Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(1) (2020) 35-38
DOI: 10.22060/mej.2018.14340.5837

Natural Frequency Analysis of Rotating Thin-Walled Beams with Embedded Shape Memory Alloy Wires Subjected to Uniform Temperature Field

M. Hosseini*, K. Majidi-Mozafari, F. Mohammadi

Engineering Department, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

ABSTRACT: In this paper, ¬free vibration analysis of the rotating thin-walled composite beams with embedded shape memory alloy wires is represented. Pre-strained shape memory alloy wires are embedded in the middle of the cross section of thin-wall composite beam, symmetrically. The one-dimensional thermo-mechanical constitutive law suggested by Liang-Rogers is applied to model the thermomechanical behavior of shape memory alloy wires. The differential governing equations are extracted by using the extended Hamilton's principle based on first-order shear deformation theory. By heating the thin-walled beam, strain recovery operation will produce a tensile force along the longitudinal thin-walled beam. In order to solve the governing equations, the extended Galerkin method is used. The effect of rotational speed, recoverable strain limit, pre-twist angle, number of shape memory alloy wire and temperature difference on the natural frequency in temperature above the austenite finish are illustrated. It is found that the natural frequencies of rotating thin-walled beam increase as the number of shape memory alloy wires and compressive pre-strained shape memory alloy wires increases. In addition, results are in good agreement with those obtained in the literature.

Review History:

Received: 18 Apr. 2018
Revised: 9 Aug. 2018
Accepted: 10 Nov. 2018
Available Online: 26 Nov. 2018

Keywords:

Free vibration analysis
Shape memory alloy
Rotating thin-walled beams
Martensite fraction

1- Introduction

Shape Memory Alloys (SMAs) are a class of metallic alloys that can return to initial configuration in response to stress and/or temperature changing. These SMA are comprised of two crystallography phases, namely, austenite (high-temperature phase) and martensite (low-temperature phase). In the composite structures, SMA wires can be embedded into the matrix such as carbon fibers. When an SMA wire is heated, the martensite phase transformed to austenite phase. Therefore, by heating up and changing phase to austenite a compression in the SMA wires are introduced and natural frequencies are changed. Lau [1] presented both theoretical and experimental vibration behavior of SMA composite beam with different boundary conditions. In another study, Lau et al. [2] are evaluated natural frequency of an SMA composite beam with clamped boundary condition as a theoretical and experimental. Barzegari et al. [3] investigated the natural frequency of an SMA composite beam with different boundary condition based on the three various models as Euler-Bernoulli, Timoshenko and third order beam theory.

In the last years, the theory of rotating blades modeled as thin-walled composite beams with arbitrary closed cross-sections frequently used by researchers [4-7]. For instance, Fazelzadeh and Hosseini [5] studied the vibration characteristics of rotating Functionally Graded Materials (FGM) thin-walled beam under high temperature gas flow. Librescu et al. [6] investigated the behavior of rotating thin-walled beam which made of FGM subjected to temperature environment.

To the best of author's knowledge, no investigation has been done on the vibration characteristics of rotating thin-walled composite beam with embedded SMA wires. The goal of this paper is to present the natural frequency analysis of rotating thin-walled SMA composite beam. The dynamic equations are obtained using extended Hamilton principle based on the first order shear deformation theory. It is assumed the SMA wires are embedded in the thin-walled beam with compressive pre-strained load. The result elucidated that by increasing numbers of SMA wires and angular velocity, the first three natural frequencies increase.

2- Thermo-Mechanical Behavior of SMA Material

The axial force introduced in the longitudinal direction of SMA wires due to temperature field is expressed as [3]:

$$P_z = \frac{\left[\alpha_c E(\xi) + \Theta\right](T - T_0) + \psi(\xi)(\xi - \xi_0)}{1 - \dfrac{E(\xi)A_{SMA}}{E_C A_C}} A_{SMA} \tag{1}$$

where α_c, E_c, A_c are coefficient of thermal expansion, Young's moduli and the cross-sectional area composite beam without SMA wires of matrix respectively. Θ and A_{SMA} are coefficient of thermal expansion and the cross-sectional areas of the embedded SMA wires, respectively. T, T_0 are the temperature field and reference temperature fixed at 20^oC. ξ, ψ indicate martensite fraction of SMA wires and phase transformation tensor, respectively.

*Corresponding author's email: nozar@ssau.ac.ir

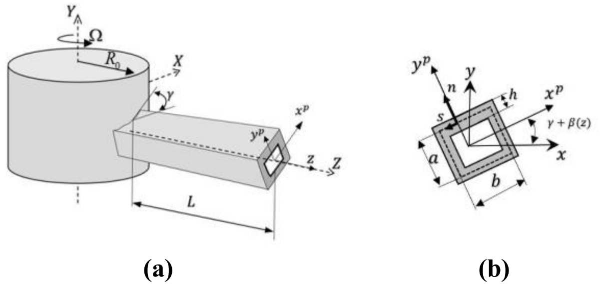


Fig. 1. (a) The schematic of rotating thin-walled beam, (b) Cross section of thin-walled beam

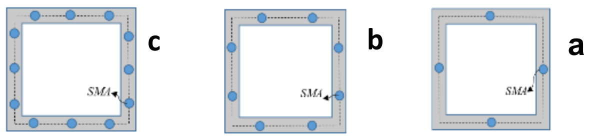


Fig. 2. Alignment of SMA wire (a) 4 numbers of SMA, (b) 8 numbers of SMA, (c) 12 numbers of SMA

3- Governing Equations of Motion

Fig. 1 indicated a straight and pre-twisted flexible thin-walled rotating beam of length L , mounted on a rigid hub of radius R_0 at the presetting angle γ. It is assumed that the thin-walled beam rotate at a constant angular velocity Ω about Y axis.

Three different alignments of SMA wire embedded in the thin-walled beam are shown in Fig. 2. The equations of motion and associated boundary conditions of rotating thin-walled beam can be obtained through the use of extended Hamilton's principle as follows [6].

Governing equations:

$$\begin{aligned}\delta u_0 :& \left[a_{44}(z)(u_0' + \theta_y) + a_{45}(z)(v_0' + \theta_x)\right]' \\ &- b_1\ddot{u}_0 + b_1\Omega^2 u_0 + \Omega^2\left[R(z)u_0'\right]' - \left[P_z u_0'\right]' = 0\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}\delta v_0 :& \left[a_{55}(z)(v_0' + \theta_x) + a_{54}(z)(u_0' + \theta_y)\right]' \\ &- b_1\ddot{v}_0 + \Omega^2\left[R(z)v_0'\right]' - \left[P_z v_0'\right]' = 0\end{aligned} \tag{2b}$$

$$\begin{aligned}\delta\theta_x :& \left[a_{33}(z)\theta_x' + a_{32}(z)\theta_y'\right]' - a_{55}(z)(v_0' + \theta_x) \\ &- a_{54}(z)(u_0' + \theta_y) - (b_4(z) + b_{14}(z))(\ddot{\theta}_x - \Omega^2\theta_x) \\ &- (b_6(z) - b_{13}(z))(\ddot{\theta}_y - \Omega^2\theta_y) = (M_x^T)'\end{aligned} \tag{2c}$$

$$\begin{aligned}\delta\theta_y :& \left[a_{22}(z)\theta_y' + a_{23}(z)\theta_x'\right]' - a_{44}(z)(u_0' + \theta_y) \\ &- a_{45}(z)(v_0' + \theta_x) - (b_5(z) + b_{15}(z))(\ddot{\theta}_y - \Omega^2\theta_y) \\ &- (b_6(z) - b_{13}(z))(\ddot{\theta}_x - \Omega^2\theta_x) = (M_y^T)'\end{aligned} \tag{2d}$$

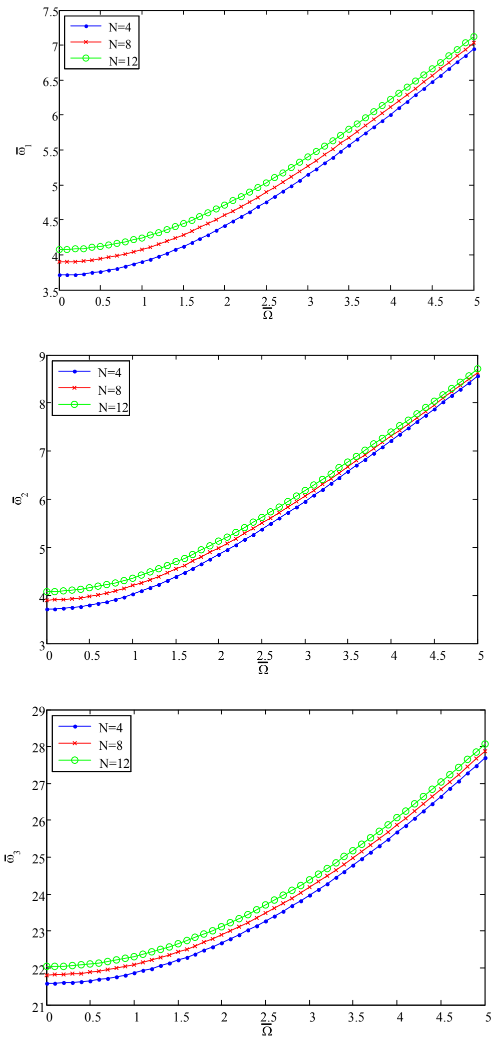


Fig. 3. variation of first three natural frequencies as a function of angular velocity for three different numbers of SMA wire embedded in the thin-walled blade

Boundary conditions:

At $z = 0$,

$$u_0 = v_0 = \theta_x = \theta_y = 0 \tag{3a}$$

At $z = L$,

$$\begin{aligned}&\delta u_0 : a_{44}(z)(u_0' + \theta_y) + a_{45}(z)(v_0' + \theta_x) = P_z u_0', \\ &\delta v_0 : a_{55}(z)(v_0' + \theta_x) + a_{54}(z)(u_0' + \theta_y) = P_z v_0', \\ &\delta\theta_y : a_{22}(z)\theta_y' + a_{23}(z)\theta_x' = M_y^T, \\ &\delta\theta_y : a_{33}(z)\theta_x' + a_{32}(z)\theta_y' = M_x^T\end{aligned} \tag{3b}$$

4- Method of Solution

In order to solve the coupled partial differential equations (Eq. (2)), extended Galerkin's method is applied. In this method, we express the displacement fields as a product of weight function and generalized coordinates as follows [5]:

$$u_0(z,t)=U^T q_u \; , v_0(z,t)=V^T q_v$$
$$\theta_x(z,t)=\Theta_x^T q_x \, , \, \theta_y(z,t)=\Theta_y^T q_y \tag{4}$$

where $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, Θ_x and Θ_y are the weight functions that satisfied the boundary conditions, and $\boldsymbol{q_u}$, $\boldsymbol{q_v}$, $\boldsymbol{q_x}$ and $\boldsymbol{q_y}$ are time dependent vector of generalized coordinates. By substituting displacement fields (Eq. (4)) into governing equations, the matrix form of equations are achieved as

$$[M]\{\ddot{q}(\mathrm{t})\}+[K]\{q(\mathrm{t})\}=0 \tag{5}$$

where M and K are the mass and stiffness matrix, respectively. Also, $q(\mathrm{t})$ is the generalized coordinate system. The natural frequency of dynamic rotating thin-walled beam system are obtained by substituting the generalized coordinates as $q(t)=\eta e^{\omega t}$ in Eq. (5). So we have,

$$\omega^2=-[M]^{-1}[K] \tag{6}$$

5- Result and Discussion

In the present paper, the vibration characteristics of rotating thin-walled beam with embedded SMA wires are analyzed. For example, Fig. 3. Shows the influence of number of SMA wires on the first three natural frequencies of rotating thin-walled composite SMA beam as a function of rotating speed Ω . In this figure we take $\varepsilon_L=6.7\%$, $T=70^o\mathrm{C}$, $\gamma=0$ and $\beta_0=45^o$.

The results show that by increasing the number of SMA wires (N) the first three natural frequencies increase. This is to be expected, because the increase of number of SMA wires yields an increase tensile force due to strain recovery action of the pre-strained SMA wires in the longitudinal directions. Also, it can be observed that the first three natural frequencies increase with the increase of rotating speed.

6- Conclusions

The natural frequency analysis of rotating thin-walled beams with embedded shape memory alloy wires under uniform temperature field have been investigated based on the first order shear deformation theory and using extended Galerkin's technique. The dynamic equations are obtained using extended Hamilton principle. It is supposed the SMA wires embedded in the thin-walled beam with compressive pre-strained load. Here, the effect of number of SMA wires and rotating velocity are presented. The result reveal that by increasing numbers of SMA wires and angular velocity, the first three natural frequencies increase.

References

[1]K.-t. Lau, Vibration characteristics of SMA composite beams with different boundary conditions, Materials & design, 23(8) (2002) 741-749.

[2]K.-t. Lau, L.-m. Zhou, X.-m. Tao, Control of natural frequencies of a clamped–clamped composite beam with embedded shape memory alloy wires, Composite Structures, 58(1) (2002) 39-47.

[3]M. Barzegari, M. Dardel, A. Fathi, Vibration analysis of a beam with embedded shape memory alloy wires, Acta Mechanica Solida Sinica, 26(5) (2013) 536-550.

[4]S. Fazelzadeh, P. Malekzadeh, P. Zahedinejad, M. Hosseini, Vibration analysis of functionally graded thin-walled rotating blades under high temperature supersonic flow using the differential quadrature method, Journal of sound and vibration, 306(1-2) (2007) 333-348.

[5]S.A. Fazelzadeh, M. Hosseini, Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials, Journal of fluids and structures, 23(8) (2007) 1251-1264.

[6]L. Librescu, S.-Y. Oh, O. Song, Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability, Journal of Thermal Stresses, 28(6-7) (2005) 649-712.

[7]O. Song, L. Librescu, Structural Modeling and Free Vibration Analysis of Rotating Composite Thin-Walled Beams, Journal of the American Helicopter Society, 42(4) (1997) 358-369.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۲۷ تا ۱۴۰
DOI: 10.22060/mej.2018.14340.5837

تحلیل فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی چرخان جدار نازک تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار تحت میدان حرارتی یکنواخت

محمد حسینی*، کاظم مجیدی مظفری، فرود محمدی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران.

خلاصه: در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد تیرکامپوزیتی چرخان جدار نازک تقویت شده با الیاف حافظه‌دار ارائه شده است. الیاف‌های حافظه‌دار با پیش‌کرنش فشاری در لایه میانی جداره تیر جدار نازک در راستای طولی قرارگرفته‌اند. مدل‌سازی ترمومکانیکی الیاف حافظه‌دار، از طریق معادلات بنیادین ارائه‌شده توسط لیانگ-راجرز انجام شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر چرخان جدار نازک با استفاده از اصل همیلتون توسعه یافته و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول استخراج شده‌است. تیر جدار نازک تحت میدان حرارتی یکنواخت قرار دارد. با اعمال حرارت به تیر کامپوزیتی جدارنازک، عملیات بازیابی کرنش در راستای طول الیاف به وجود می‌آید، که منجر به ایجاد نیروی کششی در طول تیر چرخان جدار نازک می‌شود. در نهایت معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر کامپوزیتی چرخان جدار نازک با استفاده از روش گالرکین توسعه‌یافته حل شده‌اند و تاثیر سرعت چرخش، حد کرنش قابل بازیابی، تعداد الیاف، اختلاف دمای الیاف و زاویه پیش‌تاب تیر جدار نازک بر روی فرکانس طبیعی، در دمای بالاتر از دمای پایان آستنیت تعیین و ارائه شده است. به‌منظور اعتبارسنجی مدل حاضر، نتایج این پژوهش با استفاده از مراجع موجود مقایسه شده که تطابق بسیار خوبی بین نتایج مشاهده شده است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۲۹
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۵/۱۸
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۱۹
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۹/۰۵

کلمات کلیدی:
ارتعاشات آزاد
آلیاژ حافظه‌دار
تیر چرخان جدارنازک
کسر مارتنزیت

۱- مقدمه

آلیاژهای حافظه‌دار دسته‌ای از آلیاژهای فلزی می‌باشند که در اثر تغییر فاز ناشی از دما یا میدان مغناطیسی می‌توانند به شکل و اندازه اصلی خود بازگردند. این آلیاژها دارای دو فازکریستالوگرافی دما-بالا به نام فاز آستنیت[1] و دما-پایین به نام فاز مارتنزیت[2] می‌باشند. در دمای بالا فاز آستنیت، فازی متقارن و با انرژی بالا می‌باشد، در حالی که در دمای پایین فاز مارتنزیت، فازی نامتقارن با انرژی پایین است. بنابراین، هرگاه در دمای پایین آلیاژهای حافظه‌دار در فاز مارتنزیتی خود دچار تغییر فرم مکانیکی گردند، با افزایش دما شکل اولیه خود را باز می‌یابند. نیرویی که عامل این تغییرات است همان ساختار کریستالی و تبدیل مارتنزیتی می‌باشد. این تغییر فاز منجر به بروز اثر حافظه‌داری[3] و اثر شبه الاستیسیته[4] می‌شود [۱]. سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار می‌توانند به صورت عملگر کرنشی درحالت با یا بدون پیش-کرنش[5] درون سازه کامپوزیتی قرارگیرند. اعمال حرارت به این آلیاژها، منجر به ایجاد نیرو وگشتاور شده و درنتیجه شکل و سفتی سازه را کنترل می‌نمایند [۲ و ۳]؛ یعنی به طور کلی با ایجاد گرما فاز مارتنزیت به فاز آستنیت، نسبت استهلاک تغییر می‌کند، به این دلیل می توان ارتعاشات سازه را با کاهش یا افزایش دمای سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار کنترل کرد [۴ و ۵].

اهمیت مواد حافظه‌دار توسط بوهلر و ونگ [۶ و ۷] در سال۱۹۶۲ با بررسی اثر حافظه‌داری آلیاژ نیکل-تیتانیوم (Ni-Ti)، که به نایتینول[6] مشهور است، نشان داده شد. در دو دهه‌ی گذشته، مدل‌های ریاضی بنیادی بسیاری به منظور پیش‌بینی ویژگی‌های آلیاژ حافظه‌دار تحت بارگذاری‌های ترمومکانیکی ارائه شده است. یکی از اولین مدل‌های یک بعدی برای آلیاژهای حافظه‌دار توسط تاناکا [۸] در سال ۱۹۸۶ ارائه شد. او با درنظرگرفتن توابع نمایی به توصیف تغییر فاز بین دو فاز مارتنزیت جهت‌یافته و آستنیت پرداخت. مدل کامل‌تری نسبت به مدل قبل توسط لیانگ-راجرز [۹] در سال ۱۹۹۰ پیشنهاد

1 Austenite Phase
2 Martensite Phase
3 Shape Memory Effect (SME)
4 Pseudo-elasticity Effect (PE)
5 Pre-strain
6 NiTinol

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hosseini@sirjantech.ac.ir

شد که در این مدل، تغییر فاز براساس توابع کسینوسی پیش‌بینی گردید. با توجه به نقص دو مدل قبلی در شبیه‌سازی فرآیند جهت‌گیری مارتنزیت، برینسون [۱۰] در سال ۱۹۹۳ با تقسیم کردن کسرحجمی مارتنزیت به کسر مارتنزیتی متاثر از دما و متاثر از تنش، توانست با ارائه مدل کامل‌تری این نقص را برطرف سازد.

در سال‌های اخیر، پژوهش‌های گسترده‌ای روی مواد هوشمند نظیر آلیاژهای حافظه‌دار که گستره‌ی بسیار وسیعی از صنایع را دربرگرفته‌اند، انجام شده است. لا [۱۱] درسال۲۰۰۲ به بررسی مشخصه‌های ارتعاشی در تیرهای کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده درآن با شرایط مرزی مختلف پرداخت. وی با معرفی یک مدل تئوری ساده، فرکانس‌های طبیعی سازه را قبل و بعد از تحریک الیاف حافظه‌دار مورد ارزیابی قرارداد. لا و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۰۲ به بررسی کنترل فرکانس‌های طبیعی تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده در آن پرداختند. برزگری و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۳ به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرکامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده درآن پرداختند.

تاکنون پژوهشی بر روی تیرهای چرخان جدار نازک تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار صورت نگرفته است، اما پژوهش‌های گسترده‌ای در مورد تیرهای چرخان جدار نازک ساخته‌شده از مواد با خواص متغیر[1] وجود دارد. لیبرسکو و همکاران [۱۴] درسال ۲۰۰۳ بر روی ارتعاشات تیرهای چرخان جدار نازک ساخته‌شده از مواد با خواص متغیر مطالعات گسترده‌ای داشته‌اند. همچنین لیبرسکو و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۰۵ به بررسی عملکرد تیرچرخان جدار نازک ساخته‌شده از مواد با خواص متغیر تحت محیط دما بالا بدون نیروی فشاری ناشی از جریان گاز پرداختند. فاضل زاده و حسینی [۱۶] در سال ۲۰۰۷ به بررسی رفتار تیرچرخان جدارنازک ساخته شده از مواد با خواص متغییر تحت محیط دما بالا با نیروی فشاری ناشی از جریان گاز پرداختند. نغمه سنج و رحمانی [۱۷] در سال ۲۰۱۶ به کنترل بهینه تیر چرخان جدار نازک ساخته‌شده مواد با خواص متغیر تحت محیط دما بالا با نیروی فشاری ناشی از جریان گاز پرداختند.

در این پژوهش برای اولین بار تحلیل فرکانس تیر کامپوریتی جدارنازک تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار صورت گرفته است. در پژوهش حاضر به ازای سه توزیع متقارن الیاف (۴ تایی، ۸ تایی و ۱۲ تایی) که در مقطع مربعی تیر جدار نازک دوار قرار گرفته‌اند، تحلیل فرکانس انجام شده است. خواص نهایی تیر چرخان کامپوزیتی از روابط ارائه شده توسط بیرمن به دست آمده و همچنین خواص ترمومکانیکی الیاف حافظه‌دار توسط رابطه یک بعدی لیانگ-راجرز مدل‌سازی شده است. معادلات حاکم بر تیر جدارنازک دوار با استفاده از اصل همیلتون و براساس تئوری برشی مرتبه اول بدست آمده است. در نهایت با استفاده از روش گالرکین توسعه یافته، معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر کامپوزیتی چرخان جدار نازک حل شده‌اند. در پایان به منظور اعتبارسنجی نتایج، حل گالرکین حاضر با مقالات منتشر شده، مقایسه شده است و اثرات سرعت چرخش، دمای الیاف، پیش کرنش مواد حافظه‌دار و تعداد الیاف به‌کار رفته بر روی سه فرکانس اول تیر کامپوزیتی چرخان جدار نازک نشان داده شده است.

۲- مدل‌سازی ترمومکانیکی آلیاژ حافظه‌دار

در این پژوهش جهت مدل‌سازی رفتار ترمومکانیکی آلیاژ حافظه‌دار، از مدل تک بعدی ارائه شده توسط لیانگ-راجرز استفاده شده است، رابطه‌ی یک بعدی الیاف حافظه‌دار در طی تغییر فاز مارتنزیتی، به صورت رابطه زیر می‌باشد [۹]:

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi)\,(\varepsilon - \varepsilon_0)_c + \Theta(T - T_0) + \psi(\xi)(\xi - \xi_0) \tag{۱}$$

در رابطه (۱)، ξ کسر مارتنزیتی، Θ ضریب انبساط حرارتی الیاف حافظه‌دار و ψ ضریب تغییر فاز می‌باشد. همچنین اندیس صفر نشان دهنده شرایط اولیه الیاف و اندیس c، نشان دهنده ماتریس در تیر کامپوزیتی می‌باشد. رابطه بین مدول الاستیسیته الیاف و کسر مارتنزیتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E(\xi) = \xi E_M + (1 - \xi)E_A \tag{۲}$$

در رابطه (۲)، زیرنویس M و A به ترتیب بیانگر مارتنزیت و آستنیت می‌باشد. همچنین کسر مارتنزیت ξ، برحسب دمای اعمال شده T، در طی حرارت دادن به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\xi = \frac{\xi_M}{2}\left\{ cos\left[\frac{\pi}{A_f - A_S}(T - A_S) \right] + 1 \right\} \tag{۳}$$

که در رابطه (۳)، A_S و A_f به ترتیب دمای شروع و دمای پایان تغییر

1 Functionally graded materials

فاز آستنیت را نشان می‌دهند. تنش ایجاد شده در الیاف حافظه‌دار به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۳]:

$$\sigma_R = \frac{\left[\alpha_c E(\xi) + \Theta\right](T - T_0) + \psi(\xi)(\xi - \xi_0)}{1 - \dfrac{E(\xi)A_{SMA}}{E_C A_C}} \qquad (۴)$$

بنابراین نیروی محوری ایجاد شده در راستای طولی تیر به صورت رابطه (۵) نتیجه می‌شود:

$$P_Z = \frac{\left[\alpha_c E(\xi) + \Theta\right](T - T_0) + \psi(\xi)(\xi - \xi_0)}{1 - \dfrac{E(\xi)A_{SMA}}{E_C A_C}} A_{SMA} \qquad (۵)$$

که α_c ضریب انبساط حرارتی ماتریس، T_0 دمای مرجع و مقدار آن ۲۰ درجه سانتی‌گراد در نظرگرفته شده است. همچنین A_C و A_{SMA} به ترتیب نشان‌دهنده سطح مقطع ماتریس و سطح مقطع الیاف حافظه‌دار می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{SMA} = N\frac{\pi (D_{SMA})^2}{4} \qquad (۶)$$
$$A_C = A_{total} - A_{SMA}$$

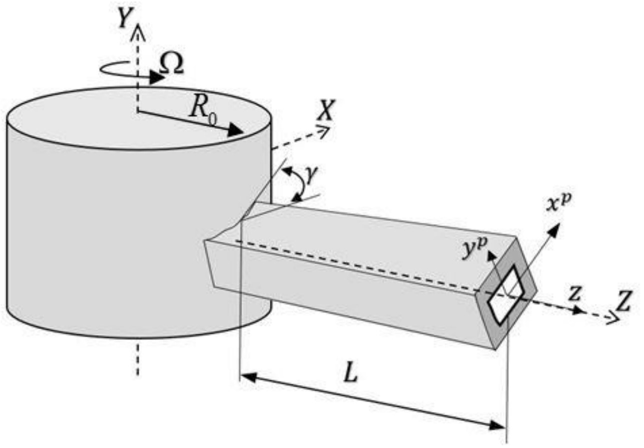
در روابط بالا D_{SMA} قطر الیاف و A_{total} مساحت کل سطح مقطع تیر با الیاف می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_{total} = 2h(a+b) \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، a پهنا، b ارتفاع تیر، و h ضخامت جدار مقطع تیر جدار نازک را نشان می‌دهند. ضریب تغییر فاز ψ به صورت زیر ارزیابی شده است،

$$\psi(\xi) = -\varepsilon_L E(\xi) \qquad (۸)$$

که در آن $-\varepsilon_L$ پیش‌کرنش فشاری قابل بازیابی می‌باشد.



شکل ۱: شماتیک تیر جدارنازک دوار

Fig. 1. The schematic of rotating thin-walled beam

۳- روابط سینماتیکی تیرکامپوزیتی چرخان

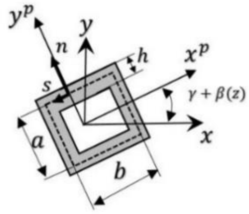
در شکل ۱ شماتیک تیر جدار نازک دوار تقویت شده با الیاف حافظه‌دار، که با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور Y در حال دوران است، مشاهده می‌شود. تیر جدار نازک باطول L،زاویه اولیه γ و زاویه پیچش ثانویه $\beta(z)$، به توپی استوانه‌ای با شعاع R_0 متصل شده است. دستگاه مختصات دوار مرجع[1] با (X,Y,Z) و دستگاه مختصات محلی[2] (x,y,z) نشان داده شده است؛ همچنین (x^p,y^p,z) دستگاه مختصات محلی اصلی[3] می‌باشد (شکل ۲). سطح مقطع تیر جدارنازک به صورت مربع دارای طول ضلع a و ضخامت h می‌باشد. در شکل ۲ دستگاه مختصات محلی دیگری با نماد (s,n,z) دیده می‌شود که s در جهت محیطی بر روی خط میانی سطح مقطع، با جهت مثبت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و n، $|n| \le h/2$ در جهت ضخامت می‌باشد. همچنین سه حالت توزیع متقارن الیاف حافظه‌دار در تیر جدار نازک (۴ تایی، ۸ تایی و ۱۲ تایی)، در شکل ۳ مشاهده می‌شود.

روابط انتقال در دستگاه مختصات محلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= x^p\cos(\beta(z)+\gamma) - y^p\sin(\beta(z)+\gamma) \\ y &= x^p\sin(\beta(z)+\gamma) + y^p\cos(\beta(z)+\gamma) \\ z &= z^p \end{aligned} \qquad (۹)$$

در این روابط γ زاویه اولیه، $\beta(z) = \beta_0 \, z/L$ که β_0 زاویه پیچش

1 Global coordinate
2 Local coordinate
3 Principle local coordinate



شکل ۲: سطح مقطع تیر جدار نازک

Fig. 2. Cross section of thin-walled beam

ثانویه و L طول تیر می‌باشد. با انتخاب دستگاه مختصات (n,s,z) روی سطح مقطع تیر، مولفه‌های میدان جابجایی به صورت روابط زیر نوشته می‌شوند [۱۶]:

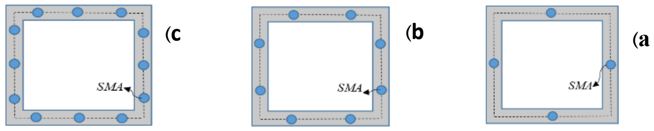
$$
\begin{aligned}
u\left(x,y,z;t\right) &= u_0\left(z;t\right)\\
v\left(x,y,z;t\right) &= v_0\left(z;t\right)\\
w\left(x,y,z;t\right) &= \theta_x\left(z;t\right)\left[y\left(s\right)-n\frac{dx}{ds}\right]\\
&+\theta_y\left(z;t\right)\left[x\left(s\right)+n\frac{dy}{ds}\right]
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

که u_0 و v_0 حرکت انتقالی جسم صلب، به ترتیب در راستای محور x،y و θ_x، θ_y زاویه پیچش جسم صلب به ترتیب حول محورهای x و y می‌باشند. روابط بین کرنش در دستگاه مختصات (n,s,z) و (x,y,z) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{sz} &= \frac{dx}{ds}\gamma_{xz}+\frac{dy}{ds}\gamma_{yz}\\
\varepsilon_{nz} &= \frac{dy}{ds}\gamma_{xz}-\frac{dx}{ds}\gamma_{yz}\\
\varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^0+n\varepsilon_{zz}^1
\end{aligned}
\qquad (۱۱)
$$

که،

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{zz}^0 &= \frac{\partial w}{\partial z}+y\left(s\right)\frac{\partial\theta_x}{\partial z}+x\left(s\right)\frac{\partial\theta_y}{\partial z}\\
\varepsilon_{zz}^1 &= \frac{dy\left(s\right)}{ds}\frac{\partial\theta_y}{\partial z}-\frac{dx\left(s\right)}{ds}\frac{\partial\theta_x}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (۱۲)
$$



شکل ۳: نحوه آرایش الیاف حافظه‌دار در تیر جدار نازک دوار، الف)چهارتایی ب) هشت‌تایی ج)دوازده تایی

Fig. 3. Alignment of SMA wire a) 4 numbers of SMA, b) 8 numbers of SMA, c) 12 numbers of SMA

همچنین یکی از فرضیات اساسی این است که سطح مقطع اولیه تیر جدار نازک همواره بدون تغییر و اعوجاج باقی می‌ماند؛ بنابراین کرنش‌های برشی برابر صفر می‌باشند؛

$$
\varepsilon_{nn}=\varepsilon_{ss}=\varepsilon_{ns}=0 \qquad (۱۳)
$$

با توجه به اینکه تیر جدار نازک تقویت شده با الیاف حافظه‌دار، دارای ماهیت ارتوتروپیک می‌باشد، روابط تنش-کرنش موسوم به روابط ساختاری، به فرم ماتریسی زیر بیان می‌شود:

$$
\begin{Bmatrix}\sigma_{ss}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{zn}\\ \sigma_{ns}\\ \sigma_{zs}\end{Bmatrix}=
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\
Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\varepsilon_{ss}-\alpha_{11}\Delta T\\ \varepsilon_{zz}-\alpha_{22}\Delta T\\ \varepsilon_{zn}\\ \varepsilon_{ns}\\ \varepsilon_{zs}\end{Bmatrix}
\qquad (۱۴)
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
&Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}^2}\ ;\ Q_{22}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}^2}\\
&Q_{12}=Q_{21}=\frac{\nu_{12}E_{11}}{1-\nu_{12}^2}\\
&Q_{66}=G_{12},\ Q_{44}=\kappa_s^2G_{23}\\
&Q_{55}=\kappa_s^2G_{13}
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

در رابطه (۱۴)، κ_s ضریب تصحیح برشی و داری مقدار $\sqrt{\pi^2/12}$ می‌باشد. خواص مکانیکی تیر کامپوزیتی چرخان جدار نازک تقویت شده با

الیاف حافظه‌دار از روابط ارائه شده توسط بیرمن [۱۸] برآورد شده است، که به صورت زیر می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
&E_{22}=E_c\left[(1-V_s^{0.5})+\frac{V_s^{0.5}}{1-(1-\frac{E_c}{E_s(\xi)})V_s^{0.5}}\right]\\
&G_{23}=G_{32}=G_c\left[\frac{1}{1-V_s(1-\frac{G_c}{G_s(\xi)})}\right]\\
&G_{12}=G_{13}=G_c\left[(1-V_s^{0.5})+\frac{V_s^{0.5}}{1-(1-\frac{G_c}{G_s(\xi)})V_s^{0.5}}\right]\\
&E_{11}=E_s(\xi)V_s+E_c(1-V_s)\\
&\nu_{12}=\nu_{12s}V_s+\nu_{12c}(1-V_s)\\
&\rho=\rho_s V_s+\rho_c(1-V_s),
\end{aligned}
\qquad (۱۶)
$$

که در این روابط زیرنویس‌های s و c به‌ترتیب مربوط به آلیاژ حافظه‌دار و ماده زمینه کامپوزیتی می‌باشند؛ همچنین V_s و G_s به‌ترتیب نشان دهنده دهنده کسر حجمی و مدول برشی آلیاژ حافظه‌دار هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$G_s(\xi)=\frac{E_s(\xi)}{2(1+\nu_{12s})},\quad V_s=\frac{A_{AMA}}{A_c} \qquad (۱۷)$$

٤- استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر مساله

با استفاده از اصل همیلتون توسعه‌یافته، معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی تیر کامپوزیتی چرخان جدار نازک که با آلیاژ حافظه‌دار تقویت شده است، همزمان توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta U+\delta W_{SMA})dt=0 \qquad (۱۸)$$

در این رابطه δT تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW_{SMA} تغییرات کار انجام شده توسط الیاف حافظه‌دار می‌باشد و همچنین در $t=t_1,t_2$ داریم:

$$\delta u_0=\delta v_0=\delta\theta_x=\delta\theta_y=0 \qquad (۱۹)$$

۴- ۱- تغییرات انرژی جنبشی:

با انتخاب نقطه دلخواه $M(x,y,z)$ روی سطح مقطع تیر جدارنازک، بردارموقعیت هر نقطه R، به دست آمده و سپس با مشتق گیری از آن نسبت به زمان، بردار سرعت و شتاب حاصل می‌شود؛ بنابراین تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta T=-\int_V\rho(x,y,z)\ddot{R}\,\delta R\,dV \qquad (۲۰)$$

که علامت $(\ddot{\ })$ بیانگر مشتق دوم نسبت به زمان می‌باشد. بعد از جایگذاری بردار شتاب در رابطه (۱۹)، تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta T=-\int_0^L\left\{\begin{array}{l}b_1\left[\ddot{u}_0-\Omega^2u_0\right]\delta u_0+b_1\ddot{v}_0\delta v_0+\\ \left[\begin{array}{l}(b_4+b_{14})(\ddot{\theta}_x-\Omega^2\theta_x)\\ \quad+(b_6-b_{13})(\ddot{\theta}_y-\Omega^2\theta_y)\end{array}\right]\delta\theta_x\\ +\left[\begin{array}{l}(b_5+b_{15})(\ddot{\theta}_y-\Omega^2\theta_y)\\ \quad+(b_6-b_{13})(\ddot{\theta}_x-\Omega^2\theta_x)\end{array}\right]\delta\theta_y\end{array}\right\}dz \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
&(m_0,m_2)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(n,s,z)(1,n^2)dn\\
&(b_1,b_4,b_5,b_6)=\oint_c m_0(1,y^2,x^2,xy)ds\\
&(b_{13},b_{14},b_{15})=\oint_c m_2(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds},(\frac{dx}{ds})^2,(\frac{dy}{ds})^2)ds
\end{aligned}
\qquad (۲۲)
$$

۴- ۲- تغییرات انرژی کرنشی:

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\right]dV = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} \left[-Q_x' - (T_z u_0')'\right]\delta u_0 + \left[-Q_y' - (T_z v_0')'\right]\delta v_0 + \\ \left[-M_x' + Q_y\right]\delta\theta_x + \left[-M_y' + Q_x\right]\delta\theta_y \end{array} \right\} + \left[-Q_x - (T_z u_0')\right]\delta u_0 + \left[-Q_y - (T_z v_0')\right]\delta v_0 + M_x\delta\theta_x + M_y\delta\theta_y \Big|_0^L \quad (۲۳)$$

علامت پرایم (′) بیانگر $(\frac{\partial}{\partial z})$ می‌باشد. در روابط (۲۲)، برآیند تنش طولی (T_z, Q_x, Q_y) و برآیند گشتاورناشی از تنش‌های طولی (M_x, M_y) به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} Q_x(z;t) &= \oint_c \left[N_{sz}\frac{dx}{ds} + N_{nz}\frac{dy}{ds}\right]ds \\ M_x(z;t) &= \oint_c \left[yN_{zz} - L_{zz}\frac{dx}{ds}\right]ds \\ Q_y(z;t) &= \oint_c \left[N_{sz}\frac{dy}{ds} - N_{nz}\frac{dx}{ds}\right]ds \\ M_y(z;t) &= \oint_c \left[xN_{zz} + L_{zz}\frac{dy}{ds}\right]ds \\ T_z(z;t) &= \oint_c N_{zz}ds, \end{aligned} \quad (۲۴)$$

که منتجه‌های تنش به صورت روابط (۲۴) تعریف می‌شوند؛

$$\begin{aligned} (N_{sz}, L_{nz}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{sz}, \sigma_{nz})dn \\ (N_{zz}, L_{zz}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz}(1, n)dn, \end{aligned} \quad (۲۵)$$

۴- ۳- تغییرات کار انجام شده توسط الیاف:

تغییرات کار انجام شده توسط الیاف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta W_{SMA} = -\int_0^L \left\{(P_Z u_0')\delta u_0 + (P_Z v_0')\delta v_0\right\}dz + \left[(P_Z u_0')\delta u_0 + (P_Z v_0')\delta v_0\right]_0^L \quad (۲۶)$$

که P_z نیروی محوری ایجاد شده ناشی از تغییرات دما در الیاف حافظه‌دار می‌باشد و توسط رابطه (۵) برآورد شده است. با جایگذاری روابط (۲۰) و (۲۲) و (۲۵) در اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\delta u_0: Q_x' + \left(T_z u_0'\right)' - \left[P_z u_0'\right]' - b_1\left(\ddot{u}_0 + 2\dot{w}_0\Omega - u_0\Omega^2\right) = 0 && \text{(الف)} \\ &\delta v_0: Q_y' + \left(T_z v_0'\right)' - b_1\ddot{v}_0 - \left[P_z v_0'\right]' = 0 && \text{(ب)} \\ &\delta w_0: T_z' - b_1\left(\ddot{w}_0 - 2\dot{u}_0\Omega\right) + b_1\left(R_0 + z + w_0\right)\Omega^2 = 0 && \text{(ج)} \\ &\delta\theta_x: M_y' - Q_x - \left(b_5 + b_{15} + 2b_{27}\right)\left(\ddot{\theta}_y - \Omega^2\theta_y\right) - \left(b_6 - b_{13}\right)\left(\ddot{\theta}_x - \Omega^2\theta_x\right) = 0 && \text{(د)} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

و شرایط مرزی در سر آزاد و گیردار تیر کامپوزیتی جدار نازک دوار به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &z = 0 \Rightarrow u_0 = v_0 = \theta_x = \theta_y = 0 && \text{(الف)} \\ &z = L \Rightarrow \begin{cases} \delta u_0: Q_x + \left(T_z u_0'\right) = 0 \\ \delta v_0: Q_y + \left(T_z v_0'\right) = 0 \\ \delta w_0: T_z = 0 \\ \delta\theta_x: M_x = 0 \\ \delta\theta_y: M_y = 0 \end{cases} && \text{(ب)} \end{aligned} \quad (۲۸)$$

واقعیت فیزیکی که برای مساله تیر جدار نازک دوار وجود دارد، این است که سفتی طولی تیر جدار نازک در مقایسه با سفتی در جهت‌های عرضی (جهت x و y) بسیار بیشتر می‌باشد. بنابراین، اثرات نیروی ناشی از شتاب گریز از مرکز در جهت طولی بسیارکوچک می باشد و می‌توان از آن صرفنظر کرد. با انتگرال گیری از رابطه (۲۶–ج) بر روی دامنه طولی تیر و استفاده از شرط مرزی مربوط به δw_0 (رابطه (۲۷–ب))، رابطه (۲۸) بدست می‌آید،

$$T_z\left(z,t\right)=b_1\Omega^2R\left(z\right) \tag{۲۹}$$

که

$$R\left(z\right)=R_0\left(L-z\right)+\frac{1}{2}\left(L^2-z^2\right) \tag{۳۰}$$

با جایگذاری روابط (۲۳) و (۲۸) در رابطه (۲۶)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله برحسب میدان جابجایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\delta u_0: \left[a_{44}(z)(u_0'+\theta_y)+a_{45}(z)(v_0'+\theta_x)\right]' \\
&\quad -b_1\ddot{u}_0+b_1\Omega^2u_0+\Omega^2\left[R(z)u_0'\right]' \\
&\quad -\left[P_zu_0'\right]'=0 && \text{(الف)}\\
&\delta v_0: \left[a_{55}(z)(v_0'+\theta_x)+a_{54}(z)(u_0'+\theta_y)\right]' \\
&\quad -b_1\ddot{v}_0+\Omega^2\left[R(z)v_0'\right]'-\left[P_zv_0'\right]'=0 && \text{(ب)}\\
&\delta\theta_x: \left[a_{33}(z)\theta_x'+a_{32}(z)\theta_y'\right]' \\
&\quad -a_{55}(z)(v_0'+\theta_x)-a_{54}(z)(u_0'+\theta_y) \\
&\quad -(b_4(z)+b_{14}(z))(\ddot{\theta}_x-\Omega^2\theta_x) \\
&\quad -(b_6(z)-b_{13}(z))(\ddot{\theta}_y-\Omega^2\theta_y)=(M_x^T)' && \text{(ج)}\\
&\delta\theta_y: \left[a_{22}(z)\theta_y'+a_{23}(z)\theta_x'\right]' \\
&\quad -a_{44}(z)(u_0'+\theta_y)-a_{45}(z)(v_0'+\theta_x) \\
&\quad -(b_5(z)+b_{15}(z))(\ddot{\theta}_y-\Omega^2\theta_y) \\
&\quad -(b_6(z)-b_{13}(z))(\ddot{\theta}_x-\Omega^2\theta_x)=(M_y^T)' && \text{(د)}
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

که M_y^T و M_x^T به‌ترتیب برآیند گشتاور خمشی حرارتی حول محور x و حول محورy می‌باشد. همچنین کمیت‌های سفتی a_{ij} و جملات جرم b_i، در مراجع [۱۵] آمده است. با فرض این که تکیه‌گاه تیر در $z=0$ گیردار و در $z=L$ آزاد است شرایط مرزی به صورت زیر ظاهر می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&z=0\Rightarrow u_0=v_0=\theta_x=\theta_y=0 && \text{(الف)}\\
&z=L\Rightarrow\begin{cases}
\delta u_0: a_{44}(z)(u_0'+\theta_y) \\
\qquad +a_{45}(z)(v_0'+\theta_x)=P_zu_0' \\
\delta v_0: a_{55}(z)(v_0'+\theta_x) \\
\qquad +a_{54}(z)(u_0'+\theta_y)=P_zv_0' \\
\delta\theta_y: a_{22}(z)\theta_y'+a_{23}(z)\theta_x'=M_y^T \\
\delta\theta_y: a_{33}(z)\theta_x'+a_{32}(z)\theta_y'=M_x^T
\end{cases} && \text{(ب)}
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

۵- حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله

به دلیل شرایط مرزی پیچیده و وابستگی بین معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله (روابط (۳۰))، حل دقیق معادلات امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین از روش حل تقریبی گالرکین استفاده شده است. برای اعمال روش گالرکین لازم است که میدان‌های جابه‌جایی به‌صورت مجموع جملاتی از حاصل‌ضرب توابع درون‌یاب و بردارهای زمان بیان به صورت زیر بیان شوند:

$$\begin{aligned}
u_0(z,t)&=\{U(z)\}^T\{q_u(t)\}\\
v_0(z,t)&=\{V(z)\}^T\{q_v(t)\}\\
\theta_y(z,t)&=\{\Theta_y(z)\}^T\{q_y(t)\}\\
\theta_x(z,t)&=\{\Theta_x(z)\}^T\{q_x(t)\}
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در روابط (۳۲) $\{U\}$، $\{V\}$، $\{\Theta_x\}$ و $\{\Theta_y\}$ بردارهای Nبعدی توابع درون‌یاب می‌باشند که به‌صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند [۱۹]:

$$\begin{aligned}
U=V&=\{z^2,z^3,z^4,z^5,z^6,z^7\}\\
\Theta_x=\Theta_y&=\{z^1,z^2,z^3,z^4,z^5,z^6\}
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (رابطه (۳۳)) در معادلات حاکم، معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر کامپوزیتی جدارنازک چرخان به صورت ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$[M]\{\ddot{q}(\mathrm{t})\}+[K]\{q(\mathrm{t})\}=0 \tag{۳۵}$$

که بردار مختصات تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{q\}=\{q_u,q_v,q_x,q_y\}^T \tag{۳۶}$$

در رابطه ماتریسی (۳۴)، M و K به ترتیب معرف ماتریس جرم و ماتریس سفتی می‌باشند که به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

که مولفه‌های ماتریس M به صورت زیر می‌باشند؛

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \int_0^L b_1 UU^T dz \\
m_{22} &= \int_0^L b_1 VV^T dz \\
m_{33} &= \int_0^L (b_4+b_{14})\Theta_x\Theta_x^T dz \\
m_{34} &= \int_0^L (b_6-b_{13})\Theta_x\Theta_y^T dz \\
m_{43} &= \int_0^L (b_6-b_{13})\Theta_y\Theta_x^T dz \\
m_{44} &= \int_0^L (b_5+b_{15})\Theta_y\Theta_y^T dz
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

و

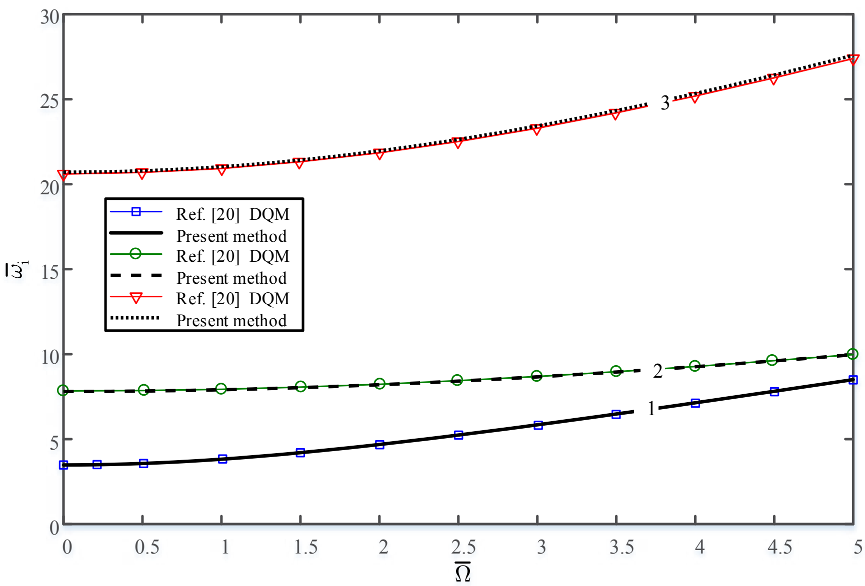
$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

مولفه‌های ماتریس K به صورت نوشته می‌شود،

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \int_0^L (a_{44}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U^T}{\partial z} - b_1\Omega^2 UU^T \\
&\quad + \Omega^2 R\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U^T}{\partial z} + P_z\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U^T}{\partial z})dz\,, \\
k_{12} &= \int_0^L (a_{45}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V^T}{\partial z})dz \\
k_{13} &= \int_0^L (a_{45}\frac{\partial U}{\partial z}\Theta_x^T)dz\,, k_{14} = \int_0^L (a_{44}\frac{\partial U}{\partial z}\Theta_y^T)dz \\
k_{21} &= \int_0^L (a_{45}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U^T}{\partial z})dz \\
k_{22} &= \int_0^L (a_{55}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V^T}{\partial z} \\
&\quad + \Omega^2 R\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V^T}{\partial z} + P_z\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V^T}{\partial z})dz\,, \\
k_{23} &= \int_0^L (a_{55}\frac{\partial V}{\partial z}\Theta_x^T)dz\,, k_{24} = \int_0^L (a_{45}\frac{\partial V}{\partial z}\Theta_y^T)dz\,, \\
k_{31} &= \int_0^L (a_{45}\Theta_x\frac{\partial U^T}{\partial z})dz\,, k_{32} = \int_0^L (a_{55}\Theta_x\frac{\partial V^T}{\partial z})dz \\
k_{33} &= \int_0^L (a_{55}\Theta_x\Theta_x^T - (b_4+b_{14})\Omega^2\Theta_x\Theta_x^T \\
&\quad + a_{33}\frac{\partial \Theta_x}{\partial z}\frac{\partial \Theta_x^T}{\partial z})dz \\
k_{34} &= \int_0^L (a_{45}\Theta_x\Theta_y^T - (b_6-b_{13})\Omega^2\Theta_x\Theta_y^T \\
&\quad + a_{23}\frac{\partial \Theta_x}{\partial z}\frac{\partial \Theta_y^T}{\partial z})dz \\
k_{41} &= \int_0^L (a_{44}\Theta_y\frac{\partial U^T}{\partial z})dz\,, k_{42} = \int_0^L (a_{45}\Theta_y\frac{\partial V^T}{\partial z})dz \\
k_{43} &= \int_0^L (a_{45}\Theta_y\Theta_x^T - (b_6-b_{13})\Omega^2\Theta_y\Theta_x^T \\
&\quad + a_{23}\frac{\partial \Theta_y}{\partial z}\frac{\partial \Theta_x^T}{\partial z})dz \\
k_{44} &= \int_0^L (a_{44}\Theta_y\Theta_y^T - (b_5+b_{15})\Omega^2\Theta_y\Theta_y^T \\
&\quad + a_{22}\frac{\partial \Theta_y}{\partial z}\frac{\partial \Theta_y^T}{\partial z})dz
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

با فرض اینکه پاسخ رابطه دیفرانسیل معمولی همگن (۳۵) به صورت $q(t)=\eta e^{\omega t}$ داریم:

$$\omega^2=-[M]^{-1}[K] \tag{۴۱}$$



شکل ٤: مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی اول تا سوم برحسب سرعت دورانی تیر جدار نازک

Fig. 4. Comparison the variation of first three natural frequencies of thin-walled beam as a function of rotating speed

که با حل معادله بالا فرکانس‌های طبیعی سیستم بدست می‌آیند.

٦- نتایج و بحث

به منظور اعتبارسنجی حل گالرکین حاضر، نتایج این پژوهش با مرجع [۲۰] مقایسه شده است. بنابراین با فرض این‌که الیاف حافظه‌دار در تیر جدار نازک دوار وجود نداشته و جنس تیر از سرامیک خالص باشد، صحت فرمول‌بندی و روش حل حاضر با نتایج مشابه در مرجع [۲۰] در شکل ۴ اعتبارسنجی شده است. جهت مقایسه از مقادیر عددی هندسی و مادی بکار رفته در مرجع [۲۰] استفاده شده است. در شکل ۴ تغییرات سه فرکانس اول بدون‌بعد تابعی از سرعت چرخش برای تیر جدارنازک ساخته شده از سرامیک خالص نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که حل گالرکین حاضر تطابق خوبی با حل حاصل از روش دیفرانسیل مربعات[1] دارد.

به منظور مطالعه عددی پارامترهای هندسی مساله به صورت زیر درنظر گرفته شده است [۲۱]:

$$L = 0.5\text{m},\ \ h = 0.005\text{m},\ \ d = 0.0005\text{m} \qquad (۴۲)$$
$$a = 0.03\text{m},\ \ b = a,\ \ R_0 = 0.4\text{m}$$

و پارامترهای بدون‌بعد مساله به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\bar{\Omega}^2 = \Omega^2 \frac{b_1 L^4}{a_{33}}, \bar{\omega}_i^2 = \omega_i^2 \frac{b_1 L^4}{a_{33}} \qquad (۴۳)$$

در جدول ۱ خواص مکانیکی آلیاژ حافظه‌دار نایتینول (Ni–Ti) و کامپوزیت گرافیت/اپوکسی ارائه شده است.

در شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی مد اول تا سوم تیر جدار نازک دوار برحسب سرعت دورانی به ازای تعداد الیاف‌های جاسازی شده در تیر جدار نازک نشان داده شده است. الیاف حافظه‌دار با پیش‌کرنش فشاری $\varepsilon_L = ۶/۷\%$ در لایه میانی تیر جدارنازک جاسازی شده است. در شکل ۵ پارامترهای مساله دارای مقادیر $T = ۷۰^o C, \gamma = ۰, \beta_0 = ۴۵^o$ می‌باشد. با افزایش تعداد الیاف حافظه‌دار بکار رفته در تیر جدار نازک دوار، فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم افزایش می‌یابد. این افزایش فرکانس

1 Differential Quadrature method

Table 1. properties of rotating thin-walled beam with embedded SMA wires

جدول ۱: خصوصیات تیرکامپوزیتی چرخان جدار نازک تقویت شده باآلیاژ حافظه دار

ماده	ویژگی و مقدار
گرافیت اپوکسی	$E_{۱۱}=۱۵۵(۱-۳.۵۳\times ۱۰^{-۴}\varDelta T)[\mathrm{GPa}], E_{۲۲}=E_{۳۳}=۸.۰۷(۱-۴.۲۷\times ۱۰^{-۴}\varDelta T)[\mathrm{GPa}],$ $G_{۱۲}=G_{۱۳}=۴/۵۵(۱-۶/۰۶\times ۱۰^{-۴}\varDelta T)[\mathrm{GPa}], \alpha_{۱}=-۰/۰۷(۱-۱/۲۵\times ۱۰^{-۳}\varDelta T)۱۰^{-۶}[\frac{۱}{°\mathrm{C}}],$ $\nu_{۱۲c}=۰/۲۲, \rho_{c}=۱۵۸۶[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^{3}}],$
الیاف حافظ‌دار	$E_{M}=۲۶/۳[\mathrm{GPa}], E_{A}=۶۷[\mathrm{GPa}], A_{s}=۳۴/۵[°\mathrm{C}], A_{f}=۴۹[°\mathrm{C}],$ $\rho_{s}=۶۴۵۰[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^{3}}], \nu_{s}=۰/۳۳, \varTheta=۰/۵۵[\frac{\mathrm{MPa}}{°\mathrm{C}}],$

به دلیل افزایش نیروی کششی تولیدشده بر اثر عملیات بازیابی کرنش در طول تیر می‌باشد. همچنین با افزایش سرعت چرخش تیر چرخان مقادیر فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند.

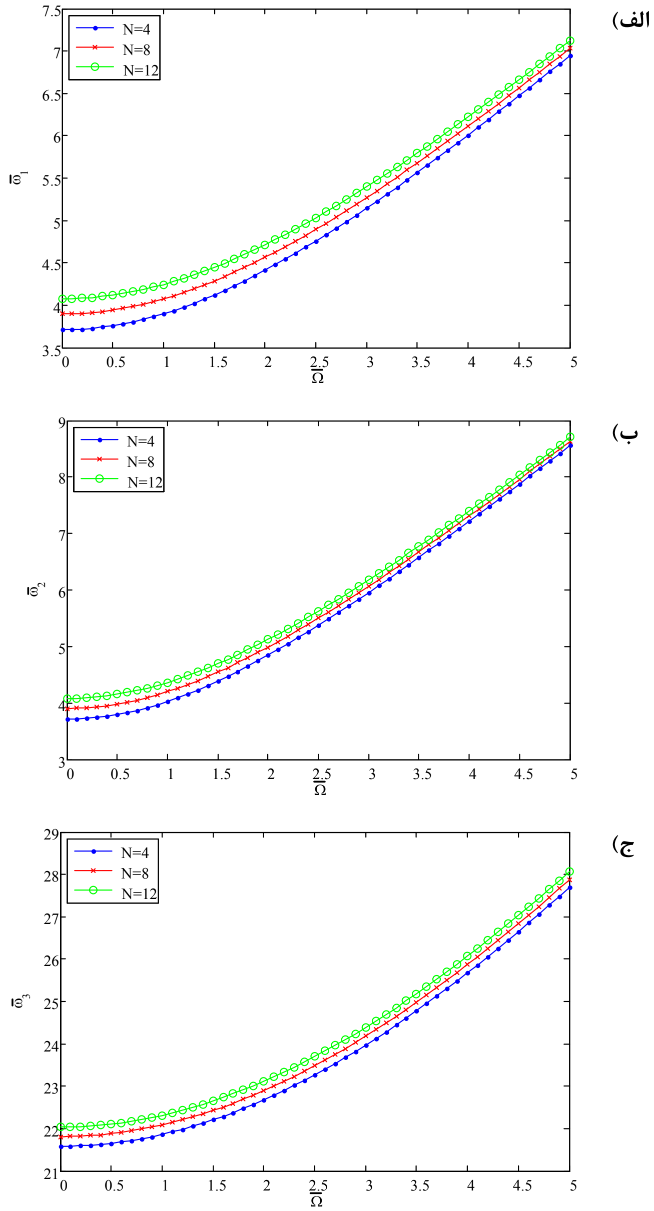
در شکل ۶ فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم برحسب اختلاف دما، برای تعداد ۴ ، ۸ و۱۲ الیاف نشان داده شده است. در این شکل پارامترهای مساله دارای مقادیر $\varepsilon_{L}=۶/۷\%, \gamma=۰, \beta_{0}=۴۵^{o}, \varOmega=۳\ \mathrm{rad/sec}$ می‌باشد. با افزایش دما، فرکانس تیر جدار نازک دوار به صورت نمودار کسینوس تغییر می‌کند. همچنین با افزایش تعداد الیاف درون تیر جدار نازک دوار، فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته است. علت اصلی تغییرات کسینوسی فرکانس بر حسب اختلاف دما را می توان به رابطه کسر مارتنزیت ارتباط داد، زیرا در مدل‌سازی الیاف حافظه‌دار توسط لیانگ راجرز تغییر فاز به صورت تابع کسینوسی در نظر گرفته شده است.

در شکل ۷ تغییرات فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم تیرچرخان جدار نازک برحسب سرعت دورانی تیرجدار نازک، به ازای دماهای مختلف میدان حرارتی بررسی شده است. در این شکل پارامترهای مساله دارای مقادیر $\varepsilon_{L}=۶/۷\%, \gamma=۰, \beta_{0}=۴۵^{o}, N=۴$ می‌باشد. فرکانس طبیعی تیر جدارنازک دوار با تغییرات دما تغییر می‌کند. با افزایش دما از $۶۰\,^{o}\mathrm{C}$ تا دمای $۸۰\,^{o}\mathrm{C}$، فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم تیر جدارنازک دوار همواره افزایش می‌یابد. اما همانطورکه از شکل ۷ مشاهده می‌شود، در دمای $۹۰\,^{o}\mathrm{C}$ فرکانس طبیعی کاهش یافته و تقریبا با دمای $۶۰\,^{o}\mathrm{C}$ برابر شده است؛ که به دلیل تغییرات کسر مارتنزیت به صورت کسینوسی می‌باشد.

در شکل ۸ تغییرات فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم تیرچرخان جدار نازک برحسب پیش‌کرنش فشاری الیاف حافظه‌دار جاسازی‌شده در تیر جدار نازک دوار، برای دماهای مختلف بررسی شده است. در این شکل پارامترهای مساله دارای مقادیر $\varOmega=۳\ \mathrm{rad/sec}, \gamma=۰, \beta_{0}=۴۵^{o}, N=۴$ می‌باشند. مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم با افزایش پیش‌کرنش فشاری الیاف‌ها افزایش می‌یابند. با افزایش دما از $۶۰\,^{o}\mathrm{C}$ تا دمای $۸۰\,^{o}\mathrm{C}$ همواره فرکانس‌های طبیعی مد اول تا سوم تیر چرخان افزایش می‌یابد. انتظار می‌رود در دمای $۹۰\,^{o}\mathrm{C}$ فرکانس بیشتری نسبت به دمای $۶۰\,^{o}\mathrm{C}$ داشته باشیم، اما در دمای $۹۰\,^{o}\mathrm{C}$فرکانس کم‌تری نسبت به دمای $۶۰\,^{o}\mathrm{C}$ وجود دارد، که به دلیل تغییرات کسر مارتنزیت به صورت کسینوسی می‌باشد.

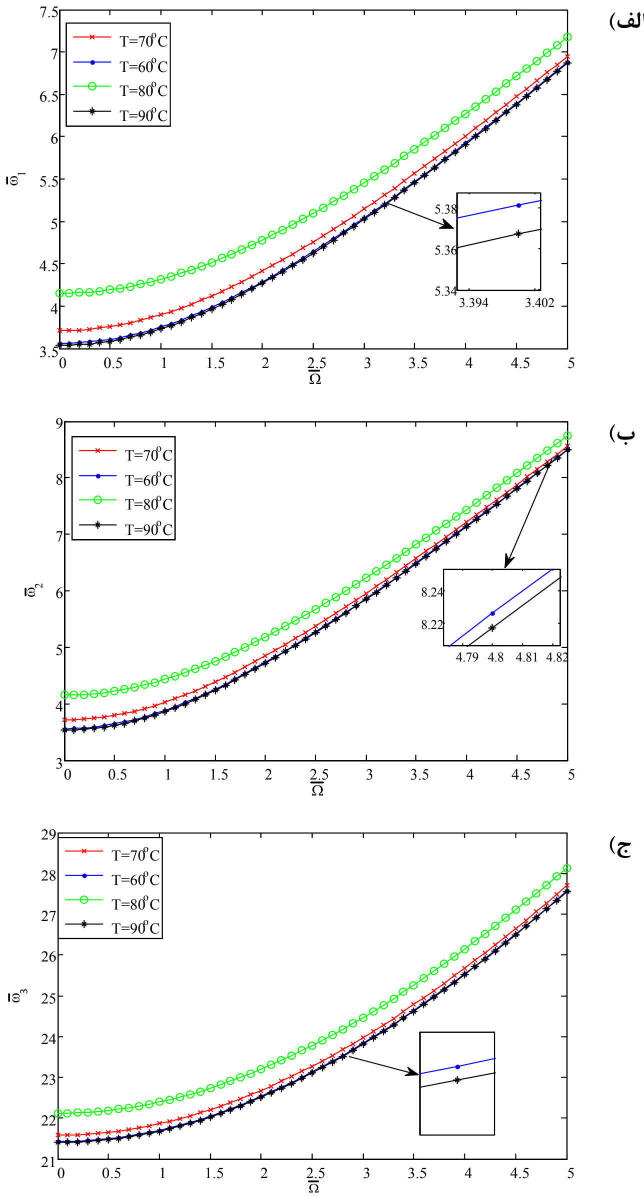
۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی جدار نازک تقویت شده با الیاف حافظه‌دار که با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال دوران است، مورد مطالعه قرارگرفته است. تیر جدار نازک دوار دارای تکیه‌گاه گیردار-آزاد در دو طرف بوده و الیاف حافظه‌دار با پیش‌کرنش فشاری در لایه میانی جدار تیر جاسازی شده‌اند. معادلات حاکم بر تیر جدار نازک دوار براساس تئوری برشی مرتبه اول و اصل همیلتون توسعه یافته بدست آمده است. فرض بر



شکل ۵: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول تا سوم برحسب سرعت دورانی تیر جدار نازک به ازای تعداد متفاوت الیاف حافظه‌دار

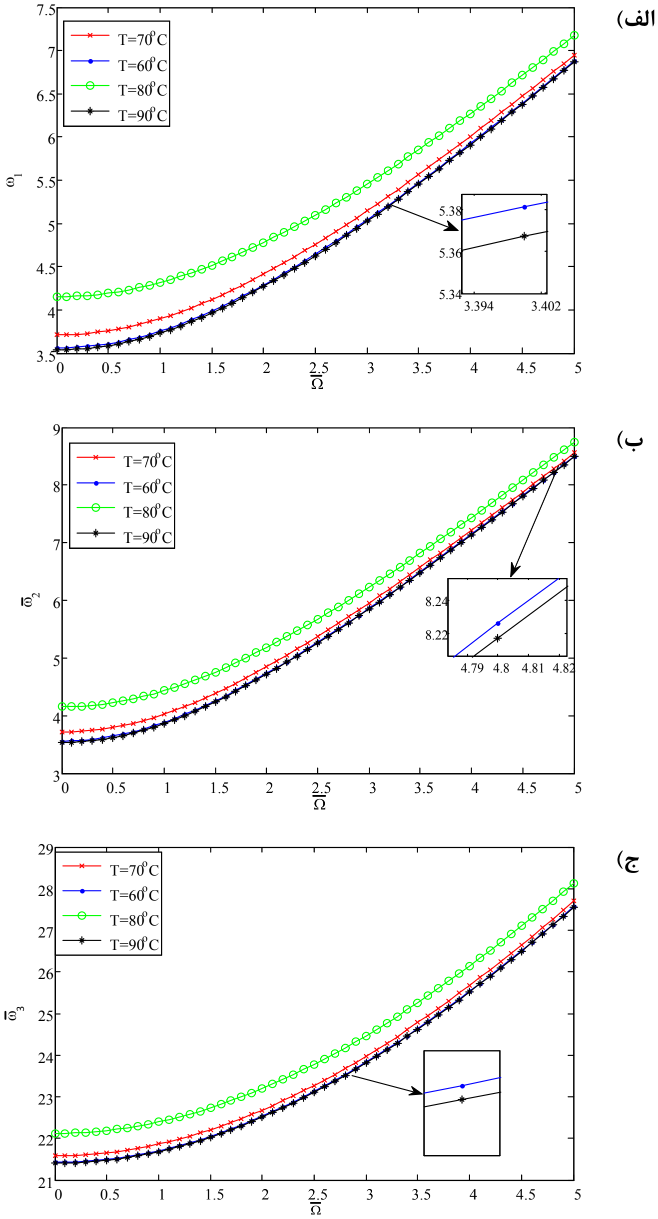
Fig. 5. Variation of first three natural frequencies of thin-walled beam with respect to rotating speed for different numbers of SMA wires



شکل ٦: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول تا سوم برحسب تغییرات دمای تیر جدار نازک به ازای تعداد متفاوت الیاف حافظه‌دار

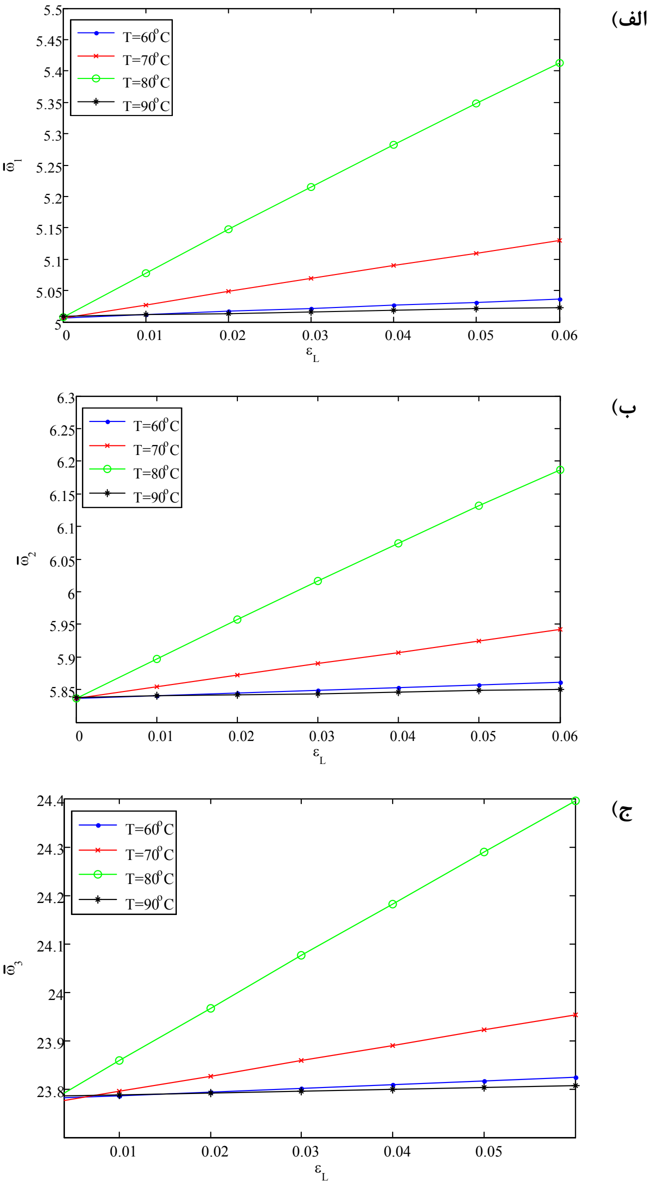
Fig. 6. variation of first three natural frequencies as a function of temperature change for different numbers of SMA wires

این است که الیاف حافظه‌دار با پیش کرنش اولیه در تیر جدار نازک جاسازی شده و تیر تحت میدان حرارتی قرار دارد. معادلات حاکم بر تیر جدار نازک دوار توسط اصل گالرکین توسعه یافته حل شده‌اند. در نهایت تاثیر تعداد الیاف حافظه‌دار، سرعت چرخش تیر، حدکرنش قابل بازیابی و میدان حرارتی بر روی فرکانس طبیعی مد اول تا سوم مورد بررسی قرارگرفته است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی تیرچرخان جدار نازک با افزایش سرعت دورانی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش پیش‌کرنش فشاری الیاف حافظه‌دار و تعداد الیاف حافظه‌دار فرکانس طبیعی افزایش



شکل ۷: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول تا سوم برحسب سرعت دورانی تیر جدار نازک به ازای مقادیر دمایی متفاوت

Fig. 7. Variation of first three natural frequencies of thin-walled beam with respect to rotating speed for various temperature fields



شکل ۸: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول تا سوم برحسب پیش کرنش فشاری الیاف حافظه به ازای مقادیر دمایی متفاوت

Fig. 8. Variation of first three natural frequencies with respect to compressive pre-strained load of SMA wires for various temperature fields

می‌یابد؛ که علت اصلی این افزایش فرکانس‌ها افزایش نیروی کششی تولید شده بر اثر عملیات بازیابی کرنش در طول تیر می‌باشد. بعلاوه، فرکانس‌های طبیعی تیر چرخان جدار نازک بر حسب دمای الیاف به صورت کسینوسی تغییر می‌کنند که به‌دلیل تغییرات مربوط به توابع کسینوسی تغییرات فاز مارتنزیت می‌باشد.

منابع

[1] J.M. Jani, M. Leary, A. Subic, M.A. Gibson, A review of shape memory alloy research, applications and opportunities, Materials & Design, 56 (2014) 1078-1113.

[2] A. Damanpack, M. Bodaghi, M. Aghdam, M. Shakeri, On the vibration control capability of shape memory alloy composite beams, Composite Structures, 110 (2014) 325-334.

[3] C.A. Rogers, Active vibration and structural acoustic control of shape memory alloy hybrid composites: experimental results, The Journal of the Acoustical Society of America, 88(6) (1990) 2803-2811.

[4] A. Baz, K. Imam, J. McCoy, Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators, Journal of Sound and Vibration, 140(3) (1990) 437-456.

[5] S. Seelecke, I. Muller, Shape memory alloy actuators in smart structures: Modeling and simulation, Applied Mechanics Reviews, 57(1) (2004) 23-46.

[6] W.J. Buehler, J. Gilfrich, R. Wiley, Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition TiNi, Journal of applied physics, 34(5) (1963) 1475-1477.

[7] G.B. Kauffman, I. Mayo, The story of nitinol: the serendipitous discovery of the memory metal and its applications, The chemical educator, 2(2) (1997) 1-21.

[8] K. Tanaka, A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior, (1986).

[9] C. Liang, C.A. Rogers, One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials, Journal of intelligent material systems and structures, 8(4) (1997) 285-302.

[10] L.C. Brinson, One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable, Journal of intelligent material systems and structures, 4(2) (1993) 229-242.

[11] K.-t. Lau, Vibration characteristics of SMA composite beams with different boundary conditions, Materials & design, 23(8) (2002) 741-749.

[12] K.-t. Lau, L.-m. Zhou, X.-m. Tao, Control of natural frequencies of a clamped–clamped composite beam with embedded shape memory alloy wires, Composite Structures, 58(1) (2002) 39-47.

[13] M.M. Barzegari, M. Dardel, A. Fathi, Vibration analysis of a beam with embedded shape memory alloy wires, Acta Mechanica Solida Sinica, 26(5) (2013) 536-550.

[14] S.-Y. Oh, L. Librescu, O. Song, Thermoelastic modeling and vibration of functionally graded thin-walled rotating blades, AIAA journal, 41(10) (2003) 2051-2061.

[15] L. Librescu, S.-Y. Oh, O. Song, Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability, Journal of Thermal Stresses, 28(6-7) (2005) 649-712.

[16] S.A. Fazelzadeh, M. Hosseini, Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials, Journal of fluids and structures, 23(8) (2007) 1251-1264.

[17] M. Naghmehsanj, B. Rahmani, Optimal control of supersonic pre-twisted rotating functionally graded thin-walled blades, Structural Control and Health Monitoring, 24(8) (2017).

[18] V. Birman, D.A. Saravanos, D.A. Hopkins, Micromechanics of composites with shape memory alloy fibers in uniform thermal fields, AIAA journal, 34(9) (1996) 1905-1912.

[19] N.K. Chandiramani, C.D. Shete, L.I. Librescu, Vibration

of higher-order-shearable pretwisted rotating composite blades, International Journal of Mechanical Sciences, 45(12) (2003) 2017-2041.

[20] S. Fazelzadeh, P. Malekzadeh, P. Zahedinejad, M. Hosseini, Vibration analysis of functionally graded thin-walled rotating blades under high temperature supersonic flow using the differential quadrature method, Journal of sound and vibration, 306(1) (2007) 333-348.

[21] M. Crespo-Ballesteros, M. Antoniou, M. Cherniakov, Wind Turbine Blade Radar Signatures in the Near Field: Modeling and Experimental Confirmation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 53(4) (2017) 1916-1931.