیع بار یکنواخت (UL) و بارگذاری طبق روش (SMSA) برای انواع پل‌ها با خصوصیات مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج تحقیق بیانگر غیراقتصادی بودن شیوه طراحی با روش بارگذاری عرضی با توزیع یکنواخت می‌باشد، به طوری که نیروهای ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های کناری بین ۲۵٪ تا ۳۰۰٪ افزایش و گاهاً نیروی برشی ستون‌ها تا ۱۰٪ کاهش نسبت به حالت SMSA داشته است [۷].

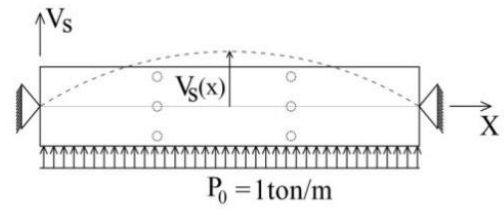
کالوی [۸] در مطالعه‌ای بر توانایی شیوه طراحی براساس تغییرشکل نسبت به طراحی براساس نیرو تأکید داشتند و این رویکرد را برای اعمال دو شیوه بارگذاری توأم مورد بررسی قرار دادند.

توبالدی و همکارانش [۹] پاسخ لرزه‌ای پل‌های چند دهانه را با تغییر در سختی عرشه به پایه‌ها با تعریف نسبت ارتفاع پایه‌ها به قطر پایه‌ها مورد بررسی قرار دادند. نتایج بدست آمده به این صورت می‌باشد که: (۱) با افزایش نسبت ارتفاع به قطر پایه شیوه بارگذاری الاستیک اهمیت بیشتری نسبت به بارگذاری غیرالاستیک دارد. (۲) مدهای مختلف خرابی برای اعضای مختلف هنگام تحلیل باید دیده شود و (۳) امکان بروز خرابی در صورت تسلیم شدن عرشه یا افزایش ظرفیت انحنایی پایه‌ها طبق تغییر در نسبت ذکر شده وجود خواهد داشت.

رویکردهای مشابه دیگری جهت ارزیابی رفتار پل‌های پیوسته بر روی پایه‌های جداسازی شده بکار گرفته شده است [۱۰، ۱۱، ۱۲]. محققین در این مطالعات تأثیر جداسازی پایه‌ها و همچنین تفاوت بین رفتار این تیپ از پل‌ها را با پل‌های جداسازی نشده مورد ارزیابی و مقایسه قرار داده‌اند.



شکل ۲. پلان پل سه دهانه تحت تأثیر بارگذاری زلزله عرضی



شکل ۱. اعمال بار عرضی واحد به عرشه پل و مدل تغییرشکل ناشی از آن

۲- آشنایی با روش آشتو در محاسبه نیروهای عرضی پل:

به ترتیب شتاب ثقل، شتاب مبنای طرح و ضریب خاک می‌باشند و سایر پارامترها در روابط قبلی معرفی شده‌اند.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{P_0 g \alpha}} \quad (۴)$$

$$C_s = \frac{1.2AS}{T^{2/3}} \leq 2.5A \quad (۵)$$

برش پایه V ناشی از زلزله تحت تغییرشکل مود اول کفه پل به صورت رابطه (۶) محاسبه خواهد شد، بطوری که W_1 وزن مؤثر مود اول می‌باشد که بصورت رابطه (۷) محاسبه خواهد گشت. با داشتن برش پایه توزیع نیروی زلزله ارتجاعی $P_e(x)$ (تابع بارگذاری) وارد بر کفه پل براساس رابطه (۸) محاسبه می‌شود.

$$V = C_s W_1 \quad (۶)$$

$$W_1 = \frac{\int [W(x)V_s(x)dx]^2}{\int W(x)V_s^2(x)dx} = \frac{\beta^2}{\gamma} \quad (۷)$$

$$P_e(x) = \frac{W(x)V_s(x)}{\int W(x)V_s(x)dx} V = \frac{W(x)V_s(x)}{\beta} V = \quad (۸)$$

$$\frac{\beta C_s W(x)V_s(x)}{\gamma} = P_{e0}(x)V_s(x)$$

با داشتن تابع بارعرضی زلزله $P_e(x)$ براساس میزان تغییرشکل اولیه پل تحت بار عرضی یکنواخت می‌توان میزان بار عرضی زلزله را در هر طول مشخص از پل محاسبه نمود. پلان مقدار بار عرضی زلزله را در هر یک چهارم دهانه که میزان تغییرشکل پل در این نقاط از روی نرم‌افزار تهیه شده بود، محاسبه می‌شود و پس از اعمال این بارگذاری به سازه و تحلیل مجدد آن در نرم‌افزار تحلیل سه‌بعدی،

جهت محاسبه نیروی عرضی پل طبق روش آشتو ابتدا مدل پل به صورت سه‌بعدی در نرم‌افزار SAP مدل‌سازی می‌شود و سپس نیروی عرضی یکنواخت برابر با $P_0 = 1 \text{ ton/m}$ (مطابق شکل ۱) به طور افقی به کفه پل اعمال می‌گردد. سپس تغییرشکل کفه پل با استفاده از برنامه تحلیل سه بعدی SAP2000 بدست می‌آید. مدل تغییرشکل یافته پل $V_s(x)$ پس از آنالیز تحت بار عرضی یکنواخت به صورت نقطه چین در شکل ۱ نشان داده شده است [۱، ۶].

با داشتن شکل مدی $V_s(x)$ و بکارگیری روش عددی سیمسون می‌توان انتگرال‌های مربوط به پارامترهای α ، β و γ را محاسبه نمود [۱، ۱۳]. روابط مربوط به پارامترهای α ، β و γ در روابط (۱)، (۲) و (۳) ارائه شده‌اند. در این روابط l_i طول هریک از دهانه‌های پل، $W(x)$ وزن واحد طول پل و مقادیر V_0 تا V_4 مقادیر تغییرشکل‌های ابتدا تا انتهای هریک از دهانه‌های پل در فواصل یکسان $l/4$ دهانه می‌باشند. با داشتن پارامترهای فوق می‌توان زمان تناوب پل در جهت عرضی و نیروی عرضی زلزله را مطابق با تابع تغییرشکل پل محاسبه نمود.

$$\alpha = \int V_s(x)dx = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{4} (V_0 + 4V_1 + 2V_2 + 4V_3 + V_4) \quad (۱)$$

$$\beta = \int W(x)V_s(x)dx = \frac{W(x)}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{4} (V_0 + 4V_1 + 2V_2 + 4V_3 + V_4) \quad (۲)$$

$$\gamma = \int W(x)V_s^2(x)dx = \frac{W(x)}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{4} (V_0^2 + 4V_1^2 + 2V_2^2 + 4V_3^2 + V_4^2) \quad (۳)$$

زمان تناوب اصلی پل در جهت عرضی T (ثانیه) و ضریب زلزله C_s از روابط (۴) و (۵) بدست خواهند آمد. در این روابط g ، A و S

(۹) تعریف می‌شود. همچنین ممان اینرسی عرشه پل I_d با لحاظ شدن خمش در جهت محور عمود بر عرشه پل به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود. در این روابط E ، I_c ، h_c و t به ترتیب مدول الاستیسیته بتن، گشتاور ماند ستون، ارتفاع ستون، ضخامت کفه پل و عرض کفه پل می‌باشند.

$$k_b = \sum \frac{12EI_c}{h_c^3} \quad (9)$$

$$I_d = \frac{tB^3}{12} \quad (10)$$

رابطه (۱۱) تابع اولیه فرضی تغییرشکل سینوسی برای کفه پل را نشان می‌دهد. در این رابطه x طول پل نسبت به مبدا مختصات، L طول پل و V_0 حداکثر دامنه تغییرشکل پل است که مجهول می‌باشد.

$$V_s(x) = V_0 \sin \pi x/L \quad (11)$$

در این روش نیز با اعمال بار ثابت P_0 بر پل و فرض تغییر شکل سینوسی با دامنه مجهول ایده پیشنهادی پیگیری می‌شود. شکل ۴ مدل پل تحت نیروی عرضی ثابت 1 تن بر متر و همچنین تابع تغییرشکل سینوسی ناشی از آن را نشان می‌دهد.

با داشتن تابع تغییرشکل فوق، انرژی کرنشی ناشی از هریک از پایه قابی‌های پل و همچنین انرژی کرنشی ناشی از تغییرشکل دال پل مطابق روابط (۱۲) و (۱۳) محاسبه خواهند شد. در رابطه ۱۲، V_b جابه‌جایی عرضی در محل ستون‌ها و x_b فاصله هریک از پایه قابی‌های میانی نسبت به مبدأ مختصات می‌باشد. انرژی پتانسیل

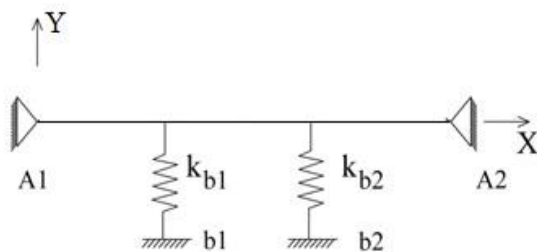
مقادیر نیروی برش عرضی هریک از ستون‌ها محاسبه خواهند شد. بارگذاری پل تحت بار عرضی زلزله و تغییرشکل ناشی از آن پس از تحلیل $V_e(x)$ در شکل ۲ نشان داده شده است.

۳- معرفی روش پیشنهادی

همچون روش پیشنهادی آشتو که با اعمال بار یکنواخت واحد بر پل در جهت عرضی پل پیگیری می‌شود تا بتوان شکل تغییرشکل پل را محاسبه نمود، در روش پیشنهادی نیز بار عرضی واحد بر پل اعمال می‌گردد و برای شکل تغییرشکل پل تحت این بار، تابع سینوسی با دامنه مجهول فرض می‌گردد. فرض تابع سینوسی متناظر با تغییرشکل عرشه پل نزدیک‌ترین جواب مفروض را نسبت به روش دقیق ارائه خواهد کرد [۴، ۵]. با تشکیل تابع انرژی کلی مربوط به انرژی ورودی به سازه و انرژی اجزای مقاوم در برابر ایجاد تغییرشکل و حداقل نمودن این تابع می‌توان مجهولات مسأله را پیدا نمود.

یک پل سه دهانه مطابق شکل ۳-الف متشکل از دو تکیه‌گاه میانی می‌باشد که هر پایه قابی با توجه به ستون‌های آن داری سختی جانبی خود خواهند بود، همچنین در دو انتها به دلیل مستقر شدن عرشه پل بر کوله‌های ابتدایی و انتهایی تنها شرایط اتصال مفصلی برای دو انتهای عرشه پل به وجود خواهد آمد. عرشه پل را به صورت ساده تیری در صفحه $X-Y$ در نظر خواهیم گرفت و در همین صفحه نیز برای سختی جانبی هر پایه قابی از دو فنر الاستیک در امتداد آن‌ها استفاده شده است. شکل ۳-ب مدل ساده شده این طرح را نشان می‌دهد.

سختی الاستیک فنرها برابر است با مجموعه سختی‌های معادل ستون‌های دو سرگیردار هر پایه قابی از سازه پل که بصورت رابطه

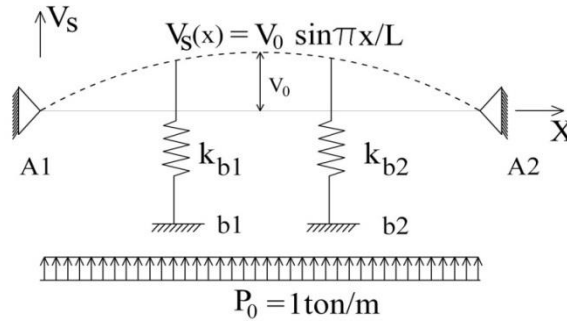


(ب)



(الف)

شکل ۳. الف) پلان عرشه پل‌های سه دهانه، ب) معادل‌سازی عرشه پل و سختی جانبی هر یک از پایه قابی‌ها



شکل ۴. مدل تغییرشکل سینوسی عرشه پل تحت اعمال بار عرضی واحد

$$\alpha = \int V_s(x) dx = \int V_0 \sin(\pi x/L) dx = 2LV_0/\pi \quad (16)$$

$$\beta = \int W(x)V_s(x) dx = W_0V_0 \int \sin(\pi x/L) dx = 2LW_0V_0/\pi \quad (17)$$

$$\gamma = \int W(x)V_s^2(x) dx = W_0(V_0)^2 \int \sin^2(\pi x/L) dx = W_0(V_0)^2 L/2 \quad (18)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{P_0 g \alpha}} = \sqrt{\frac{\pi^3 W_0 V_0}{P_0 g}} \quad (19)$$

$$P_e(x) = (\beta C_s / \gamma) W(x) V_0 \sin(\pi x/L) \quad (20)$$

$$(4/\pi) C_s W_0 \sin(\pi x/L) = P_{e0} \sin(\pi x/L)$$

$$C_s = 1.2 AS/T^{2/3} \leq 2.5 A \quad (21)$$

با توجه به تابع بار عرضی بدست آمده به صورت $P_e(x) = P_{e0} \sin \pi x/L$ مجدداً تابع تغییرشکل سینوسی با دامنه مجهول V_{e0} به صورت $V_e(x) = V_{e0} \sin \pi x/L$ برای بارگذاری جدید در نظر گرفته خواهد شد. مشابه روند قبلی از حداقل کردن تابع پتانسیل، مقدار دامنه مجهول تابع تغییرشکل محاسبه و تابع تغییرشکل نهایی کفه پل معین می‌شود. مدل تغییرشکل یافته پل تحت بار عرضی سینوسی و تغییرشکل سینوسی ناشی از آن در شکل ۵ نشان داده شده است. توابع انرژی کرنشی کفه پل و ستون‌ها و کار ناشی از بار خارجی با توجه به تابع تغییرشکل $V_e(x)$ به صورت روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) بازنویسی می‌شوند.

$$U_d = \frac{1}{4} EI_d (\pi^4/L^3) (V_{e0})^2 \quad (22)$$

سازه W_{P_0} ، که برابر است با منفی کار ناشی از نیروهای خارجی P_0 ، به صورت رابطه (۱۴) محاسبه خواهد شد. تابع پتانسیل کلی سازه از مجموع سه رابطه فوق به صورت رابطه (۱۵) تعریف خواهد شد.

$$U_b = \sum \frac{1}{2} k_b (V_b)^2 = \sum \frac{1}{2} k_b (V_0)^2 \sin^2(\pi x_b/L) \quad (12)$$

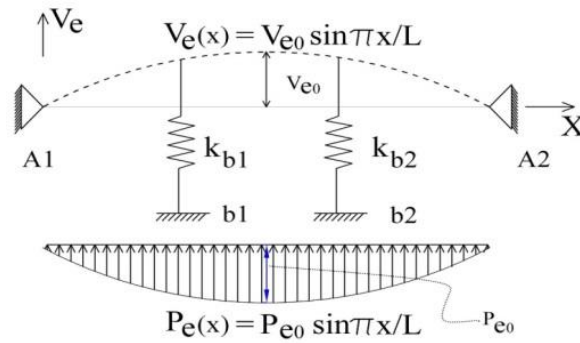
$$U_d = \int \frac{1}{2} EI_d (V')^2 dx = \frac{1}{2} EI_d \int (V_0)^2 (\pi/L)^4 \sin^2(\pi x/L) dx = \frac{1}{4} EI_d (\pi^4/L^3) (V_0)^2 \quad (13)$$

$$V = -W_{P_0} = -\int P_0 V_s dx = -P_0 \int V_0 \sin(\pi x/L) dx = -(2P_0 L/\pi) V_0 \quad (14)$$

$$\Pi = U + V = U_d + U_b - W_{P_0} \quad (15)$$

دامنه مجهول تابع (V_0) با حداقل کردن تابع پتانسیل کلی سازه برحسب مجهول مورد نظر، بدست می‌آید.

با داشتن مقدار V_0 و معلوم شدن تابع تغییرشکل عرشه $V_s(x)$ ، پارامترهای α ، β و γ ارائه شده در روش آستو طبق روابط (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) محاسبه می‌شوند. در این روابط با توجه به ثابت بودن مقطع پل وزن واحد طول پل برابر با W_0 ($W(x) = W_0$) در نظر گرفته شده است. سپس به کمک این سه پارامتر مقادیر پریرود پل در جهت عرضی (T) و تابع نیروی زلزله عرضی وارده متناسب با تابع تغییرشکل فرض شده $P_e(x)$ به ترتیب مطابق روابط (۱۹) و (۲۰) قابل محاسبه خواهند بود. ضریب زلزله C_s موجود در رابطه (۲۰)، طبق رابطه (۲۱) قابل محاسبه خواهد بود و باید همواره کمتر از $2/5 A$ اختیار شود.



شکل ۵. مدل سازه تغییرشکل یافته تحت بار عرضی سینوسی $P_e(x)$

۴- کاربرد روش پیشنهادی

به منظور بررسی دقت روش پیشنهادی یک نمونه پل سه دهانه که به صورت سه بعدی در آیین نامه آشتو به کمک نرم افزارهای مهندسی مورد بررسی قرار گرفته است، در این مطالعه استفاده خواهد شد. این پل دارای دو پایه قابی میانی بوده که هر یک متشکل از سه ستون یکسان می باشند و همچنین گشتاورماند عرشه پل در جهت عرضی مقدار قابل توجهی دارد. با توجه به مقایسه پارامترهای مختلف آن، در این مطالعه بار دیگر این مدل با نرم افزار SAP مدل سازی شده است و با نتایج آشتو مورد صحت سنجی قرار گرفته است. پس از صحت سنجی، سایر مدل هایی که در ادامه تعریف خواهند شد به روش عددی نیز تحلیل خواهند شد تا نتایج آنها با روش پیشنهادی مورد مقایسه قرار گیرند.

پس از ارزیابی و مقایسه مدل فعلی با هر دو روش پیشنهادی و عددی، با ایجاد تغییرات در ارتفاع ستون های پل مذکور و تغییرات در طول دهانه های آن ۴ نمونه دیگر از این پل ایجاد شده و آنها با هر یک از دو روش معمول آشتو و روش پیشنهادی مورد ارزیابی و مقایسه قرار خواهند گرفت، تا دقت روش انرژی پیشنهادی در نمونه های دیگر نیز برآورد گردد.

در شکل ۶ یک پل جعبه ای و پیوسته بتنی را نشان داده شده است. ضریب شتاب مبنای طرح A برابر 0.4 و پل از لحاظ اجتماعی، امنیتی و دفاعی مهم ($IC=1$) و ضریب خاک S برابر $1/2$ می باشد (مطابق با آیین نامه آشتو [۱]).

$$U_b = \sum \frac{1}{2} k_b (V_{e0})^2 \sin^2(\pi x_b/L) \quad (23)$$

$$V = -W_{pe} = -\int P_e V_e dx = -\int P_{e0} \sin(\pi x/L) V_{e0} \sin(\pi x/L) dx = -P_{e0} V_{e0} L/2 \quad (24)$$

با جمع کردن مقدار انرژی های درونی اعضای سازه و کسر کار ناشی از بار خارجی تابع انرژی کلی سازه به صورت رابطه (۲۵) بدست می آید:

$$\Pi = U_d + U_b - W_{pe} \quad (25)$$

با حداقل کردن تابع کلی پتانسیل سازه مقدار مجهول V_{e0} محاسبه خواهد شد و تابع تغییرشکل نهایی طبق رابطه $V_e(x) = V_{e0} \sin \pi x/L$ بدست می آید. با داشتن تابع $V_e(x)$ ، با جایگذاری هر مقدار مشخص برای x مقدار جابه جایی عرضی کفه پل در آن طول مشخص قابل محاسبه خواهد بود.

با داشتن جابه جایی عرضی در محل پایه قابی های میانی و سختی ستون های هر پایه قابی می توان نیروی برش عرضی ستون های پایه قابی ۱ و پایه قابی ۲ را از رابطه (۲۶) و (۲۷) بدست آورد.

$$F_{b1} = k_{b1} V_{e0} \sin(\pi x/L) \quad (26)$$

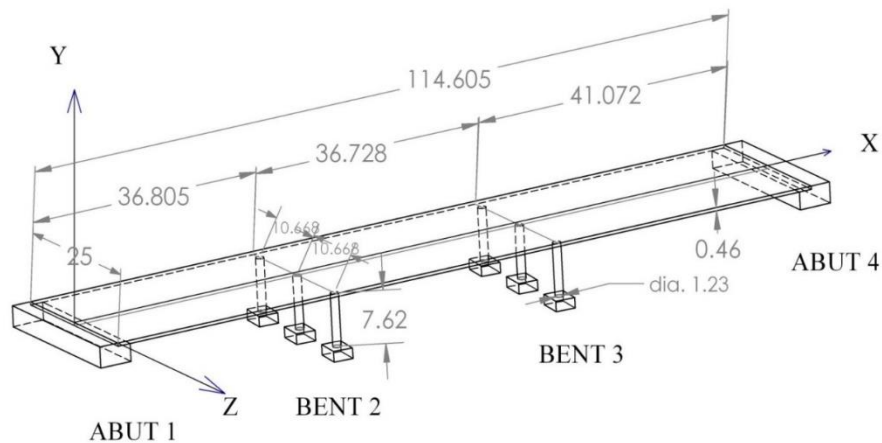
$$F_{b2} = k_{b2} V_{e0} \sin(\pi x/L) \quad (27)$$

جدول ۱. مشخصات روسازه پل (عرشه پل) [۱]

۲۵	عرض پل B (m)	۱۱۴/۶۰۵	طول پل (m)
۰/۴۶	ضخامت کفه t (m)	۳۶/۸۰۵	طول دهانه ۱ L_1 (m)
۱	لنگرماند دال کف حول محور X I_x (m^4)	۳۶/۷۲۸	طول دهانه ۲ L_2 (m)
۵۶۶	لنگرماند دال کف حول محور Y I_y (m^4)	۴۱/۰۷۲	طول دهانه ۳ L_3 (m)
۲۱۱۰۰۰	ضریب ارتجاعی بتن E_c (kg/cm^2)	۲۳۰	مقاومت فشاری بتن f'_c (kg/cm^2)

جدول ۲. مشخصات زیرسازه پل (کوله‌ها) [۱]

۰/۲۲	ممان اینرسی ستون‌ها I_y (m^4)	۱/۲۳	قطر ستون‌ها (m)
۰/۱۱۲	ممان اینرسی ستون‌ها I_x, I_z (m^4)	۷/۶۲	ارتفاع ستون‌ها (m)
۱/۲	مساحت ستون‌ها (m^2)	۱۰/۶۶۸	فاصله ستون‌ها (m)
۲۱۱۰۰۰	ضریب ارتجاعی بتن E_c (kg/cm^2)	۲۳۰	مقاومت فشاری بتن f'_c (kg/cm^2)



شکل ۶. پل بتنی مثال آشتو [۱]

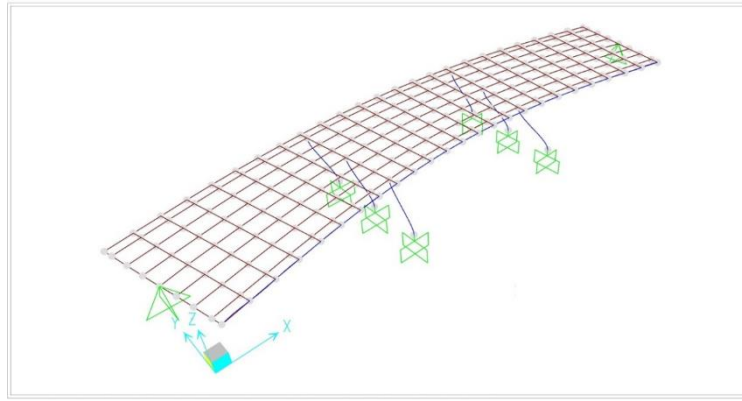
اعمال بار عرضی یکنواخت به کفه پل، آنالیز اولیه در نرم‌افزار انجام می‌شود و مدل تغییرشکل یافته این پل به صورت شکل ۷ در خواهد آمد. با استخراج میزان مقادیر تغییرشکل در هر یک چهارم دهانه و جایگذاری این مقادیر در روابط (۱) تا (۸) مقادیر پارامترهای α ، β و γ و همچنین پریود پل T ، ضریب زلزله C_s ، جرم مؤثر مود اول W_1 ، برش پایه پل V و تابع نیروی عرضی معادل با تغییرشکل کفه پل $P_e(x)$ طبق توضیحات ارائه شده در بخش ۲، به صورت جدول ۳ محاسبه خواهند شد.

مشخصات روسازه (عرشه پل) و زیرسازه پل (ستون‌ها) به ترتیب مطابق جداول ۱ و ۲ می‌باشد.

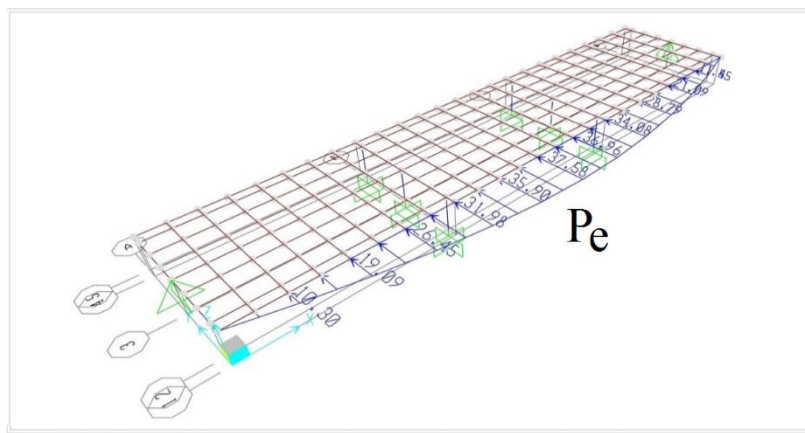
با فرض وزن مخصوص کفه برابر با 2600 kg/m^3 ، وزن واحد طول پل برابر با $W(x) = 29900 \text{ kg/m}^3$ خواهد بود.

۴-۱- آنالیز پل مورد مثال به روش رایج آشتو و صحت‌سنجی مدل‌سازی عددی

پس از مدل‌سازی پل سه‌دهانه معرفی شده در نرم‌افزار SAP و



شکل ۷. مدل تغییرشکل یافته پل تحت بار عرضی یکنواخت P_0



شکل ۸. مدل سه بعدی پل تحت باگذاری عرضی زلزله

جدول ۳. خلاصه نتایج حاصل آنالیز پل به روش پیشنهادی آشتو

α	$0.108 \text{ (m}^2\text{)}$	T	0.318 (s)	$V_{e0} \text{ (mm)}$	۳۲/۰۸
β	$2/377 \text{ (ton.m)}$	C_s	$1/24 > 2.5A=1$	$F_{c(\text{bent}1)} \text{ (Ton)}$	۱۷۰
γ	$0.00202 \text{ (ton.m}^2\text{)}$	$P_{e0}(x)$	$35.28/46V_x(x) \text{ (t/m}^2\text{)}$	$F_{c(\text{bent}2)} \text{ (Ton)}$	۱۸۲

صورت مقادیر ارائه شده در جدول ۳، بدست آمده است. همچنین مقدار حداکثر تغییرشکل کفه V_0 و V_{e0} نیز جهت مقایسه با روش پیشنهادی از نرم افزار استخراج شده است و هر یک از این مقادیر در جدول ۴ ارائه شده است.

در ادامه تحلیل پس از محاسبه بار عرضی $P_e(x)$ در هر طول مشخص از پل، این بار بر عرشه پل اعمال می شود، بطوری که در نهایت مدل بارگذاری سازه مطابق شکل ۸ خواهد بود. نیروهای برشی ستون های هر پایه قابی از سازه پل پس از تحلیل مجدد به

جدول ۴. نتایج حاصل از آنالیز اولیه سازه تحت بار P_0

$K_{b1}=K_{b2}$ (kg/m)	$1/9237 * 10^7$	U_b (kg.m)	$1/473 * 10^7 (V_0)^2$
U_d (kg.m)	$1/933 * 10^7 (V_0)^2$	W_{P0} (kg.m)	$7/3 * 10^4 V_0$

جدول ۵. نتایج حاصل از آنالیز اولیه سازه تحت بار P_0

$K_{b1}=K_{b2}$ (kg/m)	$1/9237 * 10^7$	U_b (kg.m)	$1/473 * 10^7 (V_{e0})^2$	F_{c1} bent1 (kg)	$1/737 * 10^5$
U_d (kg.m)	$1/933 * 10^7 (V_{e0})^2$	W_{P0} (kg.m)	$2/18 * 10^6 V_{e0}$	F_{c2} bent2 (kg)	$1/854 * 10^5$

با داشتن تابع توزیع بار سینوسی جدید و حل مجدد طبق روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) معادلات انرژی کرنشی دال کف و ستون‌های سازه و همچنین کار ناشی از بار خارجی مطابق روابط ارائه شده در جدول ۵ محاسبه می‌شوند. با داشتن کلیه پارامترهای فوق که مربوط به انرژی ورودی به سازه و انرژی درونی تمامی عناصر تغییر شکل یافته می‌باشد، معادله تابع پتانسیل به صورت رابطه (۳۰) نوشته خواهد شد که در صورت کمینه کردن آن مقدار تغییرشکل حداکثر پل برای بارگذاری معادل سینوسی و تغییرشکل سینوسی هم ارز با آن برابر 32 mm بدست می‌آید.

$$\Pi = 1.933 * 10^7 (V_{e0})^2 + 1.4728 * 10^7 (V_{e0})^2 - 2.18 * 10^6 V_{e0} \quad (30)$$

با مشخص شدن میزان تابع تغییرشکل واقعی عرشه پل مقدار جابه‌جایی نظیر هریک از پایه قابی‌ها و هریک از ستون‌ها برآورد خواهند شد. با توجه به داشتن سختی خمشی هریک از ستون‌ها و جابه‌جایی نظیر هریک از ستون‌ها مقدار نیروی عرضی ایجاد شده در هریک از ستون‌های پل طبق روابط (۲۶) و (۲۷) محاسبه خواهند شد. این مقادیر به صورت دقیق در جدول ۵ برای هر یک از ستون‌های پایه قابی اول و پایه قابی دوم ارائه شده‌اند.

در جدول ۶ نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی انرژی و نتایج روش معرفی شده توسط آشتو جهت مقایسه با یکدیگر آورده شده‌اند. همان‌طور که از نتایج این دو روش دیده می‌شود، نتایج روش پیشنهادی بسیار نزدیک به روش معرفی شده آشتو می‌باشد و مقادیر

۲-۴- آنالیز پل به روش پیشنهادی انرژی

با توجه به روابط ذکر شده در بخش ۳، مقادیر هریک از روابط برای پل مورد مثال به صورت زیر محاسبه خواهند شد. سختی تمامی ستون‌ها در امتداد پایه قابی ۱ (K_{b1}) و پایه قابی ۲ (K_{b2}) مطابق اعداد ارائه شده در جدول ۴ بدست می‌آیند.

انرژی کرنشی ناشی از تغییرشکل پل و انرژی کرنشی مجموع ستون‌ها و همچنین کار منفی ناشی از نیروهای خارجی براساس روابط ۱۰، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ به صورت مقادیر ارائه شده در جدول ۴ محاسبه خواهند شد. با داشتن کلیه انرژی‌های ایجاد شده در اعضایی که دچار تغییرشکل شده‌اند، تابع انرژی پتانسیل به صورت رابطه ۲۸ نوشته می‌شود که با به حداقل رساندن این رابطه برحسب متغییر مجهول، مقدار تغییرشکل حداکثر $V_0 = 1/07 * 10^{-3} \text{ m}$ محاسبه خواهد شد.

$$\Pi = 1.933 * 10^7 (V_0)^2 + 1.4732 * 10^7 (V_0)^2 - 7.3 * 10^4 V_0 \quad (28)$$

برای محاسبه پیروید کلی سازه با توجه به داشتن رابطه کامل تغییرشکل سینوسی و محاسبه‌ی پارامترهای مؤثر طبق روابط (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) پیروید سازه و ضریب برش پایه براساس روابط (۱۹) و (۲۱) به ترتیب $T = 0/318 \text{ s}$ و $C_s = 1$ بدست می‌آیند و تابع نیروی عرضی زلزله (طبق رابطه ۲۰) به صورت عبارت ۲۹ نوشته خواهد شد.

$$P_e(x) = 3.807 * 10^4 \sin(\pi x / 114.605) \quad (\text{kg/m}) \quad (29)$$

جدول ۶. مقایسه نتایج حاصل از روش آشتو و روش انرژی پیشنهادی

روش انرژی (روش پیشنهادی)	روش معرفی شده توسط آشتو (روش دقیق)	مقادیر مستخرج از آشتو (جهت اعتبار سنجی)	متغییر بدست آمده
۱/۰۷ mm	۱/۰۵ mm	-----	(V_0) حداکثر تغییر مکان تحت بار ثابت
۰/۳۱۸ Sec	۰/۳۱۷ Sec	۰/۳۱۴ Sec	(T) پریود پل در جهت عرضی
$3.807 * 10^4 \sin(\pi x / 114.605)$	$3.5028 * 10^4 V_e(x)$	----	$(P_e(x))$ تابع بارگذاری عرضی زلزله
۳۲/۰۳ mm	۳۲/۰۸ mm	----	(V_{e0}) حداکثر تغییر مکان تحت بار زلزله عرضی
۱۷۴ ton	۱۷۰ ton	۱۷۶ ton	(FC) نیروی برشی هریک از ستونهای پایه قابی ۱
۱۸۵ ton	۱۸۲ ton	۱۸۸ ton	(FC) نیروی برشی هریک از ستونهای پایه قابی ۲

جدول ۷. پارامترهای متغیر در نمونه‌های معرفی شده

حالت ۱	L ₁ (m) - طول دهانه اول	۳۶/۸۰۵	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی اول	۷/۶۲
	L ₂ (m) - طول دهانه دوم	۳۶/۷۲۸	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی دوم	۷/۶۲
	L ₃ (m) - طول دهانه سوم	۴۱/۰۷۲		
حالت ۲	L ₁ (m) - طول دهانه اول	۳۶/۸۰۵	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی اول	۶/۵
	L ₂ (m) - طول دهانه دوم	۳۶/۷۲۸	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی دوم	۶/۵
	L ₃ (m) - طول دهانه سوم	۴۱/۰۷۲		
حالت ۳	L ₁ (m) - طول دهانه اول	۳۶/۸۰۵	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی اول	۹
	L ₂ (m) - طول دهانه دوم	۳۶/۷۲۸	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی دوم	۹
	L ₃ (m) - طول دهانه سوم	۴۱/۰۷۲		
حالت ۴	L ₁ (m) - طول دهانه اول	۳۰	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی اول	۷/۶۲
	L ₂ (m) - طول دهانه دوم	۵۴/۶۰۵	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی دوم	۷/۶۲
	L ₃ (m) - طول دهانه سوم	۳۰		
حالت ۵	L ₁ (m) - طول دهانه اول	۲۰	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی اول	۷/۶۲
	L ₂ (m) - طول دهانه دوم	۷۴/۶۰۵	(m) ارتفاع ستون‌ها در پایه قابی دوم	۷/۶۲
	L ₃ (m) - طول دهانه سوم	۲۰		

مقادیر مستخرج از آشتو در جدول ۶ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دقت بسیار خوبی بین مقادیر پریود سازه و نیروهای برش عرضی ستون‌ها بین مدل عددی ایجاد شده و مقادیر خروجی از مستخرج از آشتو وجود دارد که این مطلب بیانگر تأیید دقت مدل‌های

نیروی ایجاد شده در ستون‌ها در روش پیشنهادی کمتر از ۳٪ با روش دقیق اختلاف دارد. همچنین جهت ارزیابی دقت مدل عددی مقادیر بدست آمده با مقادیر استخراج شده از آیین نامه آشتو برای مثال مذکور مورد مقایسه قرار گرفته است. این مقادیر در ستون مربوط به

نسبت به نمونه اول می‌باشند. ایجاد تغییرات در ارتفاع ستون‌ها باعث تغییر در سختی ستون‌ها خواهد گشت که از منظر مقدار سختی‌های متمرکز میانی بر نوع تغییرشکل سازه اهمیت خواهد داشت، و همچنین تغییرات در طول دهانه‌ها از منظر تأثیر موقعیت سختی‌های میانی بر رفتار سازه اهمیت دارد. مشخصات پارامترهای متغیر هر یک از مدل‌ها در جدول ۷ نشان داده شده است.

پس از تحلیل هر یک از مدل‌ها با دو روش فوق مطابق مراحل شرح داده شده برای آنها، نتایج نهایی شامل حداکثر تغییرشکل اولیه تحت بار ثابت V_0 ، پیروید ارتعاش سازه T ، حداکثر تغییرشکل تحت بار معادل با شکل تغییرشکل مود اول سازه V_{e0} ، نیروی برش عرضی ستون‌های پایه قابی ۱ F_{cl} و پایه قابی ۲ F_{c2} برای تمامی مدل‌ها در جدول ۸ جمع‌آوری شده است.

از مقایسه نتایج شاهد آن هستیم که روش پیشنهادی توانسته است پارامترهای ذکر شده در تحلیل جانبی را در سایر مدل‌های

عددی ایجاد شده می‌باشد. سایر مقادیر به دلیل اینکه در آشتو از بار عرضی 1 kips/ft برای حل استفاده کرده است که متفاوت از حل‌های انجام شده با بار عرضی 1 ton/m می‌باشد، با مقادیر جدول تناسب نداشته و لذا از ارائه آنها خودداری شده است.

۳-۴- کنترل رابطه پیشنهادی در خصوص مدل‌های دیگر

با ایجاد تغییرات در مدل فوق، تعدادی پل سه دهانه پیوسته ایجاد شده است و اهمیت روش فوق در خصوص این مدل‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. تمامی نمونه‌ها شرایط مقطع ثابت و عرشه با گشتاور ماند نسبتاً بالا را نیز دارا می‌باشند.

نمونه‌های در نظر گرفته شده به این صورت می‌باشند که حالت ۱ همان نمونه مدل اولیه در مثال بخش قبل می‌باشد و حالات ۲ و ۳ شامل دو نمونه با ارتفاع ستون‌های به ترتیب کمتر و بیشتر از حالت ۱ می‌باشند، و حالات ۴ و ۵ نیز دو نمونه با طول دهانه‌های متفاوت

جدول ۸. مقایسه نتایج بین دو حالت روش آشتو و روش معرفی شده

پارامتر	نمونه	روش آشتو (SMSA)	روش انرژی	خطا (%)
حداکثر تغییر شکل اولیه (V_0) (mm)	حالت ۱	۱/۰۵	۱/۰۷	۱/۹
	حالت ۲	۰/۸۵۸	۰/۸۶۴	۰/۷
	حالت ۳	۱/۳	۱/۳۱۷	۱/۳
	حالت ۴	۱/۲۲۹	۱/۲۵۵	۲/۱۱
	حالت ۵	۱/۵	۱/۵۱۵	۱
پیروید ارتعاش (T) (s)	حالت ۱	۰.۳۱۷	۰.۳۱۸	۰/۳۲
	حالت ۲	۰.۲۸	۰.۲۸۴	۱/۴۳
	حالت ۳	۰.۳۴۸۷	۰.۳۵۱	۰/۶۶
	حالت ۴	۰.۳۳۹۷	۰/۳۴۲۷	۰/۸۸
	حالت ۵	۰.۳۴۱۶	۰/۳۷۶۶	۱۰/۲۵
حداکثر تغییرشکل تحت بار عرضی P_e (V_{e0}) (mm)	حالت ۱	۳۲.۰۸	۳۲/۰۳	۰/۱۵
	حالت ۲	۲۵.۷۱	۲۵/۵۶	۰/۵۸
	حالت ۳	۳۸.۴	۳۸/۹۵	۱/۴۳
	حالت ۴	۳۶.۵۵۲	۳۷/۱۲	۱/۵۵
	حالت ۵	۵۱.۶	۴۴/۸۳	۱۳/۱۲

ادامه جدول ۸. مقایسه نتایج بین دو حالت روش آشتو و روش معرفی شده

پارامتر	نمونه	روش آشتو (SMSA)	روش انرژی	خطا (%)
نیروی برشی ستون‌ها در پایه قابی اول (F_c) (Ton)	حالت ۱	۱۷۰	۱۷۴	۲/۳۵
	حالت ۲	۲۱۴.۴	۲۱۹	۲/۱۵
	حالت ۳	۱۲۵.۵	۱۲۵/۸	۰/۲۴
	حالت ۴	۱۶۵.۹۷	۱۷۱/۰۵	۳/۰۶
	حالت ۵	۱۶۶.۹۸	۱۴۶/۹	۱۲/۰۳
نیروی برشی ستون‌ها در پایه قابی دوم (F_c) (Ton)	حالت ۱	۱۸۲	۱۸۵	۱/۶۵
	حالت ۲	۲۲۹.۶	۲۳۹	۴/۰۹
	حالت ۳	۱۳۴.۴	۱۳۴/۲	۰/۱۴
	حالت ۴	۱۶۵.۹۷	۱۷۱/۰۵	۳/۰۶
	حالت ۵	۱۶۶.۹۸	۱۴۶/۹	۱۲/۰۳

مشابه با دقت بسیار خوبی تخمین بزند.

نتایج ستون مربوط به ستون خطا، میزان خطای بین دو روش را بیان می‌کند، همانطور که مشاهده می‌شود نتایج غالباً کمتر از ۳٪ خطا دارند و تنها در مورد نمونه ۵ میزان خطای بین نیروی برش عرضی ستون‌ها به ۱۲٪ رسیده است. این وضعیت بیانگر این مطلب است که در حالات ۱ تا ۵ پل همچنان از تغییرشکل سینوسی برای مود اول تبعیت می‌کند و تنها در حالت ۵ که طول دهانه میانی ۷۴/۶۰۵m و دهانه‌های طرفین ۲۰m می‌باشد اندکی اختلاف بین نتایج بیشتر شده است.

۵- نتیجه‌گیری

روش انرژی پیشنهادی نیاز به مدل‌سازی سه‌بعدی در نرم‌افزار تخصصی را ندارد می‌تواند روش دستی مناسب و قابل استفاده‌ای برای طراحان به شمار رود. روش معرفی شده با تغییر در سختی پایه‌ها و همچنین تغییر در طول دهانه‌ها برای پل مورد بررسی که دارای عرشه با مقاومت خمشی نسبتاً بالا می‌باشد در ۵ نمونه مختلف مورد بررسی قرار گرفته است، که مقایسه نتایج با روش دقیق عددی نشان‌دهنده دقت بسیار بالای روش انرژی پیشنهادی برای پل‌های سه

دهانه پیوسته می‌باشد. از آنجا که مقایسه نتایج گویای آن است که در روش پیشنهادی مقادیر نیروی برشی ستون‌ها و پیوند ارتعاش سازه تحت بار عرضی بر کفه پل غالباً کمتر از ۳٪ نسبت به روش دقیق اختلاف دارند، لذا بکارگیری تابع تغییرشکل سینوسی و استفاده از تابع پتانسیل کلی سازه می‌تواند روشی ساده برای حل چنین مسائل پیچیده‌ای در نظر گرفته شود. از سوی دیگر استفاده از این روش می‌تواند در جهت بررسی دقت مدل‌سازی پل‌های سه دهانه در نرم‌افزار نیز مؤثر باشد.

با توجه به این که افزایش پارامترهای تأثیرگذار بر شکل مودی سازه ممکن است از دقت روش‌های تحلیل دستی بکاهد، لذا در این تحقیق نشان داده شده است که با فرض یک تابع تغییرشکل و بهره‌گیری از پارامترهای آیین‌نامه آشتو برای تحلیل پل‌ها در جهت عرضی می‌توان تخمین بسیار خوبی بر نتایج حاصل از روش دقیق دست یافت.

مراجع

1. AASHTO, 2012 AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, Customary U.S. Units (6th Edition),

- 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, Canada, 2004.
9. Tubaldi E, Barbato M, Dall'Asta A. Transverse seismic response of continuous steel-concrete composite bridges exhibiting dual load path. *Earthquake and Structures* 2010; 1(1):21–41.
 10. Tsai MH. Transverse earthquake response analysis of a seismically isolated regular bridge with partial restraint. *Engineering Structures* 2008; 30(2):393–403.
 11. Makris N, Kampas G, Angelopoulou D. The eigenvalues of isolated bridges with transverse restraints at the end-abutments. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 2010; 39(8):869–886.
 12. Tubaldi E, Dall'Asta A. Transverse free vibrations of continuous bridges with abutment restraint. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2012 Jul 25; 41(9):1319-40.
 13. Buckle, I.G., Mayes, R.L. & Button, M.R., 1987 Seismic design and retrofit manual for highway bridge, Report No. FHWA-IP-6, Final Report, National Technical Information Service, Springfield, Verginia. 130-136.
- American Association of State Highway and Transportation Officials, 4th Edition, Washington, D.C.
 2. Barker, R. M. & Puckett, J. A. 2013 Design of Highway Bridges: A LRFD Approach, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.
 3. Clough, R.W. & Penzein, J. 1993 Dynamics of Structures, McGraw Hill, New York.
 4. Chopra AK, Chopra AK. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall; 2007 May 1.
 5. chen, W.F. & Lui, E.M. 1987 Structural Stability, Elsevier, New York.
 6. Caltrans, 2014a California Amendments to AASHTO LRFD Bridge Design Specifications – 6th Edition, California Department of Transportation, Sacramento, CA.
 7. Najm H, Vasconez R. Assessment of AASHTO LRFD guidelines for analysis of regular bridges subjected to transverse earthquake ground motions. *Bridge Structures*. 2015 Jan 1; 11(1, 2):3-18.
 8. Calvi GM. Recent experience and innovative approaches in design and assessment of bridges. *Proceedings of*

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

F. ghaffari, M. Gh. Vetr, M. R. Adl Parvar, Using the Sinusoidal Shape Function in Analyzing the 3-Span Continuous Concrete Bridges in Lateral Direction, Amirkabir J. Civil Eng., 53(1) (2021) 171-184.

DOI: [10.22060/ceej.2018.14637.5702](https://doi.org/10.22060/ceej.2018.14637.5702)



