



پیش‌بینی ضریب دراگ برای حباب در حال صعود در یک سیال غیر نیوتونی

صفورا کریمی^{*}، مجتبی شفیع^۱، آنا عبیری^۱، فرزاد قدم^۲

^۱ دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران
^۲ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۶/۱۲
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۹/۱۴
پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۱۰/۲۶

کلمات کلیدی:

آنالیز ابعادی
پلی آکریل آمید
حرکت حباب
سرعت حد
سیال ویسکوالاستیک

خلاصه: در مطالعه‌ی حاضر به صورت آزمایشگاهی ضریب دراگ حباب تک در حال صعود در سیال غیرنیوتونی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور محلول پلی آکریل آمید با غلظت‌های مختلف انتخاب شد. این محلول سیال غیرنیوتونی با خاصیت ویسکوالاستیک است. آزمایشات با قطر نازل‌های مختلف، برای حباب‌های گازی هوا، اکسیژن و دی‌اکسیدکربن و در دبی‌های تزریق مختلف انجام شده است. از این رو نتایج نسبت به مطالعات گذشته جامعیت بیشتری دارد. مقایسه‌ی بین نتایج به دست آمده با سایر معادلات نشان داد که هیچکدام از این روابط نمی‌توانند ضریب دراگ حباب در حال صعود درون سیال غیرنیوتونی با خاصیت ویسکوالاستیک را به خوبی پیش‌بینی کنند. از این رو به کمک تحلیل ابعادی، دو رابطه‌ی جدید برای پیش‌بینی ضریب دراگ برحسب اعداد بدون بعد رینولدز، ارشمیدس و اتوس ارائه شد. معادله‌ی اول که مستقیماً از آنالیز ابعادی به دست آمده است نسبت به معادله‌ی دوم ساده‌تر بوده و متوسط درصد خطای پیش‌بینی آن ۳/۲۶٪ است. این درحالی است که متوسط خطای پیش‌بینی معادله‌ی ارائه‌ی دوم که از لحاظ فرمولاسیون پیچیده‌تر می‌باشد در حدود ۱/۷٪ به دست آمده است. علاوه بر آن معادلات جدیدی برای پیش‌بینی سرعت حد و همچنین بررسی رفتار حباب در حال صعود در سیال غیرنیوتونی ویسکوالاستیک ارائه شده است.

۱- مقدمه

حرکت حباب در سیالات غیر نیوتونی در بسیاری از حوزه‌های عملیاتی مهندسی از جمله تصفیه سباب، تخمیر، فرآیندهای خالزایی، ستون‌های حباب، فرآیندهای کامپوزیتی، فرآیندهای تولید فوم‌های پلاستیکی و سیستم‌های اختلاط گاز-مایع مورد توجه قرار می‌گیرد. تاکنون مطالعات تئوریک و آزمایشگاهی زیادی در راستای کسب درک جامعی از پدیده‌ی حرکت حباب در سیال انجام شده است. چرا که نتایج حاصل از این مطالعات به صورت نزدیکی با بازدهی فرآیندهای انتقال جرم و حرارت و نیز واکنش‌های شیمیایی و بیولوژیکی ارتباط دارد. در مقابل به دلیل پیچیدگی مکانیزم حرکت حباب و نیز اثر خواص رئولوژیکی سیال، یک تحلیل نظری کامل بر روی رفتار حباب همچنان غیر ممکن است. از این میان غالب مطالعات بر روی پارامترهایی چون شکل حباب، مسیر صعود حباب و سرعت نهایی حباب با اندازه‌های مختلف و سیال‌های غیر نیوتونی با خواص رئولوژیکی متفاوت صورت گرفته است. نیروی دراگ یکی از مهمترین نیروهای کنترل کننده‌ی حرکت حباب

در سیال است. به منظور پیش‌بینی این ضریب در یک حباب در حال صعود و اندازه‌گیری سرعت حد آن، تحقیقات قابل توجهی با استفاده از روش‌های تجربی و عددی صورت گرفته است. در برخی از این تحقیقات با فرض کروی بودن حباب، میزان ضریب دراگ در مایعات نیوتونی در محدوده‌ی مختلف Re بیان و با داده‌های تئوری مقایسه شده است. در رایج‌ترین مدل‌های دراگ به دست آمده که در آن رفتار حباب کروی تک ارزیابی شده است از اعداد بی بعد رینولدز (Re)، وبر (We)، اتوس (Eo) و مورتن (Mo) برای بررسی ضریب دراگ استفاده شده است. بوگزانو و همکاران [۱] یک معادله تجربی برای تخمین این ضریب در سیالات نیوتنی مختلف با ویسکوزیته‌های متفاوت پیشنهاد دادند. مقایسه بین داده‌های آزمایشگاهی و مدل‌های تئوری ارائه شده نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی برای حرکت حباب در محدوده‌ی وسیعی از اعداد Mo و Eo و همچنین در محیط‌های بسیار ویسکوز توانایی بالایی دارد. لی و همکاران [۲] نیز به اندازه‌گیری ضریب دراگ برای حباب‌های هوا که با هیدرات پوشش داده شده است پرداخته‌اند. کلبالیه و همکاران [۳] در به دست آوردن معادلات تجربی ضریب دراگ برای یک ذره کروی جامد و حباب تغییر

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: s.karimi@jsu.ac.ir



شکل-یافته به صورت جداگانه از یک روش مماسی که در آن از الگوریتم مارگورس^۱ استفاده شده است بهره گرفته‌اند. مدل ارائه شده تابعی از اعداد بی بعد We و Re, Mo, Eo می‌باشد. نکته حائز اهمیت در خصوص مطالعات انجام شده بر روی ضریب دراگ در سیال ساکن نیوتونی محدود بودن نوع گاز در این مطالعات می‌باشد. به طوری که در اغلب آنها حباب گازی به یکی از موارد هوا [۴-۶]، نیتروژن [۶ و ۷]، متان [۲]، کربن دی اکسید [۶ و ۸] و هوای مرطوب [۹] محدود بوده و به ندرت از چند نوع گاز مختلف استفاده شده است. اخیراً نیز فو و همکاران [۱۰] به منظور مطالعه دقیق‌تر حرکت حباب از چهار دوربین سرعت بالا بهره گرفته‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که با استفاده از تکنیک مذکور می‌توان اثر دیواره بر روی زاویه چرخش حباب را مطالعه کرد. در این بررسی نیروهای همچون دراگ و بویانسی محاسبه نشده است. همچنین، اخیراً بیان و همکاران [۱۱ و ۱۲] به صورت آزمایشگاهی حرکت حباب در سیال‌های نیوتنی آب و ۲-اکتان را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل از این مطالعات ارائه یک مدل‌های تجربی دقیق‌تر برای ضریب دراگ نسبت به کارهای گذشته می‌باشد.

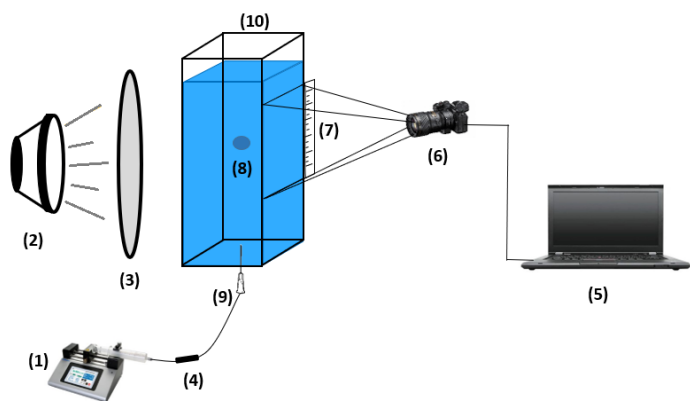
برخلاف سیالات نیوتنی مطالعه بر روی سیالات غیر نیوتنی به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی که رئولوژی این گونه سیالات در بر دارد از تنوع و گستردگی بیشتری برخوردار است. در برخی از این مطالعات تمرکز بر روی نوع سیال بوده و از سایر موارد مانند محاسبه ضریب دراگ چشم پوشی شده است. چابرا [۱۳] در کتاب خود یک مرور کامل بر روی اثرات ویسکوالاستیسی سیال بر روی شکل حباب و سرعت آن داشته است. کمی‌ها و همکاران [۱۴] با مطالعه عددی محلول پلی آکریل اسید^۲ اثر دنباله‌های ایجاد شده در پشت حباب را مورد توجه قرار داده‌اند. ژانگ و همکاران [۱۵] با مطالعه‌ای که بر روی ترکیبات مختلف کربوکسی متیل سلولز^۳، پلی آکریل اسید و هیدروکسی اتیل سلولز^۴ انجام دادند سعی کردند که مطالعات خود را از نظر نوع سیال نسبت به کارهای گذشته جامعیت دهند. مدل رئولوژی در نظر گرفته شده بر هر سه نوع سیال مدل کرو سه پارامتری می‌باشد. فرانک و همکاران [۱۶] با مطالعه بر روی محلول‌های کربوکسی متیل سلولز و پلی آکریل اسید در غلظت‌های مختلف رفتار حباب را به روش عددی لیس بولتزمن^۵ مدل‌سازی کردند. فان و بین [۱۷] با استفاده از از تئوری فرکتال به مدل‌سازی حرکت حباب در محلول کربوکسی متیل سلولز پرداختند. زو و همکاران [۱۸] رفتار حباب تک را در سیال غیر نیوتنی

- 1 Marquardt
- 2 Polyacrylic Acid (PAA)
- 3 Carboxymethyl Cellulose (CMC)
- 4 Hydroxy Ethyl Cellulose (HEC)
- 5 Lattice Boltzmann (LB)

کربوکسی متیل سلولز هم به صورت آزمایشگاهی و هم به روش آنالیز ابعادی مطالعه کردند. نتایج ایشان منجر به ارائه‌ی یک رابطه‌ی نیمه تجربی برای تشریح حرکت و نیز تغییر شکل حباب در حال صعود شده است. پنگ و لو [۱۹] نیز به مطالعه عددی حرکت حباب در سیال با خاصیت رقیق شونده برشی پرداخته و اثر اعداد گالیه و اتوس را بر روی حباب بررسی کردند. در غالب این مطالعات مدل رئولوژی در نظر گرفته شده به دلیل سادگی آن، مدل قانون توانی می‌باشد. که از آن جمله می‌توان به کار دزیبیسکی و همکاران [۲۰] در مطالعه حرکت حباب در محلول‌های کربوکسی متیل سلولز و پلی آکریل اسید اشاره کرد. لین و لین [۲۱] نیز برای مطالعه حرکت حباب در محلول ۴۰٪ گلیسرین و همچنین پلی آکریل اسید از مدل قانون توانی استفاده کردند. با این وجود در سال‌های اخیر محققان سعی در توسعه مطالعات خود از لحاظ انتخاب رئولوژی سیال داشته‌اند. یکی از مدل‌های جایگزین در توصیف رفتار سیالات غیر نیوتنی مورد بررسی، مدل کرو می‌باشد که نسبت به مدل قانون توانی از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. به عنوان مثال اُهتا و همکاران [۲۲] در مطالعه عددی خود از مدل کرو استفاده کرده‌اند. ژانگ و همکاران [۲۳] نیز در مطالعه‌ای که به صورت آزمایشگاهی و عددی انجام داده‌اند از مدل توسعه یافته کرو-یاسودا برای مطالعه اثرات غیر نیوتنی محلول‌های کربوکسی متیل سلولز، هیدروکسی اتیل سلولز و صمغ زانتان^۶ استفاده کرده‌اند. مدل انتخابی فان و بین [۲۴] در توصیف حرکت حباب نیتروژن در محلول کربوکسی متیل سلولز مدل کرو-یاسودا می‌باشد. پرملاتا و همکاران [۴] نیز در مطالعه عددی که به روش حجم سیال^۷ انجام داده‌اند مدل کرو-یاسودا را جایگزین مدل‌های رئولوژیکی گذشته کرده‌اند.

در توسعه مطالعاتی که بر روی حرکت حباب در سیالات غیر نیوتنی انجام شده است، برخی محققان به اندازه‌گیری و تعیین ضریب دراگ به عنوان یک پارامتر بسیار حائز اهمیت پرداخته‌اند. دهول و همکاران [۲۵] با مطالعه عددی که بر روی حرکت حباب انجام داده‌اند، ضریب دراگ را به صورت تابعی از عدد رینولدز و شاخص قانون توانی ارائه کرده‌اند. ونیوان و همکاران [۲۶] نیز برای بررسی حرکت حباب در محلول‌های کربوکسی متیل سلولز و پلی آکریل اسید از مدل رئولوژی قانون توانی بهره گرفته‌اند. نتایج آنها در نهایت منجر به ارائه مدل تجربی برای ضریب دراگ برای اعداد بدون بعد رینولدز، اتوس و ارشمیدس شده است. لی و همکاران [۲۷] نیز برای مطالعه حرکت حباب هوا در محلول کربوکسی متیل سلولز از قانون توانی استفاده کرده‌اند. شاخص توانی، عدد رینولدز و نیز نسبت ابعادی حباب متغیرهای مستقل انتخابی آنها در ارائه مدل

6 Xanthan Gum (XG)
7 Volume of Fluid (VOF)



شکل ۱: شماتیک مجموعه آزمایشگاهی، ۱: پمپ سیرینج، ۲: لامپ ال ای دی، ۳: دیفیوزر، ۴: شیر یک طرفه، ۵: سیستم پردازش تصویر، ۶: دوربین، ۷: خط کش، ۸: حباب در حال صعود در ستون مایع، ۹: نازل، ۱۰: ستون حاوی مایع

Fig. 1. Schematic of experimental setup; 1: Syringe pump, 2: LED lamp, 3: Diffuser, 4: One-way valve, 5: Image processing system, 6: Camera, 7: Ruler, 8: Rising bubble in the liquid column, 9: nozzle, 10: liquid column

توسط نازل کنترل می‌شود. نازل‌های مورد استفاده در انجام این آزمایش دارای قطرهای داخلی 3 mm ، 7 mm و 9 mm می‌باشد. نازل از طریق یک لوله انعطاف پذیر به یک پمپ سیرینج^۴ متصل است که سرعت جریان گاز ورودی را کنترل می‌کند. آزمایش در دبی‌های حجمی مختلف 4 ml/min تا 8 ml/min انجام شده است. این دبی‌ها به اندازه‌ای پایین هستند که در آنها اولاً توازن بین کشش سطحی و نیروی بویانسی تعیین کننده شکل حباب است، ثانیاً فاصله‌ی بین دو حباب به اندازه‌ای زیاد است عملاً برهمکنشی بین آنها صورت نمی‌گیرد.

از یک دوربین مدل Hs Canon SX540 برای تصویربرداری با سرعت 60 frames/s و $1920 \times 1080\text{ pixel/frame}$ استفاده شده است. همانطور که در شکل ۱ نیز نشان داده شده است دوربین در جلوی ستون تعبیه شده است. یکی از نکات حائز اهمیت در این آزمایش توازن نورپردازی است. از آن جایی که حباب‌های در حال صعود نور را منعکس و پخش می‌کنند، از پشت ستون باید نور را متوازن و منعکس کرد. علاوه بر آن به دلیل بالا بودن سرعت دیافراگم نور کافی باید به گونه‌ای تأمین شود که کنتراست تصاویر گرفته شده در سطح مشترک حباب و مایع بالا باشد. برای این منظور یک لامپ ال ای دی در فاصله‌ی مناسب از ستون نصب شده و یک دیفیوزر پارچه‌ای نیمه شفاف بین لامپ و ستون تعبیه شده است. از محلول پلی آکریل آمید در آب (پلی آکریل اسید) که یک سیال غیر نیوتونی ویسکوالاستیک با خواص رقیق شونده برشی^۵

تجربی برای ضریب دراگ بوده است. سان و همکاران [۵] نیز ضریب دراگ حباب هوای در حال صعود در جریان‌های غیر نیوتنی را بررسی کردند. آن‌ها مواد مختلف نمک، صمغ زانتان و SDBS را برای تغییر چگالی، چسبندگی و کشش سطحی مایع انتخاب کردند. مدل رئولوژی انتخابی برای این دسته سیالات قانون توانی می‌باشد. اخیراً نیز سان و همکاران [۲۸] به مطالعه عددی اثر قطر حباب و خواص رئولوژیکی مایع بر روی ضریب دراگ پرداخته‌اند. آن‌ها از روش حجم سیال و با فرض رقیق شونده برشی بودن سیال موفق به ارائه مدل عددی برای این دسته سیالات شده‌اند.

همانطور که ملاحظه می‌شود در مطالعه بر روی سیالات غیر نیوتنی با وجود تفاوت‌های ذاتی مواد، در برخی موارد از یک مدل رئولوژی برای توصیف رفتار سیالات مختلف استفاده شده است. علاوه بر آن در محاسبه ضریب دراگ اثر نوع گاز و سرعت تزریق آن دیده نشده است. از این رو در مطالعه حاضر رفتار حباب در حال صعود در یک سیال غیر نیوتنی به منظور به دست آوردن یک مدل جامع‌تر در پیش‌بینی ضریب دراگ آن نسبت به مدل‌های موجود مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا ضریب دراگ حباب‌های گازی هوا، کربن دی‌اکسید^۲ و اکسیژن^۳ در حال صعود در سیال ویسکوالاستیک (محلول پلی آکریل آمید) به کمک تجهیزات آزمایشگاهی و نیز پردازش داده‌ها محاسبه شده است. آزمایشات در قطر نازل‌های مختلف و نیز سرعت‌های تزریق گاز متفاوت انجام شده است. سپس ضریب دراگ اندازه‌گیری شده با مقادیر به دست آمده از مدل‌های موجود مقایسه و در نهایت رابطه‌ی جدیدی برای ضریب دراگ که منطبق با نتایج آزمایشگاهی می‌باشد، به دست آمده است.

۲- روش انجام کار

۲-۱- مجموعه آزمایشگاهی

کلیه آزمایشات در فشار اتمسفریک و دمای محیط (19°C) صورت گرفته است. مجموعه آزمایشگاهی طراحی شده برای این کار به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است. این مجموعه شامل یک ستون عمودی از جنس پلکسی گلس با ارتفاع 500 mm و سطح مقطع داخلی $80 \times 80\text{ mm}^2$ و ضخامت 5 mm است که تا ارتفاع 450 mm از مایع پر شده است. محدوده‌ی مورد مطالعه 175 mm بالای کف ستون است که در آن حباب به سرعت حد خود (سرعت ثابت) رسیده است. ستون به اندازه‌ای بزرگ در نظر گرفته شده است که اثرات دیواره بر روی حرکت حباب قابل صرف نظر کردن است. بالای ستون باز و در تماس با اتمسفر است. قطر حباب تولید شده

- 1 NaCl
- 2 CO₂
- 3 O₂

- 4 Syringe
- 5 Shear-thinning

Table 1. Design of experiments summary

جدول ۱: اطلاعات مربوط به مجموعه آزمایشات انجام شده

شماره آزمایش	درصد وزنی محلول (wt%)	قطر نازل (mm)	نوع گاز	دبی حجمی گاز (ml/min)
۱	۰/۱	۰/۴	Air	۰/۴
۲	۰/۱	۰/۷	CO ₂	۰/۸
۳	۰/۱	۰/۹	O ₂	۱/۲
۴	۰/۲	۰/۴	CO ₂	۱/۲
۵	۰/۲	۰/۷	O ₂	۰/۴
۶	۰/۲	۰/۹	Air	۰/۸
۷	۰/۴	۰/۴	O ₂	۰/۸
۸	۰/۴	۰/۷	Air	۱/۲
۹	۰/۴	۰/۹	CO ₂	۰/۴

توسط یک دوربین که در یک سمت ستون مایع تعبیه شده است ثبت می‌شود. پارامترهای هندسی و همچنین مکان‌یابی حباب تک به کمک آنالیز مجموعه تصاویر به دست آمده به کمک پردازش تصویر محاسبه می‌شود. بدین ترتیب که به منظور تعیین مرکز سطح، محیط و همچنین مساحت حباب بالارونده در هر لحظه، ابتدا فیلم گرفته شده توسط دوربین به کمک نرم افزار Video ۷۱،۲،۵ image master به مجموعه عکس در زمان‌های مختلف تبدیل شده است. سپس به کمک نرم افزار Corel Draw V۲۰ پس از برش کاری‌های لازم بر روی محدوده‌ی عکس، تصویر حاصله به حالت grayscale در آورده شده که در آن مرز بین حباب و سیال مشخص می‌شود. در نهایت به کد نوشته در نرم افزار مطلب تصویر به دست آمده فراخوانی و مساحت و همچنین مرکز سطح حباب محاسبه می‌شود. مراحل انجام شده برای پردازش تصویر به ترتیب در شکل ۲ نشان داده شده است.

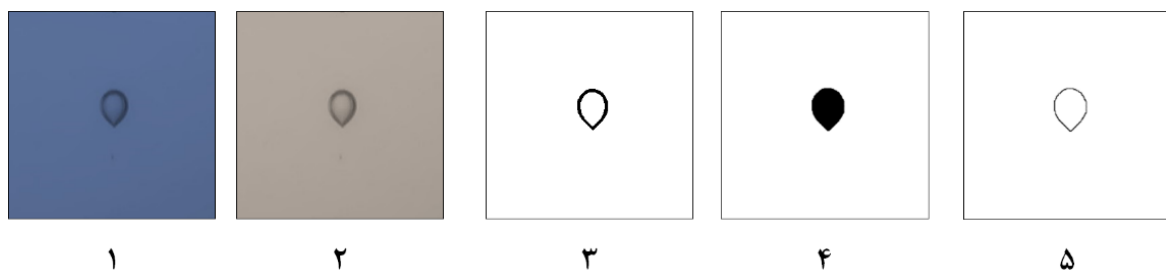
است [۳۲-۲۹] با درصدهای وزنی ۰/۱٪، ۰/۲٪ و ۰/۴٪ به عنوان سیال کار استفاده شده است. پلی اکریل آمید مورد استفاده از نوع آزمایشی تهیه شده از شرکت Sigma-Aldrich می‌باشد. درصد وزنی محلول با استفاده از نسبت وزن پلی اکریل آمید مورد استفاده به وزن کل محلول محاسبه شده است. در جدول ۱ اطلاعات مربوط به مجموعه آزمایشات انجام شده که به روش تاگوچی به دست آمده است خلاصه شده است. لازم به ذکر است که به منظور به حداقل رساندن خطای آزمایشگاهی تعداد تکرار هر آزمایش حداقل ۳ بار تعیین شده است. لازم به توضیح است که به دلیل بالا بودن متغیرهای عملیاتی آزمایشات مذکور (۴ فاکتور در سه سطح با سه تکرار) از روش تاگوچی برای طراحی آزمایشات استفاده شده است. تعداد آزمایشات مورد نیاز در این روش نسبت به سایر روش‌ها (فاکتوریل، RSM) بسیار کمتر است اما در مقابل روند نامنظم‌تری نسبت به روش‌هایی چون فاکتوریل در آنها مشاهده می‌شود.

۲-۳- محاسبه سرعت حد حباب

همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، حباب بالارونده در دو جهت

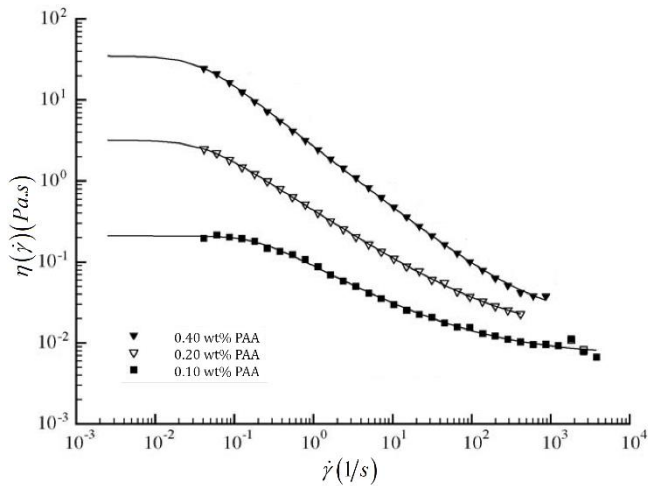
۲-۲- پردازش تصویر

به منظور مطالعه‌ی صعود حباب در سیال غیر نیوتونی حرکت حباب



شکل ۲: مراحل پردازش تصویر برای تشخیص حباب و محاسبه مشخصات آن، ۱: تصویر اولیه، ۲: تبدیل به Grayscale، ۳: تبدیل تصویر به فرم binary، ۴: پر کردن داخل حباب و ۵: تعیین مرز حباب

Fig. 2. The image processing steps for bubble detection and calculation of its characteristic, 1: initial image, 2: Grayscale, 3: Converted image to binary form, 4: filling the inside of the bubble and 5: determine the bubble boundary



شکل ۴: ویسکوزیته پلی آکریل آمید بر حسب نرخ برش در سه درصد وزنی مختلف [۳۲]

Fig. 4. Polyacrylamide viscosity versus shear rate in various weight percentages [32]

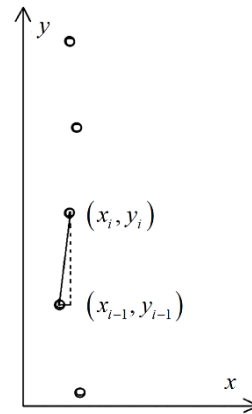
می‌باشد.

۲-۴- خواص رئولوژیکی سیال

به منظور مطالعه حرکت حباب در سیال غیر نیوتونی از محلول پلی آکریل آمید در آب (پلی آکریل اسید) که یک سیال غیر نیوتونی است استفاده شده است. مطالعات نشان می‌دهد که محلول‌های پلی آکریل اسید سیال ویسکوالاستیک با رفتار رقیق شونده برشی هستند. این در حالی است که غالب سیالات غیر نیوتونی مورد مطالعه مانند کربوکسی متیل سلولز و همچنین صمغ زانتان تنها رفتار رقیق شونده برشی دارند [۲۳ و ۲۳]. خواص رئولوژیکی محلول پلی آکریل اسید که توسط سوسا و همکاران [۳۲] به کمک یک رئومتر اندازه‌گیری شده است در شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۴ نشان داده شده است، محلول پلی آکریل اسید یک سیال ویسکوالاستیک است که ویسکوزیته‌ی آن را می‌توان به کمک معادله‌ی کرو-یاسودا بیان کرد.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^{a_1} \right]^{\frac{a_2 - 1}{a_1}} \quad (4)$$

که در آن μ_0 و μ_{∞} به ترتیب مقدار ویسکوزیته در زمان نرخ برش برابر صفر و بی‌نهایت هستند، λ زمان مشخصه سیال و a_1 و a_2 پارامترهای بدون بعدی هستند که مشخص کننده شیب منحنی تنش برشی بر حسب نرخ برش در محدوده‌ی رقیق شونده برشی می‌باشند. توجه داشته باشید که سیال نیوتونی حالت خاصی از سیال کرو است که در آن $a_1 = 1$ و $a_2 = 0$ است. نکته حائز اهمیت دیگر آن است که معادله مربوط به ویسکوزیته کرو در شرایط خاصی قانون سیال توانی رانیز در برمی‌گیرد. به این ترتیب که زمانی که $(\lambda \dot{\gamma})^{a_1} \gg 1$



شکل ۳: شماتیک روش اندازه‌گیری فاصله در محاسبه سرعت حد

Fig. 3. Schematic of the distance measurement method in calculating the terminal velocity

x و y حرکت می‌کند که این حرکت توسط دوربین ثبت شده است. موقعیت حباب با استفاده از مختصات مرکز سطح حباب که از طریق پردازش تصویر به دست آمده است تعیین و همچنین مسیر حرکت حباب از طریق روی هم قرار دادن مجموعه تصاویر ثبت شده به دست می‌آید.

سرعت بالا رفتن حباب در هر بازه‌ی زمانی (Δt) با استفاده از محاسبه فاصله‌ی طی شده در بازه‌ی مورد نظر (معادلات (۱) و (۲)) به دست می‌آید:

$$L = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (1)$$

$$V = \frac{L}{\Delta t} \quad (2)$$

که در آن (x_i, y_i) و (x_{i-1}, y_{i-1}) به ترتیب مختصات مرکز سطح حباب در زمان‌های t و $t + \Delta t$ است. با توجه به اینکه در اغلب آزمایشات و زمان‌ها حباب به شکل کروی نمی‌باشد، برای مشخص کردن اندازه حباب از قطر معادل استفاده می‌شود. طبق تعریف قطر معادل برابر است با قطر کره‌ای که مساحت آن برابر با مساحت حباب می‌باشد، بنابراین:

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \quad (3)$$

که در آن A سطح تصویر شده حباب می‌باشد که به کمک قطر نازل بلافاصله پس از خروج از نازل اندازه‌گیری می‌شود.

در تمامی آزمایشات بیشینه خطای اندازه‌گیری یک پیکسل می‌باشد، بنابراین میزان دقت در تعیین مختصات مرکز سطح حباب برابر 0.1 mm

Table 2. Constants of Carreau-Yasuda equation for Polyacrylamide at different weight percentage

جدول ۲: ثوابت معادله‌ی کرو-یاسودا برای محلول آبی پلی آکریل آمید در درصد‌های وزنی مختلف

a_p	a_1	λ (s)	μ_∞ (Pa.s)	μ (Pa.s)	درصد وزنی پلی آکریل اسید
۰/۴۶۴	۲/۰۰۷	۵/۳۲۱	۰/۰۰۷	۰/۲۱۰	۰/۱
۰/۳۷۲	۱/۷۹۵	۲۴/۹۹۱	۰/۰۱۳	۳/۲۰۱	۰/۲
۰/۲۳۷	۱/۹۳۸	۲۹/۰۳۹	۰/۰۱۸	۳۴/۹۶۱	۰/۴

شده است. به طور کلی با فرض آن که $\rho_g \ll \rho_l$ و $\mu_g \ll \mu_l$ ، ضریب دراگ تابعی از مشخصه‌های حباب و پارامترهای فیزیکی مؤثر در شکل‌گیری حباب است. بنابراین:

$$C_D = f(\rho_l, \mu_l, \sigma, d_{eq}, g, V) \quad (7)$$

که در آن ρ_l چگالی مایع، μ_l ویسکوزیته مایع، σ کشش سطحی بین مایع و حباب، d_{eq} قطر معادل حباب، g شتاب جاذبه و V سرعت حباب می‌باشد. با استفاده از تئوری باکینگهام در تحلیل ابعادی این سیستم به دست خواهد آمد:

$$C_D = A \left(\frac{\rho_l d_{eq} V}{\mu_l} \right)^B \left(\frac{\rho_l^2 g d_{eq}^3}{\mu_l^2} \right)^C \left(\frac{\rho_l g d_{eq}^2}{\sigma} \right)^D \quad (8)$$

بنابراین با توجه به معادله (۸)، ضریب دراگ تابع سه کمیت بدون بعد می‌باشد که عبارتند از عدد رینولدز ($Re = \rho_l d_{eq} V / \mu_l$)، عدد ارشمیدس ($Ar = \rho_l^2 g d_{eq}^3 / \mu_l^2$) و عدد اتوس ($Eu = \rho_l g d_{eq}^2 / \sigma$). ثوابت A ، B ، C و D ، از طریق برازش داده‌های آزمایشگاهی به معادله به دست خواهد آمد. عدد ارشمیدس عدد بدون بعدی است که تعیین کننده حرکت سیالات به علت تفاوت چگالی آنها می‌باشد. این عدد از نسبت نیروهای خارجی (مانند وزن) به نیروهای ویسکوز به دست می‌آید. عدد اتوس که عدد باند (Bo) نیز نامیده می‌شود، در دینامیک سیالات نشان دهنده اهمیت نیروهای گرانش نسبت به نیروهای کشش سطحی است. این عدد در ترکیب با اعداد مورتن (Mo) یا ارشمیدس تعیین کننده شکل حباب یا قطره در حال حرکت در یک سیال است. مطالعات نشان می‌دهد که برای تشریح دینامیک حباب‌های در حال صعود عدد اتوس مناسب‌تر از اعداد رینولدز و وبر می‌باشد [۳۴]. در کار حاضر با توجه به غیر نیوتونی بودن سیال مقادیر هر کدام از این پارامترها در ادامه تعیین و میزان تأثیر گذاری هر کدام بر ضریب دراگ مورد مطالعه قرار

و $\mu_\infty \rightarrow 0$ ، معادله‌ی کرو به رابطه‌ی $\mu(\dot{\gamma}) = (\mu \lambda^{a-1}) \dot{\gamma}^{a-1}$ تقلیل می‌یابد که معادل قانون سیال توانی است با $K = \mu \lambda^{a-1}$. مقادیر مربوط به ثوابت کرو برای ترکیب سیال مورد استفاده در جدول ۲ آورده شده است. لازم به ذکر است که برای تمامی محلول‌ها مقدار کشش سطحی و چگالی ثابت و به ترتیب برابر $726/7 \times 10^{-4}$ N/m و $998/2$ kg/m³ [۲۰] در نظر گرفته شده است.

۲-۵- اندازه‌گیری ضریب دراگ

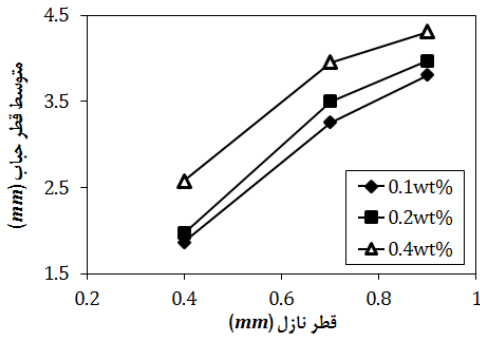
زمانی که یک حباب تک با سرعت ثابت در مایع حرکت می‌کند، نیروهای اصلی که به آن وارد می‌شود عبارتند از نیروی شناوری (F_b)، نیروی دراگ (F_D) و نیروی وزن که در تعادل با یکدیگر هستند. بنابراین معادله‌ی حرکت حباب به این صورت نوشته خواهد شد:

$$(\rho_L - \rho_G) g \frac{\pi d_{eq}^3}{6} = C_D \frac{1}{2} \rho_L V^2 \frac{\pi d_{eq}^2}{4} \quad (5)$$

که در آن ρ_G و ρ_L به ترتیب چگالی مایع و چگالی گاز می‌باشد. با صرف نظر کردن از چگالی گاز در مقایسه با چگالی مایع، ضریب دراگ از معادله بالا به دست می‌آید، به این ترتیب که:

$$C_D = \frac{4 d_{eq} g}{3 V^2} \quad (6)$$

در مطالعات اولیه بر روی ضریب دراگ غالباً بر روی این مسأله تمرکز داشته‌اند که رابطه‌ای بین ضریب دراگ و عدد رینولدز معرفی شود. این درحالی است که رفتار حباب در حال صعود تحت تأثیر پارامترهای مختلفی از جمله اندازه حباب، سرعت حباب، چگالی، ویسکوزیته و کشش سطحی بین گاز و مایع است. بنابراین پیش‌بینی می‌شود که در سیالات غیر نیوتونی ضریب دراگ تابعی از پارامترهای دیگری باشد که مشخص کننده خواص سیال می‌باشد. برای این منظور از تحلیل ابعادی برای به دست آوردن این پارامترها استفاده



شکل ۵: قطر معادل حباب در غلظت‌های مختلف پلی آکریل آمید

Fig. 5. Bubble equivalent diameter at different concentrations of PAA

انجام شده و نتایج به دست آمده با نتایج ارائه شده توسط یان و همکاران [۱۱] مقایسه شده است. مقایسه نتایج برای قطر معادل $3/1 \text{ mm}$ نشان می‌دهد که اختلاف سرعت حد به دست آمده در کار حاضر ($245/92 \text{ mm/s}$) با نتایج یان و همکاران [۱۱] (250 mm/s) کمتر از ۲ درصد می‌باشد. این میزان اختلاف در مطالعات آزمایشگاهی قابل قبول و نشان دهنده صحت روش حاضر در استخراج نتایج و نیز پردازش تصاویر می‌باشد.

۳-۱- قطر معادل حباب

شکل ۵ قطر معادل حباب در غلظت‌های مختلف پلی آکریل اسید را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود قطر حباب در محدوده‌ی $1/8$ و $4/4$ میلی‌متر متغیر است. قطر معادل حباب با افزایش قطر نازل و همچنین غلظت محلول افزایش می‌یابد. این مسأله را می‌توان از سه جنبه مورد ارزیابی قرار داد [۱۸]:

(۱) ویسکوزیته ظاهری محلول با افزایش غلظت محلول افزایش می‌یابد و نیروی دراگ ویسکوز که توسط سیال اطراف اعمال می‌شود رشد و همچنین حرکت رو به بالای حباب را محدود می‌کند.

(۲) با افزایش غلظت محلول کشش سطحی کاهش می‌یابد که باعث افزایش حجم حباب می‌شود.

(۳) کشش سطحی اعمال شده در نوک نازل با افزایش قطر داخلی نازل افزایش می‌یابد که منجر به کاهش مقاومت برای انبساط حباب می‌شود و در نتیجه در افزایش حجم حباب تأثیر گذار است.

به طور کلی قطر معادل حباب در حال صعود در سیال ساکن غیرنیوتونی بستگی به خواص فیزیکی مایع و قطر داخلی نازل دارد.

گرفته است. از آنجاییکه ویسکوزیته سیال به صورت تابعی از نرخ برش تغییر می‌کند، اولین مسأله در به دست آوردن منحنی ضریب دراگ تعریف عدد رینولدز و سایر پارامترهای بدون بعدی می‌باشد که در برگزیده‌ی ویسکوزیته سیال و سرعت حباب هستند. در ایده‌آل‌ترین فرمولاسیون عدد رینولدز بایستی موارد زیر در نظر گرفته شود:

۱- اثر رقیق شونده برشی در عدد رینولدز دیده شود.

۲- عدد رینولدز به دست آمده برای سیال با رقیق شونده برشی زمانی که اثر رقیق شونده حذف می‌شود باید برابر با عدد رینولدز سیال نیوتونی شود.

بنابراین با تعریف متوسط نرخ برش به صورت $\frac{2V}{d_{eq}}$ [۱۵]، عدد رینولدز به این ترتیب به دست می‌آید:

$$Re = \frac{\rho_l d_{eq} V}{\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + \left(\lambda \left(\frac{2V}{d_{eq}} \right) \right)^{a_1} \right]^{\frac{(a_2-1)}{a_1}}} \quad (9)$$

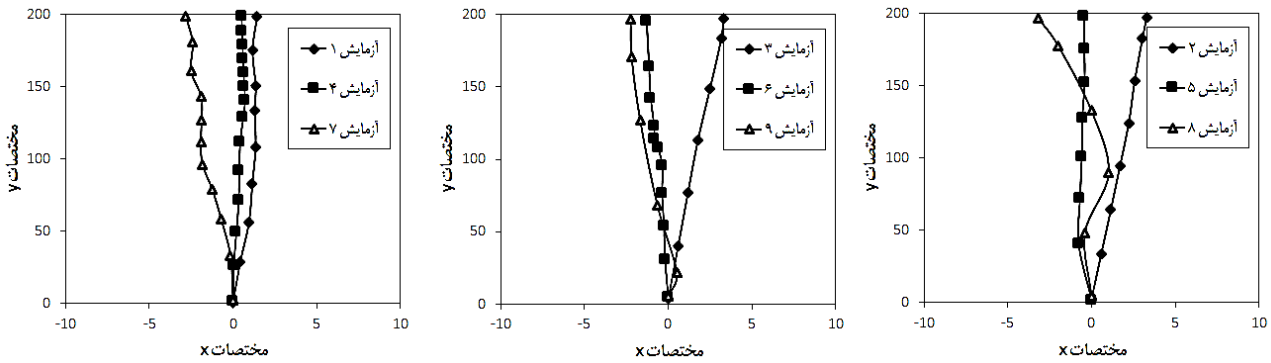
که در آن زمانی که $a_1 = 1$ و $\lambda = 0$ است، حرکت حباب را می‌توان مانند سیال نیوتونی در نظر گرفت. علاوه بر آن عدد بدون بعد اتوس نیز برای سیال کرو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Eo = \frac{\rho_l^2 g d_{eq}^3}{\left(\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + \left(\lambda \left(\frac{2V}{d_{eq}} \right) \right)^{a_1} \right]^{\frac{(a_2-1)}{a_1}} \right)^2} \quad (10)$$

لازم به توضیح است که با توجه به تعریف عدد ارشمیدس، ویسکوزیته سیال در آن تأثیر گذار نیست از این رو تعریف آن برای سیالات غیرنیوتونی مشابه سیالات نیوتونی خواهد بود.

۳- نتایج

همانطور که بخش ۲ توضیح داده شد، متغیرهای مستقل این آزمایش عبارت‌اند از درصد وزنی مایع، قطر نازل، نوع گاز ورودی و همچنین دبی گاز ورودی که پس از انجام طراحی آزمایش به روش تاگوچی مجموعاً ۹ دسته آزمایش انجام شده است. حداقل تعداد تکرار هر آزمایش ۳ تعریف شده است. متغیرهای مربوط به هر کدام از این آزمایشات در جدول ۱ آورده شده است. پیش از هر چیز به منظور صحت سنجی نتایج به دست آمده و نیز ارزیابی دقت آزمایشات و کد پردازش تصویر، آزمایش مبنایی بر روی سیستم آب و هوا



شکل ۶: مسیر حرکت حباب در مجموعه آزمایشات انجام شده

Fig. 6. The bubble trajectory in the set of experiments

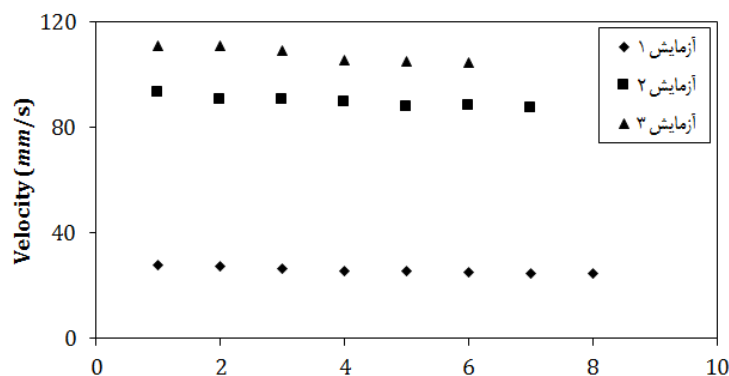
مسیری که از نازل خارج شده است را در پیش خواهد گرفت. انحراف جزئی که در نتایج مربوط به آزمایشات ۱، ۲ و ۳ دیده می‌شود ناشی از عدم دقت در نصب نازل در حین انجام آزمایشات است. به عبارتی زاویه نازل با کف ستون مایع از مقدار ۹۰ درجه اندکی انحراف داشته است (کمتر از ۱ درجه). نتایج این سه آزمایش نشان می‌دهد که حرکت حباب تحت تأثیر دیواره نبوده و پس از خروج از نازل با همان زاویه به مسیر حرکت خود در خط راست ادامه داده است.

۳-۳- سرعت حد حباب

برای اطمینان از این که سرعت محاسبه شده برای حباب همان سرعت حد آن می‌باشد، سرعت حباب به روشی که در بخش ۲-۳ گفته شد محاسبه شده است. در شکل ۷ سرعت محاسبه شده در بازه‌های زمانی مختلف برای سه

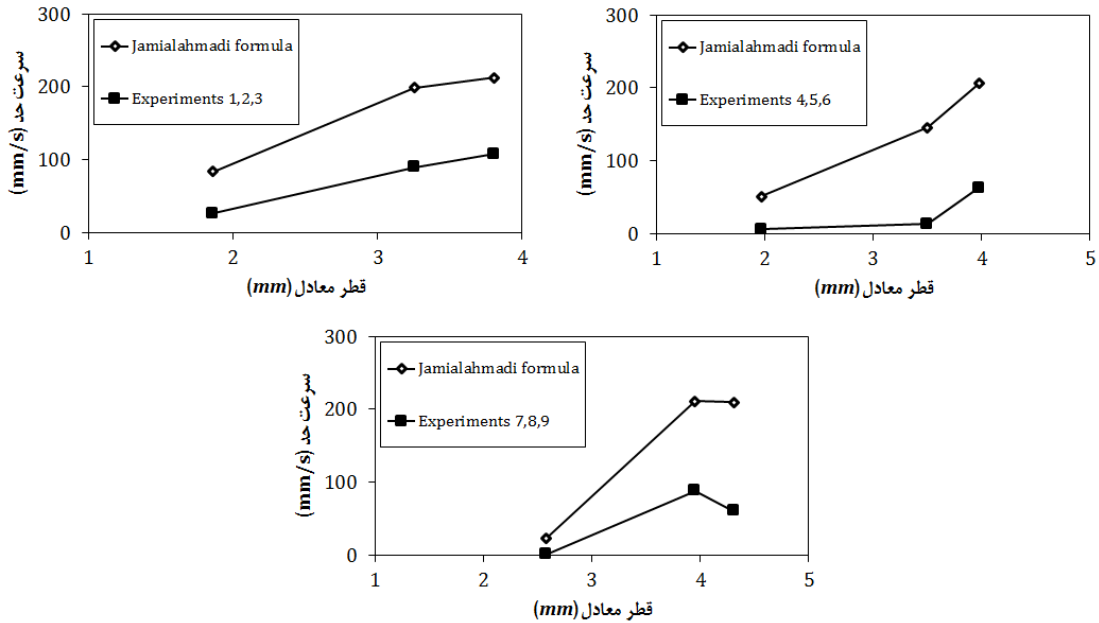
۳-۲- مسیر صعود حباب

شکل ۶ مسیر حرکت حباب در محلول‌های مختلف پلی‌آکریل اسید را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با تغییر قطر داخلی نازل و همچنین غلظت محلول این مسیر تغییر می‌کند. در تمام شکل‌های نشان داده شده مسیر صعود حباب تقریباً یک خط راست است. مقایسه نتایج با نتایج ارائه شده برای سیالات نیوتونی نشان می‌دهد که در سیال غیرنیوتونی مسیر صعود حباب از حالت زیکزاک که برای سیالات نیوتونی پیش‌بینی شده است به حالت خط راست تغییر یافته است. به عبارتی دامنه نوسانات حباب در سیال نیوتونی به مقدار بسیار قابل ملاحظه‌ای بیشتر از محلول‌ها با خاصیت رقیق شونده برشی مانند پلی‌آکریل اسید می‌باشد. این در حالی است که با افزایش غلظت نیز این دامنه نوسانات کمتر خواهد شد به طوری که در غلظت‌های بالا حباب دقیقاً



شکل ۷: سرعت حباب محاسبه شده در بازه‌های زمانی مختلف در آزمایشات ۱، ۲ و ۳

Fig. 7. Calculated bubble velocity at different times in experiments 1, 2, and 3



شکل ۸: مقایسه‌ی بین سرعت حد به دست آمده برای محلول‌های مورد آزمایش با معادله جامیالاهمادی و همکاران (۱۹۹۲) در قطرهای مختلف حباب

Fig. 8. Comparison of the terminal velocity obtained for the prepared solutions and the Jamialahmadi et al. [37] equation in different bubble diameters

مندلسون [۳۶] یک رابطه‌ی توانی برای سرعت صعود حباب کروی هوا در آب به صورت زیر ارائه کرده است:

$$V_T = \sqrt{\frac{2\sigma}{d_{eq}(\rho_l + \rho_g)} + \frac{gd_{eq}}{2}} \quad (13)$$

که در آن σ کشش سطحی سیال، ρ_l و ρ_g به ترتیب چگالی سیال و حباب، g شتاب گرانش و d_{eq} قطر حباب است. جامیالاهمادی^۱ و همکاران [۳۷] رابطه مربوط به مندلسون را با در نظر گرفتن سرعت حباب در ناحیه استوکس به این ترتیب بهبود دادند:

$$V_T = \frac{V_T^{Stokes} V_T^{Mendelson}}{\sqrt{(V_T^{Stokes})^2 + (V_T^{Mendelson})^2}} \quad (14)$$

که در آن $V_T^{Stokes} = \frac{1}{18} \frac{\rho_l - \rho_g}{\mu_l} g d_{eq}^2$ سرعت حباب کروی در ناحیه استوکس می‌باشد. شکل ۸ مقایسه‌ای بین سرعت حد به دست آمده برای محلول‌های مورد آزمایش با معادله ارائه شده توسط جامیالاهمادی و همکاران [۳۷] را نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است با وجود آنکه روند تغییرات

آزمایش شماره ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده است. همانطور که مشخص است در محدوده‌ی انتخابی برای محاسبه سرعت، سرعت‌های به دست آمده از بازه‌های مختلف تقریباً ثابت است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تصاویر مربوط به ناحیه‌ای بوده است که حباب به سرعت حد خود رسیده است. متوسط سرعت به دست آمده از این بازه‌های زمانی به عنوان سرعت حد حباب منظور شده است. تاکنون مطالعات زیادی بر روی پیش‌بینی سرعت حد حباب در حال صعود صورت گرفته است. طبق مطالعات کلیفت و همکاران [۳۵] سرعت حد حباب توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$V_T = \frac{\mu_l}{\rho_l d_{eq}} Mo^{0.149} (J - 0.857) \quad (11)$$

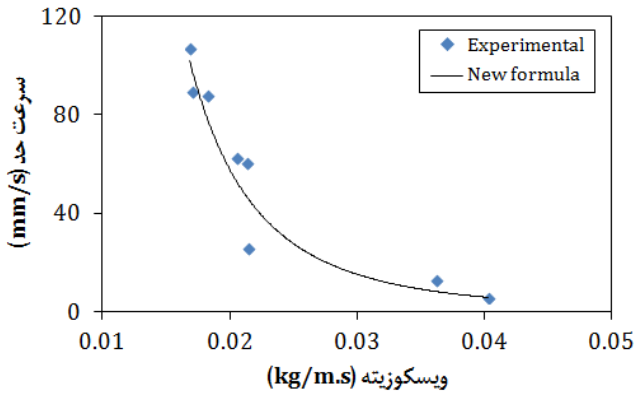
که در آن Mo عدد مورتن است و:

$$J = \begin{cases} 0.94H^{0.747} & 2 < H \leq 59.3 \\ 3.42H^{0.441} & H > 59.3 \end{cases}, \quad (12)$$

$$H = \frac{4}{3} Eo Mo^{-0.149} \left(\frac{\mu_l}{\mu_{ref.}} \right)^{-0.14}$$

که در آن Eo عدد اتوس، μ_l ویسکوزیته سیال و $\mu_{ref.} = 0.009 \text{ kg/m.s}$

به صورت V/d_{eq} [۱۵] به دست آمده است. سپس با شروع از رابطه‌ی $V_T = Ad_{eq}^B \rho_l^C \mu_l^D$ ، ثابت A ، B ، C و D به کمک روش حداقل مربعات به گونه‌ای تعیین شده است که حداقل خطای ممکن را نسبت به داده‌های آزمایشگاهی داشته باشد. مقادیر پیش‌بینی شده توسط رابطه (۱۵) با مقادیر آزمایشگاهی در شکل ۹ مقایسه شده است. حداکثر مقدار خطای پیش‌بینی توسط معادله‌ی مذکور حدود ۲۰ درصد می‌باشد که مربوط به حباب تولید شده با کوچکترین قطر نازل (۰/۴ mm) است.



شکل ۹: اعتبار سنجی معادله ارائه شده برای پیش‌بینی سرعت حد

Fig. 9. Validation of the proposed equation for predicting terminal velocity

۳-۴- بررسی رفتار حباب

در بررسی رفتار حباب تک در حال صعود در سیال ساکن، مطالعات نشان می‌دهد که سه پارامتر بدون بعد رینولدز، Re ، مورتن، Mo ، و همپین وبر، We ، به خوبی می‌توانند این رفتار را نشان دهند. چراکه عدد رینولدز بر حسب سرعت صعود و قطر حباب به دست می‌آید، عدد مورتن تابعی از خواص سیال است و برای بررسی اثر رئولوژی و کشش سطحی مناسب است و در نهایت عدد وبر برای تشریح تغییر شکل حباب انتخاب شده است.

$$Re = \frac{\rho_l V_T d_{eq}}{\mu_l} \quad (16)$$

$$Mo = \frac{g \mu_l^4 (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2 \sigma^3} \quad (17)$$

سرعت حد در آزمایشات با روند پیش‌بینی شده توسط معادله تقریباً یکسان است اما مقدار سرعت حد به دست آمده برای سیالات غیر نیوتونی به صورت چشمگیری کمتر از مقادیر پیش‌بینی شده برای سیال نیوتونی است. به کمک برازش منحنی و با در نظر گرفتن چگالی مایع، ویسکوزیته مایع و همپین قطر حباب به عنوان متغیرهای مستقل رابطه‌ی جدیدی برای پیش‌بینی سرعت حد در سیال غیر نیوتونی به دست آمده است. به طوری که:

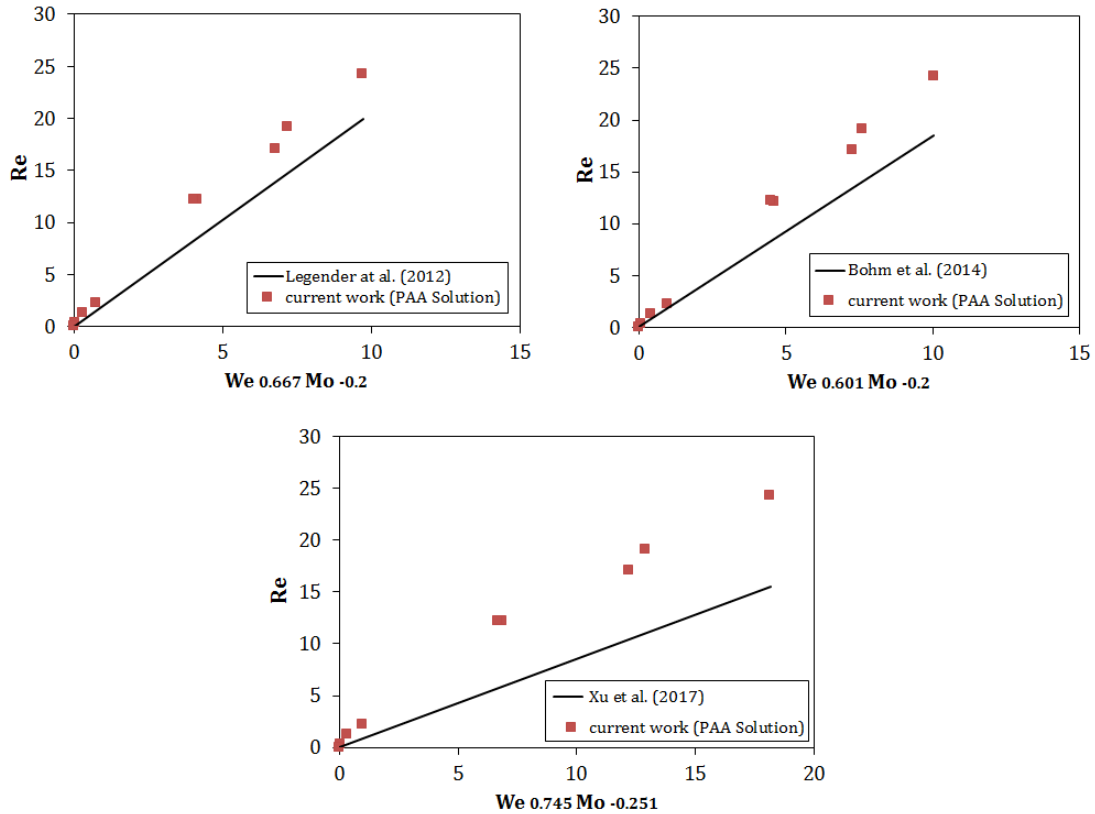
$$V_T = 0.2393 \frac{d_{eq}}{\rho_l^{0.0118} \mu_l^{2.887777}} \quad (15)$$

برای تعیین رابطه مذکور ابتدا ویسکوزیته سیال با تعریف نرخ برش متوسط

Table 3. Parameters of investigation the behavior of bubbles in the set of experiments

جدول ۳: پارامترهای مربوط به بررسی رفتار حباب در مجموعه آزمایشات انجام شده

شماره آزمایش	درصد وزنی مایع	قطر نازل (mm)	Re	Mo	We
۱	۰/۱	۰/۴	۲/۳۴۱۱۹۹۹۶۷	۵/۴۶۹۷۵E-۰۶	۰/۰۱۶۹۱۶
۲		۰/۷	۱۷/۰۸۵۶۷۳۳۵	۲/۱۵۹۵۸E-۰۶	۰/۳۵۴۱۴۵
۳		۰/۹	۲۴/۲۳۱۸۴۸۱۴	۲/۰۹۱۲۳E-۰۶	۰/۵۹۸۵۸۸
۴	۰/۲	۰/۴	۰/۲۷۹۴۵۸۷۹۲	۶/۸۲۸۸۸E-۰۵	۰/۰۰۰۸۸
۵		۰/۷	۱/۲۵۵۶۶۷۸۴۷	۴/۴۵۲۳۳E-۰۵	۰/۰۰۸۰۷
۶		۰/۹	۱۲/۱۲۸۹۷۲۷۳	۴/۵۴۹۹۱E-۰۶	۰/۲۱۱۹۹۳
۷	۰/۴	۰/۴	۰/۰۰۶۱۹۰۱۴۹	۰/۰۱۵۹۷۱۴۰۳	۵/۰۰۵E-۰۶
۸		۰/۷	۱۹/۱۲۴۲۹۵۸۶	۲/۸۲۷۱۲E-۰۶	۰/۴۱۷۹۶۸
۹		۰/۹	۱۲/۲۰۷۱۷۳۲۱	۵/۳۵۴۶E-۰۶	۰/۲۱۴۸۹۷



شکل ۱۰: مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی پلی آکریل اسید با معادلات ارائه شده در بررسی رفتار حباب

Fig. 10. Comparison of PAA experimental results and the presented equations in the study of bubble behavior

سیال زانتان که یک سیال غیر نیوتونی با خاصیت رقیق شونده برشی است رابطه‌ی لژندر را اصلاح کردند. آن‌ها با در نظر گرفتن اثرات دیواره و همچنین رفتار رئولوژیکی سیال پیرامون حباب رابطه‌ی جدیدی ارائه کردند. به این ترتیب که:

$$Re = 1.846We^{0.601}Mo^{-0.2} \quad (20)$$

سپس زو و همکاران [۱۸] با مقایسه داده‌های آزمایشگاهی خود که بر روی سیال غیر نیوتنی کربوکسی متیل سلولز انجام شده است با دو معادله مذکور دریافتند که هیچکدام از این روابط نمی‌تواند به خوبی رفتار حباب در سیال کربوکسی متیل سلولز را تشریح کند. از این رو رابطه‌ی جدیدی برای داده‌های آزمایشگاهی خود ارائه کردند:

$$Re = 0.8564We^{0.745}Mo^{-0.251} \quad (21)$$

مقایسه‌ی سه رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که نه تنها غیر نیوتونی بودن سیال در رفتار حباب تأثیر گذار است بلکه نوع ماده هم حائز اهمیت است و آزمایش

$$We = \frac{\rho_l V_T^2 d_{eq}}{\sigma} \quad (18)$$

که در آن‌ها ρ_l و ρ_g به ترتیب چگالی مایع و چگالی حباب، d_{eq} قطر معادل حباب، V_T سرعت حد حباب، σ کشش سطحی و μ_l ویسکوزیته‌ی سیال می‌باشد. در اینجا با توجه به غیر نیوتونی بودن سیال از ویسکوزیته ظاهری در روابط استفاده شده است. در جدول ۳ مقادیر مربوط به هر آزمایش مطالعه حاضر خلاصه شده است.

لژندر و همکاران [۳۸] با بررسی داده‌های آزمایشگاهی مربوط به آب و گلیسرین (هر دو سیال نیوتونی هستند) رابطه‌ای برای بررسی رفتار حباب ارائه کردند. آن‌ها دریافتند که داده‌های به دست آمده در توافق خوبی با رابطه‌ی زیر است:

$$Re = 2.05We^{0.667}Mo^{-0.2} \quad (19)$$

پس از آن بوهم و همکاران [۳۹] با بررسی رفتار حباب در حال صعود در

و همکاران [۲۷] می‌تواند به تغییر شکل حباب مربوط شود. به این ترتیب که زمانی که $Re < 10$ است شکل حباب تقریباً کروی شکل با نسبت قطرها بین ۰/۹ تا ۱/۱ است. در حالی که برای $Re > 10$ شکل حباب شروع می‌کند به تغییر یافتن به شکل پهن و یا کلاهی شکل.

در ادامه سعی خواهیم کرد رابطه‌ی تجربی جدیدی برای ضریب دراگ در سیال غیر نیوتونی که منطبق بر نتایج آزمایشگاهی کار حاضر باشد ارائه کنیم. برای شروع کار از رابطه‌ی ارائه شده توسط کلیفت و گاوین [۴۰] که برای سیالات نیوتونی ارائه شده است استفاده می‌کنیم:

$$C_D = \frac{16}{Re} (1 + 0.43 Re^{0.44}) \quad (24)$$

در این رابطه از تغییر شکل حباب صرف نظر شده است و حباب به صورت کروی در نظر گرفته شده است. علاوه بر آن سیال مورد بررسی غیر نیوتونی نبوده و همچنین ضریب دراگ تنها به صورت تابعی از رینولدز ارائه شده است. به عبارتی خواص رئولوژیکی و کشش سطحی سیال در آن دیده نشده است و عمده دلیل استفاده از آن که در بیشتر مطالعات غیر نیوتونی، ساده بودن رابطه از نظر فرمولاسیون و همچنین پیش‌بینی صحیح روند تغییرات است. برای حباب در حال صعود در سیال غیر نیوتونی دوسبرگ و همکاران [۴۱] رابطه‌ی تجربی زیر را ارائه کردند:

$$C_D = \frac{16}{Re} (1 + 0.173 Re^{0.657}) + \frac{0.413}{1 + 16300 Re^{-1.09}} \quad (25)$$

مدل ارائه شده توسط دوسبرگ و همکاران برای محلول کربوکسی متیل

بایستی بر روی انواع مختلف سیالات انجام شده و نتایج آنها مقایسه شود. شکل ۱۰ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی حاضر را با سه رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد. متوسط اختلاف نتایج به دست آمده برای محلول پلی آکریل اسید در کار حاضر و رابطه‌ی لژندر و همکاران ۳۱/۳٪ و متوسط اختلاف آن‌ها با روابط بوهم و زو به ترتیب ۳۱/۴٪ و ۵۹/۷٪ است. با توجه به بالا بودن خطای معادلات مذکور، به کمک روش رگرسیون رابطه‌ای برای نتایج آزمایشگاهی حاضر به صورت زیر به دست آمده است:

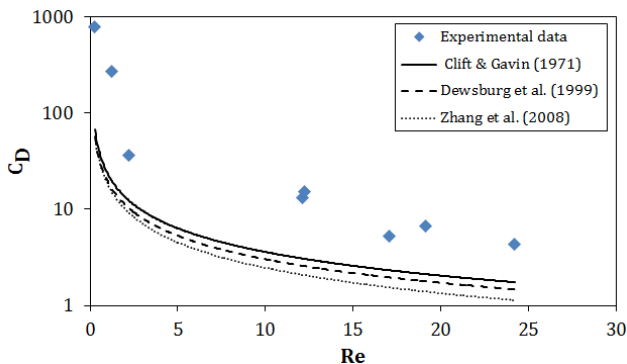
$$Re = 2.4274 We^{0.601} Mo^{-0.2} \quad (22)$$

رابطه‌ی به دست آمده مشابه رابطه‌ی بوهم و همکاران [۳۹] می‌باشد و تنها تفاوت آن ضریب رابطه می‌باشد. با توجه به اینکه سیال به کار رفته در کار حاضر و همچنین کار بوهم و همکاران هر دو غیر نیوتونی بوده و دارای خاصیت رقیق شونده برشی هستند می‌توان تابعیت زیر را برای سیالات با خاصیت مشابه ارائه کرد:

$$Re = f(We^{0.601}, Mo^{-0.2}) \quad (23)$$

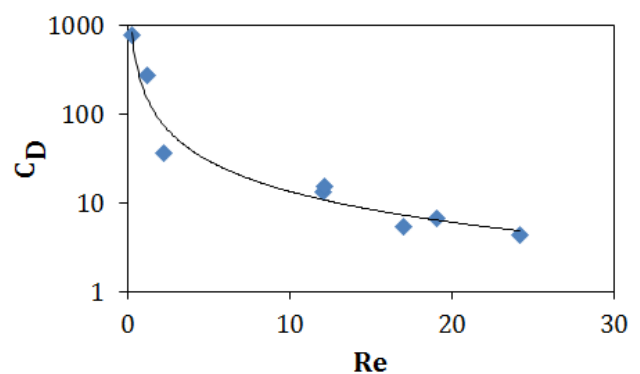
۳-۵- محاسبه ضریب دراگ

شکل ۱۱ رابطه بین ضریب دراگ محاسبه شده در مطالعه حاضر و عدد رینولدز را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود در $Re < 10$ با افزایش Re ضریب دراگ کاهش می‌یابد درحالی که برای $Re > 10$ این روند کندتر است و حتی روند منظمی ندارد. این تغییر روند طبق گفته لی



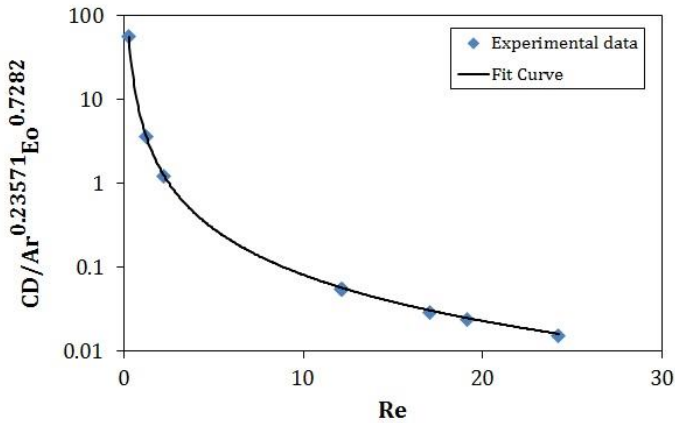
شکل ۱۲: پیش‌بینی تغییرات ضریب دراگ بر حسب عدد رینولدز توسط سه رابطه‌ی نیمه تجربی و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی حاضر

Fig. 12. Estimation of Drag coefficient changes vs. Reynolds number by three semi-experimental equations and comparison with present experimental results



شکل ۱۱: ضریب دراگ محاسبه شده برای صعود حباب تک در محلول پلی آکریل اسید بر حسب عدد رینولدز

Fig. 11. Calculated drag coefficient for a single rising bubble in PAA solution vs. Reynolds number



شکل ۱۳: اعتبار سنجی معادله‌ی ارائه شده برای ضریب دراک مربوط به صعود حباب در سیال غیر نیوتونی پلی آکریل اسید

Fig. 13. Validation of the Equation for Drag coefficient related to the bubble rising in the non-Newtonian PAA fluid

دراگ وارد بر یک حباب تک در حال صعود در سیال غیر نیوتونی با خاصیت ویسکوالاستیک به شکل زیر به دست می‌آید:

$$C_D = 5.461478 \text{Re}^{-1.82973} \text{Ar}^{0.23571} \text{Eo}^{0.7282} \quad (29)$$

به منظور اعتبار سنجی معادله‌ی به دست آمده، در شکل ۱۳ مقدار $C_D / \text{Ar}^{0.23571} \text{Eo}^{0.7282}$ بر حسب Re برای سیستم مورد مطالعه‌ی حاضر رسم شده است. متوسط خطای نسبی بین داده‌های آزمایشگاهی و مقادیر پیش بینی شده ۳/۲۶٪ است.

اخیراً نیز یان و همکاران در مطالعه‌ی خود بر روی ضریب دراک حباب تک در حال صعود در آب ساکن معادله‌ای ارائه کردند که در واقع فرم تکمیل یافته‌ی معادله‌ی ژانگ و همکاران [۱۱] می‌باشد. در این معادله اعداد بدون بعد رینولدز، اتوس و وبر به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب شده‌اند. رابطه‌ی یان و همکاران به صورت زیر می‌باشد:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}) \frac{\text{Re}^{0.55} \text{Eo}^{0.95} \text{We}^{-1.1}}{12.6} \quad (30)$$

این رابطه مربوط به صعود حباب در آب است که یک سیال نیوتونی می‌باشد. با الهام از رابطه‌ی یان و همکاران و با توجه به تحلیل ابعادی انجام شده در مطالعه‌ی حاضر، به کمک رگرسیون غیر خطی رابطه‌ای برای ضریب دراک بر حسب پارامترهای بدون بعد رینولدز، ارشمیدس و اتوس به دست آمده است. بدین ترتیب معادله‌ی جدیدی دیگری برای پیش‌بینی ضریب دراک وارد بر یک حباب تک در حال صعود در سیال غیر نیوتونی با خاصیت ویسکوالاستیک به شکل زیر به دست می‌آید:

سلولز می‌باشد که بر خلاف سیال مورد استفاده در مطالعه حاضر (پلی آکریل اسید) خاصیت ویسکوالاستیسیته ندارد و همچنین برای بیان رفتار رئولوژیکی آن از قانون توانی استفاده شده است. این در حالی است که محلول پلی آکریل اسید از مدل کرو-یاسودا پیروی می‌کند. اخیراً نیز ژانگ و همکاران [۱۵] رابطه‌ای

برای ضریب دراک بر حسب عدد شتاب $\left(Ac = \frac{d_{eq} a}{V^2} \right)$ و همچنین عدد ارشمیدس، Ar ، برای حباب پایدار و همچنین شتاب دار ارائه کردند:

$$C_D = \frac{16}{\text{Re}} (1 + 0.12 \text{Re}^{0.6}) (1 + 0.196 \text{Ac}^{0.767} \text{Ar}^{0.381}) \quad (26)$$

در مقایسه مدل ارائه شده توسط ژانگ و همکاران با مطالعه حاضر درمی‌یابیم که اولاً سیال مورد استفاده ژانگ و همکاران از مدل کرو پیروی می‌کند این در حالی است که سیال مورد استفاده در مطالعه حاضر از مدل کرو-یاسودا پیروی می‌کند. ثانیاً با وجود تنوع در سیال مورد استفاده توسط ژانگ و همکاران حباب مورد استفاده تنها هوا می‌باشد. این در حالی است که مطالعه حاضر بر روی سه نوع حباب گازی، در دبی‌های تزریق مختلف و همچنین قطر نازل‌های مختلف صورت گرفته است. شکل ۱۲ تغییرات ضریب دراک بر حسب عدد رینولدز که توسط سه رابطه بالا ارائه شده است را نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رود مقدار ضریب به دست آمده از نتایج سیال پلی آکریل اسید به دلیل خاصیت ویسکوالاستیسیته به طور بسیار ملموسی بیشتر از مقادیر پیش‌بینی شده برای سایر سیالات می‌باشد.

بنابراین بایستی خواص رئولوژیکی سیال به گونه‌ای لحاظ شود تا بتوان رابطه‌ی دقیق‌تری برای ضریب دراک ارائه کرد. به عنوان مثال لی و همکاران [۲۷] برای سیال غیر نیوتونی که قانون توانی پیروی کند $(\mu(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{-n})$ رابطه‌ای بر حسب نسبت شعاع‌های حباب، E ، و همچنین شاخص جریان، n ، به روش حداقل مربعات ارائه کرده‌اند:

$$C_D = \frac{16}{\text{Re}} (1 + 0.43 \text{Re}^{0.44}) (1 + 3.868 n^{0.7528} (1 - E)^{0.6810}) \quad (27)$$

بنابراین مشابه رابطه‌ی لی و همکاران [۲۷] بایستی رابطه‌ای یافت که منطبق بر داده‌های آزمایشگاهی سیالی باشد که از مدل رئولوژیکی کرو-یاسودا پیروی می‌کند. برای این منظور از روش تحلیل ابعادی گفته شده در بخش قبل بهره خواهیم گرفت که در آن:

$$C_D = A \text{Re}^B \text{Ar}^C \text{Eo}^D \quad (28)$$

ثوابت معادله‌ی مذکور به کمک برازش منحنی به روش حداقل مربعات به دست آمده است. در نتیجه معادله‌ی جدیدی برای پیش‌بینی ضریب

کشاورزی (بهبود شرایط خاک و توانایی کشت و آبیاری محصول در زمین‌های شیب‌دار)، کاغذ سازی (بخش خمیر کاغذ و نیز بهبود کیفیت و مقاومت کاغذ)، معدن (جداسازی ذرات و فلزات خاص) و حفاری (تسریع بخشیدن به فرایند مته زنی) نتایج حاصل از این تحقیق می‌تواند در بهبود طراحی سیستم‌های مذکور در بخش‌هایی که رفتار حباب غالب است بسیار حائز اهمیت باشد.

۵- فهرست علائم

A	سطح تصویر شده	a_1 و a_2	پارامترهای بدون بعد
C_D	ضریب دراگ	d_{eq}	قطر معادل
E	نسبت شعاع‌های حباب	F_b	نیروی شناوری
g	شتاب جاذبه	L	فاصله
n	شاخص جریان	Re	عدد رینولدز
V_T	سرعت حد	We	عدد وبر
Δt	بازه زمانی	λ	زمان مشخصه سیال
μ	ویسکوزیته	μ_l	ویسکوزیته مایع
μ_g	ویسکوزیته گاز	$\dot{\gamma}$	نرخ برش
ρ_G	چگالی گاز	ρ_L	چگالی مایع
Ar	عدد ارشمیدس		
EO	عدد اتوس		
F_D	نیروی دراگ		
Mo	عدد مورتن		
V	سرعت		
(x_{i-1}, y_{i-1})	مختصات مرکز سطح حباب در زمان $t + \Delta t$		
(x_i, y_i)	مختصات مرکز سطح حباب در زمان t		
μ_0	ویسکوزیته در زمان نرخ برش برابر صفر		
μ_∞	ویسکوزیته در زمان نرخ برش برابر بی نهایت		
σ	کشش سطحی بین مایع و حباب		

منابع

- [1] G. Bozzano, M. Dente, Shape and terminal velocity of single bubble motion: a novel approach, Computers & chemical engineering, 25(4-6) (2001) 571-576.
- [2] H. Li, Z. Liu, J. Chen, B. Sun, Y. Guo, H. He, Correlation of aspect ratio and drag coefficient for hydrate-film-covered methane bubbles in water, Experimental Thermal and Fluid Science, 88 (2017) 554-565.

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 - \frac{Re^{1.9584}}{4240} \right) \left(\frac{Ar^{0.307511} EO^{0.64601}}{2.868 Re^{0.7782}} \right) \quad (31)$$

مقایسه‌ی بین مقادیر پیش‌بینی شده توسط این معادله و داده‌های آزمایشگاهی مربوط به محلول پلی آکریل اسید در غلظت‌های مختلف نشان می‌دهد که متوسط خطای نسبی رابطه‌ی مذکور ۱/۷٪ است.

۴- جمع بندی

در مطالعه حاضر حرکت حباب تک در سیال غیر نیوتونی با خاصیت ویسکوالاستیک مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. متغیرهای عملیاتی عبارتند از غلظت مایع، نوع گاز، قطر نازل تولید کننده حباب و سرعت ورود حباب به ستون مایع. قطر معادل حباب، مسیر صعود آن و همچنین سرعت حد برای شرایط مختلف محاسبه و رفتار حباب فرموله شده است. سپس ضریب دراگ برای شرایط عملیاتی مختلف محاسبه شده است. به کمک تحلیل داده‌های آزمایشگاهی به دست آمده دو معادله برای پیش‌بینی ضریب دراگ صعود حباب در سیال غیر نیوتونی ویسکوالاستیک ارائه شده است (معادلات (۲۹) و (۳۱)). معادلات ارائه شده که در واقع بهبود یافته معادلات گذشته هستند شامل اعداد بدون بعد رینولدز، ارشمیدس و اتوس هستند که خواص رئولوژیکی سیال در محاسبه آنها منظور شده است. مقایسه‌ی بین داده‌های آزمایشگاهی به دست آمده و معادلات ارائه شده نشان داد که معادلات در توافق بسیار خوبی با داده‌های آزمایشگاهی هستند. مقایسه بین دو معادله ارائه شده نشان می‌دهد که معادله‌ی (۲۹) با وجود داشتن خطای بالاتر نسبت به معادله‌ی (۳۱) از لحاظ فرمولاسیون ساده‌تر می‌باشد. اگر چه مقدار خطای آن نیز در محدوده‌ی قابل قبولی می‌باشد. معادله‌ی (۳۱) که دارای دقت بیشتری است بر حسب عدد رینولدز غیر خطی است و از این رو فرمولاسیون آن پیچیده‌تر می‌باشد. نتایج به دست آمده از این مطالعه در پیش‌بینی ضریب دراگ حباب تک در حال صعود در سیالات غیر نیوتونی که دارای خاصیت ویسکوالاستیک هستند بسیار حائز اهمیت می‌باشد. علاوه بر آن معادلات جدیدی برای پیش‌بینی سرعت حد (معادله (۱۵)) و همچنین بررسی رفتار حباب در حال صعود (معادله (۲۲)) در سیال غیر نیوتونی ویسکوالاستیک ارائه شده است.

به طور کلی مدل به دست آمده در این کار به ما در به دست آوردن نتایج دقیق‌تر مورد نیاز شبیه‌سازی‌های دینامیک سیالات محاسباتی که بر روی حرکت حباب انجام می‌شود کمک خواهد کرد. علاوه بر آن با توجه به کاربرد وسیع سیال مورد استفاده یعنی پلی آکریل آمید در صنایع تصفیه آب (منعقدسازی ذرات معلق موجود در آب)، نفت (در بخش ازدیاد برداشت)،

- Chemical Engineering Journal, 316 (2017) 553-562.
- [12] X. Yan, K. Zheng, Y. Jia, Z. Miao, L. Wang, Y. Cao, J. Liu, Drag coefficient prediction of a single bubble rising in liquids, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 57(15) (2018) 5385-5393.
- [13] R.P. Chhabra, *Bubbles, drops, and particles in non-Newtonian fluids*, CRC press, 2006.
- [14] M. Kemiha, X. Frank, S. Poncin, H.Z. Li, Origin of the negative wake behind a bubble rising in non-Newtonian fluids, *Chemical Engineering Science*, 61(12) (2006) 4041-4047.
- [15] L. Zhang, C. Yang, Z.-S. Mao, An empirical correlation of drag coefficient for a single bubble rising in non-Newtonian liquids, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(23) (2008) 9767-9772.
- [16] X. Frank, J.-C. Charpentier, Y. Ma, N. Midoux, H.Z. Li, A multiscale approach for modeling bubbles rising in non-Newtonian fluids, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(4) (2011) 2084-2093.
- [17] W.Y. Fan, X.H. Yin, Fractal Approach to Bubble Rising Dynamics in Non-Newtonian Fluids, in: *Advanced Materials Research*, Trans Tech Publ 889-890, (2014) 559-562.
- [18] X. Xu, J. Zhang, F. Liu, X. Wang, W. Wei, Z. Liu, Rising behavior of single bubble in infinite stagnant non-Newtonian liquids, *International Journal of Multiphase Flow*, 95 (2017) 84-90.
- [19] M. Pang, M. Lu, Numerical study on dynamics of single bubble rising in shear-thinning power-law fluid in different gravity environment, *Vacuum*, 153 (2018) 101-111.
- [20] M. Dziubinski, M. Orczykowska, P. Budzynski, Comments on bubble rising velocity in non-Newtonian
- [3] G. Kelbaliyev, K. Ceylan, Development of new empirical equations for estimation of drag coefficient, shape deformation, and rising velocity of gas bubbles or liquid drops, *Chemical Engineering Communications*, 194(12) (2007) 1623-1637.
- [4] A. Premlata, M.K. Tripathi, B. Karri, K.C. Sahu, Dynamics of an air bubble rising in a non-Newtonian liquid in the axisymmetric regime, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 239 (2017) 53-61.
- [5] B. Sun, Y. Guo, Z. Wang, X. Yang, P. Gong, J. Wang, N. Wang, Experimental study on the drag coefficient of single bubbles rising in static non-Newtonian fluids in wellbore, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 26 (2015) 867-872.
- [6] C.L. Henry, L. Parkinson, J.R. Ralston, V.S. Craig, A mobile gas-water interface in electrolyte solutions, *The Journal of Physical Chemistry C*, 112(39) (2008) 15094-15097.
- [7] R. Chen, F.-M. Wang, T.-J. Lin, Bubble wake dynamics of a single bubble rising in the freeboard of a two-dimensional liquid-solid fluidized bed, *Chemical engineering science*, 54(21) (1999) 4831-4838.
- [8] W. Nock, S. Heaven, C. Banks, Mass transfer and gas-liquid interface properties of single CO₂ bubbles rising in tap water, *Chemical engineering science*, 140 (2016) 171-178.
- [9] Y. Zhang, *Single bubble velocity profile: experiments and numerical simulation*, McGill University, 2000.
- [10] Y. Fu, Y. Liu, 3D bubble reconstruction using multiple cameras and space carving method, *Measurement Science and Technology*, 29(7) (2018) 075206.
- [11] X. Yan, Y. Jia, L. Wang, Y. Cao, Drag coefficient fluctuation prediction of a single bubble rising in water,

- Interaction and Drag Coefficient of Bubbles Continuously Rising with Equilateral Triangle Arrangement in Shear-Thinning Fluids, *International Journal of Multiphase Flow*, (2018) In Press
- [29] J. Araújo, J. Miranda, J. Campos, Taylor bubbles rising through flowing non-Newtonian inelastic fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 245 (2017) 49-66.
- [30] C. Patrascu, I.L. Omocea, C. Balan, Experimental investigation of a liquid meniscus formed by close colliding viscous and viscoelastic jets, *Proceeding of the romanian academy series A-Mathematics physics technical sciences information sciences*, 19(3) (2018) 483-488.
- [31] W.L. Shew, J.-F. Pinton, Viscoelastic effects on the dynamics of a rising bubble, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006(01) (2006) P01009.
- [32] R. Sousa, M. Riethmuller, A.M. Pinto, J. Campos, Flow around individual Taylor bubbles rising in stagnant polyacrylamide (PAA) solutions, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 135(1) (2006) 16-31.
- [33] J. Liu, C. Zhu, T. Fu, Y. Ma, H. Li, Numerical simulation of the interactions between three equal-interval parallel bubbles rising in non-Newtonian fluids, *Chemical engineering science*, 93 (2013) 55-66.
- [34] M.K. Tripathi, K.C. Sahu, R. Govindarajan, Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid, *Nature communications*, 6 (2015) 6268
- [35] R. Clift, J.R. Grace, M.E. Weber, *Bubbles, drops, and particles*, Courier Corporation, 2005.
- [36] H.D. Mendelson, The prediction of bubble terminal velocities from wave theory, *AIChE Journal*, 13(2) (1967) 250-253.
- liquids, *Chemical Engineering Science*, 58(11) (2003) 2441-2443
- [21] T.-J. Lin, G.-M. Lin, An experimental study on flow structures of a single bubble rising in a shear-thinning viscoelastic fluid with a new measurement technique, *International journal of multiphase flow*, 2(31) (2005) 239-252.
- [22] M. Ohta, Y. Yoshida, M. Sussman, A computational study of the dynamic motion of a bubble rising in Carreau model fluids, *Fluid dynamics research*, 42(2) (2009) 025501.
- [23] L. Zhang, C. Yang, Z.-S. Mao, Numerical simulation of a bubble rising in shear-thinning fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(11-12) (2010) 555-567.
- [24] W. Fan, X. Yin, A laser imaging-LDV coupling measurement of single bubble forming and rising in shear-thinning fluid, *Journal of Thermal Science*, 23(3) (2014) 233-238.
- [25] S.D. Dhole, R.P. Chhabra, V. Eswaran, Drag of a spherical bubble rising in power law fluids at intermediate Reynolds numbers, *Industrial & engineering chemistry research*, 46(3) (2007) 939-946.
- [26] F. Wenyuan, M. Youguang, J. Shaokun, Y. Ke, L. Huaizhi, An experimental investigation for bubble rising in non-Newtonian fluids and empirical correlation of drag coefficient, *Journal of Fluids Engineering*, 132(2) (2010) 021305.
- [27] S. Li, Y. Ma, S. Jiang, T. Fu, C. Zhu, H.Z. Li, The drag coefficient and the shape for a single bubble rising in non-Newtonian fluids, *Journal of Fluids Engineering*, 134(8) (2012) 084501.
- [28] W. Sun, C. Zhu, T. Fu, Y. Ma, H. Li, 3D Simulation of

- channels in Newtonian and non-Newtonian liquids, *International Journal of Multiphase Flow*, 65 (2014) 11-23.
- [40] R. Clift, W. Gauvin, Motion of entrained particles in gas streams, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 49(4) (1971) 439-448.
- [41] K. Dewsbury, D. Karamanev, A. Margaritis, Hydrodynamic characteristics of free rise of light solid particles and gas bubbles in non-Newtonian liquids, *Chemical engineering science*, 54(21) (1999) 4825-4830.
- [37] M. Jamialahmadi, H. Müller-Steinhagen, Effect of alcohol, organic acid and potassium chloride concentration on bubble size, bubble rise velocity and gas hold-up in bubble columns, *The Chemical Engineering Journal*, 50(1) (1992) 47-56.
- [38] D. Legendre, R. Zenit, J.R. Velez-Cordero, On the deformation of gas bubbles in liquids, *Physics of Fluids*, 24(4) (2012) 043303.
- [39] L. Böhm, T. Kurita, K. Kimura, M. Kraume, Rising behaviour of single bubbles in narrow rectangular

