نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۲ شماره ۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۷۱ تا ۳۸۲
DOI: 10.22060/ceej.2019.13840.5487

مدل‌سازی ترک با استفاده از توابع درون‌یاب غنی‌ساز پوشش

حامد ارزانی*، الهام خوش باورراد

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۵-۰۹-۱۳۹۶
بازنگری: ۳۱-۰۶-۱۳۹۷
پذیرش: ۰۷-۰۷-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۱۸-۱۰-۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
روش توابع درون‌یاب پوشش
حوزه های ناپیوسته
توابع هویساید
ترک

خلاصه: روش عددی پوشش، یک روش بر پایه افراز واحد می باشد که با استفاده از درجات متناسبی از توابع غنی سازی در نقاط دارای خطای بالا باعث افزایش دقت می گردد. در این روش توابع درون‌یاب غنی ساز به نقاطی که فاقد دقت کافی‌اند ، اعمال می‌گردند. کارآمدی روش پوشش تا به‌حال برای بسیاری از مسائل مهندسی به اثبات رسیده‌است. ناپیوستگی جابجایی در مرز ترک توسط توابع هویساید مدل می گردد و هم‌چنین توابعی برای مدل کردن ضریب شدت تنش نوک ترک به توابع درون‌یاب پوشش اضافه می گردد. در این مقاله توانمندی روش پیشنهادی با ارزیابی پارامترهای شکست برای مثال‌های متنوعی از ترک‌های ثابت مورد بررسی قرار گرفته‌است. صحت‌یابی و توانمندی روش با سه مثال عددی شامل ترک مرکزی، ترک لبه و ترک مایل مرکزی با زوایای مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌است. مقایسه جواب های حاصل از روش پیشنهادی با جواب دقیق و روش‌های دیگر محققان در حوزه مسائل الاستیسیته خطی، حکایت از کارایی و دقت قابل قبول روش پیشنهادی دارد.

۱- مقدمه

مدل‌سازی ترک یک مسئله مهم در پیش‌بینی عمر مفید سازه های مهندسی بوده و در دهه های گذشته بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته‌است. شبیه سازی‌های بسیاری به روش المان‌محدود همراه با مش بندی مجدد و هم‌چنین روش بدون شبکه برای مدل‌سازی رشد ترک و یا گسترش آن انجام گردیده‌است [۱ و ۲] در روش المان‌محدود معمولا از المان‌های تکینگی نوک ترک استفاده می شود. در این روش نیاز به انطباق ترک با شبکه بندی اجزا محدود بوده که اغلب به محدودیت فرآیند شبکه بندی منجر م‌گردد. هم‌چنین نیاز به ریز شدن المان‌ها در مرز ترک افزایش بار محاسباتی را در پی دارد. به‌علاوه زمانی که رشد ترک نیز وارد محاسبات می گردد نیاز به مش بندی مجدد در این روش‌ها، شبیه سازی را وقت گیر و خسته‌کننده می کند. علاوه بر آن متغیرهایی مانند جابجایی، تنش و کرنش نیاز به هماهنگ بودن با شبکه بندی جدید را دارند که این خود نیز باعث بالاتر رفتن هزینه محاسباتی در این زمینه می گردد. روش‌هایی برای غلبه بر مشکلات مذکور در مراجع [۳ و ۴] آمده‌است.

روش بدون شبکه یک جایگزین مناسب برای غلبه بر برخی از محدودیت های روش‌های متکی بر شبکه می باشد. این روش صرفا به تعریف هندسه مسئله و مجموعه ای از نقاط نیاز داشته و نیازی به شبکه بندی مجدد نمی باشد. روش‌های بدون شبکه متداول و معروفی توسط پژوهشگران مختلف برای حل مسائل مهندسی ارائه گردیده اند، که از آن جمله روش بازسازی ذرات کرنل[1] [۵]، روش محلی پتریو گلرکین[2] [۶] ، روش المان آزاد گلرکین[3] [۷] و روش

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h.arzani@sru.ac.ir

1 Kernel Particle Methods
2 Meshless Local Petrov–Galerkin
3 Element Free Galerkin Methods

کمینه مربعات گسسته[1] [۸] را می توان نام برد. ارزانی و همکارانش از روش کمینه مربعات گسسته به‌منظور مدل‌سازی ترک و فرآیند تظریف استفاده نموده اند [۸ و ۹].

روش المان آزاد گلرکین علیرغم دقت بالا در حل مسائل ترک، برای مسائل رشد ترک نیاز به افزودن نقاط در محدوده ترک دارد [۱۰]. علاوه بر آن روش بدون شبکه مشکلات زیادی در انتگرال گیری عددی و توصیف مرزهای مسئله دارد.

در سال‌های اخیر، اصلاحاتی بر روی روش اجزاء محدود، به منظور غلبه بر مشکلات مذکور در مدل‌سازی ترک در چارچوب روش افراز واحد[2] (PUM) انجام گردیده‌است [۱۱]. به‌عنوان مثال می توان روش المان‌محدود توسعه‌یافته[3] (XFEM) را نام برد [۱۲]. هم‌چنین به‌عنوان روش دیگر می توان به روش المان‌محدود تعمیم یافته[4] (GFEM) اشاره نمود [۱۳ و ۱۴]. شبکه بندی در روش GFEM کلا مستقل از دامنه مسئله بوده و در نتیجه شبکه بندی می تواند منظم باشد. روش GFEM به‌صورت ترم های مرتبه بالاتر یا توابع راهنما[5] به اجزا محدود افزوده می شود تا مسائلی مانند حفره، گوشه و ترک‌ها را تحلیل نماید.

روش عددی منیفلد[6] (NMM)، در ابتدا توسط شی[7] معرفی گردید که روشی بر پایه ترکیب المان‌محدود و آنالیز تغییرشکل های ناپیوسته(DDA)[8] است [۱۵].این روش یکی از راهکار های موثر در راستای افزایش دقت نتایج المان‌محدود می باشد. در واقع شی و همکاران، روش عددی منیفلد را برای تحلیل تغییرشکل‌های ناپیوسته ارائه نمودند که یک تکنیک موثر عددی، برای حل مسائل در حوزه مکانیک جامدات بوده و در سال های اخیر مورد توجه بسیار پژوهشگران قرار گرفته‌است [۱۶]. در ادامه ژنگ[9] از این روش برای تحلیل انواع متنوعی از مسائل ترک اعم از انتشار ترک [۱۷]، ترک چسبنده [۱۸]، ترک شاخه ای [۱۹] استفاده نمود.

در سال ۲۰۱۴ بته و همکارانش روش غنی سازی بوسیله توابع درون‌یاب پوشش، الهام گرفته از روش منیفلد را معرفی نمودند. ایشان به منظور بالا بردن نرخ همگرایی در روش پیشنهادی خود از شبکه بندی حوزه مسئله با المان‌های محدود مرتبه پایین استفاده کرده اند. مبنای این روش استفاده از اجزا محدود غنی شده بوسیله توابع پوشش درون‌یاب بر روی هر المان می‌باشد. این روش قابلیت استفاده برای المان‌های اعوجاجی را نیز دارا بوده و رویکرد اصلی روش بالا بردن دقت بدون افزایش بی‌رویه در تعداد درجات آزادی همانند روال معمول در اجزاء محدود می باشد [۲۰ و ۲۱].

در روش ارائه شده توسط بته و همکارانش، علی رغم دست یابی به نتایج با دقت کافی، استفاده از توابع درون‌یاب با معایبی همراه بوده که از جمله آن می توان به اعمال مرتبه توابع به صورت دستی، عدم به‌کارگیری معیار خطای مناسب، بالا بودن درجات آزادی و مشابه این موارد را نام برد. در اقدام بعدی این پژوهشگران، تلاش‌هایی برای رفع این مشکلات ارائه گردید، اما اصلاحات صورت گرفته نیز دارای معایبی برای به‌کارگیری روش در بسیاری از مسائل حوزه الاستیسیته بوده‌است. به‌عنوان نمونه، برای حل مسائل از همان ابتدا نیاز به شبکه تقریبا متراکمی بوده تا بوسیله آن از افزایش بی رویه مرتبه توابع درون‌یاب جلوگیری گردد. مورد بسیار مهم دیگر، عدم ارائه فرمولاسیون جامع برای همه مسائل بوده که بوسیله آن بتوان از مرتبه مناسب برای توابع درون‌یاب استفاده نمود.

نویسندگان این مقاله بعد از بررسی مزایا و معایب روش استفاده از توابع درون‌یاب، راهکاری برای حل مسائل حوزه الاستیسیته به صورت خودکار که دارای معیار بیان خطای استاندارد برای گزینش المان‌ها و فارغ از پیچیدگی های محاسبات مربوط به المان‌های چهارضلعی است را ارائه نمودند. در این تحقیق این روش برای حل مسائل ناپیوسته بسط داده شده و از مزایای آن برای بهبود نتایج استفاده شده‌است.

در بخش دوم این مقاله معادلات حاکم و نحوه تحلیل حوزه های ناپیوسته ارائه شده‌است. بخش سوم به معرفی روش اجزا محدود غنی‌شده با توابع درون‌یاب پوشش می پردازد. در بخش چهارم نحوه مدل‌سازی ناپیوستگی توسط روش درون‌یاب پوشش ارائه گردیده و در بخش پنجم مثال‌هایی در حوزه مسائل ناپیوستگی مورد بررسی قرارگرفته‌است. در نهایت مقایسه ای بین نتایج روش پیشنهادی و روش سایر پژوهشگران ارائه گردیده‌است.

---

1 Least Squares Meshless Method
2 Partition of Unity Method
3 Extended Finite Element Method
4 Generalized Finite Element Method
5 Handbook
6 Numerical Manifold Method
7 Shi
8 Discontinuous Deformation Analysis
9 Zhang

۲- معادله حاکم

با فرض جابجایی کوچک در مسائل الاستواستاتیک، می توان معادله حاکم را به‌صورت زیر نوشت.

$$\nabla.\sigma + b = 0 \qquad in \quad \Omega \tag{1}$$

که در آن

$$\sigma = C:\varepsilon, \qquad \varepsilon = \nabla_S u \tag{2}$$

در معادله فوق، $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ هندسه مسئله، σ تانسور تنش ، ε تانسور کرنش های کوچک، b نیروی حجمی، C تانسور مدول ماده، u جابجایی، ∇ عملگر گرادیان، و ∇_S عملگر گرادیان متقارن بوده و شرایط مرزی بصورت زیر می باشند.

$$u = \bar{u} \qquad on \quad \Gamma_u, \tag{3}$$

$$n.\sigma = \bar{t} \qquad on \quad \Gamma_t, \tag{4}$$

که در آن $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ مرز Ω و n، $\bar{u}$ و $\bar{t}$ به ترتیب بردار نرمال واحد، جابجایی و نیروی سطحی می باشند. هم‌چنین سطح ترک فاقد نیرو در نظر گرفته می شود [۲۲].

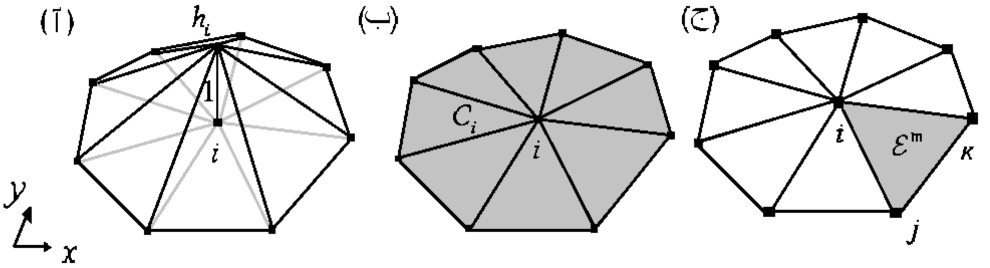
۳- غنی سازی به روش توابع درون‌یاب پوشش

در این قسمت فرمولاسیون اجزا محدود غنی شده با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش برای المان‌های مرتبه پایین اجزا محدود آورده شده‌است. چنانچه برای گسسته سازی یک حوزه از شبکه بندی با المان‌های استاندارد استفاده گردد، دقت پاسخ ها به نوع و ابعاد المان وابسته است. در روش غنی سازی به روش توابع درون‌یاب، برای هر گره یک زیر حوزه پوششی در نظر گرفته می شود و هر زیر حوزه دارای یک تابع درون‌یاب با مرتبه مشخص می باشد. در این زیر حوزه ها از توابع مرتبه بالاتر نسبت به حالت استاندارد استفاده شده و لذا نتایج حل از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. در شکل۱(آ) تابع h_i یک درون‌یاب خطی برای گره i می باشد که مقدار آن در گره i برابر ۱ و در سایر نقاط وابسته به این گره برابر صفر می باشد و المان‌های متصل به گره i زیر حوزه این گره محسوب می شوند. استفاده از توابع خطی برای درون‌یابی زیر حوزه ها، تقریب های با حجم کم محاسباتی و سرعت بالا را به‌دنبال خواهد داشت. ناحیه ای که برای گره i توسط تابع خطی h_i مورد درون‌یابی قرار می گیرد، ناحیه پوشش گره i ام نامیده شده و با C_i نمایش داده می شود شکل ۱(ب). ناحیه پوششی المان مثلثی m، با ۳ گره i و j و k ، همانند شکل ۱(ج)، برابر با نواحی مشترک بین پوشش‌های C_i ، C_j و C_k است. بته و کیم [۲۰]یکی از معضلات استفاده از این روش برای المان‌های چهارضلعی را مشکل تکنیگی اعلام نموده‌اند.

بعد از تعیین ناحیه پوشش گره ها، نوبت به درون‌یابی ناحیه های پوششی خواهد رسید. درون‌یابی با استفاده از چند جمله هایی با مرتبه p صورت می گیرد. مقدار درون‌یابی شده مجهول u در گره i با توجه به ناحیه پوششی این گره در رابطه ۵ نمایش داده شده‌است.

$$P_i^p[u] = u_i + \begin{bmatrix} \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{x}_i^2 & \bar{x}_i\bar{y}_i & \bar{y}_i^2 & \dots & \bar{y}_i^p \end{bmatrix} a_i \tag{5}$$

در رابطه بالا متغیرهای $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ بیانگر فاصله از گره i و بردار a_i نشان دهنده درجات آزادی اضافی مرتبط با گره i در ناحیه پوششی C_i می باشد. با توجه به توضیحات ارائه‌شده تقریب غنی سازی



شکل ۱. توصیف نحوه ارتباط زیر حوزههای غنی شده با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش
(آ) تابع شکل خطی متدوال. (ب) ناحیه پوشش یا المان‌های تحت تاثیر توابع درون‌یاب پوشش. (ج) یک المان غنی‌شده[۲۰]
Fig. 1. Description of sub-domains for enriched cover interpolations: (a) usual linear nodal shape function, (b) cover region or elements affected by the interpolation cover,and (c) an element.

پوششی مربوط به متغیر میدانی u برای یک المان به‌صورت رابطه ۶ بیان می شود.

$$u = \sum_{m=1}^{3} h_i u_i + H_i a_i \quad (۶)$$

که در آن

$$H_i = h_i \left[\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{x}_i^2 \quad \bar{x}_i \bar{y}_i \quad \bar{y}_i^2 \quad \ldots \quad \bar{y}_i^p \right] \quad (۷)$$

با جمع مقادیر رابطه ۷ برای گره های موجود در یک المان و ادغام روابط ۶ و ۷، رابطه ۸ بصورت زیر بازنویسی می گردد.

$$u = \sum_{m=1}^{3} h_i P_i^p \quad (۸)$$

به این ترتیب به‌جای استفاده از روش درون‌یاب استاندارد، از درون‌یابی مرتبه بالاتر بوسیله ی تابع چندجمله‌ای $h_i P_i^p$ استفاده شده‌است، که در آن P_i^p شامل ترم‌های متداول متغیر میدانی u_i به اضافه درجات آزادی مربوط به توابع پوشش می‌باشد. از فرمول‌بندی به‌وضوح مشهود است که علاوه بر مقادیر درون‌یابی استاندارد می توان با داشتن تابع غنی ساز پوشش به مراتب بالاتر درون‌یابی دست یافت.

یکی از مزایای اصلی روش مذکور این است که صرفا در بخش‌هایی از حوزه حل مسئله که دقت مورد نظر تامین نگردیده به افزایش مرتبه تابع پوشش پرداخته و در نواحی که دقت مورد نیاز تامین می گردد، نیازی به استفاده از تابع غنی ساز نمی باشد. لازم به ذکر است که تعیین مرتبه تابع غنی ساز از اهمیت بالایی برخوردار است و اگر این مرتبه برابر صفر در نظر گرفته شود هیچ درون‌یابی اضافی صورت نگرفته و همان نتایج درون‌یابی استاندارد مطابق تقریب مورد استفاده در روش اجزاء محدود به‌دست خواهد آمد. فرآیندهای روش مذکور بطور کامل در مقاله بته [۲۰]بیان گردیده‌است.

۴- مدل‌سازی ترک بوسیله روش عددی توابع درون‌یاب پوشش

در مدل الاستیک خطی شکست، وجود ترک باعث ایجاد پرش جابجایی درسطح ترک و تکینگی تنش در نوک ترک می شود. در این قسمت روش درون‌یاب پوشش برای مدل‌سازی حوزه و حل مسائل ناپیوسته توسعه داده شده‌است. همان‌طور که بیان گردید روش غنی ساز پوشش برای افزایش دقت در حوزه مسئله از ترم‌های غنی سازی استفاده می نماید، که این باعث بالابردن دقت، بدون نیاز به ریزتر کردن شبکه بندی حوزه مسئله می شود. توابعی برای مدل کردن ناپیوستگی معرفی شده و به روش غنی ساز پوشش افزوده می گردند، در نتیجه این روش قادر به تحلیل مسائل ناپیوستگی خواهد گردید. برای مدل کردن تکینگی نوک ترک در روش درون‌یاب پوشش همانند روش اجزاء محدود توسعه ای XFEM از توابع غنی سازی استفاده می گردد [۲۳].

در ادامه، مدل تقریب در نواحی دارای ناپیوستگی و نیز تقریب در نواحی نزدیک به نوک ترک ارائه می گردد. هم‌چنین معیار مناسب برای انتخاب نقاط غنی سازی در یک شبکه بندی دلخواه و با توجه هندسه ترک معرفی می گردد. علاوه بر این خلاصه ای در مورد نحوه محاسبه ضریب شدت تنش ارائه می گردد.

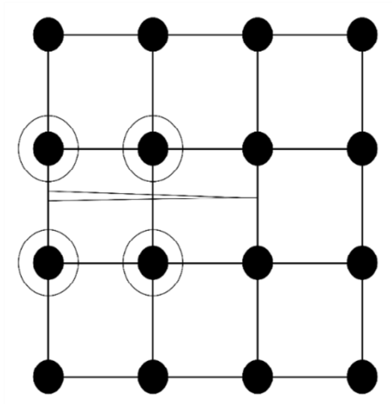
۴-۱- مدل‌سازی ترک

به‌منظور مدل‌سازی ترک در روش درون‌یاب پوشش ابتدا توابع مدل‌کننده ناپیوستگی معرفی گردیده و در نهایت نحوه افزوده شدن این توابع به روش درون‌یاب پوشش تشریح خواهد گردید. همان‌طور که پیشتر گفته شد، وجود ترک باعث ایجاد پرش جابجایی در سطح ترک می گردد. برای مدل کردن این ناپیوستگی از $H(x)$ که تابع پرش یا تابع ناپیوستگی بوده استفاده شده و در سیستم مختصات محلی بصورت زیر توصیف می گردد.

$$H(x,y) = \begin{cases} 1 & for \;\; y > 0 \\ -1 & for \;\; y < 0 \end{cases} \quad (۹)$$

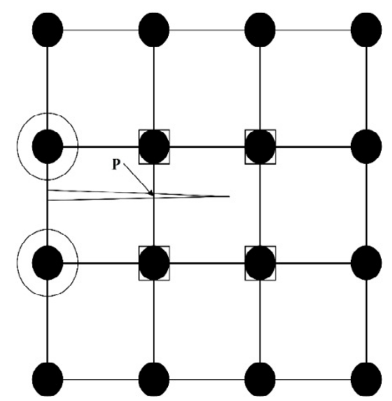
که $H(x)=1$ در لبه بالایی و $H(x)=-1$در لبه پایینی ترک می باشد. اشکال ۲ و ۳ قرارداد موجود در غنی سازی بوسیله تابع پرش را برای نقاط نیازمند به فرآیند غنی‌سازی نشان می دهند. شکل ۲ این قرارداد را هنگامی که ترک منطبق بر لبه المان نمی‌باشد، نشان می دهد که نقاط با دایره دور آن توسط تابع پرش غنی سازی می شوند.

در یک حالت کلی تر مانند شکل ۳، نوک ترک روی لبه المان قرار ندارد که در این حالت ناپیوستگی نمی تواند به‌صورت مناسب توسط توابع $H(x)$ مدل‌سازی گردد. در این حالت غنی سازی پرش در نقاط با دایره ی دور آن صرفا برای مدل کردن ناپیوستگی تا نقطه p کافی می باشند. نقاط مربعی با توابع غنی‌سازی نوک ترک که توسط



شکل ۲. عدم انطباق ترک و شبکه‌بندی، غنیسازی نقاط دایره بوسیله تابع ناپیوستگی غنی سازی

Fig. 2. Crack not aligned with a mesh, the circled nodes are enriched with the cover function



شکل ۳. عدم انطباق ترک با شبکه‌بندی غنی سازی، نقاط دایره با تابع ناپیوستگی و نقاط مربعی با توابع غنی‌ساز نوک ترک جهت مدل‌سازی یکپارچه ناپیوستگی کل ترک

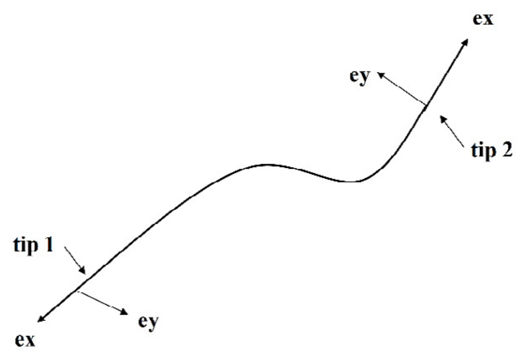
Fig. 3. Crack not aligned with a mesh, the circled nodes are enriched with the discontinuous function and the squared nodes with the tip enrichment functions

بلچیکو و بلک پیشنهاد گردیده غنی سازی می‌گردند [۲۵].

برای گسسته سازی نشان داده‌شده در شکل ۳ ، از تقریب به فرم زیر استفاده می گردد.

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K} \phi_k \left(\sum_{l=1}^{4} c_k^l F_l(x) \right) \tag{۱۰}$$

که در آن I مربوط به توابع پوشش غنی ساز، J مجموعه نقاط دایره ای و K مجموعه نقاط مربعی می باشد. همچنین تابع $F_l(x)$ بصورت زیر تعریف می گردد.



شکل ۴. محور محلی برای مختصات قطبی دو نوک ترک

Fig. 4. local axis for the polar coordinates of the two crack tips

$$\{F_l(r,\theta)\} = \left\{ \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) \right\} \tag{۱۱}$$

که در آن (r,θ) مختصات قطبی نوک ترک می باشند. قابل ذکر است، اولین قسمت فرمول فوق $\sqrt{r}\sin(\theta/2)$، مربوط به ناپیوستگی در سطح ترک بوده در حالی که سه قسمت دیگر پیوسته می باشند. در مقاله حاضر برای حل مسائل از المان‌های مثلثی مرتبه پایین اجزا محدود استفاده شده‌است. از این رو فرمولاسیون فوق برای ترک دلخواه در شبکه بندی با المان‌های مثلثی بصورت زیر تعمیم داده می شود.

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K_1} \phi_k \left(\sum_{l=1}^{3} c_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K_2} \phi_k \left(\sum_{l=1}^{3} c_k^{l2} F_l^2(x) \right) \tag{۱۲}$$

که در آن K_1 و K_2 مجموعه ای از نقاط برای نوک اول و دوم ترک می باشند. تعریف دقیق این دو مجموعه و همچنین مجموعه J در مرجع [۲۵] آورده شده‌است. توابع $F_l^1(x)$ و $F_l^2(x)$ یکسان بوده و با توجه به سیستم محلی هر دو نوک ترک (r_1,θ_1) و (r_2,θ_2) بصورت شکل ۴ تعریف می گردند.

۴-۲- الگوریتم روش پیشنهادی

در این قسمت نحوه عملکرد روش پیشنهادی ارائه شده‌است. ابتدا حوزه مسئله و تمامی مشخصات هندسی آن اعم از مرزها و

حوزه‌های داخلی معرفی می گردد. در گام بعدی با توجه به هندسه مسئله شبکه بندی پیشنهادی ایجاد می گردد. این شبکه‌بندی شامل مشخصات کامل تمامی المان‌ها و موقعیت تمامی گره ها می باشد. سپس هندسه ترک به مسئله اعمال و تعریف می گردد. در گام بعدی موقعیت تمام المان‌ها با توجه به موقعیت ناپیوستگی تقسیم بندی می گردد. برای این منظور از الگوریتمی استفاده شده که قادر است با توجه به هندسه ترک، المان‌ها را به سه گروه، المان نوک ترک، المان لبه ترک و المان‌های فاقد ترک دسته بندی نماید. یعنی برنامه با توجه به مختصات گره ها و بررسی هندسه ترک این دسته‌بندی را انجام می دهد. همان‌طور که قبلا در مورد روش توابع درون‌یاب پوشش مطرح شد این روش قادر است در تک تک گره ها از توابع غنی‌سازی با درجات متفاوت استفاده کند. پس از دسته بندی المان‌ها در مرحله بعدی توابع تقریب غنی سازی با توجه به نوع المان به تابع تقریب اولیه افزوده می گردد. یعنی برای المانی که فاقد ناپیوستگی بوده صرفا توابع پوشش درون‌یاب به توابع تقریب افزوده می گردد. برای المان‌هایی که توسط ترک قطع گردیده از توابع هویساید جهت مدل‌سازی ناپیوستگی استفاده می شود و برای المان‌هایی که شامل نوک ترک هستند جهت مدل‌سازی تکینگی نوک ترک از توابع قطبی طبق رابطه ۱۱ استفاده می گردد. در نهایت پس از اعمال توابع غنی ساز مربوط به هر گره (با توجه به مختصات ترک)، ماتریس سختی تمامی المان‌ها محاسبه می گردد و با اسمبل کردن ماتریس‌های سختی و بردار سمت راست، ماتریس سختی کل و بردار سمت راست کل حاصل می گردد. پس از اعمال شرایط تکیه گاهی (مرزها) طبق فرضیات مسئله مورد بررسی، مسئله تحلیل شده و نتایج حاصل ارائه می گردد. همان‌طور که در مقاله ذکر شده‌است، در گام نخست مقدار تابع پوشش غنی ساز برابر یک در نظر گرفته می شود. یعنی به تمامی گره ها به جز گره هایی که به هندسه ترک مربوط می باشند تابع درون‌یاب پوشش مرتبه یک اختصاص داده می شود. در مرحله دوم تحلیل، جهت افزایش دقت (بدون نیاز به ریز کردن شبکه مش بندی) از تابع غنی سازی پوشش مرتبه بالاتر استفاده گردیده، و مسئله یکبار با استفاده توابع غنی ساز پوشش درجه دو و بار دیگر با توابع غنی ساز پوشش درجه سه تحلیل می گردد. بدیهی است با توجه به قابلیت‌های روش مذکور، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی و صرفا با افزایش درجه تابع غنی سازی دقت تحلیل افرایش یابد.

در این تحقیق از مزایای این روش در حل مسائل دارای ناپیوستگی استفاده شده‌است لذا با توجه به سوابق اشاره شده می‌توان درجات تابع را با توجه به میزان خطای حاصل از تحلیل اولیه به هر المان اختصاص داد. بدین معنی که تحلیل اولیه با یک شبکه بندی نسبتا درشت و به روش عادی انجام شده و میزان خطای حاصل از تحلیل محاسبه گردد، در گام بعدی به جای افزایش تراکم شبکه بندی و ریزتر کردن بی رویه المان‌ها (که حجم بالای محاسبات را در پی خواهد داشت) جهت افزایش دقت، می توان از توابع غنی ساز پوشش استفاده نمود. در نواحی با خطای بیشتر، از تابع پوشش درجه بالاتر استفاده خواهد گردید. نویسندگان مقاله در پژوهش های پیشین خود از این روش برای تحلیل مسائل بدون ناپیوستگی استفاده نموده و نتایج قابل‌قبولی را به‌دست آورند [۲۴].و در این مقاله برای اولین بار این روش برای حل مسائل دارای ناپیوستگی استفاده شده و در المان‌های درگیر با ترک از توابع غنی ساز مناسب که قادر به مدل‌سازی ناپیوستگی می‌باشند، استفاده شده‌است.

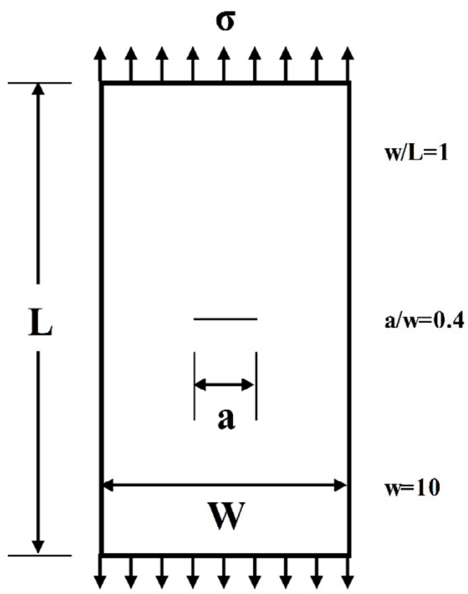
۵- مثال‌های عددی

به‌منظور صحت یابی روش پیشنهادی در این بخش از مقاله چندین مسئله استاندارد در حوزه مسائل ترک مدل‌سازی شده‌است. سه مسئله ترک مرکزی، مورب و لبه تحلیل و ضریب شدت تنش برای هر یک از مسائل محاسبه شده‌است. تمامی مسائل در حالت کرنش مسطح می باشند. مقایسه حل دقیق و نتایج حاصل از روش پیشنهادی، حکایت از توانمندی قوی و مناسب بودن آن در حل مسائل حوزه های ناپیوسته دارد.

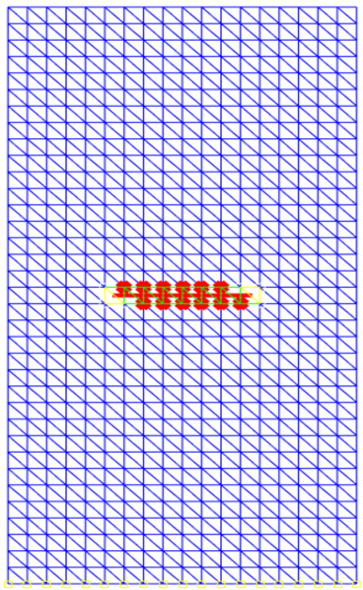
۵- ۱- مثال ترک مرکزی تحت نیروی کششی

مثال اول شامل یک صفحه با ترک مرکزی تحت نیروی کششی در وجه بالایی و پایینی همانند شکل ۵ می باشد. پارامترهای مکانیکی حوزه حل مسئله شامل مدول الاستیسیته $E = 3\times10^7\ psi$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.25$، تنش اعمالی $\sigma = 1.0\ psi$ و معادلات مربوطه از نوع کرنش مسطح است. موقعیت ترک در $y = 0.0$ از $x = -2.0, +2.0$ بوده و مشخصات کامل مسئله در شکل ۵ نمایش داده شده‌است.

هندسه مسئله $[-10.0,10.0]\times[-5.0,5.0]$ می باشد. در این



شکل ۵. مسئله ترک مرکزی
Fig. 5. Central Crack problem



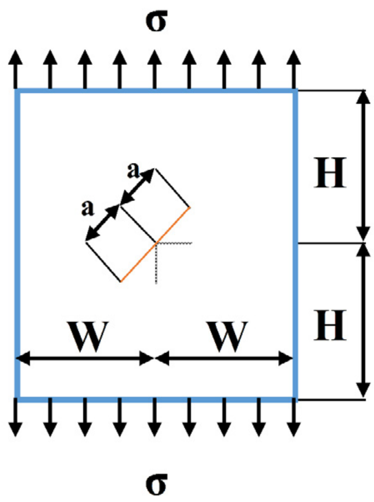
شکل ۶. شبکه‌بندی مسئله ترک مرکزی
Fig. 6 . Meshes for central crack

جدول ۱. نتایج تحلیل مسئله ترک مرکزی[۲۵]
Table 1. the result of the central crack problem

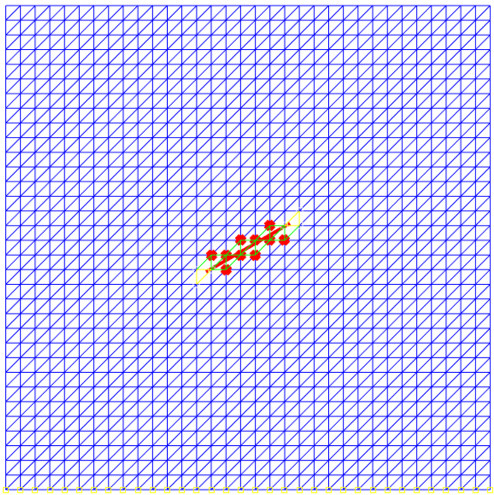
روش مورد استفاده	$K_{I\,(Mpa.m^{0.5})}$	خطا%
حل مرجع[۲۶]	۲/۷۶۴۱	-
روش XFEM [25]	۲/۷۰۹۶	٪۱/۹
روش Interpolation cover-1	۲/۷۲۰۱	٪۱/۵
روش Interpolation cover-2	۲/۷۳۶۱	٪۱/۱
روش Interpolation cover-3	۲/۷۴۱۱	٪۱/۰۱

مثال به‌منظور افزایش دقت، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی می توان با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش دقت مورد نیاز حوزه مسئله را تامین نمود. در واقع در نقاطی که دقت مطلوب تامین نگردیده، می توان از توابع درون‌یاب پوشش متناسب با میزان دقت مورد نیاز بهره برد. در این تحقیق از توابع درون‌یاب پوشش درجه اول، دوم و سوم استفاده شده‌است. توابع مدل‌سازی ترک در المان‌های حاوی نوک و دامنه ترک جهت نشان دادن ناپیوستگی استفاده شده تا بتوان بدون توجه به هندسه ترک، شبیه سازی مسائل ناپیوستگی را انجام داد.

بلچیکو و همکارانش در مرجع [۲۵] این مسئله را با دو نوع شبکه‌بندی به روش XFEM تحلیل نموده‌اند. شبکه اول شامل ۴۰۲ گره با ۲۵ نقطه غنی سازی در هر نوک ترک و شبکه دوم شامل ۱۶۰۶ گره با ۶۴ گره غنی سازی در هر نوک ترک می‌باشند. حل دقیق با استفاده از یک ضریب تصحیح هندسه محدود برابر $K_I = 2.7641 \quad (MPa\sqrt{m})$ بیان شده‌است [۲۶]. با توجه به اینکه روش توابع درون‌یاب پوشش می تواند بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی و صرفا با افزودن توابع درون‌یاب پوشش در نقاطی که به دقت کافی نرسیده اند، دقت مورد نیاز را تامین نماید. لذا حوزه حل مسئله با شبکه ای شامل ۶۸۰ گره با ۱۶ نقطه غنی سازی در هر نوک ترک، با روش پیشنهادی تحلیل گردیده و نتایج برای سه حالت توابع پوشش درجه اول، دوم و سوم به ترتیب $K_I = 2.7201$، $K_I = 2.7361$، $K_I = 2.7411$ ارائه شده که میزان خطای تقریب آن به ترتیب برابر ۱/۵۵، ۱/۱ و ۱/۰ درصد مطابق جدول ۱ می باشد. از مقایسه میزان خطای روش پیشنهادی و روش اجزاء محدود توسعه



شکل ۷. مسئله ترک مرکزی مایل هندسه ترک
Fig. 7 . An infinite plate with an inclined central crack under tension.



شکل ۸. شبکه‌بندی منظم بدون توجه به هندسه ترک
Fig. 8. Regular meshing regardless of crack geometry

جدول ۲. نتایج تحلیل مسئله ترک لبه
Table 2 . the result of the edge crack problem

روش	KI
حل مرجع[۲۵]	۰/۹۳۷۲
روش XFEM [۲۹]	۰/۹۵۴
روش عددی منیفلد[۲۹]	۰/۹۳۳
روش پیشنهادی	۰/۹۳۸

داده‌شده مطابق جدول ۱ مشخص است روش پیشنهادی قادر به مدل‌سازی مسائل ناپیوستگی با دقت مناسب و حجم محاسباتی کمتر (تعداد درجات آزادی کمتر) می باشد .

۵- ۲- مثال ترک مرکزی مایل در یک صفحه نامحدود تحت نیروی کششی

این مسئله شامل یک صفحه نامحدود با یک ترک مرکزی مایل تحت نیروی کششی همانند شکل ۷ قرار دارد. جواب دقیق این مسئله در مرجع [۲۷] بصورت زیر بیان گردیده‌است که در آن φ زاویه ترک از سطح افق می باشد.

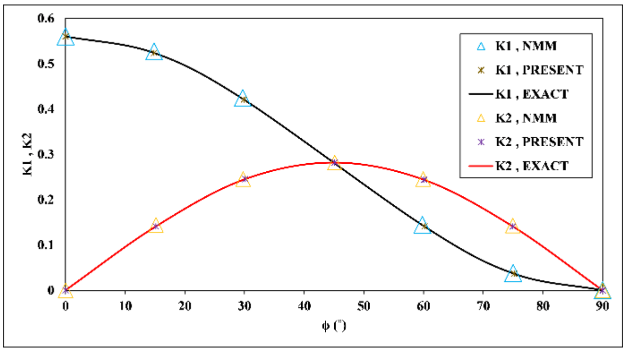
$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\cos^2\varphi, \quad K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (۱۳)$$

برای مدل کردن ترک در این مثال، طول و عرض صفحه واحد در نظر گرفته شده‌است. نصف طول ترک $a = 0.1$ بوده و تنش یکنواخت $\sigma = 1.0$ بر صفحه اعمال می گردد. از آنجایی که طول ترک در مقایسه با ابعاد صفحه کوچک می باشد نتایج فرمول‌های فوق می تواند به‌عنوان جواب صحیح در نظر گرفته‌شود.

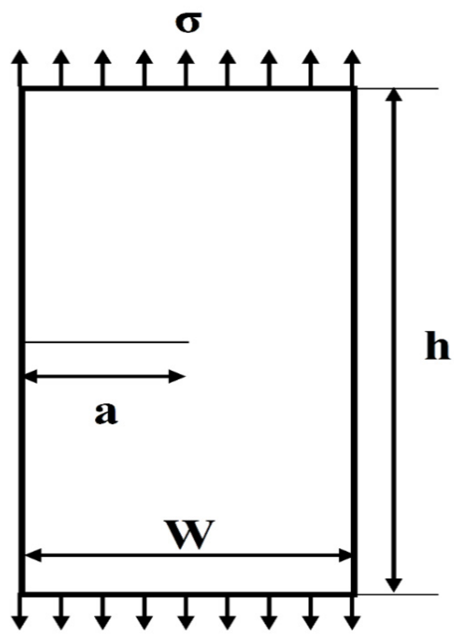
برای محاسبات انجام شده زاویه ترک مایل ۳۰ درجه در نظر گرفته شده و به ترتیب سه تابع پوشش درون‌یاب مرتبه اول و دوم و سوم بروی دامنه مسئله اعمال گردیده‌است. در گام بعدی ضریب شدت تنش با زوایای $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$, محاسبه شده و نتایج حاصل در شکل ۹ نمایش داده شده‌است. همانطور که در شکل ۹ مشخص است نتایج حاصل از روش پیشنهادی با حل دقیق و روش المان‌های لانه زنبوری منیفلد[۱] تطابق کامل دارد[۲۸].

در مرجع [۲۸] از ۳۵۶۰ المان در حالت $\beta = 0$ و از ۳۵۶۲ المان برای حالت $\beta = 75^\circ$ استفاده شده‌است، و همانطور که در شکل ۹

1 Honeycomb Elements- Numerical Manifold Method



شکل ۹. محاسبه ضریب شدت تنش برای زوایای مختلف ϕ
Fig. 9 . Computed SIFs for different inclined angle ϕ



شکل ۱۰. مسئله ترک لبه[۲۸]
Fig. 10. The geometry of the edge crack problem

مشاهده می گردد، نتایج حاصل با جواب دقیق مطابقت دارد. در روش پیشنهادی این مقاله مسئله با ۲۱۷۸ المان تحلیل گردیده و نتایج حاصل هم خوانی مناسبی با هر دو روش مرجع [۲۵] و حل دقیق دارند.

۵. ۳. مثال ترک لبه

یک صفحه با ترک لبه و تحت اثر نیروی کششی در دو انتها را طبق شکل ۱۰ در نظر بگیرید. هندسه صفحه و ترک در شکل ۱۰ با مشخصات $w=7,\ h=16,\ a/w=1/2,$ نمایش داده شده‌است. این مسئله حالت کرنش مسطح بوده و متریال آن از نوع همگن و ایزوتروپ می باشد. مدول یانگ $E=1$ و نسبت پواسون $\nu=0.3$ می باشد. ضریب شدت تنش با توجه به جواب دقیق مسئله بصورت $K_I=9.372$ می باشد. در مرجع [۲۹] ضریب شدت تنش برای مود اول با استفاده از روش X-FEM محاسبه گردیده و نتایج مطابق جدول زیر ارائه گردیده‌است. هم‌چنین مسئله مذکور با روش پیشنهادی تحلیل گردیده که در آن تمام المان‌ها با توابع پوشش درون‌یاب درجه ۱ تا ۳ غنی سازی شده اند.

مقایسه بین ضریب شدت تنش نرمال شده برای مود اول با استفاده از روش X-FEM و روش عددی پیشنهادی و جواب دقیق در جدول ۲ نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشخص است نتایج از دقت بسیار بالایی برخوردار می باشند [۲۹].

۶- نتیجه گیری

در روش اجزا محدود برای حل مسائل با ناپیوستگی در حوزه، اغلب نیاز به انطباق هندسی مرز المان و ترک می باشد. در نتیجه، به دلیل محدودیت های شبکه بندی ناپیوستگی در مرز شبکه بندی لحاظ می گردد، بنابراین مسائل ترک با یک شبکه بندی استاندارد قابل‌تحلیل نبوده و برای مدل‌سازی ناپیوستگی همواره ملاحظات شبکه بندی با توجه به هندسه ترک به‌عنوان معضل اساسی مطرح می باشد. فرآیند مدل‌سازی همواره نیازمند به ریزکردن شبکه بندی در مرز ترک، برای پوشش کامل مرز ترک توسط المان‌ها و افزایش دقت است. هم‌چنین گاهی برای بالا بردن دقت تحلیل، کل حوزه مسئله نیاز به تعریف دارد. در روش توابع درون‌یاب پوشش، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی و صرفا با افزایش درجه توابع غنی ساز پوشش می توان دقت تحلیل را افزایش داد. هم‌چنین این روش بدون توجه به هندسه ترک و ملاحظات شبکه‌بندی، قادر به استفاده از یک مش بندی منظم برای حل مسائل ناپیوستگی می باشد. در واقع این روش قادر است ناپیوستگی در داخل المان را مدل‌سازی نماید.

در مقاله حاضر، از روش توابع غنی ساز پوشش برای حل مسائل ناپیوستگی مانند ترک استفاده شده‌است. توابع غنی ساز پوشش مرتبه اول، دوم و سوم به‌منظور افزایش دقت حل در حوزه مسئله، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی بکار گرفته شده‌است. ناپیوستگی مربوط به جابجایی در سطح ترک با استفاده از توابع هویساید اعمال می گردد. به‌منظور بررسی وضعیت تکینگی در اطراف نوک ترک و نیز مقایسه

روش پیشنهادی با سایر روش‌ها، از توابع غنی سازی نوک ترک مشابه با روش XFEM استفاده شده‌است. سه مثال عددی استاندارد برای محاسبه ضریب شدت تنش بررسی گردیده و نتایج حاصل حکایت از توانمندی روش ارائه شده در حل مسائل ترک دارد. لازم به‌ذکر آن‌که برتری روش بدلیل محدودیت اطلاعات موجود از سایر پژوهش‌ها صرفا با مقایسه تعداد درجات آزادی صورت گرفته‌است.

از دیگر قابلیت های روش توابع درون‌یاب پوشش، می توان به قابلیت مدل‌سازی هندسه های پیچیده اشاره نمود که تاثیر بسزایی در افزایش دقت و کاهش حجم محاسباتی دارد. در روش پیشنهادی، توابع شبیه سازی ناپیوستگی به روش درون‌یاب پوشش افزوده گردیده تا بدون نیاز به ریزتر کردن شبکه بندی و توجه به هندسه ترک، مسائل با حوزه ناپیوسته تحلیل گردد. در نتیجه قادر به استفاده از یک شبکه بندی منظم برای تحلیل مسائل بوده و نیازی به تظریف شبکه بندی برای افزایش دقت تحلیل نمی باشد. هم‌چنین به علت استفاده از توابع غنی سازی از یک شبکه بندی نسبتا درشت تر برای حل مسئله استفاده می‌شود که این خود کاهش درجات آزادی و در نتیجه کاهش حجم محاسباتی را در پی خواهد داشت.

نتایج در حیطه مسائل دو بعدی نشان‌دهنده دقت بسیار مناسب و بالای روش پیشنهادی می باشد. در همه مثال‌های حل شده، ضریب شدت تنش نزدیک به حل دقیق و روش‌های پیشنهادی سایر پژوهشگران بوده و همانطور که مشاهده گردید با تعداد درجات آزادی کمتر، خطا در حد مطلوب مورد نظر می باشد.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

E	مدول الاستیسیته، $\mathrm{N/m^2}$
$(\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{i}},\overline{\mathrm{y}}_{\mathrm{i}})$	فاصله از گره i، m
$\mathrm{a_i}$	درجات آزادی اضافی
i	گره
C_i	ناحیه پوششی
$\mathrm{h_i}$	درون‌یاب خطی برای گره i
$H(x)$	تابع پرش
I	توابع غنی‌ساز پوشش
h	طول مسئله، m
K_I	ضریب شدت تنش برای مود اول ترک
K_{II}	ضریب شدت تنش برای مود دوم ترک
a	نصف طول ترک
w	عرض مسئله، m
y	موقعیت ترک، m
$F_I(x)$	تابع تقریب نوک ترک
J	مجموعه نقاط دایره ای
K	مجموعه نقاط مربعی
x	موقعیت ترک، m
h	موقعیت ترک، m
C	تانسور مدول ماده، N/m2
u	جابجایی، m
n	بردار نرمال واحد
$\bar{u}$	جابجایی، m
$\bar{t}$	نیروی سطحی، N

علائم یونانی

σ	تانسور تنش، N/m^2
ε	تانسور کرنش
b	نیروی حجمی، N
∇_S	عملگر گرادیان متقارن
∇	عملگر گرادیان
Ω	حوزه مسئله، $\mathrm{m^2}$
Γ	مرز مسئله، m
(r,θ)	مختصات قطبی نوک ترک
ν	نسبت پواسون
φ	زاویه ترک، درجه
β	زاویه ترک، درجه

زیرنویس

u	شرایط مرزی ضروری
t	شرایط مرزی طبیعی
s	تقارن در عملگر
i	شماره گره
j	شماره گره
k	شماره گره

I	مربوط به مود اول ترک
II	مربوط به مود دوم ترک

مراجع

[1] Trädegård, A., F. Nilsson, and S. Östlund, FEM-remeshing technique applied to crack growth problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998. 160(1-2): p. 115-131.

[2] Bouchard, P.-O., F. Bay, and Y. Chastel, Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2003. 192(35-36): p. 3887-3908.

[3] Heintz, P., On the numerical modelling of quasi-static crack growth in linear elastic fracture mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006. 65(2): p. 174-189.

[4] Khoei, A., H. Azadi, and H. Moslemi, Modeling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent patch recovery technique. Engineering Fracture Mechanics, 2008. 75(10): p. 2921-2945.

[5] Liu, W.K., S. Jun, and Y.F. Zhang, Reproducing kernel particle methods. International journal for numerical methods in fluids, 1995. 20(8-9): p. 1081-1106.

[6] Atluri, S.N. and T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational mechanics, 1998. 22(2): p. 117-127.

[7] Belytschko, T., Y.Y. Lu, and L. Gu, Element-free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering, 1994. 37(2): p. 229-256.

[8] Arzani, H., A. Kaveh, and M. Dehghan, Adaptive node moving refinement in discrete least squares meshless method using charged system search. Scientia Iranica, 2014. 21(5): p. 1529-1538.

[9] Arzani, H., A. Kaveh, and M. Taheri Taromsari, Optimum two-dimensional crack modeling in discrete least-squares meshless method by charged system search algorithm. Scientia Iranica, 2017. 24(1): p. 143-152.

[10] Belytschko, T., Y. Lu, and L. Gu, Crack propagation by element-free Galerkin methods. Engineering Fracture Mechanics, 1995. 51(2): p. 295-315.

[11] Melenk, J.M. and I. Babuška, The partition of unity finite element method: basic theory and applications. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996. 139(1-4): p. 289-314.

[12] Moës, N., J. Dolbow, and T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing. International journal for numerical methods in engineering, 1999. 46(1): p. 131-150.

[13] Strouboulis, T., I. Babuška, and K. Copps, The design and analysis of the generalized finite element method. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000. 181(1-3): p. 43-69.

[14] Strouboulis, T., K. Copps, and I. Babuška, The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. 47(8): p. 1401-1417.

[15] Shi, G.h. and R.E. Goodman, Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989. 13(4): p. 359-380.

[16] Ghasemzadeh, H., M. Ramezanpour, and S. Bodaghpour, Dynamic high order numerical manifold method based on weighted residual method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014. 100(8): p. 596-619.

[17] Zheng, H. and D. Xu, New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014. 97(13): p. 986-1010.

[18] Terada, K., et al., Finite cover method for progressive failure with cohesive zone fracture in heterogeneous solids and structures. Computational Mechanics, 2007. 39(2): p. 191-210.

[19] Zheng, H., F. Liu, and X. Du, Complementarity problem arising from static growth of multiple cracks and MLS-based numerical manifold method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015. 295: p. 150-171.

[20] Kim, J. and K.-J. Bathe, The finite element method enriched by interpolation covers. Computers & Structures, 2013. 116: p. 35-49.

[21] Kim, J. and K.-J. Bathe, Towards a procedure to automatically improve finite element solutions by interpolation covers. Computers & Structures, 2014. 131: p. 81-97.

[22] Wawrzynek, P.A. and A.R. Ingraffea, An interactive approach to local remeshing around a propagating crack. Finite Elements in Analysis and Design, 1989. 5(1): p. 87-96.

[23] Zhang, H., et al., Numerical analysis of 2-D crack propagation problems using the numerical manifold method. Engineering analysis with boundary elements, 2010. 34(1): p. 41-50.

[24] Arzani, H. and E. Khoshbavar Rad, Automatic Adaptive Finite Element Enrichement using Interpolation Cover Functions. Computational Methods in Engineering, 2019. 37(2): p. 79-96.

[25] Belytschko, T. and T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International journal for numerical methods in engineering, 1999. 45(5): p. 601-620.

[26] Ewalds, H. and E. WANHILL, Fracture Mechanics, Ed. Edward Arnold, 1986. 10.

[27] Karihaloo, B.L., Fracture mechanics & structural concrete. Longman Scientific and Technical, 1995.

[28] Zhang, H. and S. Zhang, Extract of stress intensity factors on honeycomb elements by the numerical manifold method. Finite elements in analysis and design, 2012. 59: p. 55-65.

[29] Mousavi, S., E. Grinspun, and N. Sukumar, Harmonic enrichment functions: A unified treatment of multiple, intersecting and branched cracks in the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011. 85(10): p. 1306-1322.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Arzani, E. Khoshbavar Rad, The Analyzing of the Discontinuity Problem by Enriched Interpolation Covers, Amirkabir J. Civil Eng., 52(2) (2020) 371-382.

DOI: 10.22060/ceej.2019.13840.5487