



Gust Response Analysis of Flexible Aircraft

J. Masrour, S. H. Sadati*, M. Shahravi

University Complex of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

ABSTRACT: Aircraft flexibility causes problems and difficulties which this problems even might endanger health and safety of the aircraft. This phenomena changes dynamic response of the aircraft to surface control and gust inputs with respect to the rigid models. Also, it has diverse effect on flight quality and handling characteristics. As a result, considering flexibility effects on dynamics response of aircraft is significant which requires that coupled dynamic and vibrational equations of aircraft. The present paper, introduce the dynamics of a large aircraft has been developed on base of a six degree of freedom model, which includes two rigid and four flexible degrees. Quasi steady aerodynamics has been used to describe interaction between solid and fluid dynamics. The essence of this model, enhance perdition of dynamic response to gust and other external disturbances, because of its effects of elastic modes. The characteristics of this external disturbances and elastic model, causes more flexible modes to be exited and strain energy ratio in general dynamics of the aircraft, increases. The effects of different parameters, like stiffness, gust length and profile, has been studied in numerical simulation.

Review History:

Received: 18 Dec 2017
Revised: 24 Dec. 2017
Accepted: 7 Sep. 2018
Available Online: 22 Dec. 2018

Keywords:

Flexible aircraft
Quasi steady aerodynamics
Stiffness
Gust response

1- Introduction

Flexible aircraft design is constrained by gust loads. Gust response has significant effect on aircraft characteristics, including stability, control, dynamic structural loads and etc. Incorporating these constraints in the early design process with an appropriate level of fidelity presents a significant challenge, due both to the need for more detailed aerodynamics and control modeling. The Federal Aviation Regulations (FAR) [1] require transport aircraft to be analyzed by discrete gust and continuous turbulence analyses. Nowadays, the focus on weight minimization for aircraft, leads toward more and more flexible vehicles. These structures may not exhibit the usual wide frequency separation among the rigid body degrees of freedom and the remaining elastic modes. So that the decoupling this two area can lead to mistakes/errors in analyses of flight performance, flying qualities, and control systems design. Non-linear static aeroelastic analysis of the high- aspect-ratio wing with geometric nonlinearity effect has been performed by Mian et al [2]. Haddadpour and Ashktorab [3] analyzed wing aeroelasticity effects on flight dynamics of a flexible aircraft. A relatively low-order linear dynamic model was developed by Schmidt [4] for the longitudinal flight-dynamics analysis of a flexible flying-wing research drone. In the present work a flexible aircraft has been simulated in step and '1-cosine' gust. The expression for the flight dynamics and aeroelasticity equations has been

coupled. It is assumed that aircraft wing is flexible and other parts are rigid. Wing has been modelled as a flexible beam with two bending and two torsion modes.

2- Methodology

Discrete gusts effect has been modeled in this paper. The gust velocity varies in a deterministic manner, usually in the form of a '1-cosine' shape (i.e. there is an idealized discrete 'event' that the aircraft encounters), and it is modelled as [5]:

$$w_g = \frac{w_{g0}}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (1)$$

In which "t" is time in second, w_{g0} is gust velocity, and "T" is gust period which is equal to:

$$T = \frac{L}{U_0} \quad (2)$$

L is gust length and U is aircraft velocity. Gust is considered as an external force and causes lift force on aircraft:

$$f = \Delta L = .5 \rho u^2 \frac{w_g}{u} \quad (3)$$

Dynamics of aircraft has been modeled with considering plunge and pitch of rigid mode and torsion and bending of flexible wing. Total kinetic energy is equal to sum of tail, body and wing

$$T = T_f + T_w + T_t \quad (4)$$

*Corresponding author's email: hsadati@mut.ac.ir



Wing has been modeled as a beam with bending rigidity of EI and torsional rigidity of GJ , potential energy is equal to:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[EI \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y} \right)^2 + GJ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (5)$$

By using Lagrange equation it is possible to obtain generalized coordinate forces Q_h and Q_α of the wing

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial q_i} = Q_i \quad (6)$$

Besides Lagrange, equation has been applied for calculation of flight dynamics forces.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} = Q_w \quad (8)$$

Generalized forces can be obtained by putting Q_i and arranging aerodynamic and structural forces. Then it is possible to write [4]:

$$(M_s + M_a) \ddot{q} + (C_s + C_a) \dot{q} + (K_s + K_a + Knl) q = F \quad (9)$$

$$q_1 = z, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \eta_1, \quad q_4 = \eta_2, \quad q_5 = \phi_1, \quad q_6 = \phi_2$$

In above equation z and θ are rigid modes, η_1, η_2 are two bending modes of wing, and ϕ_1, ϕ_2 two torsional modes of wing. F is discrete gust effect.

3- Discussion and Results

Response of elastic aircraft to a '1-cosine' gust has been simulated. At first a comparison between rigid and elastic aircraft to gust has been shown in figure 1. In this case a 1-cosine gust with 5m/s vertical velocity and gust length of 250 has been applied to rigid aircraft [6] with 150m/s velocity. Results has been depicted in Figure 2. In rigid case, aircraft is seen to pitch nose up very slightly, pitch nose down as the tail plane enters the gust and the tail plane lift increases, and then pitch nose up again; the aircraft finishes with zero

attitude and pitch rate, having climbed to a slightly higher altitude. The CoM (center of mass) acceleration first peaks at a negative value (i.e. upwards), as the aircraft initially encounters the gust, and then peaks at a positive value (i.e. downwards) as the nose down pitch takes effect. But flexible dynamics of aircraft strongly effects on convergence of pitch response and pitch oscillations continuous, until it is damped. In the next figure gust amplitude effect on flexible aircraft has been studied. The gust amplitude of 50,100 and 250 meters has been simulated in Figure 3. Though the maximum pitch happens in 250 length gust but maximum acceleration exerted to aircraft occurs in 50 m length gust and by increasing gust length maximum acceleration decreases.

Win stiffness effect has been studied in Figure 3. Normal stiffness of wing has been compared with 0.5 and 1.5 times stiffness and has been compared with rigid aircraft. By increasing stiffness behavior of pitch response becomes more similar to rigid aircraft and maximum acceleration of Com decreases. The coupling between torsional and bending flexibility of flexible mode and its effect on over all dynamics of aircraft has been shown in facing with '1-cosine'. According to results, interaction of flexible and rigid modes in flexible aerial vehicle is such that ignoring strain energy of structure in flight dynamics causes unpredictable behavior and difficulty in control of rigid dynamics of aircraft.

4- Conclusion

In this paper a six-degree of freedom model accounting torsional and bending vibration of the large substructures of the aircraft, has been used in order to obtain the interaction of rigid and flexible body motions. Response to step and "1-cosine" gust has been simulated. The effects of different parameters, like stiffness, gust length and profile, has been studied in numerical simulation It has been shown that coupling between rigid and flexible modes cannot be ignored and should be accounted.

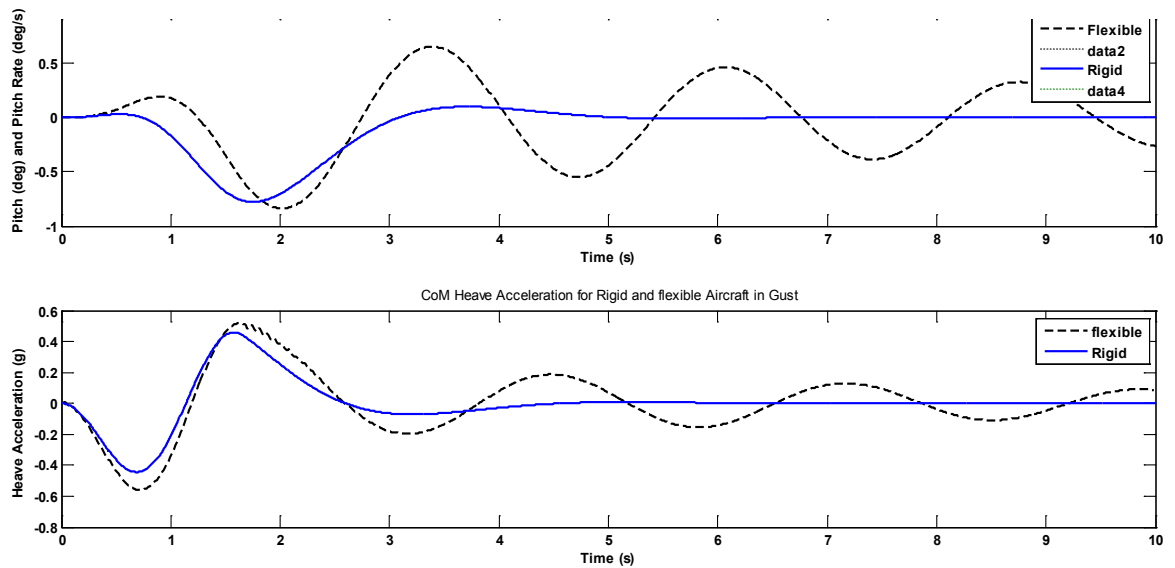


Fig. 1. Comparison between rigid [6] and flexible aircraft response to gust

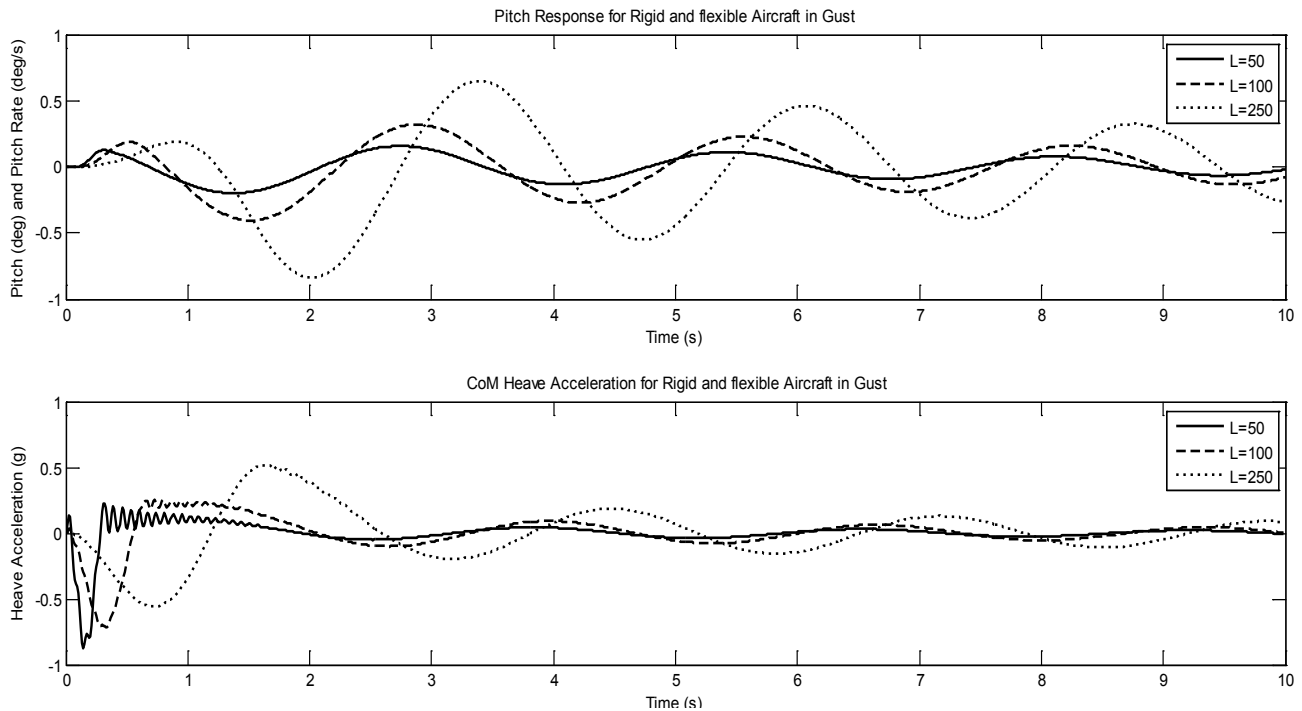


Fig. 2. Comparison between different gust lengths on aircraft dynamic response

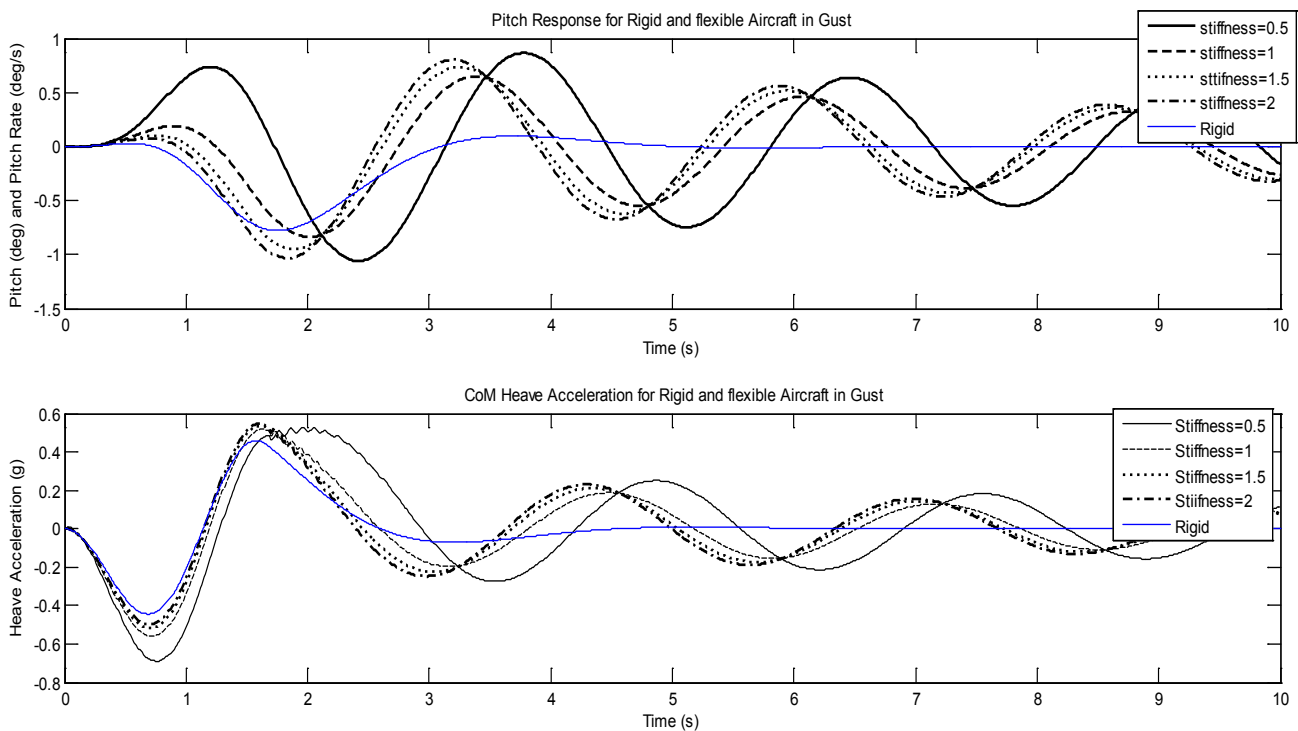
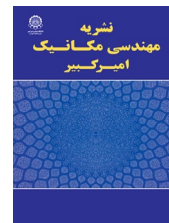


Fig. 3. Different wing stiffness effect on aircraft dynamic response

5- References

- [1] Gust and Turbulence Loads. Code of Federal Regulations, Aeronautics and Space, Part 25.341, National Archives and Records Administration, Office of the Federal Register, Jan. 2003.
- [2] R.D. Milne, Dynamics of the deformable aeroplane, HM Stationery Office, 1964.
- [3] H. Hadadpour, Ashkorab, M., Wing Aeroelasticity with Considering Aircraft Flight Dynamics, 14th aerospace conference of aerospace Society, Tehran, Iran, 1393. (In Persian)
- [4] D.K. Schmidt, MATLAB-based flight-dynamics and flutter modeling of a flexible flying-wing research drone, Journal of Aircraft, 53(4) (2015) 1045-1055.
- [5] M.H. Sadraee, Stability and Flight Controll, Ayandeghan Publication, Tehran, Iran, 1379. (In Persian)
- [6] J.R. Wright, J.E. Cooper, Introduction to aircraft aeroelasticity and loads, John Wiley & Sons, 2008.



تحلیل دینامیکی هواپیمای انعطاف پذیر در اغتشاشات جوی

جواد مسرور، سید حسین ساداتی*، مرتضی شهروی

مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۲۷

بازنگری: ۱۳۹۷/۱۰/۰۳

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۶

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۱۰/۱۱

کلمات کلیدی:

هواپیمای انعطاف پذیر

رفتار آیرولاستیک

تندباد، آیرودینامیک شبه پایا

پاسخ دینامیکی

خلاصه: انعطاف پذیری سازه هواپیما باعث بروز مسایل و مشکلات متعددی می گردد که این مشکلات بعضاً می توانند سلامت و ایمنی پرواز هواپیما را به مخاطره اندازند. این پدیده باعث تغییر در پاسخ دینامیکی هواپیما به سطوح کنترل و اغتشاشات جوی می گردد. همچنین این امر اثرات نامطلوبی در کنترل پذیری هواپیما توسط خلبان، و خوش دستی آن به همراه دارد. لذا بررسی اثرات انعطاف پذیری سازه روی پاسخ های پروازی هواپیما از اهمیت ویژه ای برخوردار است که این امر مستلزم یکپارچه سازی معادلات حرکت و ارتعاشی هواپیما می باشد. دینامیک هواپیمای پهن پیکر با زیرسازه های بلند و انعطاف پذیر بر مبنای یک مدل شش درجه آزادی که ترکیب دو درجه آزادی صلب و چهار درجه آزادی انعطاف پذیر است، توسعه داده شده است. برای توصیف برهم کنش سیال با سازه از مدل آیرودینامیک شبه پایا استفاده شده است. توسعه مدهای انعطاف پذیر در مدل حاضر نسبت به مدل های قبلی موجود، با توجه به ساختار پیکربندی هواپیمای مورد نظر، موجب افزایش دقت و اعتبار پیش بینی رفتار دینامیکی، بویژه در شرایط پروازی خاص، از جمله پاسخ به تندبادهای گسسته شده است. ماهیت این دسته از تحریک های خارجی به گونه ای است که طیف گسترده تری از مدهای الاستیک تحریک شده و سهم انرژی کرنشی ناشی از انعطاف پذیری در دینامیک عمومی هواپیما افزایش می یابد. در شبیه سازی های انجام شده تاثیر عوامل مختلف از جمله پروفیل و طول موج تندباد بر روی رفتار دینامیکی بررسی شده است.

۱- مقدمه

انعطاف پذیری سازه هواپیما باعث بروز چالش های متعددی در دینامیک و کنترل پرواز می گردد که بعضاً می توانند سلامت و ایمنی پرواز هواپیما را به مخاطره اندازند. در برخی موارد نیز اگرچه اثرات انعطاف پذیری سازه مخاطره آمیز نمی باشد، اما بروز مشکلاتی مانند کاهش خوش دستی هواپیما و یا عدم دقت اتوپیلوت را سبب می گردد. انعطاف پذیری سازه باعث تغییر در پاسخ دینامیکی هواپیما به سطوح کنترل و باد می گردد. همچنین این امر اثرات نامطلوبی در کنترل پذیری هواپیما توسط خلبان، و خوش دستی آن به همراه دارد. کاهش وزن سازه، عدم پایداری استاتیکی و بکارگیری سیستم های کنترل پس خور بسیار پیچیده باعث کاهش میزان فاصله فرکانس های مدهای پروازی هواپیمای صلب و فرکانس مدهای ارتعاشی می گردد. به علاوه قابلیت بکارگیری سیستم های کنترل با قابلیت ایجاد تغییر شکل در سازه نیاز به مدل سازی دقیق وسیله پرنده با در نظر گرفتن انعطاف پذیری سازه دارد. لذا بررسی اثرات انعطاف پذیری سازه روی پاسخ های پروازی هواپیما

از اهمیت ویژه ای برخوردار است که این امر مستلزم یکپارچه سازی معادلات حرکت و ارتعاشی هواپیما می باشد. روند معمول در مطالعه دینامیک هواپیما مبتنی بر جداسازی مقیاس های زمانی بین مدهای الاستیک و بدنه صلب می باشد که باعث جداسازی تحلیل دینامیک پرواز و آیرولاستیسیته می شود. این روند معمولاً از واکنش های ساده بین این دو حوزه صرف نظر می کند. بهر حال، این روش استاندارد برای مدل سازی یک پرنده انعطاف پذیر مناسب نمی باشد و نیاز به توسعه روش های پیشرفته تحلیلی چندوجهی حوزه زمانی (سازه، آیرولاستیک، آیرودینامیک، جو، مواد، پیرانه، کنترل و غیره) مناسب هواپیماهای دارای بدنه انعطاف پذیر و تغییر شکل پذیر می باشد که بتواند رفتار غیرخطی دینامیک هواپیما را بیان کند. ون شور و همکاران [۱] خصوصیات آیرولاستیک و کنترل یک هواپیمای بسیار انعطاف پذیر را مطالعه کردند. تأثیرات غیرخطی فقط در آیرولاستیسیته استاتیک در نظر گرفته شد و پاسخ دینامیکی هواپیما براساس مدل های خطی صورت گرفت. محاسبات پایداری هواپیما در شرایط مختلف پروازی نشان داد که تغییر شکل های بزرگ تأثیر مهمی در خصوصیات دینامیک پرواز هواپیما داشته اند. میروویچ و توزکو [۲]

* نویسنده عهده دار مکاتبات: hsadati@mut.ac.ir



به بررسی دینامیک و کنترل هواپیمای انعطاف‌پذیر در هنگام مانور پرداختند. آنها در این کار دینامیک سازه، آیرودینامیک و کنترل را بطور یکپارچه در نظر گرفتند. این فرمول یکپارچه شامل درجات آزادی بدنه صلب، تغییرشکل‌های الاستیک و نیروهای عمل‌کننده بر روی هواپیما بود که شامل نیروی جاذبه، پیشران، آیرودینامیک، نیروهای کنترلی و اغتشاشات جوی می‌شد. در [۳] نرم‌افزار اسوینگ را برای طراحی مقدماتی هواپیما ایجاد نمود. این نرم‌افزار یک ابزار شبیه‌سازی دینامیکی برای هواپیماهای بسیار انعطاف‌پذیر است که شامل چهار زیرسیستم کوپل شده سازه، آیرودینامیک، دینامیک پرواز و کنترل می‌باشد. سازه شامل یک سری تیرهای غیرخطی متصل به هم است که می‌تواند جابجایی زیادی داشته باشد. مدل آیرودینامیک براساس شبکه/گردابه‌ای تراکم‌پذیر می‌باشد. بالدای و همکاران [۴] یک فرمولاسیون معرفی کردند که تأثیر آیروالاستیسیته را برای مدل‌های صلب چرخشی و انتقالی هواپیما بررسی می‌کرد. کارهای اخیر در زمینه مدل‌سازی دینامیک هواپیمای انعطاف‌پذیر شامل کارهای نگوین [۵] است که اثر نیروی پیشراش را دخیل کرد و زاو و رن که بال را بصورت سیستم چندتکه در نظر گرفتند و مدل آیرودینامیک دوبعدی را استفاده کردند. گروه‌هایی در جرجیاتک با هاجز، پتیل و همکاران [۶] و دانشگاه میشیگان که بوسیله سزینک هدایت می‌شدند، پرکارترین افراد در زمینه مدل‌سازی هواپیمای هیل بوده‌اند. در بیشتر کارهای انجام شده، روش براساس ترکیب مدل‌های هندسی-دقیق تیر کامپوزیت و آیرودینامیک دوبعدی حالت محدود بوده است. مشخصات کامل یک هواپیمای خیلی انعطاف‌پذیر با پیکربندی معمول بدنه - دم بررسی شده است. نتایج عددی بسیار زیاد بدست آمده اهمیت مدل‌سازی غیرخطی سازه را در مقابل تحلیل‌های سازه‌ای خطی شده نشان می‌دهد. آقای اسکار گزالس [۷] به بررسی آیرودینامیک و تحلیل پایداری یک پهپاد انعطاف‌پذیر پرداخت. تحلیل آیرودینامیک و سازه توسط کد اسوینگ انجام گرفته است. این کد یک نرم‌افزار برای آنالیز آیرودینامیک، سازه و پاسخ کنترلی هواپیماهایی است که دارای اجزاء انعطاف‌پذیر می‌باشند. نتایج آیرودینامیکی با اطلاعات بدست آمده از کدهای مهندسی و تحلیلی دیگر مقایسه شده است و همخوانی خوبی در ضرایب پایداری طولی دیده می‌شود، اما برای ضرایب عرضی-سمتی همخوانی کمی وجود دارد. شبه‌پایا می‌تواند در بعضی موارد دربرگیرنده خطای بسیار زیادی در تخمین ناپایداری آیروالاستیک باشد. رفتار آیروالاستیک و ناپایداری فلاتر بال هواپیما در جریان تراکم‌ناپذیر در [۸] مورد مطالعه واقع شده و بیان شده است که فرض آیرودینامیک شبه‌پایا، اگر چه برای حالت‌هایی از جریان فراصوتی نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد، اما در رژیم جریان فروصوتی استفاده از این فرض با خطای بالایی همراه است و

بنابراین تخمین رفتار آیروالاستیک و تضمین مرز فلاتر بال هواپیما در جریان تراکم‌ناپذیر مناسب نیست. در مرجع نامبرده از روابط لاگرانژ و انرژی جنبشی برای شبیه‌سازی رفتار آیروالاستیسیته بال استفاده شده است. تحلیل مقاطع و بررسی رفتار آیروالاستیک و ناپایداری فلاتر بال با استفاده از روش اجزای محدود با فرض جزء پوسته به همراه آثار غیرخطی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ هندسی در [۹] انجام شده است. از طرف دیگر شبیه‌سازی رفتار بال با استفاده از معادله تیر در پرندهی کاملاً الاستیک در [۱۰] مورد بررسی واقع شده است. استفاده از برنامه‌هایی مشابه مرجع‌های [۹ و ۱۰] به دلیل زمان بر بودن برای تحلیل آیروالاستیک بال تنها مقرون به صرفه نبوده و نیاز به استفاده از الگوهای ساده‌تری به صورت بسیار محسوس حتی برای بال وجود دارد. چنانچه بدنه نیز به این تحلیل اضافه شود پیچیدگی مساله دوچندان خواهد شد. حدادپور و اشکتراب [۱۱] با استفاده از روش لاگرانژ و آیرودینامیک شبه‌پایا معادلات حاکم بر مساله به بررسی رفتار الاستیک بال هواپیما در شرایط پرواز پرداختند. این بررسی با تغییرات محل مرکز جرم هواپیما، مرکز جرم بال، سختی پیچشی و خمشی بال هواپیما صورت گرفته است که نتایج حاصل از آن بر سرعت و فرکانس فلاتر نشان داده شده است.

بررسی برهم‌کنش دینامیک صلب کل هواپیما و تغییر شکل‌های الاستیک زیرسازه‌های انعطاف‌پذیر با رویکرد جدید، تحلیل پاسخ هواپیما با ویژگی فوق به اثرات تندباد و تغییر در متغیرهای دینامیک پرواز هواپیمای الاستیک، توسعه مدل دینامیکی بال الاستیک با در نظر گرفتن درجات آزادی خمشی و پیچشی در نظر گرفتن اختلاف زمانی رسیدن تندباد به بال و دم هواپیما و تأثیر آن بر روی دینامیک کل هواپیما الاستیک، مواردی است که در مطالعه حاضر بدان پرداخته شده است. در ادامه مدل‌های تندباد و نحوه اعمال آن به هواپیما توضیح داده شده است. سپس مدل دینامیکی مربوطه توسعه داده شده است و در بخش آخر نتایج شبیه‌سازی مدل توسعه داده شده مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۲- توسعه مدل دینامیکی

اغتشاشات جوی تندباد نامیده می‌شود. تندباد در اثر اختلاف دما میان دو منطقه به وجود می‌آید. اگرچه اغتشاش یک پدیده پیچیده است ولی معمولاً برای طراحی به یکی از این دو صورت ایده‌آل دسته‌بندی می‌شود. الف) تندباد گسسته که سرعت تندباد به صورت مشخص تغییر می‌کند و دارای انواع مختلفی است. رایج‌ترین نوع آن در برخورد با هواپیماهای بال ثابت تند باد "کسینوسی" است. این تندباد با رابطه زیر مدل می‌شود [۱۲].

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{j} \quad (۷)$$

$$\vec{r}_0 = x\vec{i} + z\vec{k} \quad (۸)$$

$$\vec{V} = \vec{r} = (u + \dot{\theta}z)\vec{i} + (w - \dot{\theta}x)\vec{k} \quad (۹)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \dot{\theta}z\vec{i} - \dot{\theta}x\vec{k} \quad (۱۰)$$

در نهایت سرعت مورد نظر برای هر نقطه با جایگذاری روابط فوق مطابق با رابطه (۱۰) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \vec{V}\vec{V} &= (u + \dot{\theta}z)^2 + (w - \dot{\theta}x)^2 \\ &= u^2 + z^2\dot{\theta}^2 + 2u\dot{\theta}z + w^2 + \dot{\theta}^2x^2 - 2wx\dot{\theta} \\ &= (u^2 + w^2) + (x^2 + z^2)\dot{\theta}^2 + 2uz\dot{\theta} - 2wx\dot{\theta} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int (\vec{V}\vec{V}) dM = \frac{1}{2} \int (u^2 + w^2) dM + \frac{1}{2} \int (x^2 + z^2) \dot{\theta}^2 dM \\ &\quad + \int (uz - wx) \dot{\theta} dM \end{aligned} \quad (۱۲)$$

و x و z در حقیقت همان $\vec{r}_0$ در بدنه صلب هستند و از آنجایی که $\vec{r}_0$ نسبت به مرکز جرم سنجیده می‌شود لذا دو ترم معادله آخر برابر صفر خواهد بود و معادله انرژی جنبشی بدنه صلب هواپیما به شکل زیر محاسبه خواهد شد.

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \int (u^2 + w^2) dM + \frac{1}{2} \int (x^2 + z^2) \dot{\theta}^2 dM \\ &= \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (۱۳)$$

محاسبه انرژی جنبشی در بال الاستیک مطابق با رابطه (۵) در قسمت قبل با در نظر گرفتن بردار جابجایی الاستیسته بال $\vec{e}$ ، و سرعت در هر نقطه محاسبه شده است.

$$\vec{V} = \vec{r} = \vec{v}_{CG} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_0) + \vec{e} + \vec{\omega} \times \vec{e} \quad (۱۴)$$

در رابطه فوق عبارت اول همان سرعت مرکز جرم هواپیما در دستگاه بدنی و عبارت بعدی سرعت بدنه در نقطه اتصال به بال است. همچنین پارامتر $\vec{e}$ معادل با l_w فاصله مرکز آیرودینامیکی بال تا مرکز جرم هواپیما می‌باشد.

$$\vec{v}_{CG} = u\vec{i} + w\vec{k} \quad (۱۵)$$

$$\vec{e} = (x' \cos \alpha)\vec{i} + (h + x' \sin \alpha)\vec{k} = x'\vec{i} + (h + x'\alpha')\vec{k} \quad (۱۶)$$

$$w_g = \frac{w_{g0}}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (۱)$$

که t زمان بر حسب ثانیه، سرعت تندباد و T زمان تناوب تندباد است که برابر است با

$$T = \frac{L}{U_0} \quad (۲)$$

در اینجا L طول موج تندباد بر حسب متر و U_0 سرعت تعادل هواپیما بر حسب متر بر ثانیه است. در این مدل طول موج تندباد برابر ۲۵ برابر وتر متوسط آیرودینامیکی فرض می‌شود [۱۲]. عدد ۲۵ از آنجا بدست آمده است که مطالعات نشان داده است با بیشترین ضریب بار القایی ارتباط دارد.

$$L = 25\bar{C} \quad (۳)$$

ب) تندباد پیوسته که در آن سرعت تندباد بصورت تصادفی تغییر می‌کند، و مدل‌های مختلفی دارد که از جمله مدل فون کارمن و مدل درایدن است. در اینجا مدل تندباد در نظر گرفته شده از نوع تندباد گسسته است و بصورت نیروی خارجی در معادلات در نظر گرفته می‌شود و باعث ایجاد نیروی برآ می‌گردد.

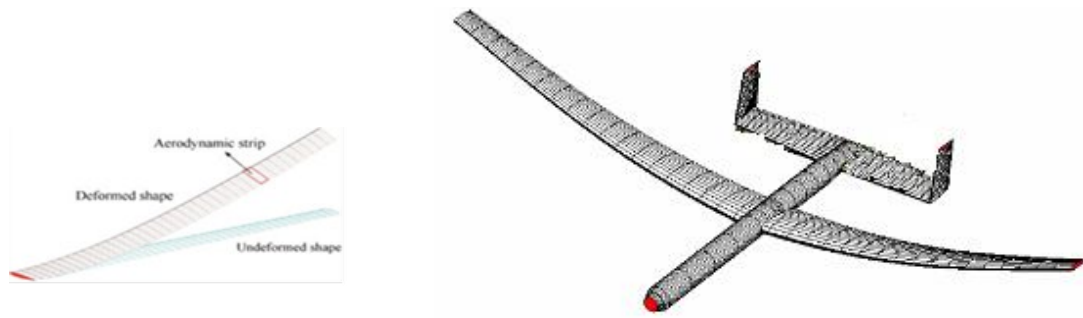
$$f = \Delta L = .5\rho u^2 \frac{w_g}{u} \quad (۴)$$

که در اینجا w_g سرعت عمودی تندباد می‌باشد. در ادامه معادلات دینامیک حاکم بر هواپیما با بال الاستیک با در نظر گرفتن جابجایی و دوران صلب بدنه هواپیما z و θ ، جابجایی و پیچش الاستیک بال h و α نسبت به بدنه بررسی شده است. روابط به دست آمده در این قسمت بر اساس الگوی شبه‌پایا نوشته شده است [۱۱]. برای محاسبه انرژی جنبشی باید سرعت هر نقطه از بدنه را حساب نمود. بردار موقعیت هر نقطه از پرند نسبت به مرکز جرم بر اساس رابطه (۵) بدست می‌آید. در رابطه فوق به علت الاستیک نبودن بدنه در ادامه برای محاسبه سرعت در بدنه صلب، بردار الاستیسته $\vec{e}$ در نظر گرفته نشده است.

در رابطه (۵) سرعت مرکز جرم پرند در دستگاه بدنی، موقعیت هر نقطه روی بدنه نسبت به مرکز جرم و $\vec{\omega}$ سرعت زاویه‌ای پیچش هواپیما است.

$$\vec{r} = \vec{v}_{CG} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_0) \quad (۵)$$

$$\vec{v}_{CG} = u\vec{i} + w\vec{k} \quad (۶)$$



شکل ۱: تغییر شکل الاستیک بال

Fig. 1. Elastic deformation of the wing

که η_i و ϕ_i محوره‌های مختصات عمومی برای بیان خمش و پیچش می‌باشند. پارامترهای Ψ_i و Θ_i شکل موده‌های خمش و پیچش هستند که به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned}\Theta_i &= \sqrt{2} \sin(\gamma_i y) \\ \Psi_i &= \cosh(\alpha_i y) - \cos(\alpha_i y) - \beta_i [\sinh(\alpha_i y) - \sin(\alpha_i y)]\end{aligned}\quad (24)$$

مقادیر $\alpha_i l$, β_i و γ_i تیر یک سرگیردار برای $i \leq 6$ را می‌توان از جدول ۱ استخراج کرد:

برای $i \geq 6$ مقادیر $\alpha_i l$, β_i و γ_i را می‌توان از رابطه (۲۵) بدست آورد.

$$\begin{aligned}\alpha_i l &= (2i-1)\pi/2 \\ \gamma_i &= \alpha_i \\ \beta_i &= \frac{\cosh(\alpha_i l) + \cos(\alpha_i l)}{\sinh(\alpha_i l) + \sin(\alpha_i l)}\end{aligned}\quad (25)$$

مطابق رابطه (۲۳)، مقادیر مربوط به انرژی جنبشی و انرژی کرنشی برای

$$\vec{e} = (\dot{h} + x' \dot{\alpha}) \vec{k} \quad (17)$$

$$\omega = \dot{\theta} \vec{j} \quad (18)$$

پارامتر $\vec{e}$ در رابطه (۱۶) جابجایی الاستیک بال می‌باشد.

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_0 = -l_w \dot{\theta} \vec{k} \quad (19)$$

$$\vec{e} + \vec{\omega} \times \vec{e} = \dot{h} \vec{k} + x' \dot{\alpha} \vec{k} + x' \dot{\theta} \vec{k} \quad (20)$$

و با جاگذاری در رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$\vec{V} = \vec{u}_i + (w - l_w \dot{\theta} + \dot{h} + x' \dot{\alpha} + x' \dot{\theta}) \vec{k} \quad (21)$$

در حالتی که بال بصورت تیر مدل شود (شکل ۱)، می‌توان با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات انرژی جنبشی تیر را بدست آورد. فرض می‌شود که h جابجایی سطح مقطع در جهت z و α دوران حول محور y است (محور طولی بال). با توجه به این تعریف می‌توان سرعت هر نقطه از سطح مقطع را به صورت رابطه (۲۲) تعیین کرد:

$$V = z \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{i} + \left(\frac{\partial h}{\partial t} - x \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \vec{k} \quad (22)$$

برای بال مورد نظر موده‌های ارتعاشات آزاد غیرکوپل رابطه (۲۳) برای پیچش و خمش فرض می‌گردد:

$$\begin{aligned}h(y, t) &= \sum_{i=1}^{N_x} \eta_i(t) \Psi_i(y) \\ \alpha(y, t) &= \sum_{i=1}^{N_w} \phi_i(t) \Theta_i(y)\end{aligned}\quad (23)$$

Table 1. Values of $\alpha_i l$, β_i , γ_i for $(i \leq 6)$ for clamped-free beam [13]

جدول ۱: مقادیر $\alpha_i l$, β_i و γ_i برای تیر یک سرگیردار برای $i \leq 6$ [۱۳]

۱	۲	۳	۴	۵	i
۱/۸۷۵۱۰	۴/۶۹۴۰۹	۷/۸۵۴۷۶	۱۰/۹۹۶۶	۱۴/۱۳۷۲	$\alpha_i l$
۱/۵۷۰۸۰	۴/۷۱۲۳۹	۷/۸۵۳۹۸	۱۰/۹۹۵۶	۱۴/۱۳۷۲	γ_i
۰/۷۳۴۰۹۶	۱/۰۱۸۴۷	۰/۹۹۹۲۲۴	۱/۰۰۰۰۳	۰/۹۹۹۹۹۹	β_i

تیر به صورت رابطه (۲۶) بازنویسی می‌شود:

$$T_t = \frac{1}{2} m_t (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} m_t (l_t^2 \dot{\theta}^2 + 2w l_t \dot{\theta}) + m_t b_t x_{\alpha_t} (w \dot{\theta} + l_t \dot{\theta}) + \frac{1}{2} I_t \dot{\theta}^2 \quad (31)$$

در معادله بالا فاصله محور الاستیک دم از مرکز جرم هواپیما است. دم انرژی جنبشی کل هواپیما شامل مجموع انرژی جنبشی مربوط به بدنه صلب، بال الاستیک و دم افقی است که با رابطه (۳۲) بیان می‌گردد.

$$T = T_f + T_w + T_t \quad (32)$$

برای یک تیر با سختی خمشی EI و سختی پیچشی GJ ، انرژی کرنشی (انرژی پتانسیل) را می‌توان به صورت رابطه (۳۳) محاسبه کرد.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y} \right)^2 + GJ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (33)$$

برای محاسبه نیروهای تعمیم یافته الاستیک Q_α و Q_θ از رابطه لاگرانژ (۳۴) استفاده می‌گردد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad q_1 = z, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = h, \quad q_4 = \alpha \quad (34)$$

روابط لاگرانژ (۳۵) و (۳۶) برای محاسبه نیروهای ناشی از دینامیک پرواز پرنده Q_θ و Q_z ، بکار گرفته می‌شود.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = Q_\theta \quad (35)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \dot{\theta} \frac{\partial T}{\partial u} = Q_z \quad (36)$$

$$\dot{z} = w \quad (37)$$

$$\begin{aligned} Q_z &= (m_w + m_t + m_f) \ddot{z} + m_1 \ddot{\theta} + m_w \ddot{h} + m_2 \ddot{\alpha} \\ &\quad - (m_w + m_t + m_f) \dot{\theta} u \\ Q_\theta &= m_1 \ddot{z} + m_3 \ddot{\theta} + m_4 \ddot{h} + m_5 \ddot{\alpha} \\ Q_h &= m_w \ddot{z} + m_4 \ddot{\theta} + m_w \ddot{h} + m_2 \ddot{\alpha} + 2k_h h \\ Q_\alpha &= m_2 \ddot{z} + m_5 \ddot{\theta} + m_2 \ddot{h} + m_2 \ddot{\alpha} + 2k_\alpha \alpha \end{aligned} \quad (38)$$

$$T = \frac{\bar{m} l}{2} \left[\sum_{i=1}^{N_w} \eta_i^2 + b^2 r^2 \sum_{i=1}^{N_\theta} \phi_i^2 - 2b x_\theta \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{i=1}^{N_\theta} A_{ij} \phi_i \dot{\eta}_i \right] \quad (26)$$

در معادله بالا نصف متر تیر، x_θ فاصله مرکز جرم تیر تا محور الاستیک تیر است. A_{ij} در عبارت دوم به صورت رابطه (۲۷) محاسبه می‌گردد:

$$A_{ij} = \frac{1}{l} \int_0^l \Theta_i \Psi_j dy, \quad i = 1, 2, \dots, N_\theta, \quad j = 1, 2, \dots, N_w \quad (27)$$

با در نظر گرفتن $m_w = \int \mu dx'$ ، $m_w b_w x_{aw} = \int x' \mu dx'$ و $I_w = \int x'^2 \mu dx'$ مقدار انرژی جنبشی بال با در نظر گرفتن موده‌های صلب انتقالی پرنده و درجات آزادی و با جایگزینی α, h از رابطه (۲۳) به صورت رابطه (۲۸) محاسبه می‌گردد. m_w جرم بال، b_w نصف وتر بال، I_w ممان اینرسی حول مرکز جرم بال و x_{aw} فاصله بدون بعد مرکز جرم از محور الاستیک بال است.

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{1}{2} m_w (u^2 + w^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_w (l_w^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2 - 2w l_w \dot{\theta} + 2w \dot{h} - 2l_w \dot{\theta} \dot{h}) \\ &\quad + m_w b_w x_{\alpha_w} (w \dot{\alpha} + w \dot{\theta} - l_w \dot{\alpha} \dot{\theta} - l_w \dot{\theta}^2 - \dot{h} \dot{\alpha} + \dot{h} \dot{\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\alpha} \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (28)$$

اگر با در نظر گرفتن انرژی جنبشی برای دم افقی، روابط (۲۹) و (۳۰) را تشکیل می‌دهیم:

$$\vec{V} = u \vec{i} + (w + l_t \dot{\theta} + x' \dot{\theta}) \vec{k} \quad (29)$$

$$T_t = \frac{1}{2} \int |\vec{V}|^2 dm = \frac{1}{2} \int |\vec{V}|^2 \mu dx' \quad (30)$$

در این جا نیز همانند بال با در نظر گرفتن، $m_t = \int \mu dx'$ و $m_t b_t x_{at} = \int x' \mu dx'$ مقدار انرژی جنبشی دم به صورت رابطه (۳۱) محاسبه می‌شود. m_t جرم بال، b_t نصف وتر بال و I_t ممان اینرسی حول مرکز جرم بال است.

$$\begin{aligned}
 M_{EA} &= \frac{1}{2} \rho U^2 c^2 C_{MLE} \\
 &= \frac{1}{2} \rho U^2 (2b_w)^2 \frac{a_w}{2} \\
 &\times \left\{ -\frac{b_w a^2}{U} (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + (a + \frac{1}{2}) \left(\alpha + \theta + \frac{\dot{z}}{U} + \frac{\dot{h}}{U} - \frac{l_w \dot{\theta}}{U} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \rho U^2 b_w a_w S_w \\
 &\times \left\{ -\frac{b_w a^2}{U} (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + (a + \frac{1}{2}) \left(\alpha + \theta + \frac{\dot{z}}{U} + \frac{\dot{h}}{U} - \frac{l_w \dot{\theta}}{U} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w \\
 &\times \left\{ -\frac{b_w^2 a^2}{U} (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + b_w (a + \frac{1}{2}) \left(\alpha + \theta + \frac{\dot{z}}{U} + \frac{\dot{h}}{U} - \frac{l_w \dot{\theta}}{U} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (45)$$

در نهایت با برابر قرار دادن Q_i های بدست آمده و مرتب نمودن روابط مربوط به نیروهای آیرودینامیکی و سازه‌ای، ماتریس ضرایب را می‌توان مطابق رابطه (۴۶) تشکیل داد.

$$\begin{aligned}
 (M_s + M_a) \ddot{q} + (C_s + C_a) \dot{q} + (K_s + K_a) q &= F \\
 q_1 = z, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \eta_1 \\
 q_4 = \eta_2, \quad q_5 = \phi_1, q_6 = \phi_2
 \end{aligned} \quad (46)$$

که در عبارت بالا z و مودهای صلب، η_1 و η_2 دو مود خمشی بال و ϕ_1 و ϕ_2 دو مود پیچشی بال هستند.

$$M_s = \begin{bmatrix} m_w + m_i + m_f & m_1 & m_w & m_w & m_2 & m_2 \\ m_1 & m_3 & m_4 & m_4 & m_5 & m_5 \\ m_w & m_4 & m_w & 0 & A_{11} \times m_2 & A_{12} \times m_2 \\ m_w & m_4 & 0 & m_w & A_{21} \times m_2 & A_{22} \times m_2 \\ m_2 & m_5 & A_{11} \times m_2 & A_{12} \times m_2 & A_{11} \times I_w & A_{12} \times I_w \\ m_2 & m_5 & A_{21} \times m_2 & A_{22} \times m_2 & A_{21} \times I_w & A_{22} \times I_w \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$M_a = [0] \quad (48)$$

مقدار m و A قبلا در روابط (۳۹) و (۲۷) تعریف شده است.

$$C_s = [0] \quad (49)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_3 & c_4 & c_4 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_7 & c_8 & c_8 \\ c_9 & c_{10} & c_9 & 0 & A_{11} \times c_4 & A_{12} \times c_4 \\ c_9 & c_{10} & 0 & c_9 & A_{21} \times c_4 & A_{22} \times c_4 \\ c_{11} & c_{12} & A_{11} \times c_{11} & A_{12} \times c_{11} & A_{11} \times c_{13} & A_{12} \times c_{13} \\ c_{11} & c_{12} & A_{21} \times c_{11} & A_{22} \times c_{11} & A_{21} \times c_{13} & A_{22} \times c_{13} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -m_w l_w + m_w b_w x_{\alpha_w} + m_i l_i + m_i b_i x_{\alpha_i} \\
 m_2 &= m_w b_w x_{\alpha_w} \\
 m_3 &= -m_w l_w^2 - 2m_w b_w x_{\alpha_w} l_w + m_i l_i^2 \\
 &\quad + 2m_i b_i x_{\alpha_i} l_i + I_w + I_i + I \\
 m_4 &= -m_w l_w + m_w b_w x_{\alpha_w} \\
 m_5 &= m_w b_w x_{\alpha_w} l_w + I_w
 \end{aligned} \quad (39)$$

نیروهای تعمیم یافته Q_i را می‌توان با استفاده از رابطه کار مجازی (۴۰) بدست آورد.

$$\begin{aligned}
 \delta W &= L_w [-\delta z - \delta h + \ell_w \delta \theta] + M_{EA} (\delta \theta + \delta \alpha) \\
 &\quad + W \delta z + L_T [-\delta z - \ell_T \delta \theta] \\
 &= Q_z \delta z + Q_\theta \delta \theta + Q_h \delta h + Q_\alpha \delta \alpha
 \end{aligned} \quad (40)$$

که L_T و L_w به ترتیب نیروی برای بال و دم، ℓ_w و ℓ_T فاصله مرکز جرم بال و دم از مرکز جرم هواپیما، و M_{EA} ممان حول محور الاستیک بال می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 Q_z &= -L_w + W - L_T \\
 Q_\theta &= \ell_w L_w + M_{EA} - \ell_T L_T \\
 Q_h &= -L_w \\
 Q_\alpha &= M_{EA}
 \end{aligned} \quad (41)$$

نیروهای برای بال، دم افقی و گشتاور حول محور الاستیک بال با استفاده از روابط (۴۲) تا (۴۵) قابل محاسبه است. a_w شیب ضریب برآ، S_w مساحت بال، ρ چگالی هوا و U سرعت است [۱۱].

$$\begin{aligned}
 L_w &= \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) S_w a_w \\
 &\times \left(\alpha + \theta + \frac{\dot{z}}{U} + \frac{\dot{h}}{U} - \frac{l_w \dot{\theta}}{U} + b_w \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{\dot{\theta} + \dot{\alpha}}{U} \right) \right)
 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 L_T &= \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) a_T S_T \\
 &\times \left[\theta + \frac{\dot{z}}{U} + \frac{\dot{\theta} \ell_T}{U} + b_i \left(\frac{1}{2} - a_i \right) \frac{\dot{\theta}}{U} \right]
 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 C_{MEA} &= C_{MLE} + \frac{(1+a)}{2} C_L \\
 &= -\frac{c a_w}{16} \frac{(\dot{\theta} + \dot{\alpha})}{U} + \frac{1}{4} C_L (1 + 2a)
 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w \\
 k k_1 &= \frac{1}{2} \rho U^2 (a_w S_w + a_i (1 - k_\varepsilon) S_i) \\
 k_2 &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w \ell_w - \frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w b_w \left(a + \frac{1}{2} \right) \\
 k k_2 &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w \ell_w - \frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w b_w \left(a + \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho U^2 a_i (1 - k_\varepsilon) S_i l_i \\
 k_3 &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a_w S_w b_w \left(a + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \quad (53)$$

و K_s را می‌توان به صورت رابطه (۵۴) بیان کرد.

$$K_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{EI}{l^3} B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \frac{EI}{l^3} B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \frac{GJ}{l} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \frac{GJ}{l} T_{22} \end{bmatrix} \quad (54)$$

که GJ و EI سختی پیچشی و خمشی بال و l طول بال است.

نیروهای ناشی از تندباد را می‌توان به صورت رابطه (۵۷) بیان کرد [۱۱].

$$B_{jj} = (\alpha_j l)^4, \quad (j = 1, 2, \dots, N_w) \quad (55)$$

$$T_{ii} = (\gamma_i l)^2, \quad (i = 1, 2, \dots, N_\theta) \quad (56)$$

با جاگذاری شکل مودها و انتگرال گیری از رابطه (۵۶)، خواهیم داشت:

$$Q_{w_i} = \rho U a_w b_w w_g \left[\frac{\sinh(\alpha_i l) - \sin(\alpha_i l) - \beta_i [\cosh(\alpha_i l) + \sin(\alpha_i l)]}{\alpha_i} \right]$$

, $(i = 1..N_w)$ (57)

$$Q_{\theta_i} = \rho U a_w b_w^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) w_g \left[\frac{\sqrt{2}(1 - \cos(\gamma_i l))}{\gamma_i} \right]$$

, $(i = 1..N_\theta)$

و در نهایت نیروهای تند باد به صورت رابطه (۵۸) قابل محاسبه است.

w_g سرعت عمودی تندباد است که در رابطه (۱) تعریف آن آمده بود. باتوجه

به تاخیر زمانی رسیدن تندباد به دم از عبارت $(t - \frac{l}{u})$ استفاده شده است تا این

اثر در دینامیک پرنده لحاظ گردد.

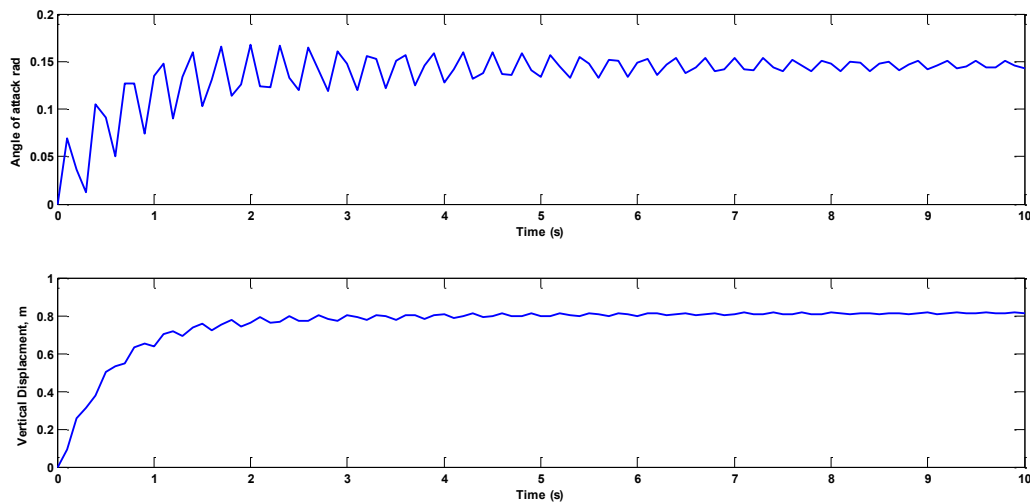
که در رابطه (۵۰) c_i , $i = 1, \dots, 13$ به صورت رابطه (۵۱) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{2} \rho U a_w S_w + \frac{1}{2} \rho U a_i (1 - k_\varepsilon) S_i \\
 c_2 &= -(m_w + m_t + m_f) U - \frac{1}{2} \rho U a_w S_w l_w \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} - a \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho U a_i (1 - k_\varepsilon) S_i \left[b_i \left(\frac{1}{2} - a_i \right) + l_i \right] \\
 c_3 &= \frac{1}{2} \rho U a_w S_w \\
 c_4 &= \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} - a \right) \\
 c_5 &= -\frac{1}{2} \rho U a_w S_w l_w \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho U a_i S_i l_i - \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} + a \right) \\
 c_6 &= -\frac{1}{2} \rho U a_w S_w l_w^2 - \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w l_w \left(\frac{1}{2} - a \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho U a_i S_i l_i^2 + \frac{1}{2} \rho U a_w S_w a^2 b_w^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w l_w \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{1}{2} \rho U a_i S_i b_i l_i \\
 c_7 &= -\frac{1}{2} \rho U a_w S_w l_w - \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} + a \right) \\
 c_8 &= -\frac{1}{2} \rho U a_w S_w l_w - \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} + a \right) \\
 c_9 &= \frac{1}{2} \rho U a_w S_w \\
 c_{10} &= -\frac{1}{2} \rho U a_w S_w l_w + \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} - a \right) \\
 c_{11} &= -\frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w \left(\frac{1}{2} - a \right) \\
 c_{12} &= \frac{1}{2} \rho U a_w S_w a^2 b_w^2 + \frac{1}{2} \rho U a_w S_w b_w l_w \left(\frac{1}{2} + a \right) \\
 c_{13} &= \frac{1}{2} \rho U a_w S_w a^2 b_w^2
 \end{aligned} \quad (51)$$

و K_a ضرایب سختی سازه‌ای از رابطه (۵۲) بدست می‌آید.

$$K_a = \begin{bmatrix} 0 & k k_1 & 0 & 0 & k_1 & k_1 \\ 0 & k k_2 & 0 & 0 & k_2 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} \times k_1 & A_{12} \times k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} \times k_1 & A_{22} \times k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

که



شکل ۲: زاویه پیچ (زاویه حمله) و تغییر مکان نوک بال (شکل پایین) در اثر تندباد پله در سرعت ۹۹ درصد سرعت فلاتر

Fig. 2. Pitch angle variation (upper figure), and vertical displacement of wing tip (lower figure), time due to sharp edge gust when $U_{\infty} = 0.99U_f$

۹۹ درصد سرعت فلاتر است. نتایج پیچش و سرعت عمودی ایرفویل در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

در ادامه با استفاده از روش لاگرانژ و معادلات آیرودینامیک شبه‌پایا، اثرات تندباد بر روی دینامیک پرواز پرنده مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت. بدین منظور در نرم‌افزار متلب با رابطه‌های بیان شده در بخش‌های

$$f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\rho u^2 \left(S_w a_w \frac{wg}{u} + S_t a_t \frac{wg}{u} \left(t - \frac{l}{u} \right) \right) \\ -\frac{1}{2}\rho u^2 \left(S_w a_w l_w \frac{wg}{u} - S_t a_t l_t \left(t - \frac{l}{u} \right) \right) \frac{wg}{u} \\ Q_{w_1} \\ Q_{w_2} \\ Q_{\theta_1} \\ Q_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Table 3. parameters of typical Aircraft used in simulation

جدول ۳: کمیت‌های در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی هواپیمای نمونه [۱۱]

پارامترها	مقادیر (واحد)
جرم بال هواپیما m_w	۳۰۰۰ kg
جرم بدنه هواپیما m_f	۷۰۰۰ kg
چگالی هوا ρ	۱/۲۲۵ kg/m ³
طول وتر بال c	۲m
فاصله محور الاستیک بال تا وسط وتر مقطع بال a	-۰/۲۵
فاصله محور الاستیک بال تا مرکز جرم هواپیما ℓ_w	۰/۶m
فاصله مرکز آیرودینامیکی دم تا مرکز جرم هواپیما ℓ_T	۷ m
فاصله محور الاستیک بال تا مرکز جرم بال bx_a	۰/۳۷۵
مساحت بال هواپیما S_w	۳۰ m ²
مساحت دم هواپیما S_T	۷/۵ m ²
شیب منحنی لیفت بال هواپیما a_w	۴/۵ rad ⁻¹
شیب منحنی لیفت دم هواپیما a_T	۳/۲ rad ⁻¹
ممان اینرسی پیچش هواپیما $I_{c.g}^f$	۱۴۴۰۰۰ kgm ²
ممان اینرسی پیچش بال هواپیما I_θ	۱۳۳۰ kgm ²
سختی پیچشی GJ	۳/۸۳ × ۱۰ ^۷ N.m ²
سختی خمشی EI	۴/۳۲ × ۱۰ ^۸ N.m ²
طول بال l	۷/۵ m

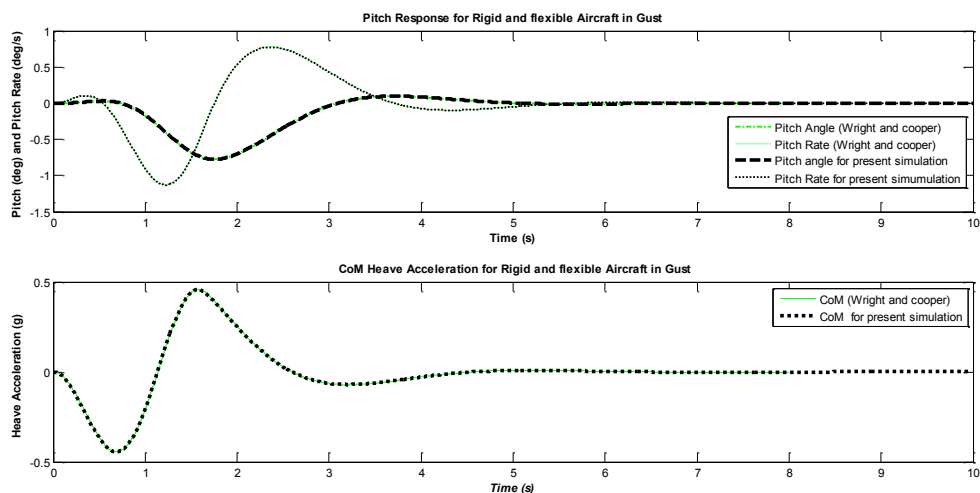
۳- شبیه‌سازی عددی

ابتدا مقایسه‌ای با نتایج مرجع [۱۴] به عمل آمده است که سازگاری خوبی با نتایج آن مرجع دیده می‌شود. تندباد پله با سرعت عمودی ۲ متر بر ثانیه به مدت ده ثانیه بر بالی با مشخصات جدول ۲ اعمال شده است. سرعت هوا برابر

Table 2. Wing specifications used in simulation

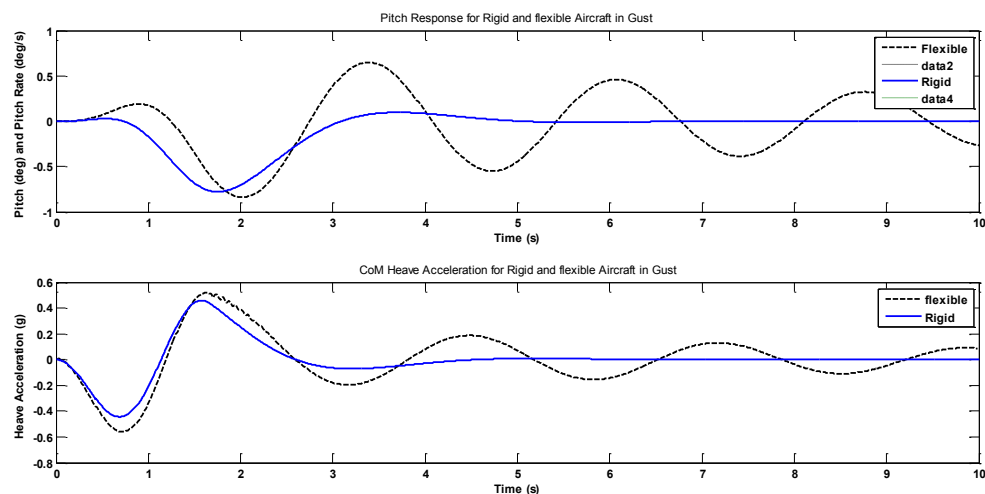
جدول ۲: مشخصات بال مورد استفاده در شبیه‌سازی

مقدار	مشخصه
m= ۱۹/۶ kg	جرم ایرفویل
C= ۱/۸۳ m	طول وتر
I=۰/۱۲۳۶ kg	ممان اینرسی حول مرکز جرم
a= -۰/۲	فاصله بی بعد بین محور الاستیک و وسط وتر
$x_\theta = ۰/۴$	فاصله بی بعد بین محور الاستیک و مرکز جرم
EI= ۱۵۹ N.m ²	سختی خمشی
GI= ۱۰۳۹ N.m ²	سختی پیچشی
$N_w = N_\theta = ۱$	تعداد شکل موده‌های خمشی و پیچشی



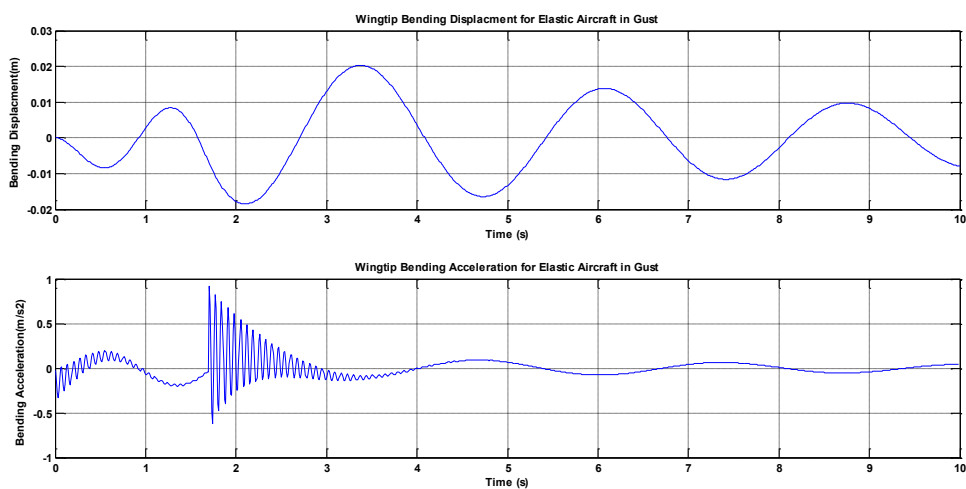
شکل ۳: مقایسه نتایج پاسخ به تندباد هواپیما بین مدل حاضر و نتایج مرجع [۱۴]

Fig. 3. Comparison of dynamic response of the aircraft to gust present and Ref [14]



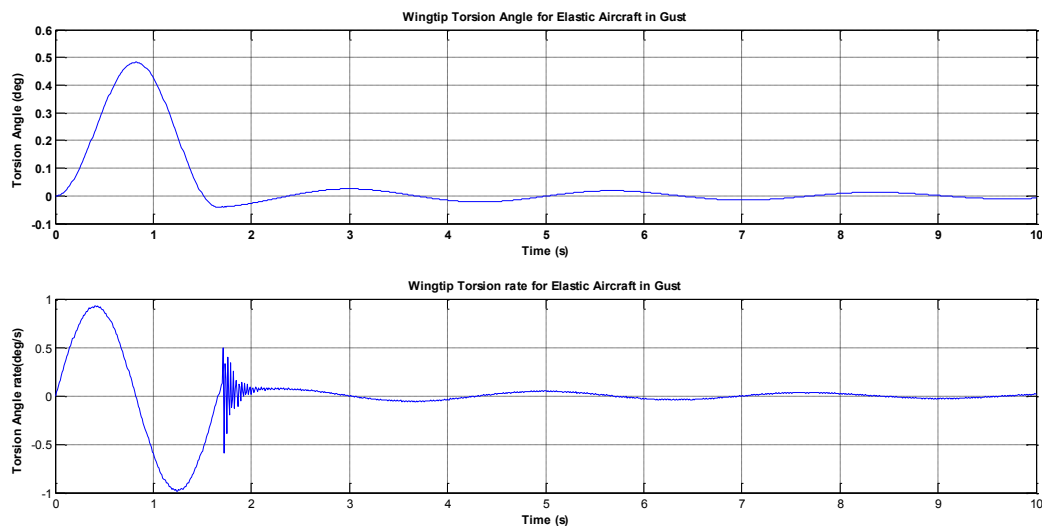
شکل ۴: مقایسه نتایج پاسخ به تندباد هواپیما بین مدل صلب و انعطاف پذیر [۱۴]

Fig. 4. Comparison of dynamic response of the aircraft to gust between rigid and flexible aircraft [14]



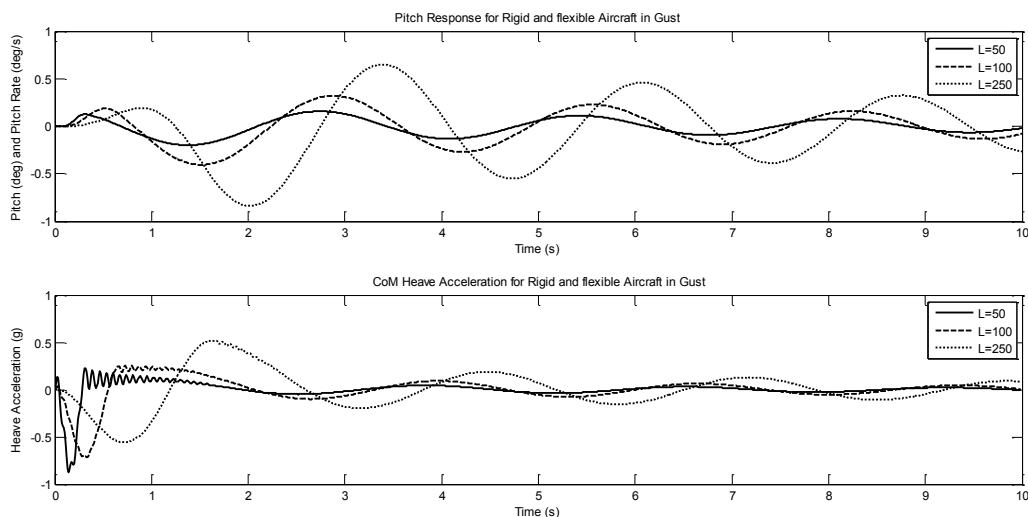
شکل ۵: نتایج پاسخ مود انعطاف پذیر خمشی به تندباد

Fig. 5. Dynamic response of torsional mode to gust



شکل ۶: نتایج پاسخ مود انعطاف پذیر پیچشی به تندباد

Fig. 6. Dynamic response of bending mode to gust

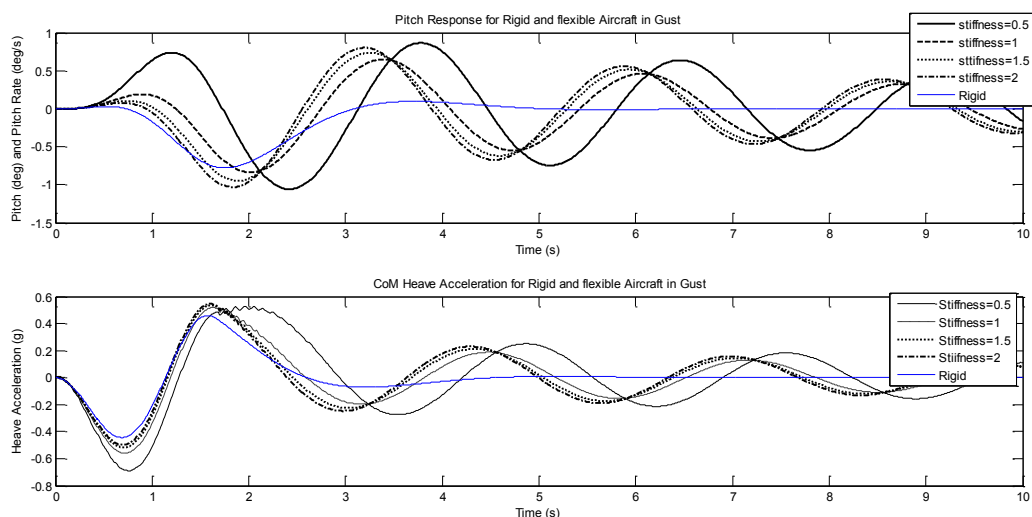


شکل ۷: تاثیر طول موج تندباد بر روی هواپیما

Fig. 7. Gust length effect on aircraft response

افزایش نیروی برای دم، دماغه هواپیما به سمت بالا می‌رود. و در نهایت هواپیما به صورت مستقیم در می‌آید. در نمودار پایین شکل ۳ دیده می‌شود که مرکز جرم هواپیما ابتدا در بدو ورود به تندباد یک جهش منفی دارد (به سمت بالا) و سپس تحت تاثیر پایین رفتن دماغه هواپیما به مقدار حداکثر مثبت می‌رسد. در ادامه پاسخ دینامیک به تندباد برای مدل صلب و مدل انعطاف‌پذیر در شکل ۴ مقایسه گردیده است. همان طور که در شکل ۴ دیده می‌شود دینامیک انعطاف‌پذیر هواپیما به شدت بر روی همگرا شدن زاویه پیچ تاثیر گذاشته و موجب ایجاد نوسانات زیاد در پاسخ هواپیما نسبت به مدل صلب شده است. شکل‌های ۵ و ۶ نیز میزان تغییر شکل‌های سازه بال و تاثیر انرژی کرنشی

قبل، مدل‌سازی پرند بر اساس مشخصات جدول ۳ صورت گرفت. ابتدا پاسخ هواپیمای صلب به تندباد کسینوسی شبیه سازی شده است. در ابتدا، بر پرندهای که با سرعت ۱۵۰ متر بر ثانیه در حال حرکت است تندباد کسینوسی با طول موج ۲۵۰ متر با سرعت عمودی ۲/۵ متر بر ثانیه اعمال گردید. پاسخ پرند به مدت ۱۰ ثانیه رسم گردیده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی مدل حاضر با نتایج حاصل از مرجع [۱۵] مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نتایج این دو مدل‌سازی با یکدیگر هماهنگی خیلی خوبی دارد (شکل ۳). مطابق شکل در لحظه برخورد تندباد، ابتدا دماغه هواپیما به آهستگی به سمت بالا رفته، و همزمان با رسیدن تندباد به دم دماغه هواپیما به سمت پایین آمده، سپس با



شکل ۸: تاثیر انعطاف‌پذیری روی پاسخ دینامیکی هواپیما

Fig. 8. Stiffness effect on aircraft dynamic response

آزادی است که شامل دو مود صلب و چهار درجه آزادی مود انعطاف‌پذیر است (دو مود خمشی و دو مود پیچشی بال). همبستگی مودهای انعطاف‌پذیر خمشی و پیچشی و اثر آن بر روی دینامیک کلی هواپیما در شرایط تندباد پله و ۱-کسینوسی نشان داده شد. برطبق نتایج حاصل برهم‌کنش دینامیک صلب و انعطاف‌پذیر در هواپیماهای پهن‌پیکر و انعطاف‌پذیر به گونه‌ای است که صرف نظر از سهم انرژی کرنشی سازه در دینامیک پرواز هواپیما به ویژه در حالت‌های خاص پروازی موجب بروز رفتار پیش‌بینی نشده و مشکل در فرایندهای کنترلی مبتنی بر دینامیک جسم صلب می‌گردد. همچنین در شرایطی که اثر عوامل خارجی شامل تندبادهای گسسته حاکم است. تعداد مودهای انعطاف‌پذیر بیشتری تحریک شده و توسعه مدل برای لحاظ نمودن سهم انرژی کرنشی ناشی از مودهای الاستیک بالاتر ضروری است. این چالش در رفتار حلقه بسته نمود بیشتری می‌یابد.

منابع

- [1] M.C. Van Schoor, A.H. von Flotow, Aeroelastic characteristics of a highly flexible aircraft, *Journal of Aircraft*, 27(10) (1990) 901-908.
- [2] L. Meirovitch, I. Tuzcu, Unified theory for the dynamics and control of maneuvering flexible aircraft, *AIAA journal*, 42(4) (2004) 714-727.
- [3] M. Drela, ASWING 5.99 Technical Description—

حاصل از آن را بر روی دینامیک کل هواپیما نشان می‌دهد. همان طور که دیده می‌شود مقدار این تغییر شکل‌ها با توجه به ساختار و پیکربندی هواپیما قابل توجه و بویژه در دینامیک حلقه بسته و کنترل هواپیما غیر قابل صرف‌نظر کردن است.

در شکل ۷ اثر طول موج تندباد بر روی پاسخ هواپیما بررسی شده است. طول موج‌های در نظر گرفته شده ۵۰، ۱۰۰ و ۲۵۰ متر است. با توجه شکل دیده می‌شود که اگرچه بیشترین میزان تغییر زاویه پیچ در طول موج ۲۵۰ متر بوده است ولی حداکثر شتاب در طول موج ۵۰ متر اتفاق افتاده است و با افزایش طول موج از شدت شتاب کاسته شده است.

در شکل ۸ مطالعه‌ای بر روی تاثیر انعطاف‌پذیری روی پاسخ دینامیکی هواپیما به تندباد صورت گرفته است. لذا سختی سازه‌ای به میزان ۰/۵، یک، ۱/۵ و دو برابر در یک نمودار شبیه سازی شده و با حرکت هواپیمای صلب مقایسه شده است. در شکل بالا رفتار پیچ مود صلب هواپیما نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می‌گردد با افزایش سختی رفتار به مود صلب نزدیک‌تر می‌گردد. همچنین با افزایش سختی شتاب وارده بر هواپیما کاهش یافته و به شتاب هواپیمای صلب نزدیک‌تر می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از روش لاگرانژ و معادلات آیرودینامیک شبه‌پایا، اثرات تندباد بر روی دینامیک پرواز پرنده مورد بحث و بررسی قرار گرفت. رفتار دینامیکی هواپیماهای انعطاف‌پذیر بر مبنای یک مدل پایه شش درجه

- in incompressible flow, in: 8th conference of fluid dynamics, tabriz, Iran, 1382. (In Persian)
- [9] I. Dehkordi, Shahverdi, H., Salehzade, A., Khalili, A., Numerical Investigation of Aeroelatic Unstability of Aircraft Wing by Finite Element and Unsteady Panel Method, *Mechanic and Aerospace Quarterly Journal*, 7(winter) (1390) 13 - 23. (In Persian)
- [10] I. Tuzcu, *Dynamics and control of flexible aircraft*, Virginia Tech, 2001.
- [11] H. Hadadpour, Ashkorab, M., *Wing Aeroelasticity with Considering Aircraft Flight Dynamics*, in: 14th aerospace conference of aerospace Society, Tehran, Iran, 1393. (In Persian)
- [12] M.H. Sadraee, *Stability and Flight Controll*, Ayandeghan Publication, Tehran, Iran, 1379. (In Persian)
- [13] D.H. Hodges, G.A. Pierce, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press, 2011.
- [14] J.R. Wright, J.E. Cooper, *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*, John Wiley & Sons, 2008.
- Steady Formulation, Massachusetts Inst. of Technology, Cambridge, MA, (2015).
- [4] D.H. Baldelli, P.C. Chen, J. Panza, Unified aeroelastic and flight dynamic formulation via rational function approximations, *Journal of Aircraft*, 43(3) (2006) 763-772.
- [5] N. Nguyen, Integrated flight dynamic modeling of flexible aircraft with inertial force-propulsion-aeroelastic coupling, in: 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2008, pp. 194.
- [6] M. Patil, D. Hodges, C. Cesnik, Nonlinear aeroelastic analysis of aircraft with high-aspect-ratio wings, in: 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 1998, pp. 1955.
- [7] O. González, P. Boschetti, E. Cárdenas, A. Amerio, Static-stability analysis of an unmanned airplane as a flexible-body, in: AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, 2010, pp. 8230.
- [8] H. Hadadpour, Comparison of unsteady and quazi steady aerodynamics in calculation of aeroelastic unstability