نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۵، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۲۲۹ تا ۱۲۴۴
DOI: 10.22060/mej.2018.14885.5968

استخراج روابط صریح در تعیین فرکانس طبیعی تیر اویلر-برنولی دارای ترک روی بستر الاستیک با استفاده از روش رایلی

علی علی‌جانی*[۱]، مرتضی خمامی ابدی[۲]

[۱] دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندر انزلی، بندر انزلی، ایران
[۲] دانشکده مهندسی عمران-سازه، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۰۳-۰۶-۱۳۹۷
بازنگری: ۱۷-۰۸-۱۳۹۷
پذیرش: ۱۲-۰۹-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۲۸-۰۹-۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
روش رایلی
فرکانس طبیعی
تیرهای دارای ترک
بستر الاستیک،
فنر پیچشی

خلاصه: در این مقاله، یک حل تقریبی بر مبنای روش رایلی، برای تحلیل رفتار مودال تیر اویلر-برنولی دارای ترک روی بستر الاستیک ارائه می‌شود. مدل‌سازی بستر الاستیک با استفاده از تئوری فنر ارتجاعی وینکلر انجام و میزان سفتی فنر، متناظر با خواص مادی بستر الاستیک مشخص می‌گردد. تابع دلتای دیراک برای اعمال مود باز شدگی ترک در معادله رایلی بکار گرفته می‌شود که در آن ضریب مربوط به این تابع می‌تواند برحسب ضریب سفتی یک فنر پیچشی متناظر و با درنظر گرفتن پارامترهای مادی و هندسی ترک مشخص گردد. در تحلیل حاضر، روابط صریح جدیدی برای محاسبه فرکانس طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک در سه شرط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد ارائه می‌شود. در این روش، فرکانس طبیعی در مود اول ارتعاش تیر دارای ترک روی بستر الاستیک به صورت نسبت انرژی پتانسیل غنی‌شده ماکزیمم و انرژی جنبشی ماکزیمم تعیین می‌گردد. اثرات عمق ترک، محل ترک و بستر الاستیک روی پاسخ فرکانس طبیعی تیر بر پایه روابط استخراج شده بررسی می‌شود. نتایج تحلیل‌ها نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی تیر ترک‌خورده کاهش می‌یابد؛ درحالی‌که بستر الاستیک موجب افزایش فرکانس طبیعی تیر دارای ترک می‌شود. مقایسه نتایج روابط پیشنهاد شده با نتایج مدل‌سازی کامل سازه در نرم‌افزار آباکوس نشان می‌دهد که تحلیل حاضر از دقت مناسبی برخوردار است.

۱- مقدمه

در تحلیل سازه‌هایی نظیر پی ساختمان‌ها، بزرگراه‌ها و ریل‌های راه‌آهن، نیاز به مدل‌سازی تیر روی بستر ارتجاعی می‌باشد. محیط‌های ارتجاعی مانند خاک به خاطر طبیعت ناهمگن و ناهمسان، دارای رفتار پیچیده‌ای است. از آنجایی‌که وجود ترک در تیرها موجب افزایش پیچیدگی تحلیل می‌شود، از این‌رو مهندسین جهت مدل‌سازی رفتار سازه‌های دارای ترک روی بستر الاستیک همواره به دنبال استفاده از مدل‌های ساده و در عین حال دقیق می‌باشند. در این مطالعه، دو نوع فنر شامل فنر پیچشی و فنر خطی ارتجاعی به ترتیب برای مدل‌سازی ترک و بستر الاستیک استفاده می‌شود.

مدل‌سازی ترک با استفاده از فنر پیچشی برای اولین بار در سال ۱۹۵۴ توسط ایروین و کایس [۱] معرفی و در سال ۱۹۵۷ توسط ایروین [۲] تکمیل گردید. در مقاله اخیر، مدل‌سازی ترک به کمک فنر پیچشی خطی و با استفاده از مفاهیم مکانیک شکست برای تعیین ضریب شدت تنش انجام شده است. پس از آن، تحقیقات زیادی برای توسعه این مدل‌سازی و بکارگیری آن در تحلیل‌های مختلف انجام گردید. بعنوان نمونه، بایوندی و کادمی [۳] در سال ۲۰۰۵، یک حل دقیق از تیرهای اویلر برنولی دارای ناپیوستگی را ارائه نمودند. در این تحقیق، ناپیوستگی ناشی از ترک متناظر با یک فنر پیچشی و به صورت یک تابع دلتای دیراک اعمالی بر سفتی خمشی در معادلات وارد شد. در ادامه، کادمی و کایلو [۴] در سال ۲۰۰۹، با استفاده از این مدل‌سازی یک حل دقیق برای مودهای ارتعاشی تیر اویلر-برنولی دارای چند ترک را انجام دادند. روابط مربوط به ضریب سفتی فنر پیچشی معادل با ترک توسط محققینی مانند ریسی و ویولا [۵]، یوکویاما و چن [۶] و دیمارگونوس [۷] پیشنهاد شد که در آن‌ها براساس نرخ آزادسازی انرژی، توابعی برای این ضریب سفتی برحسب خواص مادی و هندسی سازه دارای ترک ارائه شده است.

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: alijani@iaubanz.ac.ir

مدل‌سازی بستر الاستیک نیز می‌تواند با استفاده از فنرهای ارتجاعی انجام شود. مدل فنرهای ارتجاعی از مدل‌های متداول و پرکاربرد در زمینه مدل‌سازی رفتار اندرکنشی بین خاک و سازه با فرض رفتار ارتجاعی برای خاک است. به‌طوری‌که در چند دهه گذشته تلاش‌های زیادی صورت گرفته است تا دقت مدل مذکور افزایش یابد. از جمله مهم‌ترین مدل‌های ارائه شده در این راستا، می‌توان به مدل‌های پاسترناک[1]، وینکلر[2]، فلوننکو-بروديچ[3] و ولاسوو[4] اشاره کرد. مدل وینکلر که در این مقاله از آن استفاده شده است، یکی از رایج‌ترین مدل‌ها برای تحلیل تیرها بر روی بستر ارتجاعی می‌باشد که نخستین بار توسط وینکلر در سال ۱۸۶۷ ارائه گردید و سپس در سال ۱۸۷۷ توسط زیمرمان[5] توسعه یافت. به دلیل اهمیت موضوع حاضر، تحقیق در تیرهای دارای ترک روی بستر الاستیک تاکنون ادامه داشته که در اینجا گزارشی از مهم‌ترین تحقیقات انجام شده در این راستا ارائه می‌گردد. در یکی از نخستین تحقیقات انجام شده، تغییرات فرکانس طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک توسط ولید [۸]در سال ۱۹۹۵ بررسی گردید. در این مطالعه، اثرات سفتی فنر پیچشی که وابسته به شدت ترک‌خوردگی است، توسط یک فنر پیچشی بدون جرم معادل می‌شود و از یک روش آشفتگی برای تعیین مقادیر ویژه استفاده شده است. همچنین، یک تحلیل ارتعاشی در تیرهای دارای ترک روی بستر الاستیک که تحت بارگذاری محوری قرار دارند، با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی توسط هسوو [۹] در سال ۲۰۰۵ انجام شده است. در این تحقیق، تیرهای اویلر-برنولی دارای ترک منفرد روی بستر الاستیک در شرایط مرزی گیردار-آزاد به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته و معادله مقدار ویژه با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی حل می‌گردد. در ادامه، روش مربعات دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشی تیرهای مدرج دارای ترک روی بستر الاستیک تحت شرایط مرزی گیردار-آزاد توسط نصار و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۳ بکارگرفته شده است. در این تحقیق از دو مدل بستر ارتجاعی وینکلر و پاسترناک استفاده شد. یک مطالعه روی ارتعاشات آزاد تیری که دارای تعداد محدودی ترک عرضی است و با بستری الاستیک در تماس می‌باشد، توسط شین و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۶ انجام گردید. در این مطالعه، برای تحلیل تیرها از تئوری اویلر-برنولی و برای بستر الاستیک از دو مدل وینکلر و پاسترناک استفاده شده است. در این تحقیق، فنر بدون جرم برای مدل‌سازی ترک به کار برده شد و با ثابت فرض کردن بستر الاستیک، اثرات تغییر محل ترک، ابعاد ترک و تعداد آن روی پاسخ فرکانس طبیعی تیر بررسی گردید. فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی تیرهای مدرج دارای ترک روی بستر الاستیک، تحت بار متحرک با سرعت ثابت توسط یان و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۱ انجام شد. در این مطالعه، تیر توسط دو ریز-بخش متصل شده به هم با یک فنر پیچشی خطی، مدل‌سازی شده و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون، استخراج و به کمک روش گالرکین حل شده است. در این تحقیق اثر تغییر محل ترک، عمق ترک، ویژگی‌های گرادیان مواد، سرعت بار متحرک و پارامترهای سفتی بستر روی فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی تیر در شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. در تحقیقی دیگر، ارتعاشات آزاد تیرهای ترک‌خورده روی بستر الاستیک دو بعدی توسط میرزابیگی و بختیاری‌نژاد [۱۳] در سال ۲۰۱۴ مورد بررسی قرار گرفت. در این پژوهش، برای تحلیل تیر از تئوری تیرهای اویلر-برنولی و برای مدل‌سازی ترک و بستر الاستیک از فنرهای پیچشی به ترتیب در محل ناپیوستگی و در دو انتهای تیر و نزدیک تکیه‌گاه استفاده شده است؛ که با استفاده از معادلات حرکت و روش تبدیل دیفرانسیل، فرکانس‌های بدون بعد تیر استخراج گردید. در ادامه، ارتعاش آزاد یک تیر تیموشنکو با چندین ترک، با استفاده از شبکه‌ای از فنرها توسط عطار و همکاران [۱۴] در همان سال مورد مطالعه قرار گرفت. در این مطالعه، تیر دارای ترک توسط دو پایه الاستیک مهار و اثرات تغییر شکل برشی و خمشی تیر با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو لحاظ و تیر دارای ترک توسط شبکه‌ای از فنرها گسسته‌سازی شده است که در آن رابطه بین سفتی فنرها و ویژگی‌های الاستیک سازه شناسایی می‌شود. در ادامه و در سال ۲۰۱۴، قاسمی و آریایی [۱۵] با استفاده از تئوری اویلر-برنولی و تکنیک المان‌های گسسته یک فرمول‌بندی جامع را برای تحلیل ارتعاشی تیرهای دارای ترک بر روی بستر الاستیک وینکلر ارائه نمودند. با استفاده از این فرمول‌بندی و تعیین فرکانس‌های طبیعی سازه، محل و ابعاد ترک شناسایی می شود. آنالیز ارتعاش آزاد تیر گیردار-آزاد دارای ترک روی بستر وینکلر-پاسترناک توسط آکباس [۱۶] انجام شد. در این مطالعه،

1 Pasternak
2 Winkler
3 Flonenko-Borodich
4 Vlasove
5 Zimmermann

معادلات دیفرانسیل حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج و اثر موقعیت ترک، عمق ترک و سفتی بستر الاستیک روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها بررسی شده است. در این تحقیق، تیر از نقطه ترک به دو بخش تقسیم که این دو بخش با یک فنر پیچشی به یکدیگر متصل و این تیر ترک‌دار مدلسازی شده با استفاده از روش اجزای محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. تحلیل ارتعاشات عرضی تیرهای ترک‌خورده با مقطع مستطیلی روی بستر الاستیک پاسترناک توسط باتیان و کادیوگلو [۱۷] در سال ۲۰۱۶ انجام و در آن از دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو برای تحلیل تیرها استفاده شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که وجود ترک، فرکانس‌های طبیعی را کاهش می‌دهد، در حالی‌که بستر الاستیک، موجب افزایش سفتی سیستم و در نتیجه افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. خنجری و بنامار [۱۸] در سال ۲۰۱۷ یک مدل فیزیکی گسسته برای تحلیل ارتعاشی غیرخطی تیرهای ترک‌خورده روی پایه‌های الاستیک ارائه کردند. در این مدل، اثر ترک توسط یک فنر مارپیچ و به صورت کاهش سفتی مقطع مدل‌سازی شده و سفتی بستر وینکلر با استفاده از فنرهای عمودی خطی در نظر گرفته شده است. استفاده از روش رایلی برای تحلیل ارتعاشی تیرها مورد نظر بسیاری از محققان بوده است که در مرجع [۱۹] گزارش کاملی از آن ارائه می‌گردد. در سال ۲۰۱۸، علی‌جانی و همکاران [۲۰] با استفاده از سه روش تحلیلی (حل دقیق)، تقریبی (گالرکین) و عددی (المان محدود) یک تحلیل استاتیکی را برای تیرهای دارای ترک روی بسترالاستیک ارائه نمودند. در روش تحلیلی برای مدل‌سازی ترک از تابع دلتای دیراک استفاده شده است. چنانچه این تابع بر سفتی خمشی وارد شود یک تابع ناپیوسته از سفتی خمشی در راستای محور تیر ایجاد می‌گردد. ضریب تابع دلتای دیراک می‌تواند متناسب با عمق ترک یا متناظر با یک فنر پیچشی در نقطه ترک تعیین شود.

با در نظر گرفتن آخرین مقاله ذکر شده و در توسعه تحقیق مذکور، در اینجا یک تحلیل مودال برای تیر دارای ترک قرار گرفته بر بستر الاستیک ارائه می‌شود. بدین ترتیب نوآوری اصلی مقاله حاضر، (با توجه به مرجع [۲۰] مربوط به تحلیل استاتیکی) ارائه یک تحلیل مودال برپایه روش رایلی و استفاده از تابع دلتای دیراک در این تحلیل می‌باشد. در این مقاله، روابطی جدید برای استخراج فرکانس طبیعی تیر اویلر-برنولی دارای ترک قرار داده شده روی بستر الاستیک پیشنهاد می‌شود. به منظور مدل‌سازی ترک از تابع دلتای دیراک در معادله دیفرانسیل حاکم استفاده شده و ضریب این تابع توسط مشخصات هندسی و مادی ترک تنظیم می‌گردد. مدل‌سازی بستر الاستیک توسط یک توزیع گسترده از فنرهای خطی انجام که ضریب سفتی آن بر اساس مشخصات بستر مشخص می‌گردد. دو مشخصه ارزشمند روابط صریح استخراج شده، سادگی معادلات و دقت مناسب نتایج می‌باشد. دقت نتایج به دست آمده توسط یک مدل‌سازی کامل در نرم‌افزار آباکوس ارزیابی و اثرات عمق ترک، مکان ترک و بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف روی نتایج فرکانس طبیعی تیر بررسی می‌شود.

۲- فرمول‌بندی

برای دستیابی به یک فرمول‌بندی صریح برای فرکانس ارتعاشی تیر دارای ترک روی بسترالاستیک، در ادامه روابط در سه زیربخش شامل مدل‌سازی ترک، مدل بستر وینکلر و روش رایلی ارائه می‌شود.

۲-۱-مدل‌سازی ترک

در تحلیل حاضر، مدل‌سازی ترک با استفاده از اعمال یک تابع دلتای دیراک بر سفتی خمشی تیر انجام می‌گیرد. در این مدل فرض می‌شود که گشتاور دوم سطح در نقطه ترک دارای یک ناپیوستگی است و این تابع ناپیوسته به فرم رابطه (۱) بیان می‌شود [۳]:

$$EI\left(x\right)=EI_0\left(1-\gamma\delta\left(x-x_0\right)\right) \tag{۱}$$

تابع دلتای دیراک تابعی است که مقدار آن در همه نقاط غیر از محل ترک صفر است. در رابطه (۱)، x_0 فاصله مکان ترک از انتهای سمت چپ تیر و γ شدت ناپیوستگی را مشخص می‌کند. بکارگیری این مدل (تابع ناپیوسته سفتی خمشی) می‌تواند متناظر با مدل فنر پیچشی در نظر گرفته شود به‌شرطی‌که بین γ و k_s یعنی ضریب سفتی فنر پیچشی رابطه ذیل برقرار باشد [۴].

$$k_s=\frac{1-\gamma\hat{A}}{\gamma}EI_0 \tag{۲}$$

که در آن، $\hat{A}=۲/۰۱۳$ در نظر گرفته می‌شود [۳]. چنانچه γ برحسب k_s نوشته شود خواهیم داشت:

$$\gamma = \frac{EI_0}{k_s + \hat{A} EI_0} \qquad (۳)$$

شکل ۱(ب) و ۱(ج) دو مدل متناظر برای شبیه‌سازی ترک را معرفی می‌نماید که معادل با یک تیر دارای ترک مطابق با شکل ۱(الف) می‌باشد. در تحلیل موادال حاضر از مدل ناپیوسته سفتی خمشی (شکل ۱(ب)) استفاده شده است. در مدل اخیر تعیین ضریب γ ضروری است که مطابق با رابطه (۳) با تعیین k_s می‌توان γ را بدست آورد. ضریب سفتی فنر پیچشی k_s می‌تواند برحسب عمق ترک و خواص مادی و هندسی تیر تعیین شود.

روابط متعددی برای تعیین سفتی فنر پیچشی در مود بازشدگی ترک پیشنهاد شده است [۷-۵]. همگی این روابط براساس نرخ آزادسازی انرژی و تعیین ضریب شدت استخراج شده‌اند. در تحلیل حاضر از رابطه (۴) ارائه شده توسط ریسی و ویولا [۵] در تعیین ضریب سفتی فنر پیچشی استفاده می‌شود:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E} \int_0^a \left(\frac{1}{I_c} - \frac{1}{I_0}\right) da \qquad (۴)$$

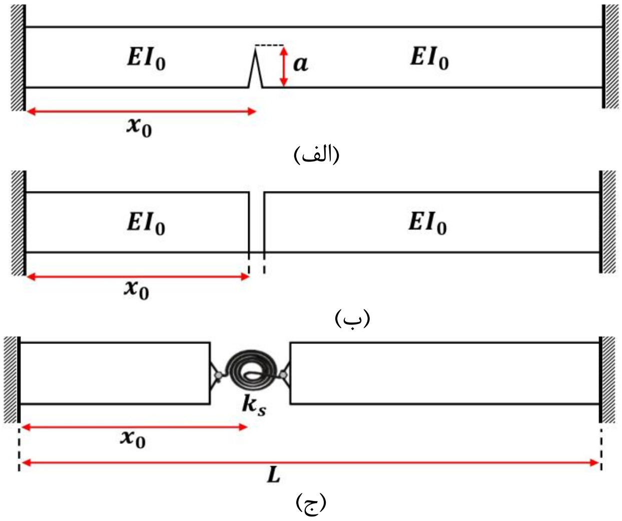
بنابراین با جایگذاری رابطه (۴) در (۳) مقدار γ بدست آمده و با استفاده از معادله (۱) تابع سفتی خمشی در طول تیر حاصل می‌شود.

۲-۲-مدل بستر الاستیک وینکلر

یکی از مدل‌سازی‌های مرسوم در تحلیل بسترهای الاستیک، استفاده از مجموعه فنرهای توزیعی الاستیک خطی وینکلر مطابق شکل ۲ می‌باشد. در این مدل، محیط خاک به صورت محیطی همگن، همسانگرد و دارای رفتار کشسان خطی فرض می‌گردد [۲۱].

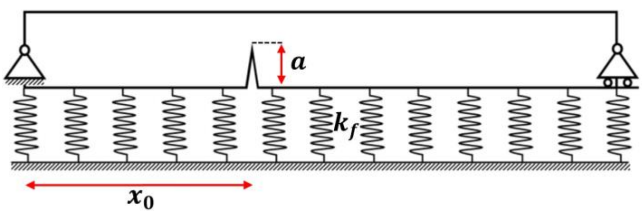
۲-۳- روش رایلی

روش رایلی یکی از روش‌های مناسب برای حل تقریبی مسائلی است که برای آن‌ها راه‌حل تحلیلی دقیقی وجود ندارد و یا در صورت وجود، بسیار پیچیده‌اند [۲۲]. در روش رایلی، فرکانس طبیعی سازه با استخراج نسبت انرژی‌های پتانسیل و جنبشی بیشینه تعیین می‌گردد. در اینجا، برای محاسبه انرژی کل تیر دارای ترک روی بستر الاستیک می‌بایست انرژی پتانسیل و جنبشی در طول تیر ترک‌خورده با درنظر گرفتن اثرات بستر الاستیک تعیین شود. انرژی پتانسیل تیر دارای ترک با درنظرگرفتن رابطه (۱) بصورت رابطه (۵) ارائه می شود



شکل ۱: الف) تیر اویلر-برنولی دارای ترک؛ ب) مدل ناپیوسته سفتی خمشی؛ ج) مدل فنر پیچشی

Fig. 1: (a) Euler-Bernoulli cracked beam; (b) discontinuous model of flexural stiffness; (c) rotational spring model



شکل ۲: مدل بستر الاستیک وینکلر در تیر دارای ترک

Fig. 2: Model of Winkler elastic foundation in cracked beam

$$\Pi_c^B = \frac{1}{2}\int_0^L EI_0\left[1-\gamma\delta\left(x-x_0\right)\right]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \qquad (۵)$$

۱-۳-۲- انرژی پتانسیل تیر دارای ترک روی بستر الاستیک

انرژی پتانسیل تیر دارای ترک روی بستر الاستیک به صورت مجموع انرژی پتانسیل تیر دارای ترک و انرژی پتانسیل بستر، مطابق رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$\Pi_c^{st} = \Pi_c^B + \Pi_0^F \qquad (۶)$$

که در آن انرژی پتانسیل بستر الاستیک (Π_0^F) به صورت رابطه (۷) ارائه می‌گردد.

$$\Pi_0^F = \frac{1}{2}\int_0^L k_f w^2 dx \qquad (۷)$$

۲-۳-۲- انرژی جنبشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک

انرژی جنبشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک به صورت رابطه (۸) ارائه می‌شود.

$$K_c^{st} = K_c^B + K_0^F \tag{۸}$$

که در آن:

$$K_c^B = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx \tag{۹}$$

از آنجایی‌که برای مدل‌سازی بستر الاستیک از مدل فنرهای ارتجاعی استفاده شده است و جرم فنر ناچیز می‌باشد؛ در نتیجه انرژی جنبشی بستر برابر صفر در نظر گرفته می‌شود ($K_0^F = ۰$).

۳-۳-۲- اعمال شرایط مرزی

در روش تقریبی رایلی به منظور ارضای شرایط مرزی تیر، یک تابع جابجایی متناسب با تغییر شکل مودال تیر نظیر $X(x)$ حدس زده می‌شود. تخمین هرچه دقیق‌تر این تابع موجب افزایش دقت پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر می‌گردد. به منظور یک تقریب اولیه مناسب برای تابع جابجایی، با توجه به شرایط مرزی و قیدهای تیر، یک معادله پایه سینوسی برای حرکت تیر مطابق رابطه (۱۰) فرض می‌گردد.

$$w(x,t) = X(x)\sin\omega t \tag{۱۰}$$

با جایگذاری معادله (۱۰) در روابط (۵) الی (۹) بیشینه انرژی پتانسیل و جنبشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک استخراج می‌گردد.

$$\Pi_{c_{Max}}^{st} = \frac{1}{2}\int_0^L EI_0 (X'')^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L EI_0 \gamma\delta (x-x_0)(X'')^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L k_f X^2 dx \tag{۱۱}$$

$$K_{c_{Max}}^{st} = \frac{\omega^2}{2}\int_0^L \rho A X^2 dx \tag{۱۲}$$

در صورتی‌که تیر با فرکانس طبیعی ω در حال ارتعاش فرض گردد، بیشینه انرژی پتانسیل هنگامی رخ می‌دهد که جابجایی تمام نقاط تیر حداکثر و سرعت آن‌ها صفر باشد. به‌طور معکوس، بیشینه انرژی جنبشی هنگامی اتفاق می‌افتد که تیر از مکان تعادل عبور کرده و سرعت تمام نقاط در راستای طولی تیر بیشینه شود. از آنجایی‌که انرژی کل سیستم پایستار مطابق با معادله (۱۳-الف) همواره باید ثابت باشد، بنابراین میزان فرکانس طبیعی می‌تواند با استفاده از روش رایلی مطابق معادله (۱۳-ج) تعیین شود.

$$\Pi_c^{st} + K_c^B = \text{Constant} \tag{۱۳-الف}$$

با در نظرگرفتن نقاط ماکزیمم انرژی‌های جنبشی و پتانسیل خواهیم داشت:

$$\Pi_{c_{Max}}^{st} = K_{c_{Max}}^{st} \tag{۱۳-ب}$$

که فرکانس طبیعی سازه به فرم زیر می‌تواند از آن استخراج شود:

$$\omega = \sqrt{\frac{\Pi_{c_{Max}}^{st}}{\frac{1}{2}\int_0^L \rho A X^2 dx}} \tag{۱۳-ج}$$

تابع جابجایی فرض شده یا شکل مود ارتعاشی یک تیر سالم برای سه شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد به ترتیب در روابط (۱۴) ارائه می‌گردد. ذکر این نکته ضروری است که در همسایگی نقطه ترک، سه شرط پیوستگی شامل پیوستگی در خیز، گشتاور (مشتق دوم خیز) و نیروی برشی (مشتق سوم خیز) [۲۰] برقرار است؛ درحالی‌که شیب در نقطه ترک ناپیوسته است. منظور از پیوستگی، برابری پارامترها در مجاورت سمت چپ و سمت راست نقطه ترک می‌باشد. بنابراین مطابق با پیوستگی خیز در طول تیر، شکل مود یا تابع جابجایی فرض شده یک تیر سالم (رابطه (۱۴)) می‌تواند برای تیر ترک‌دار نیز استفاده شود. بر این اساس و با درنظر گرفتن شکل مود تیر سالم در شرایط مرزی مختلف، این شکل مود در تعیین انرژی پتانسیل تیر ترک‌دار به دلیل پیوستگی مشتق دوم خیز در طول تیر و در تعیین انرژی جنبشی تیر ترک‌دار به علت پیوستگی خیز در طول تیر می‌تواند استفاده شود.

$$X = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{۱۴-الف}$$

$$X = 1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \tag{۱۴-ب}$$

$$X = 1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{۱۴-ج}$$

با جایگذاری روابط (۱۴) در روابط (۱۱) و (۱۲)، فرکانس طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک در سه شرایط مرزی مذکور به ترتیب مطابق معادلات (۱۵) ارائه می‌گردد.

$$\omega_{ss}=\sqrt{\frac{\frac{1}{12}\zeta_1-\frac{1}{72}\zeta_2\sin\left(\frac{\pi x_0}{L}\right)^2+k_f L}{\rho LA}} \quad \text{(۱۵-الف)}$$

$$\omega_{CC}=\sqrt{\frac{\frac{4}{9}\zeta_1-\frac{2}{27}\zeta_2\cos\left(\frac{2\pi x_0}{L}\right)^2+k_f L}{\rho LA}} \quad \text{(۱۵-ب)}$$

$$\omega_{CF}=\sqrt{\frac{\frac{1}{192}\zeta_1-\frac{1}{1152}\zeta_2\cos\left(\frac{\pi x_0}{2L}\right)^2+k_f L\left(\frac{3\pi-8}{\pi}\right)}{\rho LA\left(\frac{3\pi-8}{\pi}\right)}} \quad \text{(۱۵-ج)}$$

که در آن پارامترهای ζ_1 و ζ_2 به صورت روابط (۱۶-الف) و (۱۶-ب) تعریف می‌شوند.

$$\zeta_1=\frac{Ebh^3\pi^4}{L^3} \quad \text{(۱۶-الف)}$$

$$\zeta_2=\frac{Ebh^3\pi^4}{\left(\frac{\hat{A}}{12}+\frac{h^2-2ha+a^2}{12a^2\left(v^2-1\right)\left(2a-3h\right)}\right)L^4} \quad \text{(۱۶-ب)}$$

۴-۲-مدل‌سازی عددی

در این مقاله، مدل‌سازی عددی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک در محیط نرم‌افزار آباکوس [۲۳] انجام می‌شود. دو روش رایج برای مدل‌سازی ترک به روش اجزای محدود در نرم افزار آباکوس، عبارتند از روش کانتور انتگرال و روش اجزای محدود توسعه یافته[1]. روش کانتور انتگرال زمانی‌که از رشد ترک صرف‌نظر شود مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ در حالی‌که در روش اجزای محدود توسعه یافته، اثرات رشد ترک نیز در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه برای مدل‌سازی ترک از روش نخست (روش کانتور انتگرال) استفاده شده است. در این روش، مدل‌سازی ترک در دو مرحله مدل‌سازی هندسی و رفتاری انجام می‌گیرد. در مرحله مدل‌سازی هندسی، ترک با یک ناپیوستگی (ضعف هندسی) در المان‌ها ایجاد می‌شود و برخی پارامترهای مهم، نظیر جبهه ترک و زاویه ترک معرفی می‌گردد. در مرحله مدل‌سازی رفتاری ترک، میزان چسبندگی بین دو وجه ترک، انتخاب روش تعیین نرخ آزادسازی انرژی ترک و مود تحلیل ترک مشخص و به نرم‌افزار معرفی می‌شود. به‌عبارت دیگر برای مدل‌سازی ترک، یک ضعف هندسی معادل با عمق ترک با استفاده از روش کانتور انتگرال در مقطع تیر ایجاد شده و بازشدگی ناشی از ترک در مود اول مدل‌سازی می‌گردد.

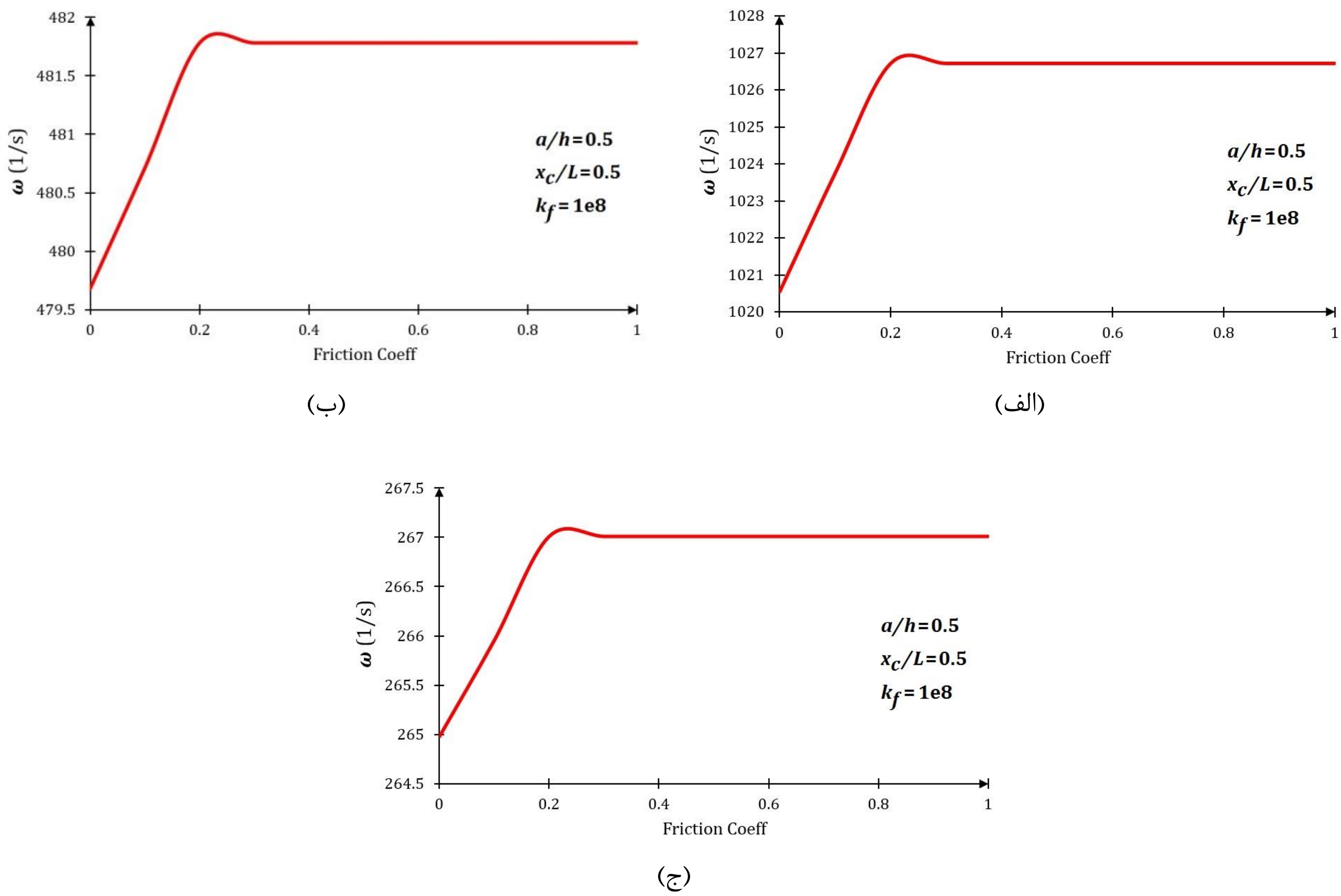
برای مدل‌سازی بستر الاستیک به روش تقریبی و اجزای محدود از یک یا چند فنر معادل، مطابق با شکل ۲ استفاده می‌شود. مدل‌سازی بستر الاستیک به روش اجزای محدود، در نرم افزار آباکوس در سه مرحله انجام می‌گیرد که عبارتند از: مدل‌سازی هندسی، مادی و رفتاری. در مرحله نخست، مدل‌سازی هندسی بستر الاستیک با ایجاد یک هندسه اولیه انجام می‌شود. در این مرحله ارتفاع بستر (h_f) معادل با ارتفاع فنر و طول بستر (L_f) معادل با طول تیر فرض شده است. در مرحله دوم برای مدل‌سازی مادی بستر الاستیک، مدول الاستیسته بستر (E_f) به صورت تابعی از سفتی فنر (k_f)، مطابق با رابطه (۱۷) تعیین شده و به نرم‌افزار معرفی می‌گردد. مقدار پارامتر n در رابطه مذکور می تواند براساس تعداد فنرهای به کار رفته در زیر تیر (یک یا بیشتر) تنظیم گردد. در مرحله سوم برای شبیه‌سازی رفتار بسترالاستیک، اثرات تماسی و اندرکنشی بین سطح تحتانی تیر و سطح فوقانی بستر با معرفی قیود تماسی و ضریب اصطکاک در بین دو سطح انجام شده و رفتارهای نرمال و مماسی سطح تماس در نرم‌افزار تعریف می‌شود. بنابراین، مدل‌سازی بستر الاستیک به صورت یک بخش مجزا و با تعریف مشخصات هندسی و مادی معادل با فنرهای ارتجاعی انجام می‌شود و ضریب اصطکاک بین تیر و بستر الاستیک ۰/۲ فرض می‌گردد. ذکر این نکته ضروری است که تغییر ضرایب اصطکاک (بین ۰ تا ۱) تاثیر ناچیزی را بر نتایج فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. توصیف کمی این نکته در شکل ۳ برای شرایط مرزی مختلف ارائه می‌شود. همانطورکه در شکل ۳ نشان داده شده است با توجه به ساختار مساله، استفاده از ضرایب اصطکاک مختلف تاثیر چندانی در نتایج نخواهد داشت اما مناسب‌تر است به دلیل پایداری جواب‌ها بین ضرایب اصطکاک ۰/۲ تا ۱ از ضریب اصطکاک ۰/۲ در تحلیل استفاده شود.

به دلیل جرم ناچیز فنرهای ارتجاعی، چگالی بستر الاستیک برابر صفر در نظر گرفته می‌شود و مدول الاستیسته آن با استفاده از رابطه (۱۷) به صورت تابعی از سفتی فنرهای ارتجاعی تعریف می‌گردد.

$$E_f=\frac{k_f L_f h_f}{nA_f} \quad \text{(۱۷)}$$

که در آن k_f ضریب سفتی فنرهای ارتجاعی بستر، n تعداد

1 Extended Finite Element Method (XFEM)



شکل ۳: اثرضریب اصطکاک بین تیر و بستر بر روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف؛ الف) گیردار-گیردار؛ ب) ساده-ساده؛ ج) گیردار-آزاد

Fig. 3: Effect of the friction coefficient between beam and foundation on natural frequency in different boundary conditions; a) Clamped-clamped; b) Simply supported-simply supported; c) Clamped-free

فنرها، A_f سطح مقطع فنرهای ارتجاعی، E_f مدول الاستیسیته بستر، L_f طول بستر و h_f ارتفاع بستر (طول فنر ارتجاعی) تعریف می‌گردد. در نتیجه با فرض یک بستر ارتجاعی کاملا پیوسته در زیر تیر ($n=۱$)، ضریب سفتی فنر ارتجاعی معادل بستر از رابطه (۱۸) استخراج می‌گردد.

$$k_f = \frac{A_f E_f}{L_f h_f} \quad (۱۸)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۸) که در آن $A_f = b \times L_f$ است و با بررسی رابطه (۱۵) مشاهده می‌شود که رابطه استخراج شده برای فرکانس طبیعی در هر سه شرط مرزی به ضخامت تیر (b) وابسته نبوده و این پارامتر از صورت و مخرج کسر حذف خواهد شد.

۳- نتایج

در این بخش ابتدا صحت و دقت روش رایلی برای تحلیل مودال تیرهای دارای ترک روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این بررسی، مقادیر فرکانس طبیعی بدست آمده از روش تقریبی رایلی با مقادیر روش عددی از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌گردد. سپس اثرات تغییر عمق و محل ترک روی فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک روی بستر در سه شرط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بررسی می‌شود.

۳-۱- مطالعه موردی

در اینجا مشخصات مادی و هندسی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک مطابق جدول ۱ ارائه می‌شود.

۳-۲- صحت‌سنجی نتایج با تغییر عمق ترک

برای بررسی دقت مدل پیشنهاد شده، تغییر مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از افزایش عمق ترک از ۰-۰/۵ ارتفاع مقطع تیر، با استفاده از روش رایلی و شبیه‌سازی عددی در نرم‌افزار آباکوس

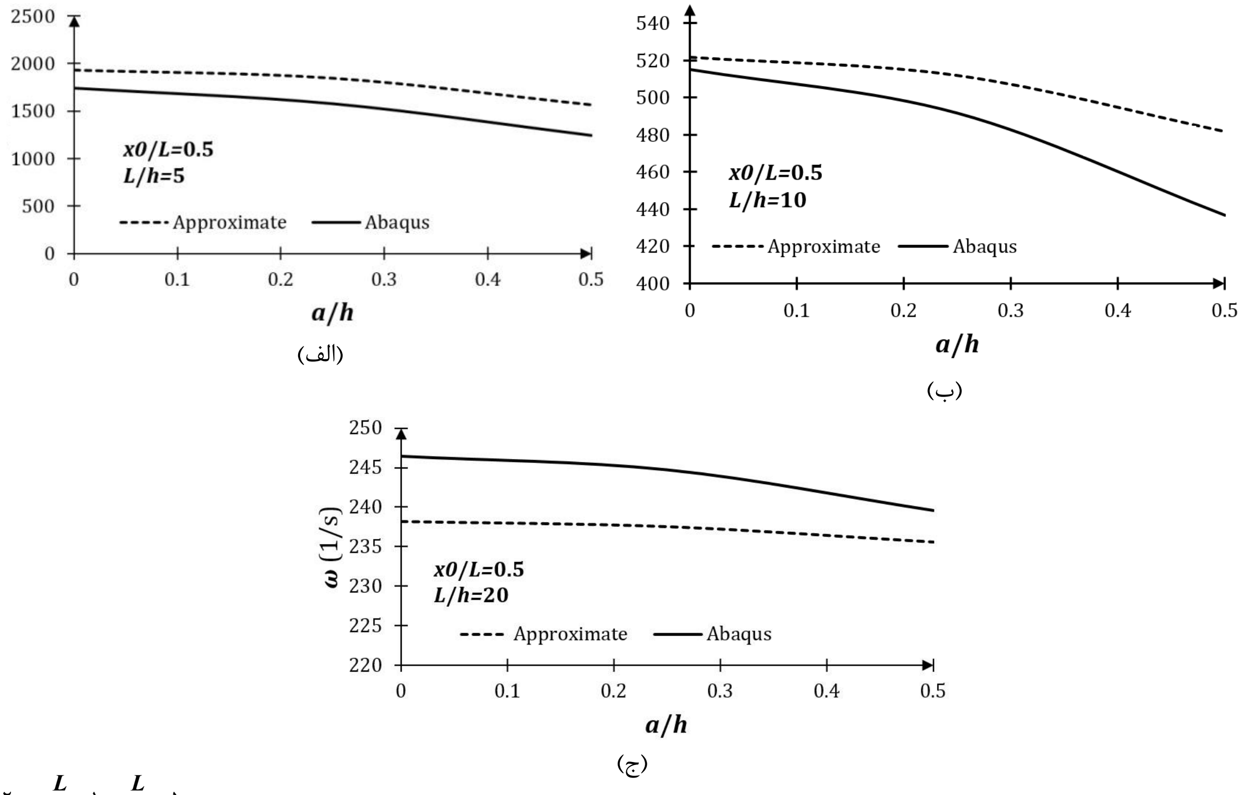
جدول ۱: مشخصات هندسی و مادی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک

Table 1: Geometric and material characteristics of the cracked beam on the elastic foundation

مشخصات مادی	مشخصات هندسی
$E = ۲۰۰ \times ۱۰^{۹}\ \mathrm{N/m^{۲}}$	$L = ۳\mathrm{m}$
$\nu = ۰/۳$	$h = ۰/۳\mathrm{m}$
$\rho_f = ۰$	$a/h = ۰/۰ - ۰/۵$
$\rho = ۷۸۶۰\ \mathrm{N/m^{۳}}$	$x_0/L = ۰ - ۱$
$E_f = ۴ \times ۱۰^{۷}\ \mathrm{N/m^{۲}}$	$L_f = ۳\mathrm{m}$
$k_f = ۱ \times ۱۰^{۸}\ \mathrm{N/m^{۲}}$	$h_f = ۰/۴\mathrm{m}$

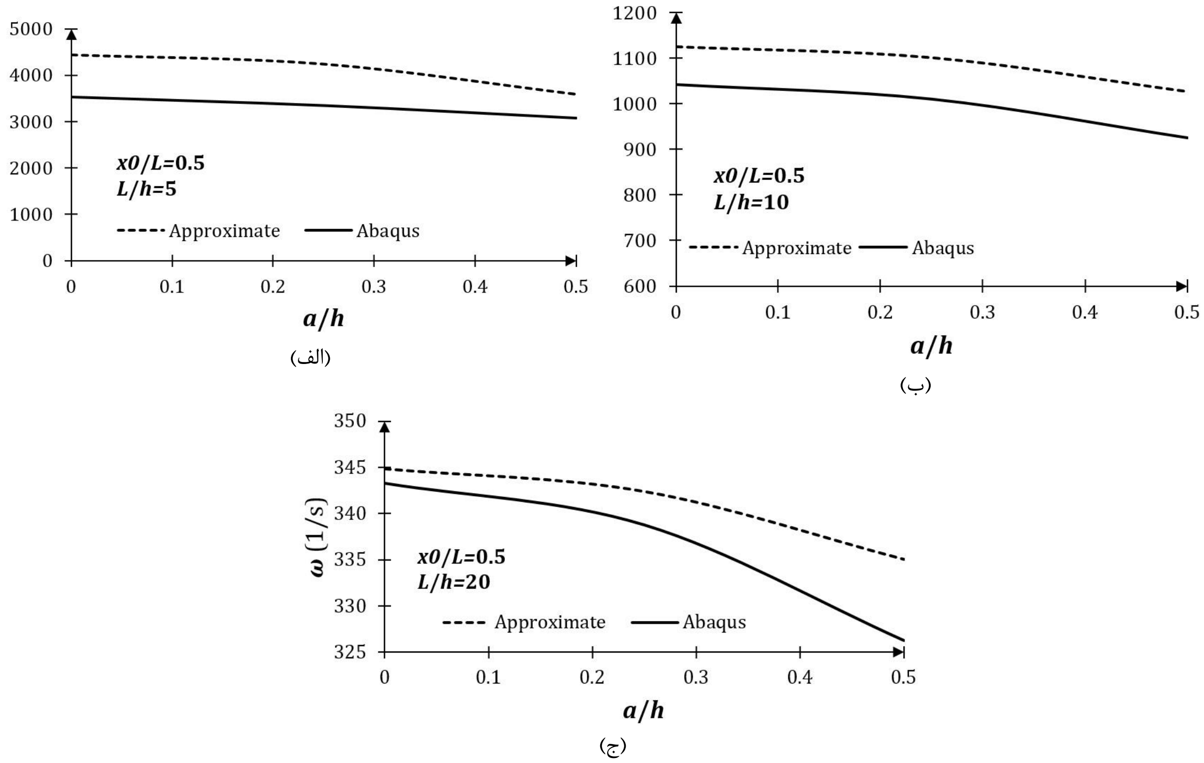
مقایسه و در سه شرط مرزی مختلف مطابق با شکل‌های ۴، ۵ و ۶ ارائه می‌گردد. محل ترک در میانه تیر فرض شده است. علاوه بر آن، یک بررسی بر روی اثر نسبت طول به ارتفاع $\left(\frac{L}{h}\right)$ بر نتایج در سه شرط مرزی انجام می‌شود که در آن برای سه نسبت $\left(\frac{L}{h}\right)$ برابر با ۵، ۱۰و ۲۰ رفتار فرکانسی تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق با جدول ۱ برای افزایش یا کاهش نسبت طول به ارتفاع، طول بصورت متغیر و ارتفاع بصورت ثابت درنظر گرفته شده است. مقایسه تغییر فرکانس طبیعی ناشی از تغییر عمق ترک در شرایط مرزی ساده-ساده با دو روش تقریبی و عددی مطابق شکل ۴ ارائه می‌شود.

مقایسه نتایج حاصل از دو روش تقریبی و عددی در شرایط مرزی ساده-ساده و برای سه نسبت طول به ارتفاع نشان می‌دهد که چنانچه نسبت طول به ارتفاع کاهش یابد به علت نادیده گرفتن اثرات برشی در روش رایلی اختلاف بین دو روش افزایش می‌یابد. یک نگاه مقداری به شکل ۴ نشان می‌دهد حداکثر اختلاف بین نتایج دو روش در سه نسبت ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب تقریبا ۲۰٪، ۱۰/۳۶٪ و ۳/۵٪ می‌باشد. همچنین با مقایسه شکل ۴ج با دو شکل ۴الف و ۴ب مشاهده می‌شود که در $\frac{L}{h} = ۲۰$، نتایج آباکوس بالای نتایج روش رایلی قرار می‌گیرد. این رفتار متفاوت نتایج فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف (با مراجعه به شکل‌های ۵ و ۶) و $\frac{L}{h}$های متفاوت ناشی از تاثیر شرایط مرزی و هندسه سازه بر سفتی و استحکام آن و در نهایت بر معادلات استخراج شده می‌باشد. بعبارت دیگر، نتایج روش اجزای محدود (آباکوس) با توجه به درنظر گرفتن اثرات برشی و نتایج روش رایلی (معادلات استخراج شده براساس تئوری تیر اویلر-برنولی) پاسخ‌های



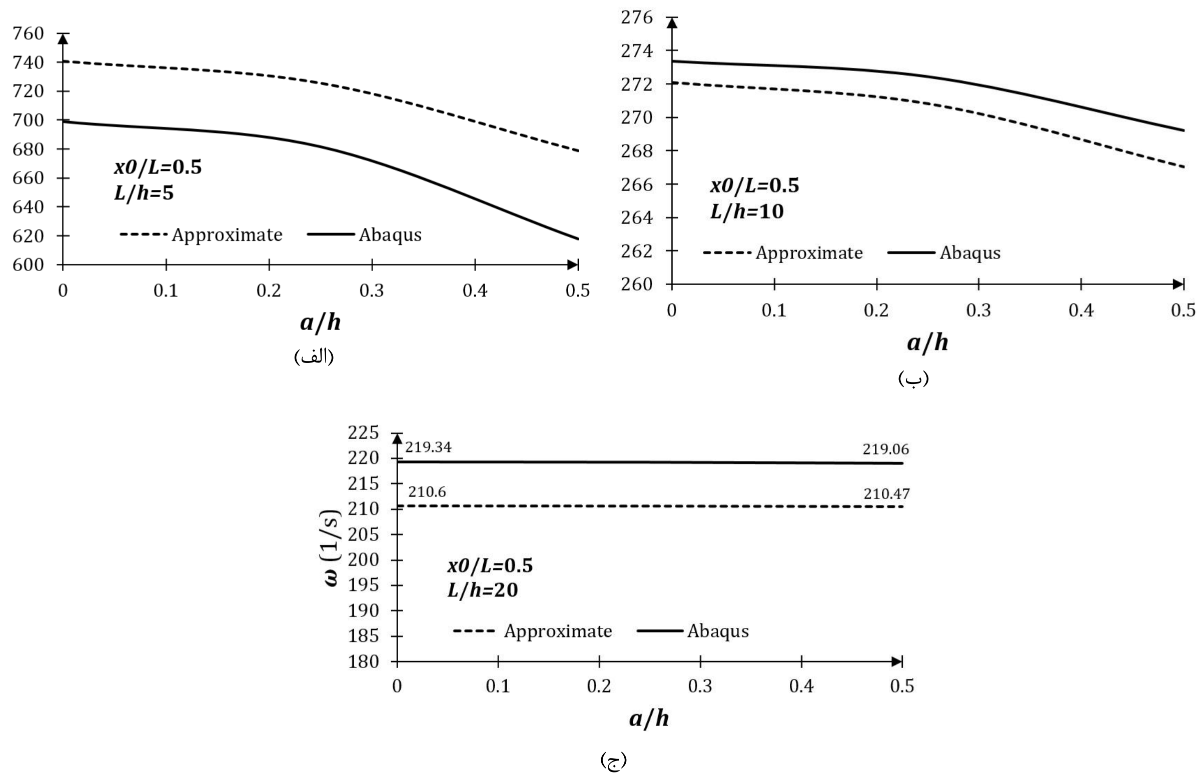
شکل ۴: مقایسه دو روش تقریبی و عددی برای تعیین فرکانس طبیعی برحسب عمق ترک در شرایط مرزی ساده-ساده؛ الف) $\frac{L}{h} = ۵$؛ $\frac{L}{h} = ۱۰$ و $\frac{L}{h} = ۲۰$

Fig. 4: Comparison of approximate and numerical methods for determining the natural frequency in terms of the crack depth in simply supported-simply supported boundary condition; a) $\frac{L}{h} = 5$; b) $\frac{L}{h} = 10$ and c) $\frac{L}{h} = 20$



شکل ۵: مقایسه دو روش تقریبی و عددی برای تعیین فرکانس طبیعی برحسب عمق ترک در شرایط مرزی گیردار-گیردار؛ الف) $\frac{L}{h}=5$؛ $\frac{L}{h}=10$ و $\frac{L}{h}=20$

Fig. 5: Comparison of approximate and numerical methods for determining the natural frequency in terms of the crack depth in clamped-clamped boundary condition; a) $\frac{L}{h}=5$; b) $\frac{L}{h}=10$ and c) $\frac{L}{h}=20$



شکل ۶: مقایسه دو روش تقریبی و عددی برای تعیین فرکانس طبیعی برحسب عمق ترک در شرایط مرزی گیردار-آزاد؛ الف) $\frac{L}{h}=5$؛ $\frac{L}{h}=10$ و $\frac{L}{h}=20$

Fig. 6: Comparison of approximate and numerical methods for determining the natural frequency in terms of the crack depth in clamped-free boundary condition; a) $\frac{L}{h}=5$; b) $\frac{L}{h}=10$ and c) $\frac{L}{h}=20$

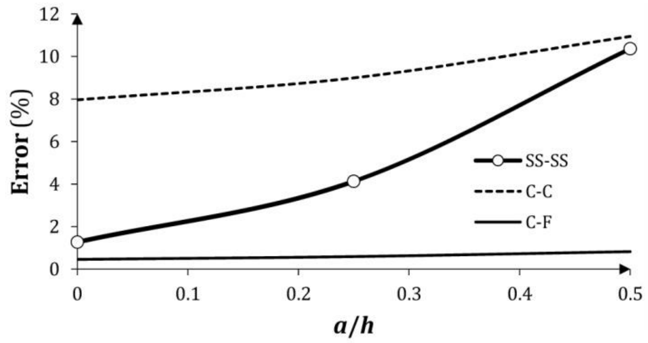
یکسانی نسبت به تغییر سفتی و استحکام سازه نشان نمی‌دهند.

شکل ۵ برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، مقایسه دو روش تقریبی و عددی و همچنین تاثیر عمق‌های مختلف ترک بر فرکانس طبیعی در سه نسبت طول به ارتفاع مختلف را نشان می‌دهد. مطابق شکل ۵، حداکثر اختلاف بین دو روش رایلی و آباکوس در سه نسبت طول به ارتفاع ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب تقریبا ۲۵/۵٪، ۱۰/۹٪ و ۲/۸٪ می‌باشد. تحلیل مشابه برای شرایط مرزی گیردار-آزاد در شکل ۶ نیز نشان می‌دهد که اختلاف بین نتایج تحلیل آباکوس و رایلی با افزایش نسبت طول به ارتفاع، کاهش می‌یابد. همچنین همانطورکه در شکل ۶ج نشان داده شده است چنانچه نسبت طول به ارتفاع از مقدار مشخصی بیشتر شود عمق ترک تاثیر چندانی بر روی فرکانس نخواهد داشت و پارامتر تاثیرگذار و غالب در تحلیل، سفتی بستر خواهد بود.

در تشریح رفتار شرایط مرزی مختلف می‌توان ذکر نمود که شرایط مرزی گیردار-گیردار، ساده-ساده و گیردار-آزاد به ترتیب بیشترین تا کمترین مقاومت در برابر تغییر شکل را نشان می‌دهند؛ همچنین تیرهایی با $\frac{L}{h}=۵$، $\frac{L}{h}=۱۰$ و $\frac{L}{h}=۲۰$ نیز به ترتیب بیشترین تا کمترین استحکام را در شرایط مادی و تکیه‌گاهی یکسان نتیجه می‌دهند. از مطلب فوق استنتاج می‌شود که در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ چنانچه استحکام و پایداری سازه کاهش یابد (افزایش نسبت طول به ارتفاع و بکارگیری شرایط مرزی ساده-ساده یا گیردار-آزاد)؛ نتایج آباکوس بالای نتایج روش رایلی و چنانچه استحکام سازه افزایش یابد (کاهش نسبت طول به ارتفاع یا بکارگیری شرط مرزی گیردار-گیردار) نتایج آباکوس پایین‌تر از نتایج روش رایلی خواهد بود. چشم‌پوشی از اثرات برشی در روش رایلی (مبتنی بر تئوری تیر اویلر-برنولی) و از سوی دیگر درنظر گرفتن اثرات برشی در روش عددی می‌تواند علت اصلی این رفتار متفاوت باشد.

با در نظر گرفتن روش عددی به عنوان جواب مرجع، خطای روش تقریبی برحسب عمق ترک برای $\frac{L}{h}=۱۰$، در شکل ۷ ارائه می‌شود. بیشترین مقدار خطا در شرایط مرزی گیردار-گیردار و کمترین مقدار خطا در شرایط مرزی گیردار-آزاد دیده می‌شود. این بررسی نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک با وجود افزایش خطا، روش تقریبی ارائه شده برای تحلیل رفتار مودال تیرهای دارای ترک روی بستر الاستیک، از دقت مطلوبی برخوردار است.

شکل ۷ و بررسی مقادیر فرکانس طبیعی در تیرهای بدون ترک



شکل ۷: خطای روش تقریبی با افزایش عمق ترک در نسبت طول به ارتفاع ۱۰

Fig. 7: Error of the approximate method with increasing the crack depth in $\frac{L}{h}=10$

جدول۲: بررسی اختلاف نتایج تحلیل رایلی و آباکوس در تیرهای بدون ترک بر روی بستر الاستیک گیردار-گیردار برای سه نسبت طول به ارتفاع

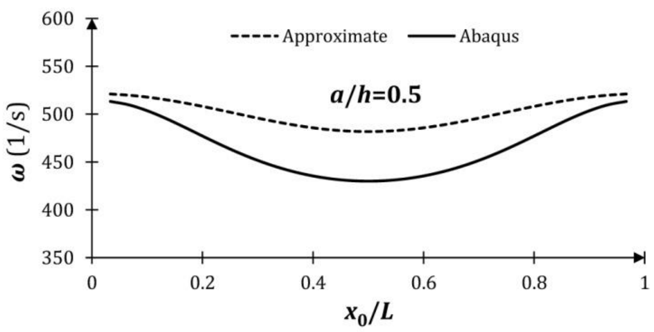
Table 2: Investigation of the difference between results of Rayleigh and ABAQUS analysis in clamped-clamped perfect beams resting on the elastic foundation for three length to height ratios

L/h	رایلی	آباکوس	اختلاف (%)
۵	۴۴۳۰/۱۷۳	۳۵۲۸/۸	۲۵/۵۴۳۳۲
۱۰	۱۱۲۵/۳۴۹	۱۰۴۲/۴	۷/۹۵۷۴۹۵
۲۰	۳۴۴/۸۳۱۷	۳۴۳/۲۸	۰/۴۵۲۰۲۵

($\frac{a}{h}=۰$)نشان می‌دهد که اختلافی بین نتایج آباکوس و رایلی در تیرهای کوتاه ($\frac{L}{h}<۲۰$) وجود دارد. یکی از عوامل موثر اختلاف نتایج دو تحلیل، صرف‌نظر کردن از اثرات برشی در روش رایلی می‌باشد که تاثیر بیشتری بر نتایج تیرهای کوتاه به ویژه در شرایط مرزی گیردار-گیردار خواهد داشت. بدین ترتیب برای بررسی تاثیر افزایش نسبت طول به ارتفاع بر نتایج، جدول ۲ ارائه می‌شود که بطور مشخص نشان می‌دهد با افزایش نسبت طول به ارتفاع، اختلاف نتایج بین دو روش در تیر بدون ترک کاهش می‌یابد؛ هر چند منابع دیگر اختلاف که در ادامه ذکر می‌گردند می‌توانند سبب اختلاف کوچک باقیمانده شوند.

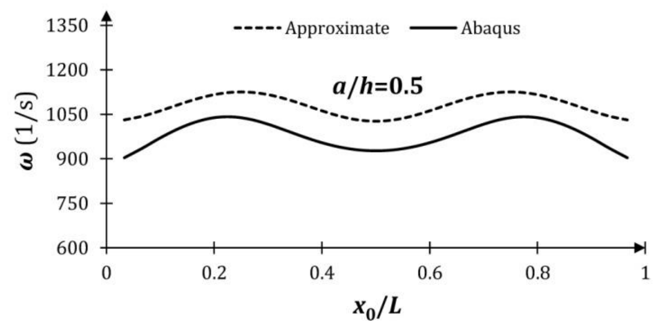
۳-۳- صحت‌سنجی نتایج با تغییر محل ترک

در این بخش، دقت مقدار فرکانس طبیعی حاصل از مدل پیشنهادی بررسی می‌شود؛ که در آن محل ترک بین ۰-۱ طول تیر تغییر می‌کند و عمق ترک، نصف ارتفاع تیر فرض می‌شود. در اینجا



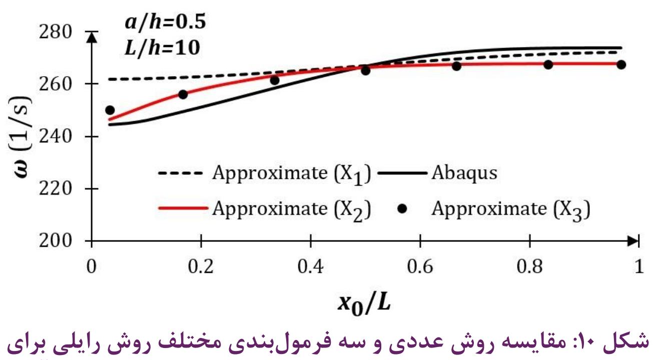
شکل ۸: مقایسه دو روش تقریبی و عددی برای تعیین فرکانس طبیعی برحسب محل ترک در شرایط مرزی دوسر ساده

Fig. 8: Comparison of approximate and numerical methods for determining the natural frequency in terms of the crack position in simply supported-simply supported boundary condition



شکل ۹: مقایسه دو روش تقریبی و عددی برای تعیین فرکانس طبیعی برحسب محل ترک در شرایط مرزی دوسر گیردار

Fig. 9: Comparison of approximate and numerical methods for determining the natural frequency in terms of the crack position in clamped-clamped boundary condition



شکل ۱۰: مقایسه روش عددی و سه فرمول‌بندی مختلف روش رایلی برای تعیین فرکانس طبیعی برحسب محل ترک در شرایط مرزی گیردار-آزاد

Fig. 10: Comparison of numerical method and three different formulations of Rayleigh method for determining the natural frequency in terms of the crack position in clamped-free boundary condition

تغییر مقدار فرکانس طبیعی در مود اول ارتعاش، تحت سه شرط مرزی با دو روش رایلی و آباکوس مقایسه می‌گردد. نتایج این بررسی برای شرایط مرزی ساده-ساده مطابق شکل ۸ ارائه می‌شود.

مقایسه تغییر فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی ساده-ساده نشان می‌دهد که با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا میانه تیر، میزان خطا از ۱/۵ تا ۱۰/۳۶ درصد افزایش پیدا می‌کند.

مقایسه دو روش مدل‌سازی تقریبی و عددی در شرایط مرزی گیردار-گیردار مطابق شکل ۹ نشان می‌دهد که مقادیر خطاها زمانی‌که ترک حدودا در ۰/۲ و ۰/۸ طول تیر قرار دارد، مینیمم (۷/۴۸ درصد) می‌باشد. همچنین زمانی‌که ترک در ابتدا، میانه و انتهای تیر قرار دارد میزان خطاها بیشینه و به ترتیب برابر ۱۲/۱، ۱۱/۳ و ۱۲/۱ درصد گزارش می‌شود.

شکل ۱۰ علاوه بر بررسی تاثیر مکان ترک بر فرکانس طبیعی، نتایج ۳ معادله استخراج شده در تعیین فرکانس تیر با شرایط مرزی گیردار-آزاد براساس ۳ شکل مود متفاوت را نیز ارائه می‌نماید. شکل مود ابتدایی در نظر گرفته شده برای شرایط مرزی گیردار-آزاد یعنی $\left(X_1=1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)$، تنها شرط مرزی هندسی در طرف گیردار را ارضاء می‌نماید $\left(X_1(0)=X_1'(0)=0\right)$؛ در حالی‌که شرط مرزی طبیعی در طرف آزاد ارضاء نمی‌شود $\left(X_1''(0)\neq 0, X_1'''(0)\neq 0\right)$. اما با بررسی شکل مودهای شرایط مرزی گیردار-گیردار $\left(X=1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)$ و ساده-ساده $\left(X=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$ مشاهده می‌شود که شکل مودهای بکارگرفته شده شرایط مرزی را در دو طرف تکیه‌گاه بطور کامل ارضاء می‌نمایند.

با توجه به این نقص در شکل مود ابتدایی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد، دو شکل مود دیگر $\left(X_2=\alpha^2-\left(\frac{2}{3}\right)\alpha^3+\left(\frac{1}{6}\right)\alpha^4\right)$ و $\left(X_3=45\alpha^2-20\alpha^3+\alpha^6\right)$ با $\alpha=x/L$ معرفی می‌شود؛ که علاوه بر شرط مرزی هندسی در طرف گیردار، شرط مرزی در طرف آزاد را نیز ارضاء نمایند. براساس این دو شکل مود اخیر، روابط صریح فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد استخراج و در ضمائم الف و ب ارائه شده است. نتایج حاصل از این روابط در شکل ۱۰ نشان می‌دهد دو نمودار حاصل از شکل مودهای جدید رفتاری مشابه با نتایج شکل مود ابتدایی دارد. بعبارت دیگر بهبود اعمال شده بر روی شکل مود و در ادامه بر روی روابط فرکانس طبیعی، پاسخ‌ها را حداکثر چهار درصد کاهش داده؛ درحالی‌که این بهبود تاثیر چندانی بر روی تغییر رفتار نتایج روش رایلی ایجاد ننموده است. نتایج شکل ۱۰ نشان می‌دهد؛ چنانچه ترک از ابتدای گیردار تا نیمه تیر قرار گیرد نتایج آباکوس به نتایج فرکانس

حاصل از این دو شکل مود جدید نزدیک‌تر است. اما چنانچه ترک در نیمه تیر تا انتهای آزاد آن قرار گیرد؛ نتایج فرکانس حاصل از شکل مود ابتدایی نزدیک‌تر به جواب آباکوس خواهد بود. با نگاهی کلی به شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که بکارگیری دو شکل مود اصلاح شده و استخراج معادلات مربوط به آن (ضمیمه) سبب کاهش فرکانس طبیعی نسبت به شکل مود ابتدایی گردیده است. بیشینه اختلاف بین نتایج روش رایلی و آباکوس ۷/۱۵ درصد گزارش می‌شود.

خطای روش تقریبی برحسب محل ترک، برای سه شرط مرزی در شکل ۱۱ ترسیم شده است؛ که در آن معیار سنجش خطا، نتایج روش عددی در تعیین فرکانس طبیعی می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که روش تقریبی ارائه شده برای تحلیل رفتار مودال تیرهای دارای ترک روی بستر الاستیک با تغییر محل ترک از دقت مطلوبی برخورداراست.

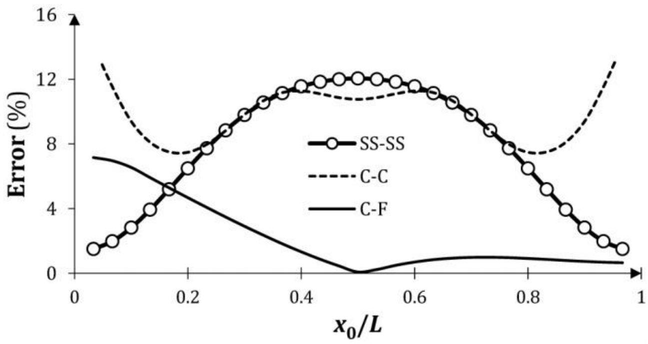
پنج منبع اصلی ایجاد اختلاف بین نتایج روش تقریبی و عددی به شرح ذیل اشاره می‌شود.

الف) مدل‌سازی ترک توسط تابع دلتای دیراک متناظر با فنر پیچشی: چنانچه ترک در محلی قرار گیرد که تاثیر بیشتری بر روی سفتی سازه داشته باشد؛ میزان خطا افزایش خواهد یافت.

ب) مدل‌سازی بستر الاستیک توسط فنرهای ارتجاعی گسترده: معادل‌سازی جنس مادی بستر الاستیک با یک توزیع از فنرهای گسترده می‌تواند از عوامل ایجاد اختلاف باشد.

ج) روش تقریبی رایلی: استفاده از روش‌های تحلیلی بجای روش تقریبی رایلی می‌تواند این اختلاف را کاهش دهد.

د) صرف‌نظر کردن از اثرات برشی: با توجه به نسبت طول به ارتفاع تیر، استفاده از تئوری تیر تیموشنکو به‌جای تیر اویلر-برنولی می‌تواند موجب افزایش دقت محاسبات شود.



شکل ۱۱: خطای روش تقریبی برحسب محل ترک

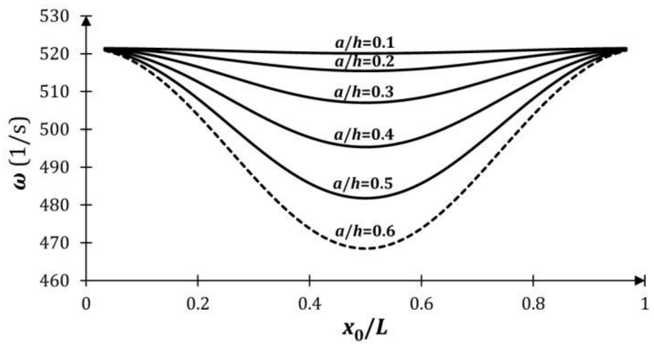
Fig. 11: Error of the approximate method in terms of crack position

ه) تحلیل یک‌بعدی: با توجه به تحلیل دوبعدی مسئله به کمک روش عددی در نرم‌افزار آباکوس، استفاده از یک تحلیل یک‌بعدی و مقایسه آن با نتایج تحلیل دوبعدی می‌تواند یکی دیگر از عوامل اختلاف ارزیابی گردد.

۳- بحث و نتایج

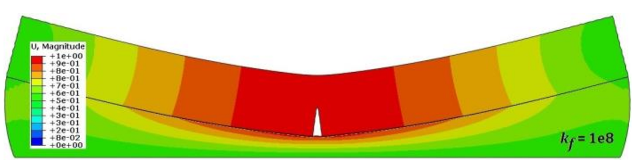
در این بخش پاسخ فرکانس طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک با تغییر عمق و محل ترک بحث می‌شود. نتایج حاصل از این بررسی، رفتار مودال سازه را تشریح می‌نماید. مطابق با شکل ۱۲ در شرایط مرزی ساده-ساده، در صورتی‌که مکان ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر حرکت نماید همواره مقدار فرکانس طبیعی در تمامی عمق‌های ترک کاهش یافته و مجددا با تغییر محل ترک از میانه به سمت تکیه‌گاه مقابل، مقدار فرکانس افزایش می‌یابد.

با استفاده از حل عددی، شکل مود اول ارتعاشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک وینکلر در شرایط مرزی ساده-ساده مطابق شکل ۱۳ ارائه می‌شود.



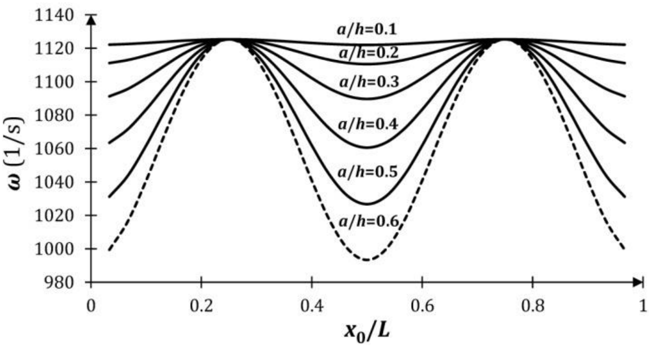
شکل ۱۲: پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک برحسب عمق و محل ترک در شرایط مرزی ساده-ساده

Fig. 12: The response of the natural frequencies of cracked beam on the elastic foundation in terms of different depths and positions of the crack in simply supported-simply supported boundary condition



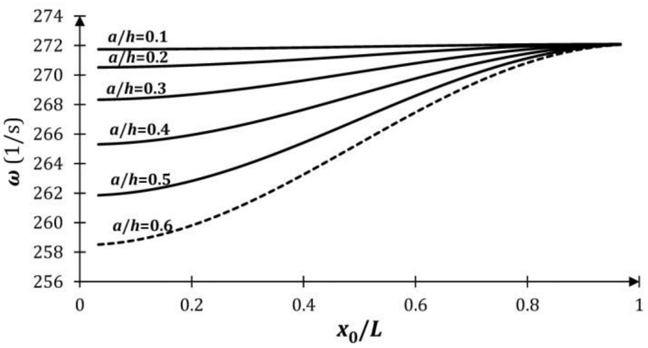
شکل ۱۳: مود اول ارتعاش تیر دارای ترک روی بستر الاستیک در شرایط مرزی ساده-ساده

Fig. 13: First mode shape of cracked beam vibration resting on the elastic foundation in simply supported-simply supported boundary condition



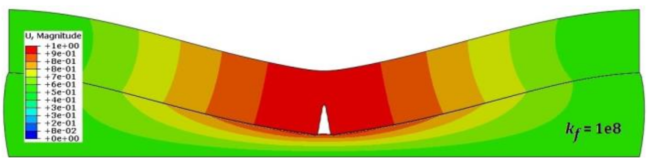
شکل ۱۴: پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک برحسب عمق و محل ترک در شرایط مرزی گیردار-گیردار

Fig. 14: The response of the natural frequencies of cracked beam on the elastic foundation in terms of different depths and positions of the crack in clamped-clamped boundary condition



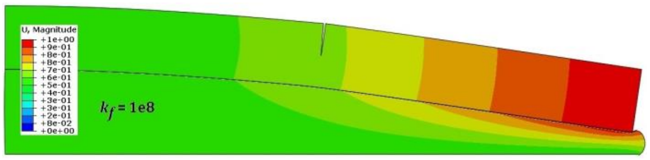
شکل ۱۶: پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک برحسب عمق و محل ترک در شرایط مرزی گیردار-آزاد

Fig. 16: The response of the natural frequencies of cracked beam on the elastic foundation in terms of different depths and positions of the crack in clamped-free boundary condition



شکل ۱۵: مود اول ارتعاش تیر دارای ترک روی بستر الاستیک در شرایط مرزی گیردار-گیردار

Fig. 15: First mode shape of cracked beam vibration resting on the elastic foundation in clamped-clamped boundary condition



شکل ۱۷: مود اول ارتعاش تیر دارای ترک روی بستر الاستیک در شرایط مرزی گیردار-آزاد

Fig. 17. First mode shape of cracked beam vibration resting on the elastic foundation in clamped-free boundary condition

همچنین نتایج بررسی‌ها در شرایط مرزی گیردار-گیردار مطابق شکل ۱۴، نشان می‌دهد با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا حدود ۰/۲ طول تیر، فرکانس طبیعی تا بیشترین مقدار خود (حالت بدون ترک) افزایش پیدا می‌کند و با تغییر محل ترک از ۰/۲ طول تیر تا میانه، فرکانس طبیعی تا کمترین مقدار خود کاهش می‌یابد. همچنین رفتاری قرینه با تغییر محل ترک از میانه تا تکیه‌گاه مقابل در تیر دارای ترک روی بستر الاستیک مشاهده می‌گردد.

شکل مود اول ارتعاشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک وینکلر در شرایط مرزی گیردار-گیردارمطابق شکل ۱۵ ارائه می‌شود.

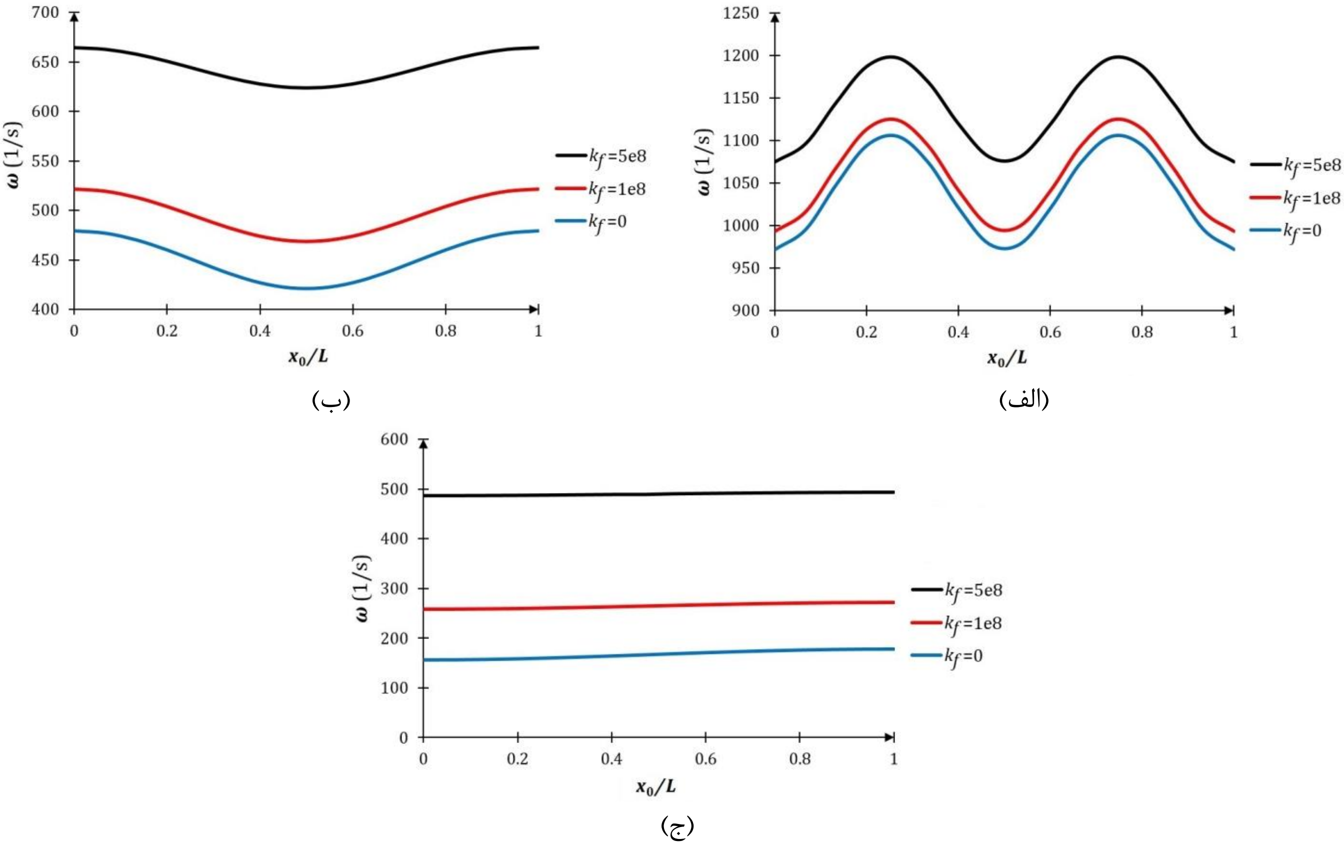
نهایتا، در شرایط مرزی گیردار-آزاد، مطابق شکل ۱۶، با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا انتهای آزاد همواره مقدار فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک افزایش پیدا می‌کنند. به‌طوری‌که وقتی ترک در محدوده $۰ \le x_0 / L \le ۰/۹$ قرار دارد، فرکانس طبیعی تیر دارای ترک تقریبا با فرکانس طبیعی تیر بدون ترک یکسان می‌باشد.

شکل مود اول ارتعاشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک وینکلر در شرایط مرزی گیردار-آزاد مطابق شکل ۱۷ ارائه می‌شود.

شکل ۱۸ تاثیر ضریب سفتی بستر الاستیک را بر روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد. همانگونه که در نمودارها مشاهده می‌شود با افزایش ضریب سفتی بسترالاستیک فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. تاثیر تغییر ضریب بسترالاستیک در شرایط مرزی گیردار-آزاد بیشتر از سایر شرایط مرزی می‌باشد به‌طوری‌که با افزایش ۵ برابری ضریب بستر الاستیک، فرکانس طبیعی تقریبا دو برابر افزایش پیدا می‌کند؛ اما این افزایش فرکانس در شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار به ترتیب حدود ۲۵ و ۸ درصد می باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روابط جدیدی برای تحلیل مودال تیر اویلر-برنولی دارای ترک روی بستر الاستیک پیشنهاد شد. پارامترهای هندسی



شکل ۱۸: اثر ضریب سفتی بستر الاستیک و مکان ترک بر روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف؛ الف) گیردار-گیردار؛ ب) ساده-ساده؛ ج) گیردار-آزاد

Fig. 18: Effect of stiffness factor of elastic foundation on natural frequency in different boundary conditions; a) Clamped-clamped; b) Simply-supported-simply supported; c) Clamped-free

و مادی تیر همچنین عمق ترک، مکان ترک، ضریب سفتی بستر و شرایط مرزی به‌طور صریح در روابط مشاهده و تاثیر آن‌ها بر روی فرکانس طبیعی تیر بررسی گردید. یک مدل‌سازی کامل از سازه در نرم‌افزار آباکوس اعتبار توابع پیشنهادی را برای فرکانس طبیعی ارزیابی نمود.

عوامل اصلی خطا در نتایج تحقیق حاضر به پنج منبع اصلی تقسیم شد: الف) مدل‌سازی ترک با استفاده از تابع دلتای دیراک ب) مدل‌سازی بستر الاستیک با فنرهای ارتجاعی گسترده ج) روش تقریبی رایلی برای حل مسئله د) صرف‌نظر کردن از اثرات برشی هـ) مدل‌سازی یک‌بعدی تیر. حداکثر هم‌پوشانی خطاها در مطالعات موردی حاضر سبب ایجاد حدود ۱۲ درصد انحراف از جواب مرجع شد؛ هرچند که در بسیاری از شرایط دیگر، خطاهایی کمتر از ۰/۵ درصد مشاهده گردید.

مقایسه نتایج تاثیر شرایط مرزی روی پاسخ فرکانس طبیعی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک نشان داد که شرایط مرزی گیردار-گیردار بالاترین و شرایط مرزی گیردار-آزاد کمترین مقدار فرکانس طبیعی را دارا است.

افزایش عمق ترک، موجب کاهش فرکانس طبیعی تیر می‌شود؛ در حالی‌که بستر الاستیک مقدار فرکانس‌ها را افزایش می‌دهد. در شرایط مرزی دوسرگیردار، چنانچه مکان ترک در حدود ۰/۲ یا ۰/۸ طول تیر قرار گیرد؛ افزایش عمق ترک تاثیر چندانی روی مقدار فرکانس‌های طبیعی در مود اول ندارد و مقدار فرکانس به مقدار فرکانس تیر فاقد ترک نزدیک می‌شود.

ضمائم

ضمیمه الف

چنانچه شکل مود برای شرایط مرزی گیردار-آزاد به صورت $X=\alpha^{2}-\left(\frac{2}{3}\right)\alpha^{3}+\left(\frac{1}{6}\right)\alpha^{4}$ فرض شود با درنظرگرفتن $\alpha = x/L$ فرکانس طبیعی با استفاده از روش رایلی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\omega_{CF}=5.5815\sqrt{\frac{\frac{1}{30}\zeta_1-\frac{1}{288}\frac{\zeta_2}{\zeta_4}+3.2099L\times10^6}{\rho AL}} \quad \text{(الف-۱)}$$

که در آن:

$$\zeta_1=\frac{Ebh^3}{L^3} \quad \text{(الف-۲)}$$

$$\zeta_2=E^2b^2h^6\left(\frac{2}{L^2}-\frac{4x_0}{L^3}+\frac{2x_0^2}{L^4}\right)^2 \quad \text{(الف-۳)}$$

$$\zeta_3=\frac{6a^2\left(3h-2a\right)}{b^2h^3\left(h-a\right)} \quad \text{(الف-۴)}$$

$$\zeta_4=\frac{\hat{A}Ebh^3}{12}+\frac{E}{2b\left(1-\nu^2\right)\zeta_3} \quad \text{(الف-۵)}$$

ضمیمه ب

چنانچه شکل مود دیگری برای شرایط مرزی گیردار-آزاد بصورت $X=۴۵\alpha^۲-۲۰\alpha^۳+\alpha^۶$ در نظر گرفته شود؛ معادلات فوق برای فرکانس طبیعی بصورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\omega_{CF}=0.1090\sqrt{\frac{\frac{260}{3}\zeta_1-\frac{1}{288}\frac{\zeta_5}{\zeta_4}+8.4109L\times10^9}{\rho AL}} \quad \text{(ب-۱)}$$

که در آن:

$$\zeta_5=E^2b^2h^6\left(\frac{90}{L^2}-\frac{120x_0}{L^3}+\frac{30x_0^4}{L^6}\right)^2 \quad \text{(ب-۲)}$$

سایر پارامترهای مورد استفاده در رابطه (ب-۱) مشابه با پارامترهای ارائه شده در ضمیمه الف می‌باشد.

فهرست علایم

a	عمق ترک
A	سطح مقطع تیر
A_f	سطح مقطع فنرهای ارتجاعی بستر الاستیک
b	ضخامت تیر
E	مدول الاستیسیته تیر
E_f	مدول الاستیسیته بستر
$EI(x)$	سفتی خمشی در طول تیر
EI_0	سفتی خمشی مقطع کامل (ترک‌نخورده)
h	ارتفاع تیر
h_f	ارتفاع بستر الاستیک
k_f	ضریب سفتی فنرهای ارتجاعی بستر الاستیک
k_s	ضریب سفتی فنر پیچشی
K_{I_M}	ضریب شدت تنش تحت خمش
K_0^F	انرژی جنبشی بستر الاستیک
K_c^B	انرژی جنبشی تیر دارای ترک
K_c^{st}	انرژی جنبشی تیر دارای ترک روی بستر الاستیک
L	طول تیر
L_f	طول بستر الاستیک
n	تعداد فنرهای ارتجاعی بستر
t	زمان
$w(x,t)$	جابجایی عرضی
x_0	محل ترک
$X(x)$	شکل مود ارتعاشی

علائم یونانی

δ	تابع پله‌ای دلتای دیراک
ν	نسبت پواسون
ρ	چگالی تیر دارای ترک
ω	فرکانس طبیعی
Π_c^B	انرژی پتانسیل تیر دارای ترک
Π_0^F	انرژی پتانسیل بستر الاستیک
Π_c^{st}	انرژی پتانسیل تیر دارای ترک روی بستر الاستیک

منابع

[1] G. R. Irwin, J. A. Kies, Critical energy rate analysis of fracture strength, *Journal of Welding*, 33(1) (1954) 193-198.

[2] G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, 24(1) (1957) 361-364.

[3] B. Biondi, S. Caddemi, Closed form solutions of Euler–Bernoulli beams with singularities, *Journal of Solids Structure*, 42 (2005) 3027–3044.

[4] S. Caddemi, I. Calio, Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler–Bernoulli beam with multiple open cracks, *Journal of Sound and Vibration*, 327 (2009) 473-489.

[5] P. Ricci, E. Viola, Stress intensity factors for cracked T-section and dynamic behaviour of T-beams, *Engineering Fracture Mechanics*, 73 (2006) 91-111.

[6] T. Yokoyama, M.C. Chen, Vibration analysis of edge-cracked beams using a line-spring model, *Engineering Fracture Mechanics*, 59(3) (1998) 403-409.

[7] A.D. Dimarogonas, Vibration of cracked structures: A state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5) (1996) 831-857.

[8] M. H. Walid, Crack detection from the variation of the eigenfrequencies of a beam on elastic foundation, *Engineering Fracture Mechanics*, 52(3) (1995) 409-421.

[9] M. Hsu, Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(1) (2005) 1–17.

[10] M. Nassar, S. Matbuly, M. Ragb, Vibration analysis of structural elements using differential quadrature method, *Journal of Advanced Research*, 4(1) (2013) 93–102.

[11] Y. Shin, J. Yun, K. Seong, J. Kim, S. Kang, Natural frequencies of Euler-Bernoulli beam with open cracks on elastic foundations, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 20(4) (2006) 467-472.

[12] T. Yan, S. Kitipornchai, J. Yang, X. Q. He, Dynamic behaviour of edge-cracked shear deformable functionally graded beams on an elastic foundation under a moving load, *Composite Structures*, 93(11) (2011) 2992–3001.

[13] A. Mirzabeigy, F. Bakhtiari-Nejad, Semi-analytical approach for free vibration analysis of cracked beams resting on two-parameter elastic foundation with elastically restrained ends, *Front. Mech. Eng.*, 9(2) (2014) 191–202.

[14] M. Attar, A. Karrech, K. Regenauer-Lieb, Free vibration analysis of a cracked shear deformable beam on a two-parameter elastic foundation using a lattice spring model, *Journal of Sound and Vibration*, 333(11) (2014) 2359–2377.

[15] M. Ghasemi, A. Ariaei, Crack detection in Euler-Bernoulli beams on elastic foundation using genetic algorithm based on discrete element technique, *Indian j.sci.res.*, 1(2) (2014) 248-253.

[16] S. D. Akbas, Free Vibration Analysis Of Edge Cracked Functionally Graded Beams Resting On Winkler-Pasternak Foundation, *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 7(3) (2015) 1-15.

[17] A. C. Batihan, F. S. Kadioglu, Vibration Analysis of a Cracked Beam on anElastic Foundation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16(5) (2016) 1-18.

[18] A. Khnaijar, R. Benamar, A discrete model for nonlinear vibrations of a simply supported cracked beams resting on elastic foundations, *Diagnostyka*, 18(3) (2017) 39-46.

[19] Y. Kumar, The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review, *Journal of Vibration and Control*, 24(1) (2017) 1205-1227.

[20] A. Alijani, M. Mastan Abadi, A. Darvizeh, M. Kh. Abadi, Theoretical approaches for bending analysis of founded Euler–Bernoulli cracked beams, *Archive of Applied Mechanics*, 88(6) (2018) 875–895.

[21] K. V. Terzaghi, Evaluation of coefficient of subgrade reaction, *Geotechnique*, 5(4) (1995) 297-326.

[22] A. W. Leissa, M. S. Qatu, *Vibrations of Continuous Systems*, First edition, McGraw-Hill United States of America, 2011.

[23] ABAQUS, version 6.12-3, Simulia *Abaqus*, Dassault Systemes Simulia Corp, Build ID: 2012-10-04-20.52.12-120045, United States of America, 2012.