



Application of a Superelement in Static and Vibration Analysis of Piezoelectric Hollow Cylinders

A. Taghvaeipour¹ and M. Ahmadian²

¹ Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

² Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this study, static and vibration analyses of cylindrical piezoelectric structures by means of superelements are targeted. In this regard, the cylindrical superelement is modified in order to be used in the analysis of hollow cylinders made of piezoelectric materials. At first, the cylindrical superelement, which was previously defined in the literature, is introduced. Next, the calculation of stiffness and mass matrices of piezoelectric structures in finite element analysis is briefly reviewed, and then, a piezoelectric cylindrical superelement is developed. In order to verify the accuracy of the defined element, two case studies are analyzed by means of the defined superelement, and the results are compared with the ones obtained by a commercial finite element software. In the end, the piezoelectric superelement is further modified to be used in static and vibration analyses of hollow cylinders which are made of functionally graded piezoelectric materials. Also, in this case, two classical problems are analyzed with the defined element. In both piezoelectric and functionally graded piezoelectric material cases, the results show appropriate compatibility with the ones obtained by the conventional elements.

Review History:

Received: 7/19/2018

Revised: 10/20/2018

Accepted: 11/10/2018

Available Online: 11/21/2018

Keywords:

Superelement

Piezoelectric materials

Functionally graded materials

Static analyses

Vibration analyses

1. INTRODUCTION

Finite Element Method (FEM) is now widely used in academia and industry in order to analyze complicated engineering problems. In this method, a system in the first step should be discretized into the number of elements, which is called meshing. Based on the FEM, the accuracy of results is improved if the number of elements increased. However, it also increases the computation cost. Alternatively, researchers have tried to propose numerical methods which do not need meshing or at least need a lower number of elements [1, 2]. For example, in the automotive and aircraft industries, the sub-structuring method is frequently used. In this method, first, a structure with a complex shape has meshed, and then, by reducing the size of the assembled stiffness and mass matrices, a new element is defined which only includes nodes at boundaries [3-5]. As a result, a large element with a substantially reduced number of nodes and Degrees-Of-Freedom (DOFs) is created. Although this method reduces the computation time substantially, it still needs meshing.

The superelement method is another approach with which a structure can be analyzed efficiently with a smaller number of elements. In this method, an element with a known geometry is defined and customized based on the demanded analysis. For example, Ahmadian et al. [6] introduced a cylindrical superelement which can be used in the structural analysis of cylindrical laminates. Later, Taghvaeipour et al. [7] modified the element formulation to be used in the

analysis of functionally graded thick vessels.

This study aims at the definition of a cylindrical superelement which can be incorporated in static and vibration analysis of piezoelectric sensors/actuators. In this regard, the superelement which was first defined in Ref. [6] is briefly introduced, and then, the stiffness and mass matrices of a cylindrical piezoelectric superelement are derived. Finally, by using the defined element, some examples are solved and the results are verified by a commercial FE package.

2. THE CYLINDRICAL SUPERELEMENT FOR PIEZOELECTRIC MATERIALS

The geometry of the cylindrical superelement is depicted in Fig. 1. As it is shown, this element with the inner radius of

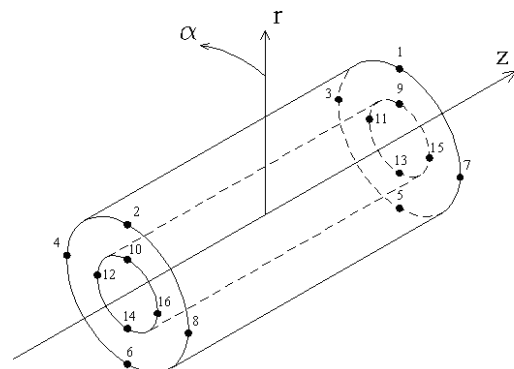


Fig. 1: The Cylindrical superelement

*Corresponding author's email: ataghvaei@aut.ac.ir



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.

r_1 , the outer radius of r_2 and the length of $2L$ has 16 nodes. For the sake of simplicity, and based on the cylindrical geometry of element new local coordinates are defined as follows,

$$\xi = \frac{z}{L}$$

$$\eta = \frac{2 \times r - b}{a} \tag{1}$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{\pi} - 1$$

in which:

$$a = r_2 - r_1$$

$$b = r_2 + r_1 \tag{2}$$

The DOFs are interpolated inside the element by means of 16 shape functions which are formed by trigonometric functions, along the radial direction, and polynomial functions along the radial and longitudinal directions [6]. For an electromechanical analysis, each node possesses four DOFs, and hence, the nodal vector of the i 'th node is defined as:

$$\mathbf{q}^i = [u_{ir} \quad u_{i\alpha} \quad u_{iz} \quad \phi_i]^T \tag{3}$$

In piezoelectric materials, the governing equations are summarized as follows:

$$\{T\} = [c^E] \{S\} - [e]^T \{E\}$$

$$\{D\} = [e] \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\} \tag{4}$$

where $\{T\}$ is denoting the stress vector, $\{S\}$ is the strain vector, $\{E\}$ is the electrical field, $\{D\}$ is the electrical displacement, $[\varepsilon^S]$ is the matrix of elastic coefficients while the electrical field is constant, and $[e]$ is the matrix of piezoelectric coupling coefficients. By resorting to Hamilton's principle and approximation solution, the following matrix equations are obtained within each element,

$$[M] \{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}] \{u_i\} + [K_{u\Phi}] \{\Phi_i\} = \{f_i\} \tag{5}$$

$$[K_{\Phi u}] \{u_i\} + [K_{\Phi\Phi}] \{\Phi_i\} = \{g_i\} \tag{6}$$

The corresponding formulations for the stiffness and mass matrices and the derivations are presented in Ref. [8].

3. THE CASE STUDIES

The First case study is a clamped-free hollow cylinder with the ratios of $L/r_i = 8$, $h/r_i = 0.5$ and the thickness of $h = 0.01$ m. The cylinder is made of PZT-4 which is polarized along its length. The elongation of the foregoing structure

Table 1: The elongations obtained by superelements (SE) and brick elements

| | Elongation (m) | Difference% |
|----------------|----------------|-------------|
| Brick Elements | 2.83e-8 | - |
| SE 1 Element | 2.2883e-8 | 19.1 |
| SE 3 Elements | 2.6428e-8 | 6.6 |
| SE 5 Elements | 2.7295e-8 | 3.55 |
| SE 10 Elements | 2.7929e-8 | 1.31 |

Table 2: The first two bending natural frequencies obtained by superelements and brick elements (short-circuit)

| | 1 st Bending (Hz) | Diff% | 1 st Torsion (Hz) | Diff.% |
|----------------|------------------------------|-------|------------------------------|--------|
| Brick Elements | 682.27 | - | 2414.2 | - |
| 10 SEs | 710.86 | 4.19 | 2523.9 | 4.55 |
| 15 SEs | 699.73 | 2.56 | 2522.1 | 4.47 |
| 20 SEs | 696.3 | 2.06 | 2521.5 | 4.44 |

under the following boundary conditions are obtained by the superelements, and brick elements in a FE commercial software. The results are compared in Table 1.

$$\Phi = 100V \rightarrow z = 0 \tag{7}$$

$$\Phi = 0 \rightarrow z = L$$

In the second case study, a hollow cylinder with the ratios of $L/r_i = 20$, $h/r_i = 2$ and the thickness of $h = 0.02$ m is considered. Likewise, the cylinder is clamped-free and made of PZT-4. In the case of short-circuit boundary condition, the first two bending natural frequencies obtained by the superelement and the brick elements are compared in Table 2.

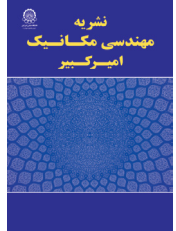
4. CONCLUSIONS

In this study, a cylindrical superelement was introduced which can be used in the structural analysis of hollow cylinder sensors/actuators. The element is based on the geometry and shape functions which were previously defined in the literature, and here, it is developed to be used in the case of piezoelectric hollow cylinders. In the end, static and vibration analysis were conducted on case studies by means of superelements. The results show proper accuracy compared with the ones obtained by brick elements in a commercial FE software.

REFERENCES

- [1] S. Finnveden, Exact spectral finite element analysis of stationary vibrations in a rail way car structure, Acta Acustica, 2 (1994) 461-482.
- [2] E.C. Pestel, Matrix methods in elastodynamics, McGraw-Hill, 1963.
- [3] F. Ju, Y.S. Choo, Super element approach to cable passing through multiple pulleys, International Journal of Solids and Structures, 42(11) (2005) 3533-3547.
- [4] W. Kuntjoro, A.M.H.A. Jalil, J. Mahmud, Wing Structure Static

- Analysis using Superelement, *Procedia Engineering*, 41 (2012) 1600-1606.
- [5] V.V. Tkachev, The use of superelement approach for the mathematical simulation of reactor structure dynamic behaviour, *Nuclear Engineering and Design*, 196(1) (2000) 101-104.
- [6] M.T. Ahmadian, M. Bonakdar, A new cylindrical element formulation and its application to structural analysis of laminated hollow cylinders, *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(9) (2008) 617-630.
- [7] A. Taghvaeipour, M. Bonakdar, M.T. Ahmadian, Application of a new cylindrical element formulation in finite element structural analysis of FGM hollow cylinders, *Finite Elements in Analysis and Design*, 50 (2012) 1-7.
- [8] V. Piefort, *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*, 2001.



کاربرد یک سوپرالمان در تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی استوانه‌های توخالی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک

افشین تقوایی پور^{۱*}، محمدتقی احمدیان^۲

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

^۲ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۴-۲۸

بازنگری: ۱۳۹۷-۰۷-۲۸

پذیرش: ۱۳۹۷-۰۸-۱۹

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۰۸-۳۰

کلمات کلیدی:

تحلیل استاتیکی

تحلیل ارتعاشی

سوپر المان استوانه‌ای

المان محدود

مواد پیزوالکتریک هدفمند

خلاصه: هدف از این مقاله تعریف یک سوپرالمان برای استفاده در تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی استوانه‌های ساخته شده از مواد پیزوالکتریک می‌باشد. بدین ترتیب ابتدا به معرفی یک سوپر المان استوانه‌ای که پیش از این در تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی سازه‌های استوانه‌ای توخالی ارائه گردیده بود، پرداخته می‌شود. سپس این المان جهت استفاده در تحلیل سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک تعمیم داده می‌شود. در این راستا، ابتدا به بررسی روابط المان محدود مربوط به مواد پیزوالکتریک و استخراج ماتریس‌های سختی و جرم مرتبط با این مواد پرداخته می‌شود. سپس با استفاده از مفهوم سوپر المان و ماتریس‌های بدست آمده، سوپرالمان استوانه‌ای پیزوالکتریک ارائه می‌گردد. در نهایت به منظور صحت‌سنجی المان تعریف شده، این سوپر المان جهت تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین، نتایج بدست آمده از روش سوپرالمان با آنچه از نرم‌افزار انسیس و با استفاده از المان‌های موجود مقایسه می‌شود. یکی از مهم‌ترین نقاط قوت المان تعریف شده در مواردی است که خواص ماده در راستای شعاعی تغییر می‌نماید. بدین ترتیب، در انتها توانایی سوپرالمان تعریف شده در تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک هدفمند نیز مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱- مقدمه

روش اجزاء محدود، راه حلی ساده برای مسائل پیچیده که حل تحلیلی برای آن‌ها موجود نیست، ارائه می‌کند. تقسیم هندسه مساله به المان‌های کوچک و بدست آوردن پاسخ برای المان‌ها، اساس این روش به حساب می‌آید. اما افزایش تعداد المان‌ها، خود باعث بروز پیچیدگی در حل مساله شده و موجب افزایش زمان و حافظه مورد نیاز برای حل مساله می‌گردد. بنابراین همواره روش‌هایی که بتوانند بدون کاهش دقت محاسبات، تعداد المان‌های مورد نیاز برای مدل‌سازی مساله و در نتیجه درجات آزادی سیستم را کاهش دهند، مورد استقبال قرار گرفته‌اند. روش‌های متعددی در گذشته برای افزایش بازدهی محاسبات و کاهش درجات آزادی سیستم، ارائه شده‌اند که به عنوان مثال می‌توان روش اجزاء محدود منطقه‌ای [۱] و یا روش ماتریس انتقال^۱ را نام برد [۲]. یکی از روش‌های مرسوم که همچنان در صنایع خودروسازی،

هوایی و همچنین ساختمان مورد استفاده قرار می‌گیرد روش زیر-سازه^۲ می‌باشد. در این روش ابتدا جزء مورد نظر با استفاده از المان‌های مکعبی و یا هرمی مش‌بندی گردیده و ماتریس سختی کلی این جزء بدست می‌آید. سپس با شناسایی نودهای اتصال‌دهنده این جزء به اجزاء دیگر سامانه، ماتریس کلی سیستم برای درجات آزادی این نودها کاهیده می‌شود. بدین ترتیب یک المان بزرگ با تعداد نودهای کمتر برای جزء مورد نظر ایجاد می‌گردد. تاکنون، با استفاده از این روش، محققین و مهندسين بسیاری به بررسی و تحلیل اجزاء یک سامانه بزرگ پرداخته‌اند [۳-۱۱]. برای مثال کانتجورو^۳ [۶] با استفاده از این روش به تحلیل استاتیکی و تنش بال یک هواپیمای جنگنده پرداخته است.

پیدایش و تکامل سوپر المان‌ها در تحلیل سازه‌ای سیستم‌های مکانیکی مختلف از دیگر تلاش‌هایی بوده است که در دهه گذشته

1 Matrix Transfer Method

2 Sub-Structuring

3 Kuntjoro

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ataghvaei@aut.ac.ir



تحلیل مواد پیزوالکتریک استخراج می‌گردند. در ادامه، بر روی یک استوانه توخالی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک تحلیل‌های استاتیکی و مودال به انجام می‌رسد. در نهایت پاسخ‌ها با آنچه توسط نرم‌افزار و با استفاده از المان‌های مکعبی بدست آمده مقایسه خواهد شد. در انتها، با فرض اینکه ماده پیزوالکتریک در راستای شعاعی هدفمند می‌باشد، بار دیگر محاسبات تکرار شده و مقایسه می‌گردند.

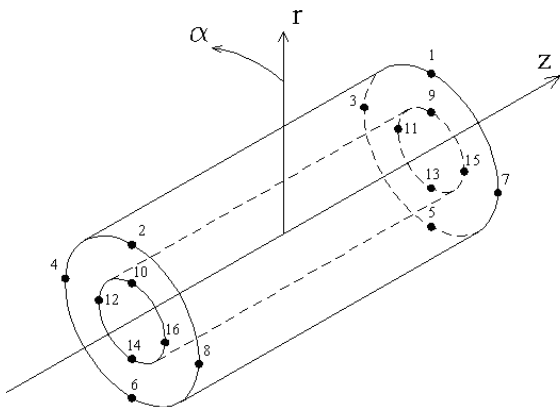
۲- مشخصات و فرمولاسیون سوپر المان استوانه‌ای

سوپر المان مورد استفاده در این مقاله به صورت یک استوانه تو خالی بوده و دارای ۱۶ گره می‌باشد [۱۷]. ترتیب قرارگیری گره‌ها بدین صورت است که در هر طرف استوانه ۴ گره در شعاع بیرونی و ۴ گره در شعاع درونی استوانه قرار گرفته‌اند. این سوپر المان در شکل ۱ نشان داده شده است. فارغ از نوع مساله‌ای که سوپر المان در حل آن استفاده می‌شود، توابع تقریب برای میانمایی متغیر میدان در داخل المان به کار می‌روند که تعداد این توابع تقریب برابر است با تعداد گره‌های موجود در المان. در همین راستا و به منظور ساده سازی در تعریف این توابع، ابتدا مختصات محلی متناسب با هندسه المان تعریف می‌گردند. برای یک سوپر المان به طول $2L$ ، شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 سیستم مختصات محلی (ξ, η, γ) به شرح ذیل تعریف می‌گردند،

$$\xi = \frac{z}{L}$$

$$\eta = \frac{2 \times r - b}{a} \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{\pi} - 1$$



شکل ۱: سوپر المان استوانه‌ای

Fig. 1: Cylindrical superelement

به منظور بهبود بازدهی محاسبات صورت گرفته است. سوپر المان‌ها، المان‌هایی با شکل‌ها و قابلیت‌های ویژه‌ای هستند که روند مدل‌سازی را برای هندسه‌های پیچیده، ساده می‌کنند. برای هر یک از این سوپر المان‌ها متناسب با شکل و خواص فیزیکی آن‌ها و نوع مساله، توابع شکل خاصی تعریف می‌گردد. سوپر المان‌ها این امکان را فراهم می‌کنند که مسائل اجزاء محدود با تعداد المان کمتر و با دقت بالاتری حل شوند. در نتیجه با کاهش حجم محاسبات، زمان بسیار کمتری صرف شده و به حافظه کمتری برای حل ماتریس‌های مساله نیاز می‌باشد. کوکو^۱ [۱۲ و ۱۳] در سال ۱۹۹۲ از یک سوپر المان مستطیلی برای تحلیل ارتعاشات ورق‌های تقویت شده ایزوتروپ استفاده کرد. احمدیان و زنگنه [۱۴ و ۱۵] این المان را در تحلیل دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی چند لایه به کار گرفتند. در سال ۱۹۹۴ اولسون و جیانگ^۲ [۱۶] به منظور مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای متعامد تقویت شده، از روش سوپر المان استفاده نمودند. برای سازه‌های با هندسه دوار، اولین بار احمدیان و همکاران [۱۷] یک سوپر المان استوانه‌ای تعریف نموده و از آن در تحلیل سازه‌ای استوانه‌های لایه‌ای استفاده نمودند. عدم نیاز به مش‌بندی در راستای شعاعی یکی از مزایای استفاده از این سوپر المان استوانه‌ای می‌باشد. بدین ترتیب چنانچه در یک سازه استوانه‌ای توخالی از شعاع داخلی به خارجی خصوصیات ماده تغییر نماید، تحلیل مکانیکی توسط سوپر المان به سرعت و با دقت بالا مقدور می‌گردد. به همین منظور، این المان در سال‌های بعد توسط تقوایی پور و همکاران [۱۸] به منظور تحلیل سازه‌ای و مودال یک استوانه ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند استفاده گردید. در یک تحقیق صنعتی، پورحمید و همکاران [۱۹] از این سوپر المان استوانه‌ای به منظور تحلیل ترمومکانیکی یک سیلندر و پیستون ساخته شده از مواد هدفمند بهره جستند. اخیراً، فتان و احمدیان [۲۰] با افزودن تعداد نودهای سوپر المان استوانه‌ای، از آن در تحلیل ارتعاشاتی رینگ‌های ساخته شده از مواد هدفمند استفاده نمودند.

هدف از این تحقیق، استفاده از سوپر المان استوانه‌ای در تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی مواد پیزوالکتریک می‌باشد. بدین ترتیب ابتدا سوپر المان مذکور تعریف شده و سپس با استفاده از روش گلرکین، ماتریس‌های مکانیکی و الکتریکی مورد نیاز جهت

- 1 Koko
- 2 Olson and Jiang

که در آن:

$$\begin{aligned} a &= r_2 - r_1 \\ b &= r_2 + r_1 \end{aligned} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن حدود مجاز زیر برای مولفه‌های دستگاه مختصات مرجع یه صورت رابطه (۳):

$$\begin{aligned} -L &\leq z \leq L \\ r_1 &\leq r \leq r_2 \\ 0 &\leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3)$$

خواهیم داشت:

$$-1 \leq \xi, \eta, \gamma \leq 1 \quad (4)$$

۱-۱ توابع تقریب^۱

توابع تقریب دارای این ویژگی هستند که مقدار هر یک از آن‌ها در یک گره از المان برابر ۱ شده و در کلیه گره‌های دیگر برابر صفر می‌باشد. توابع تقریب استفاده شده در این سوپرالمان عبارت اند از [۱۷]:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma - \cos \pi\gamma) (1 + \xi) (1 + \eta) \\ N_2(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma - \cos \pi\gamma) (1 - \xi) (1 + \eta) \\ N_3(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma - \sin \pi\gamma) (1 + \xi) (1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma - \sin \pi\gamma) (1 - \xi) (1 + \eta) \\ N_5(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma + \cos \pi\gamma) (1 + \xi) (1 + \eta) \\ N_6(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma + \cos \pi\gamma) (1 - \xi) (1 + \eta) \\ N_7(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma + \sin \pi\gamma) (1 + \xi) (1 + \eta) \\ N_8(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma + \sin \pi\gamma) (1 - \xi) (1 + \eta) \\ N_9(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma - \cos \pi\gamma) (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_{10}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma - \cos \pi\gamma) (1 - \xi) (1 - \eta) \\ N_{11}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma - \sin \pi\gamma) (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_{12}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma - \sin \pi\gamma) (1 - \xi) (1 - \eta) \\ N_{13}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma + \cos \pi\gamma) (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_{14}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \pi\gamma + \cos \pi\gamma) (1 - \xi) (1 - \eta) \\ N_{15}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma + \sin \pi\gamma) (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_{16}(\xi, \eta, \gamma) &= \frac{1}{8} (\sin^2 \pi\gamma + \sin \pi\gamma) (1 - \xi) (1 - \eta) \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به نوع مساله‌ای که سوپر المان در حل آن استفاده می‌شود و معادلات حاکم، می‌توان درجات آزادی متنوعی را به گره‌های سوپرالمان نسبت داده و مساله را حل نمود. به عنوان مثال اگر سوپر المان در مدل‌سازی مسائل حرارتی به کار رود، درجه آزادی هر گره از نوع درجه حرارت، در مسائل الکترومغناطیسی درجه آزادی از سنخ پتانسیل الکتریکی و در مسائل سازه‌ای از سنخ جابجایی است. از آنجایی که در این پژوهش، هدف تحلیل استاتیکی و دینامیکی استوانه‌های ساخته شده از مواد پیژوالکتریک می‌باشد، و این مساله در حیطه مسائل کوپل سازه ای-الکتریکی می‌گنجد، لذا درجات آزادی از سنخ جابجایی و پتانسیل الکتریکی می‌باشند. به دلیل سه بعدی بودن مساله، هر گره قادر است که در سه جهت شعاعی r ، مماسی α و طولی z جابجا شود. بدین ترتیب، با در نظر گرفتن پتانسیل الکتریکی در هر گره، بردار درجات آزادی برای گره شماره i به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathbf{q}^i = [u_{ir} \quad u_{i\alpha} \quad u_{iz} \quad \phi_i]^T \quad (6)$$

که در آن u_{ir} جابجایی در راستای شعاعی، $u_{i\alpha}$ جابجایی در راستای محیطی، u_{iz} جابجایی در راستای محوری و ϕ_i پتانسیل الکتریکی در نود i ام المان می‌باشند. بردار درجات آزادی برای کل سوپرالمان نیز به صورتی که در ادامه می‌آید نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{q} = [u_{1r} \quad u_{1\alpha} \quad u_{1z} \quad \phi_1 \quad \dots \quad u_{16r} \quad u_{16\alpha} \quad u_{16z} \quad \phi_{16}]^T \quad (7)$$

بدین ترتیب سوپر المان استوانه‌ای در مسائل کوپل سازه‌ای-الکتریکی جمعا دارای ۶۴ درجه آزادی می‌باشد. همچنین، بردار میدان یک نقطه دلخواه داخل استوانه (غیر از گره) نیز چنین تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{u} = [u_r \quad u_\alpha \quad u_z \quad \phi]^T \quad (8)$$

۲-۱ مونتاژ^۲ سوپر المان‌ها

به منظور انجام آنالیزهای استاتیکی که در آن‌ها متغیرهای میدان (مثل جابجایی) بصورت یک تابع خطی در طول استوانه تغییر می‌کنند (مثل کشش خالص)، تنها یک سوپرالمان استوانه‌ای قادر با ارائه پاسخ با دقت مناسب می‌باشد. اما در مسائلی که این تغییرات بصورت خطی

1 Shape Functions, Approximating Functions, Interpolating Functions

که در آن $\{T\}$ نمایانگر بردار تنش، $\{S\}$ بردار کرنش، $\{E\}$ میدان الکتریکی، $\{D\}$ بردار جابجایی الکتریکی، ماتریس ضرایب الاستیک در میدان الکتریکی ثابت، $[\epsilon^S]$ ضرایب دی‌الکتریک در بردار کرنش ثابت و $[e]$ ضرایب کوپلینگ پیزوالکتریک می‌باشند. با استفاده از اصل همیلتون می‌توان فرم المان محدود مواد پیزوالکتریک را استخراج نمود. انرژی پتانسیل مربوط به مواد پیزوالکتریک شامل دو قسمت می‌باشد، یکی انرژی کرنشی و دیگری انرژی الکترواستاتیک، که با جایگذاری در معادله همیلتون (۱۰) می‌توان معادله دینامیکی مربوط به اینگونه مواد را بدست آورد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L+W) dt = 0 \quad (10)$$

که در آن t_1, t_2 مشخص کننده بازه زمانی، L لاگرانژین و W کار مجازی خارجی انجام شده توسط نیروهای الکتریکی و مکانیکی می‌باشد. در اینجا L به صورت جمع انرژی پتانسیل و انتالپی الکتریکی تعریف می‌گردد. همچنین دانسیته انتالپی الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$H = U - E_i D_i \quad (11)$$

با استفاده از قانون اول ترمودینامیک داریم

$$dU = T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i \quad (12)$$

در نهایت با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۲) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$dH = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i \quad (13)$$

از معادله بالا می‌توان چنین نتیجه گرفت:

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \quad (14)$$

$$D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i} \quad (15)$$

در تئوری پیزوالکتریک خطی، رابطه زیر برای انتالپی H در نظر گرفته می‌شود [۲۱]:

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۹) تا (۱۶) می‌توان معادله بالا را به فرم زیر نوشت:

نمی‌باشد، به تعدادی سوپر المان که بصورت سر به سر مونتاژ شده‌اند، نیاز است. شکل ۲ نحوه مونتاژ سوپر المان‌های استوانه‌ای را به صورت سر به سر نشان می‌دهد.

به منظور مدل‌سازی استوانه‌های چند لایه می‌توان به تعداد لایه‌های موجود از سوپر المان‌های با ابعاد و جنس مناسب در جهت شعاعی استفاده نمود. در این صورت لازم است که قطر داخلی سوپر المان بیرونی با قطر خارجی سوپر المان درونی برابر باشد. نحوه مونتاژ سوپر المان‌ها برای مدل‌سازی استوانه‌های چند لایه در شکل ۳ نشان داده شده است.

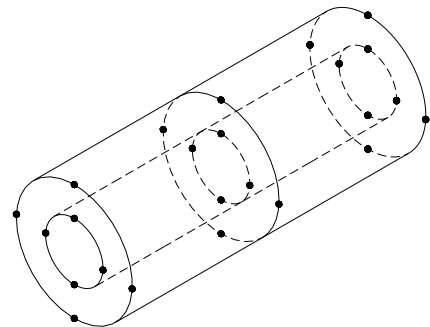
۳- المان محدود مرتبط با مواد پیزوالکتریک

معادلات عمومی حاکم بر مواد پیزوالکتریک چنین بیان می‌گردند

[۲۱]:

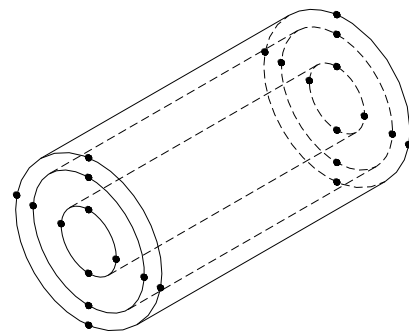
$$\{T\} = [c^E] \{S\} - [e]^T \{E\} \quad (9)$$

$$\{D\} = [e] \{S\} + [\epsilon^S] \{E\}$$



شکل ۲: مونتاژ سوپر المان به صورت سر به سر

Fig.2: Superelement assembly through the axial direction



شکل ۳: مونتاژ سوپر المان در جهت شعاعی

Fig. 3: Superelement assembly through the radial direction

بنابراین میدان کرنش و میدان الکتریکی درون المان به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

$$\{S\} = [\mathfrak{S}][N_u]\{u_i\} = [B_u]\{u_i\} \quad (24)$$

$$\{E\} = -\nabla[N_\Phi]\{\Phi_i\} = -[B_\Phi]\{\Phi_i\} \quad (25)$$

که در این روابط ∇ عملگر گرادیان و $[\mathfrak{S}]$ نیز ماتریس عملگر مشتق گیری می‌باشد که به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$[\mathfrak{S}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

با جایگذاری روابط بدست آمده در معادله (۲۱) و با در نظر گرفتن اینکه رابطه بدست آمده برای تمام تغییرات کوچک میدان جابجایی و پتانسیل الکتریکی که سازگار با شرایط مرزی هستند، صادق می‌باشد، روابط ماتریسی (۲۷) و (۲۸) حاصل می‌گردند:

$$[M]\{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}]\{u_i\} + [K_{u\Phi}]\{\Phi_i\} = \{f_i\} \quad (27)$$

$$[K_{\Phi u}]\{u_i\} + [K_{\Phi\Phi}]\{\Phi_i\} = \{g_i\} \quad (28)$$

عناصر معادلات ماتریسی بالا چنین تعریف می‌شوند:

$$[M] = \int_V \rho [N_u]^T [N_u] dV \quad (29)$$

$$[K_{uu}] = \int_V [B_u]^T [c^E] [B_u] dV \quad (30)$$

$$[K_{\Phi u}]^T = [K_{u\Phi}] = \int_V [B_u]^T [e]^T [B_\Phi] dV \quad (31)$$

$$[K_{\Phi\Phi}] = -\int_V [B_\Phi]^T [\varepsilon] [B_\Phi] dV \quad (32)$$

$$\{f_i\} = \int_V [N_u]^T \{F_V\} dV + \int_{\Omega_1} [N_u]^T \{F_\Omega\} d\Omega + [N_u]^T \{F_P\} \quad (33)$$

$$\{g_i\} = -\int_{\Omega_2} [N_\Phi]^T l d\Omega - [N_\Phi]^T Q \quad (34)$$

که دو عبارت آخر بیانگر نیروهای خارجی وارد بر سیستم می‌باشند. این معادلات پس از عملیات سوار کردن ماتریس‌های المان‌های مجاور برای تمام سیستم به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

$$H = \frac{1}{2} (\{S\}^T \{T\} - \{E\}^T \{D\}) \quad (17)$$

همچنین انرژی جنبشی نیز به فرم آشنای زیر بیان می‌گردد:

$$J = \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} \quad (18)$$

در نهایت لاگرانژین به فرم نشان داده شده در معادله (۱۹) حاصل می‌شود:

$$L = \int_V (J - H) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \frac{1}{2} (\{S\}^T \{T\} - \{E\}^T \{D\}) \right) dV \quad (19)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله را می‌توان به صورت $\{u\} = \{\underline{u}\}$ بر روی سطح Ω_1 و $\{\Phi\} = \{\underline{\Phi}\}$ بر روی سطح Ω_2 بیان نمود. حال با در نظر گرفتن یک تغییر کوچک δu در میدان جابجایی و $\delta\Phi$ در پتانسیل الکتریکی، کار مجازی ناشی از نیروهای خارجی چنین بدست می‌آید:

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}^T \{F_V\} dV + \int_{\Omega_1} \{\delta u\}^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u\}^T \{F_P\} - \int_{\Omega_2} \delta\Phi l d\Omega - \delta\Phi Q \quad (20)$$

که در آن $\{F_V\}$ نیروهای حجمی، $\{F_\Omega\}$ نیروهای سطحی، $\{F_P\}$ نیروهای نقطه‌ای، l بار الکتریکی وارد بر سطح و Q بار الکتریکی متمرکز می‌باشند. با استفاده از اصول حساب تغییرات و جایگذاری معادلات (۱۹) و (۲۰) در (۱۰)، در نهایت به رابطه زیر می‌توان رسید:

$$-\int_V \left(\rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} - \{\delta S\}^T [c^E] \{S\} + \{\delta S\}^T [e]^T \{E\} + \{\delta E\}^T [e] \{S\} + \{\delta E\}^T [\varepsilon^S] \{E\} + \{\delta u\}^T \{F_V\} \right) dV + \int_{\Omega_1} \{\delta u\}^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u\}^T \{F_P\} - \int_{\Omega_2} \delta\Phi l d\Omega - \delta\Phi Q \quad (21)$$

در بیان المان محدودی مقدار کمیت درجه آزادی در المان بر حسب مقدار درجه آزادی درمناظر گره‌ها و بوسیله توابع شکل درونیابی می‌گردند،

$$\{u\} = [N_u]\{u_i\} \quad (22)$$

$$\Phi = [N_\Phi]\{\Phi_i\} \quad (23)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \gamma} & \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (41)$$

که پس از جایگذاری مقادیر مناسب به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ a & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

دترمینان ماتریس ژاکوبین برابر است با:

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{\pi a L}{2} \quad (43)$$

و بدین ترتیب المان حجم نیز در دستگاه مختصات محلی با استفاده از دترمینان ژاکوبین به صورت زیر قابل بیان است:

$$dv_{local} = |\det(\mathbf{J})|^{-1} \cdot dv_{global} \quad (44)$$

که در آن dv_{global} برابر است با المان حجم در دستگاه مختصات مرجع^۲.

با جایگذاری دترمینان ژاکوبین در معادله فوق و با استفاده از معادله (۴۰)، رابطه ماتریس سختی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$[K_{UU}] = \int_V [B_U]^T [c^E] [B_U] \frac{\pi a L (a\eta + b)}{4} d\xi d\eta d\gamma \quad (45)$$

با توجه به حدود متغیرهای محلی، $-1 \leq \xi, \eta, \gamma \leq 1$ ، برای هر المان چنین حاصل می‌گردد:

$$[K_{UU}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_U]^T [c^E] [B_U] \frac{\pi a L (a\eta + b)}{4} d\xi d\eta d\gamma \quad (46)$$

سایر ماتریس‌ها نیز به همین صورت قابل محاسبه می‌باشند.

۳-۱- شرایط مرزی الکتریکی

۱-۲-۱ شرایط مرزی پتانسیل الکتریکی تحت کنترل

در شرایطی که پتانسیل الکتریکی الکترودها قابل کنترل باشد، معادله المان محدود سیستم به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K_{UU}]\{U\} + [K_{U\Phi}]\{\Phi\} = \{F\} \quad (35)$$

$$[K_{\Phi U}]\{U\} + [K_{\Phi\Phi}]\{\Phi\} = \{G\} \quad (36)$$

با استفاده از معادله (۳۶) برای کل سیستم، می‌توان پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط را چنین بدست آورد:

$$\{\Phi\} = -[K_{\Phi\Phi}]^{-1}[K_{\Phi U}]\{U\} + [K_{\Phi\Phi}]^{-1}\{G\} \quad (37)$$

با جایگذاری این رابطه در معادله (۳۵) برای کل سیستم چنین حاصل می‌گردد:

$$[M]\{\ddot{U}\} + ([K_{UU}] - [K_{U\Phi}][K_{\Phi\Phi}]^{-1}[K_{\Phi U}])\{U\} = \{F\} - [K_{U\Phi}][K_{\Phi\Phi}]^{-1}\{G\} \quad (38)$$

با حل معادله بالا میدان جابجایی سیستم بدست می‌آید. با داشتن میدان جابجایی سیستم و جایگذاری آن در معادله (۳۷) می‌توان پتانسیل الکتریکی تمام نقاط سیستم را نیز بدست آورد.

۱-۱ محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم برای یک سوپر المان استوانه‌ای

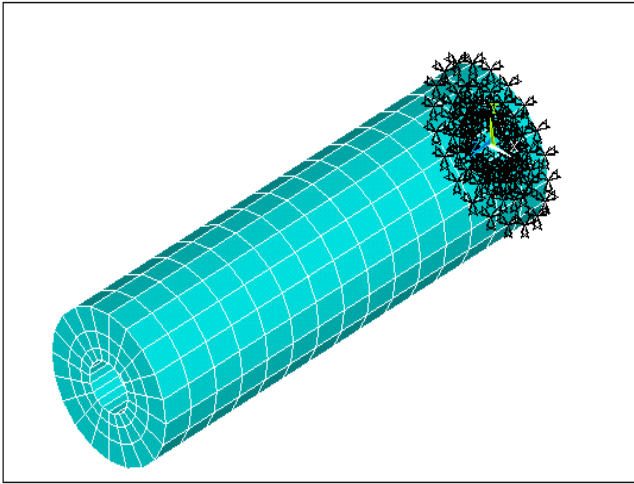
توابع شکل در سوپر المان استوانه‌ای با استفاده از مختصات محلی و دستگاه استوانه‌ای تعریف شده اند، بدین ترتیب برای محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم می‌بایست عبارات بدست آمده در قسمت قبل را نیز در دستگاه استوانه‌ای و بر حسب مختصات محلی بیان نمود. برای مثال برای ترم $[K_{UU}]$ چنین بدست می‌آید:

$$[K_{UU}] = \int_V [B_U]^T [c^E] [B_U] dv \quad (39)$$

انتگرال فوق بر روی حجم المان، V ، محاسبه می‌شود. به منظور بیان انتگرال فوق در دستگاه مختصات محلی، لازم است که المان حجم در این دستگاه بیان گردد:

$$dv = r \cdot d\alpha dr dz \quad (40)$$

ژاکوبین^۱ ماتریس انتقال با استفاده از روابط تبدیل مختصات در معادله (۱) بدست می‌آید:



شکل ۴: پیزوالکتریک استوانه‌ای توخالی یکسرگیر دار مش بندی شده با المان‌های شش وجهی (مثال ۱)

Fig. 4: Clamped piezoelectric hollow cylinder which is meshed with brick elements (Example 1)

جدول ۱: مقایسه مقدار افزایش طول بدست آمده از سوپر المان و انسیس (مثال ۱)

Table 1: The elongation obtained by ANSYS and super-elements (Example 1)

| تفاوت % | تغییر طول (m) | |
|---------|---------------|----------------|
| - | $2/83e-8$ | انسیس |
| ۱۹/۱ | $2/2883e-8$ | یک سوپر المان |
| ۶/۶ | $2/6428e-8$ | سه سوپر المان |
| ۳/۵۵ | $2/7295e-8$ | پنج سوپر المان |
| ۱/۳۱ | $2/7929e-8$ | ۱۰ سوپر المان |

که جهت قطبیده شدن در راستای z یعنی در راستای طول استوانه پیزوالکتریک می‌باشد بنابراین با اعمال میدان الکتریکی در جهت محور پلاریزه، استوانه در راستای همان محور دچار تغییر طول خواهد گشت. در اینجا شرط مرزی زیر جهت اعمال میدان الکتریکی بر سیستم در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi = 100V \rightarrow z = 0 \\ \Phi = 0 \rightarrow z = L \end{aligned} \quad (50)$$

مقدار جابجایی نوک این استوانه با استفاده از روش سوپر المان و انسیس^۲ بدست آمده که نتایج آن در جدول ۱ موجود می‌باشد. لازم به ذکر است که جهت انجام تحلیل کوپلینگ الکترومکانیکی بوسیله

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K_{UU}]\{U\} = \{F\} - [K_{U\Phi}]\{\Phi\} \quad (47)$$

در این شرایط با بدست آمدن میدان جابجایی در تمام سیستم، با استفاده از معادله (۳۶) می‌توان میزان بار الکتریکی که بر روی الکترودها ظاهر می‌گردد را محاسبه نمود. همانطور که ملاحظه می‌شود در این شرایط مرزی، فرکانس‌های طبیعی سیستم، تحت تاثیر اثر کوپلینگ الکترومکانیکی قرار نمی‌گیرند و با حل مسئله مقدار ویژه زیر بدست خواهند آمد:

$$(\ddot{u}K_{UU} - \omega^2 M) U = \quad (48)$$

۱-۲ شرایط مرزی بار الکتریکی تحت کنترل

این شرط مرزی در حالت کلی مرتبط با معادلات (۳۷) و (۳۸) می‌باشد که در قسمت قبل آورده شد. چنانچه الکترودها باز باشند آنگاه بار الکتریکی صفر بوده و معادله (۳۸) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$[M]\{\ddot{U}\} + ([K_{UU}] - [K_{U\Phi}][K_{\Phi\Phi}]^{-1}[K_{\Phi U}])\{U\} = \{F\} \quad (49)$$

در این صورت همانطور که ملاحظه می‌گردد، فرکانس‌های طبیعی سیستم تحت تاثیر کوپلینگ الکترومکانیکی قرار خواهند گرفت و بدلیل آن که درایه‌های ماتریس $[K_{\Phi\Phi}]^{-1}$ منفی می‌باشند، اثر کوپلینگ موجب افزایش سختی سیستم شده و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سیستم بزرگ‌تر از حالتی که کوپلینگ وجود ندارد، خواهند شد.

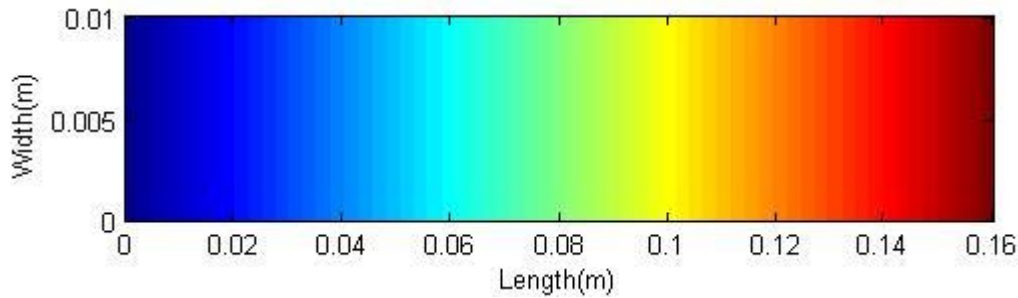
۴- تحلیل استاتیکی و مودال با استفاده از سوپر المان استوانه‌ای پیزوالکتریک

در این قسمت با استفاده از این سوپر المان و در دو مثال جداگانه به بررسی استاتیکی و ارتعاشی یک سازه استوانه‌ای پیزوالکتریک به منظور تخمین دقت سوپر المان پرداخته می‌شود.

۴-۱-۱ تحلیل استاتیکی

مثال ۱:

یک استوانه توخالی پیزوالکتریک با مشخصات $L/r_i = 8$ ، $L/r_o = 10$ ، $h/r_i = 0.5$ و $h/r_o = 0.1$ در نظر گرفته می‌شود که از یک طرف درگیر و از طرف دیگر آزاد می‌باشد (شکل ۱). این سازه از جنس پی‌زدتی-۴^۱ ساخته شده است. با توجه به ماتریس e ، مشخص است



شکل ۵: نمایش توزیع ولتاژ در راستای طولی پیزوالکتریک (مثال ۱)

Fig. 5: The voltage distribution along the axial direction of cylindrical piezoelectric (Example 1)

جدول ۲: مقایسه فرکانس های طبیعی بدست آمده از انسیس و سوپرالمان (مثال ۲ در حالت مدار باز)

Table 2: The natural frequencies obtained by ANSYS and superelements (Example 2, open circuit)

| تفاوت % | مُد پیچشی (Hz) | تفاوت % | مُد طولی (Hz) | تفاوت % | مُد خمشی دوم (Hz) | تفاوت % | مُد خمشی اول (Hz) | |
|---------|----------------|---------|---------------|---------|-------------------|---------|-------------------|--------------|
| - | ۲۴۱۴/۲ | - | ۵۲۶۰/۴ | - | ۳۳۸۱/۴ | - | ۶۸۲/۲۷ | انسیس |
| ۴/۵۵ | ۲۵۲۳/۹ | ۲/۴۹ | ۵۱۲۹/۳ | ۹/۵۸ | ۳۷۰۵/۴ | ۴/۱۹ | ۷۱۰/۸۶ | ۱۰ سوپرالمان |
| ۴/۴۷ | ۲۵۲۲/۱ | ۲/۷۷ | ۵۱۱۴/۶ | ۷/۱۹ | ۳۶۲۴/۷ | ۲/۵۶ | ۶۹۹/۷۳ | ۱۵ سوپرالمان |
| ۴/۴۴ | ۲۵۲۱/۵ | ۲/۶۷ | ۵۱۱۹/۷ | ۶/۵۱ | ۳۶۰۱/۶ | ۲/۰۶ | ۶۹۶/۳ | ۲۰ سوپرالمان |

و اتصال کوتاه، محاسبه خواهند شد.

مثال ۲:

یک استوانه پیزوالکتریک با مشخصات $L/r_i = 20$ ، $h/r_i = 2$ و $h = 0.02m$ به صورتی که از یک طرف گیردار و از طرف دیگر آزاد می باشد، در نظر گرفته می شود. این استوانه مانند مثال قبل از پی زد، تی-۴ ساخته شده است. جهت بررسی مودال سازه های استوانه ای پیزوالکتریک، دو نوع شرط مرزی الکتریکی موجود می باشد: مدار باز و اتصال کوتاه. در اینجا هدف یافتن فرکانس طبیعی مربوط به اولین و دومین مود خمشی، اولین مود کششی و اولین مود پیچشی می باشد. در جدول ۲ نتایج مربوط به تحلیل با استفاده از سوپرالمان و همچنین انسیس برای شرایط مرزی مدار باز آورده شده است.

همچنین با اعمال شرط مرزی الکتریکی اتصال کوتاه، فرکانس های طبیعی مربوط به سیستم به غیر از فرکانس های مربوط به مود پیچشی تغییر خواهند نمود که در جدول ۳ نشان داده شده اند. همانطور که انتظار می رفت فرکانس های طبیعی با شرایط مرزی اتصال کوتاه بیشتر از فرکانس های طبیعی متناظر با شرایط مرزی مدار باز می باشند. در

نرم افزار انسیس، در تمام قسمت های این پروژه از المان سالیید 5^1 استفاده شده است.

در جدول ۱، ستون آخر بیانگر تفاوت نتایج بدست آمده با سوپرالمان استوانه ای نسبت به نتایج گرفته شده از نرم افزار انسیس می باشد. همچنین نمودار شماتیک توزیع ولتاژ در طول استوانه نیز در شکل ۵ نمایش داده شده است. همانطور که ملاحظه می گردد ولتاژ به صورت خطی از مقدار مرزی سمت راست (۱۰۰ ولت) تا مقدار مرزی سمت چپ (صفر ولت) تغییر می نماید.

۲-۱-۴ تحلیل ارتعاشی

در این قسمت هدف یافتن فرکانس های طبیعی یک سازه استوانه ای پیزوالکتریک می باشد. بنابراین مانند گذشته میزان قابلیت سوپرالمان استوانه ای در نیل به این مهم با استفاده از یک مثال نشان داده می شود. در مثالی که در ادامه خواهد آمد، فرکانس های طبیعی استوانه پیزوالکتریک برای دو شرط مرزی الکتریکی متفاوت، مدار باز

جدول ۳: مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از انسیس و سوپرالمان (مثال ۲ در حالت اتصال کوتاه)

Table 3: The natural frequencies obtained by ANSYS and superelements (Example 2, short circuit)

| تفاوت % | مودپیچ شی (Hz) | تفاوت % | مود طولی (Hz) | تفاوت % | مود خمشی دوم (Hz) | تفاوت % | مود خمشی اول (Hz) | |
|---------|----------------|---------|---------------|---------|-------------------|---------|-------------------|--------------|
| - | ۲۴۱۴/۲ | - | ۳۸۹۵/۶ | - | ۳۱۵۸/۵ | - | ۶۳۰/۷۹ | انسیس |
| ۴/۵۵ | ۲۵۲۳/۹ | ۳/۷۸ | ۳۷۴۸/۲ | ۴/۱۳ | ۳۲۸۸/۹ | ۴/۵۴ | ۶۵۹/۴۵ | ۱۰ سوپرالمان |
| ۴/۴۷ | ۲۵۲۲/۱ | ۴/۳ | ۳۷۲۷/۸ | ۱/۵۱ | ۳۲۰۶/۲ | ۲/۳۴ | ۶۴۵/۵۵ | ۱۵ سوپرالمان |
| ۴/۴۴ | ۲۵۲۱/۵ | ۴/۵۲ | ۳۷۱۹/۴ | ۰/۵۵ | ۳۱۷۵/۸ | ۱/۴۹ | ۶۴۰/۱۸ | ۲۰ سوپرالمان |

همچنین توان k نشان دهنده شدت تغییر کمیت از شعاع درونی به بیرونی می‌باشد. در اینجا نیز مانند آنچه که در بخش قبل انجام گرفت، با استفاده از دو مثال به بررسی استاتیکی و ارتعاشی یک استوانه پیزوالکتریک هدفمند پرداخته می‌شود.

۱-۱-۵ تحلیل استاتیکی

مثال ۳:

سازه‌ای استوانه‌ای شکل با مشخصات هندسی $L/r_i = 8$ ، $h/r_i = 0.5$ و $h = 0.1m$ در شعاع درونی از ماده $Ba_2NaNb_5O_{15}$ ، در شعاع خارجی از پی‌زدتی-۴ تشکیل شده است. خواص ماده از شعاع درونی به بیرونی به صورت تابع ذکر شده در رابطه (۴۵) و با توان ۳ از مقادیر مربوط به $Ba_2NaNb_5O_{15}$ تا

جدول ۴: مقایسه مقدار افزایش طول بدست آمده از سوپرالمان و انسیس (مثال ۳)

Table 4: The elongation obtained by ANSYS and super-elements (Example 3)

| تفاوت % | تغییر طول (m) | |
|---------|---------------|--------------|
| - | $7.92e-9$ | انسیس |
| ۸/۹۵ | $7.211e-9$ | ۳ سوپرالمان |
| ۷/۶۱ | $7.317e-9$ | ۵ سوپرالمان |
| ۵/۸ | $7.46e-9$ | ۱۰ سوپرالمان |
| ۴/۳۲ | $7.578e-9$ | ۲۰ سوپرالمان |

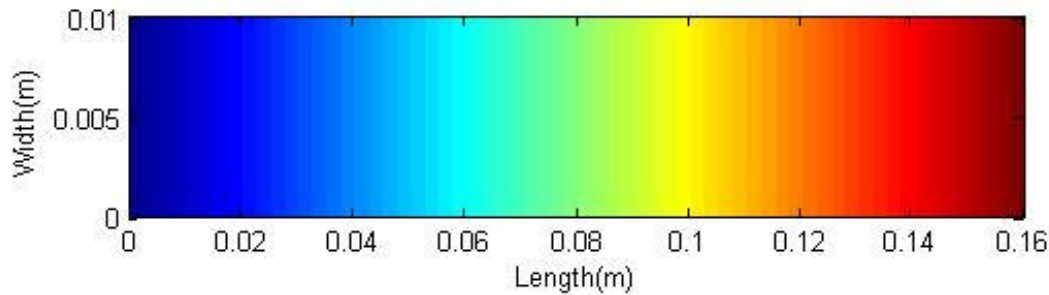
حقیقت به دلیل این که جهت قطبیده شدن استوانه پیزوالکتریک در راستای محور z می‌باشد، در حالت مدار باز سختی خمشی و طولی استوانه بیشتر از حالت اتصال کوتاه می‌گردد. اما همانطور که از نتایج جداول ۲ و ۳ مشخص است، فرکانس طبیعی متناظر با مود پیچشی در هر دو شرایط مرزی مقدار یکسانی را اختیار می‌نماید، که با توجه به جهت قطبیدگی استوانه پیزوالکتریک این پدیده قابل توجیه می‌باشد.

۵- سوپرالمان استوانه‌ای اف.جی.پی.ام^۱

در این قسمت سوپرالمان استوانه‌ای به منظور تحلیل سازه‌های پیزوالکتریک استوانه‌ای که در راستای شعاعی هدفمند (اف.جی.پی.ام) می‌باشند، استفاده می‌گردد. در این گونه مواد، علاوه بر خصوصیات مکانیکی، خصوصیات الکتریکی نیز تابعی از مکان خواهند بود. در اینجا فرض بر این است که استوانه در راستای شعاعی و از شعاع درونی تا بیرونی دارای خواص متغیر است. تابع توزیع خواص را می‌توان به هر فرم دلخواه تعریف نمود که در اینجا از فرم مستقل از دما [۲۲] استفاده می‌شود:

$$\Psi = \left(1 - \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)^k \right) \Psi_1 + \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)^k \Psi_2 \quad (51)$$

که در آن Ψ_1 و Ψ_2 کمیت مربوط به خاصیت الکتریکی یا مکانیکی ماده در شعاع درونی و بیرونی استوانه توخالی می‌باشد.



شکل ۶: نمایش توزیع ولتاژ در راستای طولی پیزوالکتریک اف.جی.پی.ام (مثال ۳)

Fig. 6: The voltage distribution along the axial direction of cylindrical piezoelectric (Example 3)

۲-۱-۵ تحلیل ارتعاشی

مثال ۴:

یک استوانه اف.جی.پی.ام با مشخصات هندسی $L/r_i = 20$ ، $h/r_i = 2$ و $h = 0.02m$ در نظر گرفته می‌شود. این استوانه مانند آنچه که در مثال گذشته ذکر گردید از دو ماده $Ba_2NaNb_5O_{15}$ و پی.زد.تی-۴ و با توان توزیع ۳ ساخته شده است. این استوانه یک سر درگیر می‌باشد. ابتدا با در نظر گرفتن شرط مرزی مدار باز فرکانس‌های طبیعی سیستم با استفاده از سوپرالمان و نرم افزار انسیس استخراج گشته است (جدول ۵). نتایج مربوط به شرط مرزی اتصال کوتاه نیز در جدول ۶ آورده شده است.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، سوپرالمان استوانه‌ای برای تحلیل استاتیکی و ارتعاشی سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک به

پی.زد.تی-۴ تغییر می‌کند. با در نظر گرفتن شرط مرزی یک سر درگیر و با اعمال شرایط الکتریکی ذکر شده در رابطه (۴۴)، مقدار جابجایی نوک استوانه با استفاده از سوپرالمان و نرم افزار انسیس بدست می‌آید (جدول ۴). لازم به ذکر اینکه، در نرم افزار انسیس سازه اف.جی.پی.ام به صورت تعدادی لایه با خواص ثابت و متفاوت از یکدیگر به گونه‌ای که منطبق بر فرمول توزیع باشد، در نظر گرفته شده است. در اینجا برای بدست آوردن نتایج تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشی در نرم افزار انسیس استوانه اف.جی.پی.ام متشکل از ۱۰ لایه در نظر گرفته شده است.

مانند آنچه که برای استوانه پیزوالکتریک ساده نشان داده شد، در اینجا نیز نمودار شماتیک توزیع ولتاژ در طول استوانه در شکل ۶ نمایش داده شده است. ملاحظه می‌گردد که همانند استوانه پیزوالکتریک تک‌ماده، ولتاژ به صورت خطی از مقدار مرزی سمت راست (۱۰۰ ولت) تا مقدار مرزی سمت چپ (۰ ولت) تغییر می‌نماید.

جدول ۵: مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از انسیس و سوپرالمان (مثال ۴ در حالت مدار باز)

Table 5: The natural frequencies obtained by ANSYS and superelements (Example 4, open circuit)

| تفاوت % | مود پیچشی (Hz) | تفاوت % | مود طولی (Hz) | تفاوت % | مود خمشی دوم (Hz) | تفاوت % | مود خمشی اول (Hz) | |
|---------|----------------|---------|---------------|---------|-------------------|---------|-------------------|--------------|
| - | ۳۵۷۰/۴ | - | ۶۱۹۲/۲ | - | ۴۵۷۶/۷ | - | ۹۰۲/۱۱ | انسیس |
| ۳/۵۷ | ۳۶۹۸/۱ | ۱/۴۲ | ۶۱۰۴/۱ | ۸/۳۲ | ۴۹۵۷/۶ | ۴/۷۴ | ۹۴۴/۹۱ | سوپرالمان ۱۰ |
| ۳/۵ | ۳۶۹۵/۴ | ۱/۵۵ | ۶۰۹۶/۴ | ۴/۵۶ | ۴۷۸۵/۵ | ۳/۲۴ | ۹۳۱/۳۴ | سوپرالمان ۱۵ |
| ۳/۴۸ | ۳۶۹۴/۶ | ۱/۶۲ | ۶۰۹۱/۸ | ۳/۶۴ | ۴۷۴۳/۵ | ۲/۴۸ | ۹۲۴/۴۷ | سوپرالمان ۲۰ |

جدول ۶: مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از انسیس و سوپرالمان (مثال ۴ در حالت اتصال کوتاه)

Table 6: The natural frequencies obtained by ANSYS and superelements (Example 4, short circuit)

| تفاوت % | مود پیچشی (Hz) | تفاوت % | مود طولی (Hz) | تفاوت % | مود خمشی دوم (Hz) | تفاوت % | مود خمشی اول (Hz) | |
|---------|----------------|---------|---------------|---------|-------------------|---------|-------------------|--------------|
| - | ۳۵۷۰/۴ | - | ۵۳۸۹/۹ | - | ۴۴۴۶/۰ | - | ۸۶۰/۴۰ | انسیس |
| ۳/۵۷ | ۳۶۹۸/۱ | ۱/۸۶ | ۵۳۸۹/۷ | ۶/۰۷ | ۴۷۱۶/۲ | ۶/۰۶ | ۹۱۲/۵۷ | سوپرالمان ۱۰ |
| ۳/۵ | ۳۶۹۵/۴ | ۲/۰۸ | ۵۳۷۷/۸ | ۳/۱۳ | ۴۵۸۵/۱ | ۳/۷۷ | ۸۹۲/۸۸ | سوپرالمان ۱۵ |
| ۳/۴۸ | ۳۶۹۴/۶ | ۲/۱۷ | ۵۳۷۳/۱ | ۲/۰۷ | ۴۵۳۸/۲ | ۲/۹۳ | ۸۸۵/۶۵ | سوپرالمان ۲۰ |

use of numerically efficient finite element models, *Advances in Mechanical Engineering*, 7(11) (2015) 1687814015618628.

- [4] Y. He, X. Zhou, P. Hou, Combined method of super element and substructure for analysis of ILTDBS reticulated mega-structure with single-layer latticed shell substructures, *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(7) (2010) 563-570.
- [5] F. Ju, Y.S. Choo, Super element approach to cable passing through multiple pulleys, *International Journal of Solids and Structures*, 42(11) (2005) 3533-3547.
- [6] W. Kuntjoro, A.M.H.A. Jalil, J. Mahmud, Wing Structure Static Analysis using Superelement, *Procedia Engineering*, 41 (2012) 1600-1606.
- [7] C. Lu, W. Yang, H. Zheng, J. Liang, G. Fu, The Application of Superelement Modeling Method in Vehicle Body Dynamics Simulation, in, *SAE International*, 2016.
- [8] P. Persson, K. Persson, G. Sandberg, Reduced order modelling of liquid-filled pipe systems, *Journal of Fluids and Structures*, 61 (2016) 205-217.
- [9] S. Semenov, M. Nikhamkin, N. Sazhenkov, I. Semenova, G. Mekhonoshin, Simulation of Rotor System Vibrations Using Experimentally Verified Super Elements, (50633) (2016) V009T012A016.
- [10] D.R. Tahirramani, J. Hitchins, Application of Model

کارگرفته شد. این سوپرالمان دارای ۱۶ نود بوده و هر نود دارای ۴ درجه آزادی که در مجموع این المان دارای ۶۴ درجه آزادی می‌گردد. این سوپرالمان پیش از این در تحلیل‌های مکانیکی و ترمومکانیکی مورد استفاده قرار گرفته بود و در این تحقیق جهت تحلیل مسائل کوپل الکترومکانیکی تعمیم داده شد. در نهایت نتایج بدست آمده برای دو مثال استاتیکی و ارتعاشی با استفاده از سوپرالمان‌های استوانه‌ای با آنچه از نرم افزار انسیس حاصل گردید مقایسه شد. در ادامه، این سوپرالمان جهت تحلیل یک سازه استوانه‌ای پیزوالکتریک که در راستای شعاعی هدفمند طراحی شده بود مورد استفاده قرار گرفت و با خروجی نرم‌افزار انسیس مقایسه گردید. با مقایسه نتایج چنین به نظر می‌رسد که سوپرالمان استوانه‌ای با دقت مناسبی قابلیت تحلیل سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک را دارد. به خصوص زمانی که سازه از مواد هدفمند ساخته شده باشد و با توجه به نیاز به گسسته‌سازی تابع پیوسته تغییر خواص در المان‌های کلاسیک، سوپرالمان استوانه‌ای کارا تر به نظر می‌رسد.

مراجع

- [1] S. Finnveden, Exact spectral finite element analysis of stationary vibrations in a rail way car structure, *Acta Acustica*, 2 (1994) 461-482.
- [2] E.C. Pestel, *Matrix methods in elastodynamics*, McGraw-Hill, 1963.
- [3] P. Danielczyk, Parametric optimization with the

- [17] M.T. Ahmadian, M. Bonakdar, A new cylindrical element formulation and its application to structural analysis of laminated hollow cylinders, *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(9) (2008) 617-630.
- [18] A. Taghvaeipour, M. Bonakdar, M.T. Ahmadian, Application of a new cylindrical element formulation in finite element structural analysis of FGM hollow cylinders, *Finite Elements in Analysis and Design*, 50 (2012) 1-7.
- [19] R. Pourhamid, M.T. Ahmadian, H. Mahdavy Moghaddam, A.R. Mohammadzadeh, Mechanical analysis of a functionally graded cylinder-piston under internal pressure due to a combustion engine using a cylindrical super element and considering thermal loading, *Scientia Iranica*, 22(2) (2015) 493-503.
- [20] A. Fatan, M.T. Ahmadian, Vibration analysis of FGM rings using a newly designed cylindrical superelement, *Scientia Iranica* 25 (2017).
- [21] V. Piefort, Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures, PhD Thesis, Universite Libre de Bruxelles 2001.
- [22] W.Q. Chen, Z.G. Bian, H.J. Ding, Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(1) (2004) 159-171.
- Reduction Techniques Within Cummins Inc, (46179) (2014) V002T007A012.
- [11] V.V. Tkachev, The use of superelement approach for the mathematical simulation of reactor structure dynamic behaviour, *Nuclear Engineering and Design*, 196(1) (2000) 101-104.
- [12] T.S. Koko, Super finite elements for nonlinear static and dynamic analysis of stiffened plate structures, National Library of Canada = Biblioth-que nationale du Canada, Ottawa, 1991.
- [13] T.S. Koko, M.D. Olson, Vibration analysis of stiffened plates by super elements, *Journal of Sound and Vibration*, 158(1) (1992) 149-167.
- [14] M.T. Ahmadian, M. Sherafati Zangeneh, Vibration analysis of orthotropic rectangular plates using superelements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(19) (2002) 2097-2103.
- [15] M.T. Ahmadian, M. Zangeneh, Application of super elements to free vibration analysis of laminated stiffened plates, *Journal of Sound and Vibration* 259 (2003) 1243-1252.
- [16] J. Jiang, M.D. Olson, Vibration Analysis of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells Using Super Finite Elements, *Journal of Sound and Vibration*, 173(1) (1994) 73-83.