Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(5) (2020) 329-332
DOI: 10.22060/mej.2019.14506.5873

The Effect of Anisotropic Bearings on Dynamics and Stability of the Ball-Spring Auto-balancer

M. Rezaee[1*], M. Ettefagh[2], R. Fathi[3]

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

ABSTRACT: In recent years, there has been much interest in the use of automatic dynamic ball balancers to balance the rotors with varying imbalances. An automatic dynamic ball balancer is a device that can automatically compensate the variable imbalances of a rotor in certain working conditions without having to stop the rotating equipment. Ball-spring auto-balancer is a new type of automatic ball balancers which has two main advantages over the traditional ones, i.e. it causes the rotor vibration amplitude at the transient state to be small and it has a wider balanced stable region. Bearings are one of the most important mechanical components due to their considerable influence on the dynamic behavior and stability of the rotary systems. In previous studies, the dynamic behavior and stability of the rotor with isotropic bearings equipped with a ball- spring auto-balancer has been analyzed. However, in practice, the bearings have generally anisotropic behavior due to the manufacturing process. In this study, the dynamics and stability of a rotor with anisotropic bearings equipped with a ball-spring autobalancer are investigated via the multiple scales method for the first time. The results show that the anisotropic bearings do not impair the main advantages of the ball-spring auto-balancers, and as the anisotropic parameter increases the balanced stable region decreases.

Review History:

Received: 5/26/2018
Revised: 11/15/2018
Accepted: 12/27/2018
Available Online: 1/19/2019

Keywords:

Ball-spring auto-balancer
Anisotropic bearing
Multiple scales method
Vibration response
Balanced stable region

1. INTRODUCTION

The imbalance is one of the main causes of undesired vibration in rotating systems. This phenomenon leads to adverse effects in rotating equipment such as reducing the bearing life, increased maintenance costs, and etc. For a rotor with a fixed amount of imbalance, the conventional balancing procedure is applicable. However, for a rotor with varying imbalance during the operating conditions, the conventional balancing method is not sufficient. This observation persuades the implement of automatic ball balancers which can passively reduce the vibration amplitude of the imbalance rotor. The capability of ball balancers which can automatically compensate the variable imbalances makes this device to be used currently in industrial applications such as CD- ROMs, DVD drives [1] and etc. The first investigation on Automatic Ball Balancer (ABB) was carried out by Thearle [2]. Jinnouchi et al. [3] showed that, although the ABB can eliminate the undesired vibrations of the imbalance rotor above the first critical speed, it leads to large vibration at low speeds. Jung and DeSmidt [4] investigated the nonsynchronous vibration behavior for a rotor with ABB by implementing the harmonic solution.

Reviewing the previous studies show that, although the traditional ABB has numerous advantages, it has two main deficiencies: First, the ABB amplifies the vibration amplitude of the rotor in speeds below the first critical speed. Second, it limits the balanced stable region of the rotor [5]. In this regard, recently the modified ABB model entitled ball- spring autobalancer has been proposed by Rezaee and Fathi [6], for solving the mentioned disadvantages. In previous studies, the dynamics and stability of rotor mounted on isotropic bearings equipped with a ball-spring Auto-Balancer (AB) has been investigated via the numeral method. However, the bearings have generally anisotropic behavior due to the manufacturing process. Therefore, in this study, the dynamics and stability of a rotor with anisotropic bearings equipped with a ball-spring autobalancer are investigated by implementing the multiple scales method for the first time. For this purpose, first the mathematical model of a rotor with anisotropic bearings equipped with a ball-spring AB is constructed and the nonlinear governing equations of motion are derived. Then due to the advantage of the analytical methods over the numerical ones, the vibration response of the system is acquired via the multiple scale method. Finally, the system stability is analyzed and the balanced stable regions are obtained.

2. MATHEMATICAL SIMULATION

Fig. 1 illustrates the model of a rotor supported by two anisotropic bearings and equipped with a ball-spring AB. The position of each ball is defined by a radial distance, δ_i , and an angle, ϕ_i , $i = 1,2,3,\ldots,n$, where n is the number of the balls.

Here, to extract the equation of motion, the kinetic energy, potential energy, and Rayleigh's dissipation function are derived. The kinetic energy of the rotor with a ball- spring

*Corresponding author's email: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

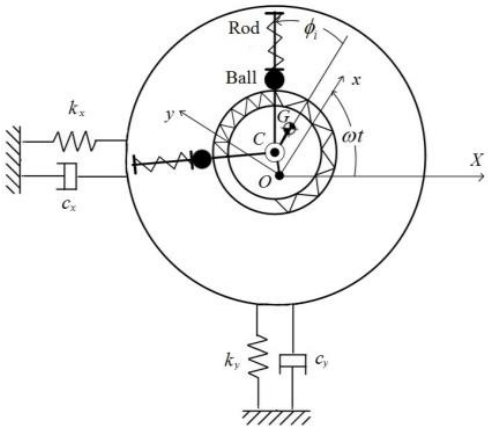


Fig. 1. Schematic of a rotor with anisotropic bearings equipped with an automatic ball-spring balancer.

AB can be expressed as:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + (x^2 + y^2)\omega^2\right] \\ &+ \frac{1}{2}m_d\left(2x\varepsilon\omega^2 + \varepsilon^2\omega^2 + 2\varepsilon\dot{y}\omega\right) + \frac{1}{2}m_b\sum_{i=1}^{n}\left[2\delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)\right. \\ &\times(\dot{y} + \omega x)\cos\phi_i + \dot{\delta}_i^2 - 2\delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{x} - \omega y)\sin\phi_i \\ &\left. + \delta_i^2(\dot{\phi}_i + \omega)^2 + 2\dot{\delta}_i(\dot{x} - \omega y)\cos\phi_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{y} + \omega x)\sin\phi_i\right] \end{aligned} \tag{1}$$

where $M = m_d + n \times m_b$ and m_d is the mass of the rotor and m_b is the mass of a ball and ω is the angular velocity of the rotor. J is the mass moment of inertia of the disk with respect to G. Neglecting gravity, the potential energy can be obtained as below:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_r\sum_{i=1}^{n}(\delta_i - a)^2 \\ &+ \frac{1}{2}k_p d^2\left[\left(\phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{2}$$

where k_x and k_y is the equivalent stiffness of the bearings in x and y directions respectively, k_p and k_r are the stiffness of the peripheral and radial springs of the balancer, respectively. The Rayleigh's dissipation function can be expressed as:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}c_x\left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}y\omega + \omega^2 y^2\right) + \frac{1}{2}c_y\left(\dot{y}^2 + 2x\dot{y}\omega + \omega^2 x^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}c_r\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\delta}_i^2 + \delta_i^2\dot{\phi}_i^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

where c_x , c_y is the equivalent damping constant of the bearings in x and y directions respectively, and c_r is the damping coefficient of the balls. The nonlinear equations of motion are derived by putting Eqs. (1) to (3) into the Lagrange equations. Also to generalize the results, the following nondimensional parameters are defined:

$$\begin{aligned} &\bar{x} = \frac{x}{\gamma},\ \bar{y} = \frac{y}{\gamma},\ \bar{\delta}_i = \frac{\delta_i}{\gamma},\ \tau = \omega_n t,\ r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2},\ \gamma = \frac{k_r a}{k_r - m_b\omega^2} \\ &\zeta_x = \frac{c_x}{2M\omega_n},\ \zeta_y = \frac{c_y}{2M\omega_n},\ \bar{m} = \frac{m_b}{M},\ e = \frac{\varepsilon}{\gamma},\ \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_n},\ \beta = \frac{c_r}{2m_b\omega_n} \\ &\omega_b = \sqrt{\frac{k_r}{m_b}},\ \omega_n = \sqrt{\frac{k_x}{m_d}},\ f = \frac{\omega_b}{\omega_n},\ \eta = \frac{k_p d^2}{m_b\gamma^2\omega_n^2},\ \sigma = \frac{k_y}{k_x} \end{aligned} \tag{4}$$

where ω_n and ω_b are the natural frequencies of the rotor and the ball- radial spring assembly, respectively. σ is the ratio of the equivalent stiffness of the bearings in y direction to x direction. One can obtain the dimensionless form of the equations of motion by implementing the nondimensional parameters. In order to acquire the vibration response of the system, equations of motion must be solved. For doing this task by the perturbation method, the multiple scale method is used.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

The dynamic response of the system for three different values of anisotropic parameters is presented in Fig. 2. As it can be seen from this figure, the ball- spring AB can suppress the undesired vibration of imbalance rotor with anisotropic bearings. Moreover, the results presented in Fig. 2 show that by increasing the stiffness of the bearings in y direction, the vibration amplitude of the system decreases.

In this part, the effect of bearings anisotropic parameter on the balanced stable region of the system has been investigated. In Fig. 3, the balanced stable region of the rotor

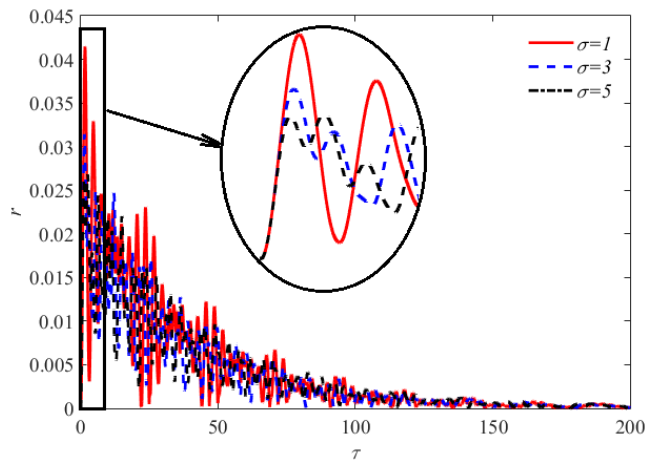


Fig. 2. Vibration response of the rotor with ball-spring AB for three different values of anisotropic parameters for $\bar{m} = 0.02$, $\zeta_x = 0.01$, $\zeta_y = 0.05$, $e = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\bar{\omega} = 3$, $\eta = 0.004$ and, $f = 4$.

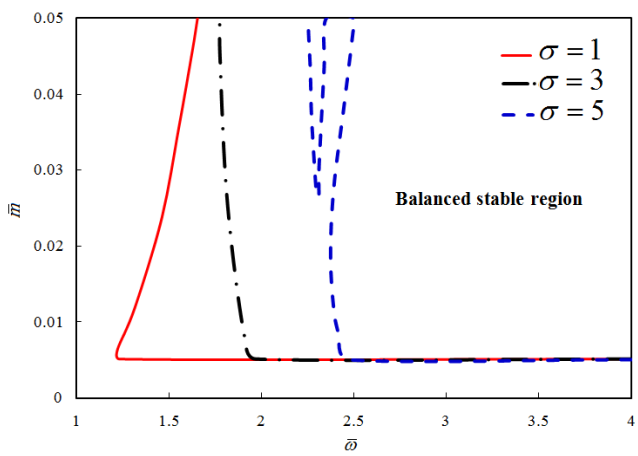


Fig. 3. Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB for three different values of the anisotropic parameter for $\zeta_x = 0.01$, $\zeta_y = 0.05$, $e = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\eta = 0.004$ and, $f = 4$.

supporting with two anisotropic bearings equipped with a ball-spring AB for three different values of the anisotropic parameter, σ, are depicted. As shown in this figure, by increasing the anisotropic parameter, the system balanced stable region reduces. This fact reveals the importance of considering anisotropic behavior of the bearings in the accurate stability analysis of the rotor equipped with a ball-spring AB.

4. CONCLUSIONS

In this investigation, dynamics and stability of a rotor with anisotropic bearings equipped with ball-spring AB have been studied for the first time. By implementing the Lagrange equation, the nonlinear equations of motion are derived. Vibration response and balanced stable region of the system are obtained via the multiple scales method. The results show that the bearings anisotropy affects the stability of the system, and by increasing the anisotropic parameter, the balanced stable region of the system decreases.

REFERENCES

[1] W. Kim, J. Chung, Performance of automatic ball balancers on optical disc drives, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 216(11) (2002) 1071-1080.

[2] E. Thearle, Automatic dynamic balancers (part 1—Leblanc balancer) machine, Design, 22 (1950) 119-124.

[3] Y. Jinnouchi, Y. Araki, J. Inoue, Y. Ohtsuka, C. Tan, Automatic balancer (static balancing and transient response of a multi-ball balancer), Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., Ser. C, 59(557) (1993) 79-84.

[4] D. Jung, H. DeSmidt, Limit-cycle analysis of planar rotor/autobalancer system influenced by alford's force, Journal of Vibration and Acoustics, 138(2) (2016) 021018.

[5] C.-J. Lu, M.-C. Wang, S.-H. Huang, Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer, Mechanical Systems and Signal Processing, 23(3) (2009) 884-896.

[6] M. Rezaee, R. Fathi, Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism, Journal of Sound and Vibration, 358 (2015) 375-391.

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۵، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۳۱۹ تا ۱۳۳۲
DOI: 10.22060/mej.2019.14506.5873

تاثیر یاتاقان‌های غیرهمگن بر رفتار دینامیکی و پایداری اتوبالانسر ساچمه- فنر

موسی رضائی*، میرمحمد اتفاق، رضا فتحی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

خلاصه: در سال‌های اخیر استفاده از اتوبالانسر دینامیکی ساچمه‌ای برای رفع نابالانسی‌های متغیر با شرایط کاری، بیش از پیش مورد توجه محققان قرار گرفته است. اتوبالانسر دینامیکی ساچمه‌ای وسیله‌ای است که بطور خودکار نابالانسی‌های متغیر با شرایط کاری را بدون نیاز به متوقف کردن تجهیزات دوار در شرایط خاص رفع و سیستم را بالانس می‌کند. بالانسر اتوماتیک ساچمه- فنر نوع جدیدی از بالانسرهای اتوماتیک ساچمه‌ای می‌باشد و مزیت اصلی آن نسبت به اتوبالانسرهای ساچمه‌ای متداول، کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا و وسیع بودن ناحیه بالانس پایدار است. یاتاقان‌ها یکی از مهم‌ترین اجزا تاثیرگذار بر رفتار دینامیکی و پایداری سیستم‌های دوار هستند و در پژوهش‌های پیشین رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های همگن بررسی شده است. در عمل، به دلایل مختلف از جمله ساخت، یاتاقان‌ها دارای رفتار غیرهمگن می‌باشند. در این پژوهش برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است. نتایج حاکی از این است غیرهمگن بودن یاتاقان‌ها خللی در مزیت‌های اصلی اتوبالانسر ساچمه- فنر وارد نمی‌کند و در ضمن افزایش پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها سبب کاهش ناحیه بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبلانسر می‌شود.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۰۵-۰۳-۱۳۹۷
بازنگری: ۲۴-۰۸-۱۳۹۷
پذیرش: ۰۶-۱۰-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۲۹-۱۰-۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
اتوبالانسر ساچمه- فنر
یاتاقان‌های غیرهمگن
روش مقیاس‌های چندگانه
پاسخ ارتعاشی
ناحیه بالانس پایدار

۱- مقدمه

یکی از عمده‌ترین عوامل ایجاد ارتعاشات در سیستم‌های دوار نابالانسی است. عدم رفع نابالانسی در تجهیزات دوار می‌تواند خسارت‌های زیادی نظیر کاهش عمر یاتاقان‌ها، افزایش هزینه نگهداری سیستم و غیره را به دنبال داشته باشد. اگر نابالانسی مشخص و ثابت باشد عملیات بالانس با متوقف کردن سیستم دوار و اضافه یا کم کردن جرم در صفحاتی که برای بالانس کردن سیستم تعبیه شده، انجام می‌گیرد. اما اگر نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر کند، دیگر با روش‌های متداول نمی‌توان ارتعاشات سیستم دوار را کاهش داد. یکی از راهکارهای ساده و موثر جهت کنترل و رفع نابالانسی این نوع سیستم‌ها استفاده از اتوبالانسر ساچمه‌ای است. بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای وسیله ساده‌ای است که از یک دیسک دوار شیاردار تشکیل شده که در آن ساچمه‌هایی قرار دارند و در فضای خالی بین ساچمه‌ها در داخل شیار، یک مایع لزج وجود دارد. تحت شرایطی این ساچمه‌ها نهایتاً در وضعیتی قرار می‌گیرند که نابالانسی سیستم را جبران کرده و نهایتاً آن را به حالت بالانس در می‌آورند [۱]. اتوبالانسر ساچمه‌ای کاربردهای متفاوتی در سیستم‌های مختلف از جمله در دی.وی.دی-رام[1] یا سی.دی-رام[2]، ماشین‌های ابزار و غیره دارد [۵-۲].

تحقیقات اولیه در زمینه بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای توسط تیارل [۶] انجام شده است. در سال ۱۹۹۹ جینوچی و همکاران [۷] با بررسی خود نشان دادند هرچند اتوبالانسر ساچمه‌ای قادر به بالانس سیستم در دورهای بالای دور بحرانی اول است ولی در دورهای پایین، دامنه روتور را افزایش می‌دهد. در سال ۱۹۹۹ چانگ و رو [۸] رفتار دینامیکی روتور جفکات مجهز به اتوبالانسر متداول را بررسی کرده‌اند. آن‌ها معادلات حرکت را به کمک دستگاه مختصات قطبی به صورت خودگردان تبدیل کرده و توانستند پایداری سیستم را حول نقاط تعادل بطور کامل بررسی کنند. چانگ و جانگ [۹] به بررسی اثر

1 DVD- ROM
2 CD- ROM

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

ژیروسکوپی بر رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد اتوبالانسر علاوه بر بالانس سیستم قادر است زوایای اویلر ناشی از اثر ژیروسکوپی را میرا کند. لو و همکاران [۱۰] به بررسی تحلیلی پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با دو ساچمه پرداختند. آن‌ها محدودهٔ پایداری در همسایگی وضعیت تعادل را به وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی کردند. همچنین لو و هانگ [۱۱] در تحقیقی دیگر رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با سه ساچمه را بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ احیایی و مقدم [۱۲] به بررسی تحلیلی و عددی یک محور انعطاف‌پذیر دوار نابالانس واقع بر روی دو تکیه‌گاه الاستیک خطی و مجهز به چندین اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. آن‌ها با فرض توزیع نابالانسی به صورت جرم‌های نقطه‌ای در طول محور دوار بدون جرم، معادلات حرکت را استخراج کردند و نشان دادند که با انتخاب مناسب پارامترهای بالانسر می‌توان شفت را بالانس نمود و هنگامی‌که بالانسرها در نزدیکی نابالانسی‌ها قرار داده شوند نتایج بهتری حاصل می‌شود. در سال ۲۰۱۱ چان و همکاران [۱۳] تاثیر غیرخطی بودن سیستم تعلیق بر پایداری سیستم مجهز به بالانسر ساچمه‌ای متداول را بدون استخراج پاسخ دینامیکی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۳ سانق و همکاران [۱۴] تاثیر تحریک خارجی بر عمکرد اتوبالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. در همان سال، بایکو [۱۵] به بررسی رفتار روتور انعطاف‌پذیر ارتوتروپیک مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداخت. نتایج تحلیل ایشان نشان داد که ناحیه پایدار برای روتور ارتوتروپیک کمتر از ناحیه پایدار روتور ایزوتورپیک است. در سال ۲۰۱۴ رضائی و فتحی [۱۶] تاثیر ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ رضائی و همکاران [۱۷] با لحاظ کردن اثرات ژیروسکوپی و با استفاده از الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید پارامترهای بهینه اتوبالانسر به منظور کمینه‌سازی زمان بالانس و صفر کردن زوایای اویلر را استخراج کردند. همچنین رضائی و فتحی [۱۸] در تحقیق دیگر رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ ماجسکی و همکاران [۱۹] به بررسی رفتار دیسک صلب نصب شده بر روی شفت الاستیک مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که عملکرد اتوبالانسر کاملاً وابسته به محل نصب آن روی شفت است و در صورت نزدیکی اتوبالانسر به محل نابالانسی، اتوبالانسر عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۶ یانگ و اسمیت [۲۰] به بررسی رفتار چرخه حدی روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر تحت اثر نیروی آلفورد[1] پرداختند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که افزایش ضریب میرایی اتوبالانسر می‌تواند ارتعاشات مخرب ناشی از چرخه حدی سیستم تحت اثر نیروی آلفورد را از بین ببرد. همچنین آن‌ها در مقاله دیگری [۲۱] به بررسی رفتار چرخه حدی روتور مجهز به اتوبالاسر پرداختند ولی در مدل جدید روتور را غیرصفحه‌ای و شفت را انعطاف‌پذیر در نظر گرفتند. مرور تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که اتوبالانسر ساچمه‌ای علاوه بر مزایای متعدد، از جمله ساختار ساده و بالانس اتوماتیک نابالانسی‌های متغیر در شرایط خاص، دارای دو عیب اساسی می‌باشد. اولین عیب افزایش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا است و این افزایش دامنه در ناحیه گذرا سبب کاهش عمر خستگی، ایجاد صدا و غیره می‌شود. دومین عیب محدود بودن ناحیه بالانس پایدار است. به عبارت دیگر اتوبالانسر به ازای پارامترهای مشخصی از سیستم می‌تواند روتور را بالانس نماید [۸ و ۱۰]. بنابراین محدود بودن این ناحیه سبب می‌شود گستره کاربرد این نوع اتوبالانسر کاهش یابد. با توجه به ایرادات ذکر شده اخیراً مدل جدیدی از اتوبالانسر با عنوان اتوبالانسر ساچمه- فنر [۲۲] ارائه گردیده است. این اتوبالانسر توانسته هر دو عیب مذکور را به طور همزمان تا حد قابل ملاحظه‌ای رفع نماید. با توجه مزیت‌های اتوبالانسر جدید ساچمه- فنر نسبت به اتوبالانسر متداول که در مدل صفحه‌ای جفکات با یاتاقان همگن در مرجع [۲۲] اثبات شده است، بنابراین بررسی دقیق رفتار دینامیکی اتوبالانسر جدید حائز اهمیت است. در تحقیقات پیشین رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های همگن و مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش‌های عددی بررسی شده است. با توجه به اینکه یاتاقان‌ها تاثیر غالب بر رفتار دینامیکی روتورها دارند و بنابه دلایل مختلف از جمله روش ساخت، غیرهمگن هستند و همچنین روش‌های نیمه تحلیلی دارای مزیت‌های متعددی می‌باشند، به همین منظور در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روش مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است.

در این پژوهش با در نظر گرفتن روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن

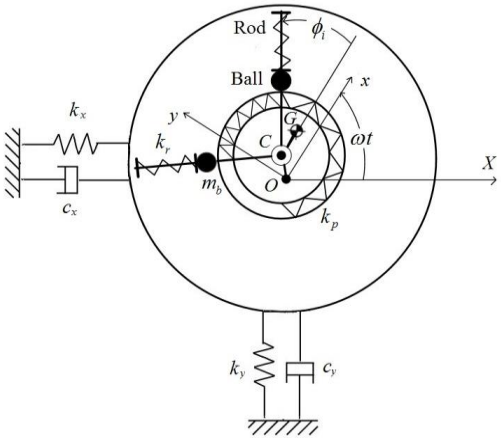
1 Alford's Force

مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم استخراج شده است. با توجه به مزیت‌های متعددی که روش‌های نیمه‌تحلیلی نسبت به روش‌های عددی دارند، پاسخ زمانی سیستم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه استخراج شده است. همچنین محدوده بالانس پایدار سیستم تعیین و تاثیر پارامتر غیرهمگنی یاتاقان بر آن بررسی شده است. نهایتاً پاسخ زمانی و محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور مجهز به اتوبالانسر متداول تحت شرایط یکسان مقایسه شده است.

۲- استخراج معادلات غیرخطی حرکت

مدل شماتیک روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های غیرهمگن در شکل ۱ نشان داده شده است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، یاتاقان‌های غیرهمگن در دو جهت با فنر و دمپر ویسکوز با سفتی و میرایی متفاوت مدل شده است. موقعیت ساچمه‌ها به وسیله شعاع δ_i و زاویه ϕ_i که $i = ۱,۲,\ldots,n$ تعیین می‌شـــود و n تعداد ساچمه‌ها می‌باشد. مرکز جرم روتور با G و خروج از مرکز با ε نشان داده شده است. مرکز هندسی روتور، C، با استفاده از مختصات x و y تعیین می‌شود. برای خودگردان کردن معادلات حرکت، دستگاه مختصات oxy متصل به روتور فرض شده است که با سرعت زاویه‌ای روتور چرخش می‌کند. هنگامی‌که روتور در حالت سکون قرار دارد C منطبق بر نقطه عبور خط واصل محور یاتاقان‌ها (نقطه O) است.

در ادامه برای استخراج معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت



شکل ۱: نمای شماتیک روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر

Fig.1: Schematic of a rotor with anisotropic bearings equipped with an automatic ball-spring balancer

اتوبالانسر ساچمه- فنر ابتدا انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و تابع اتلاف ریلی سیستم را بدست آورده و نهایتاً با استفاده از روابط لاگرانژ معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت سیستم استخراج می‌گردد. برای استخراج انرژی جنبشی سیستم سرعت مطلق مرکز جرم روتور و سرعت مطلق خطی ساچمه‌ها طبق روابط زیر استخراج می‌شود:

$$\vec{v}_G = (\dot{x} - y\,\omega)\vec{i} + (\dot{y} + x\,\omega + \varepsilon\omega)\vec{j} \tag{۱}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{B_i} = &\left[(\dot{x} - y\omega) + \dot{\delta}_i \cos\phi_i - \delta_i\left(\dot{\phi}_i + \omega\right)\sin\phi_i\right]\vec{i} + \\ &\left[(\dot{y} + x\omega) + \dot{\delta}_i \sin\phi_i + \delta_i\left(\dot{\phi}_i + \omega\right)\cos\phi_i\right]\vec{j}\end{aligned} \tag{۲}$$

بنابراین انرژی جنبشی سیستم طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{1}{2}J\,\omega^2 + \frac{1}{2}m_d\,\vec{v}_G\,.\,\vec{v}_G + \frac{1}{2}m_b\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_{B_i}\,.\,\vec{v}_{B_i} \tag{۳}$$

در رابطه بالا جمله اول بیانگر انرژی جنبشی ناشی از دوران دیسک می‌باشد و جملات دوم و سوم به ترتیب نشان‌دهنده انرژی جنبشی انتقالی دیسک و ساچمه‌ها می‌باشد. در رابطه (۳) J و m_d به ترتیب ممان اینرسی جرمی و جرم دیسک می‌باشد و m_b جرم هر یک از ساچمه‌ها می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱) و (۲) در رابطه (۳) انرژی جنبشی اتوبالانسر ساچمه- فنر به همراه روتور با فرض یکسان بودن جرم ساچمه‌ها و کوچک بودن قطر آن‌ها، از رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}T = &\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + \left(x^2 + y^2\right)\omega^2\right] + \\ &\frac{1}{2}m_d\left(2x\varepsilon\omega^2 + \varepsilon^2\omega^2 + 2\varepsilon\dot{y}\omega\right) \\ &+\frac{1}{2}m_b\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{aligned}&2\delta_i\left(\dot{\phi}_i + \omega\right)(\dot{y} + \omega x)\cos\phi_i - \\ &2\delta_i\left(\dot{\phi}_i + \omega\right)(\dot{x} - \omega y)\sin\phi_i + \delta_i^2\left(\dot{\phi}_i + \omega\right)^2\end{aligned}\right. \\ &\left.+\dot{\delta}_i^2 + 2\dot{\delta}_i(\dot{x} - \omega y)\cos\phi_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{y} + \omega x)\sin\phi_i\right]\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن M جرم کل مجموعه است. انرژی پتانسیل روتور جفکات با یاتاقان‌های غیرهمگن از رابطه (۵) استخراج می‌گردد:

$$V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 \tag{۵}$$

انرژی پتانسیل اتوبالانسر ساچمه- فنر طبق مرجع [۲۲] برابر با رابطه (۶) است.

$$V = \frac{1}{2}k_r\sum_{i=1}^{n}(\delta_i - a)^2 + \frac{1}{2}k_p d^2\left[\begin{aligned}&\left(\phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{n}\right)^2 + \\ &\cdots + \left(\phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n}\right)^2\end{aligned}\right] \tag{۶}$$

که جمله اول ناشی از فنرهای شعاعی بوده و جمله دوم ناشی از فنرهای محیطی می‌باشد. بنابراین انرژی پتانسیل روتور با یاتاقان‌های

غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به صورت رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$V=\frac{1}{2}k_x x^2+\frac{1}{2}k_y y^2+\frac{1}{2}k_r\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left(\delta_{\mathrm{i}}-a\right)^2+\frac{1}{2}k_p d^2 \left[\left(\phi_2-\phi_1-\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)^2+\cdots+\left(\phi_{\mathrm{n}}-\phi_{\mathrm{n}-1}-\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)^2\right] \quad (۷)$$

که در آن k_x سفتی معادل روتور در راستای x، k_y سفتی معادل روتور در راستای y، k_p سفتی فنرهای محیطی و k_r سفتی فنرهای شعاعی می‌باشد. تابع اتلاف ریلی ارائه شده در مرجع [۲۲] برای روتور با یاتاقان غیرهمگن به رابطه (۸) تبدیل می‌شود.

$$F=\frac{1}{2}c_x\left(\dot{x}^2-2\dot{x}y\omega+\omega^2y^2\right)+\frac{1}{2}c_y\left(\dot{y}^2+2x\dot{y}\omega+\omega^2x^2\right)+\frac{1}{2}c_r\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left(\dot{\delta}_{\mathrm{i}}^2+\delta_{\mathrm{i}}^2\dot{\phi}_{\mathrm{i}}^2\right) \quad (۸)$$

که در آن c_x ثابت میرایی معادل روتور در راستای x، c_y ثابت میرایی معادل روتور در راستای y و c_r ثابت میرایی لزج اتوبالانسر می‌باشد. معادلات غیرخطی حرکت روتور مجهز به اتوبالانسر جدید با استفاده از معادلات لاگرانژ به‌صورت روابط (۹) تا (۱۲) به دست می‌آیند:

$$M\ddot{x}+m_b\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left[\left(\ddot{\delta}_{\mathrm{i}}-\delta_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\omega\right)^2\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}-\left(\delta_{\mathrm{i}}\ddot{\phi}_{\mathrm{i}}+2\dot{\delta}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\omega\right)\right)\sin\phi_{\mathrm{i}}\right]- m_d\varepsilon\omega^2+c_x\dot{x}-2M\omega\dot{y}+\left(k_x-M\omega^2\right)x-c_x\omega y=0 \quad (۹)$$

$$M\ddot{y}+m_b\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left[\left(\ddot{\delta}_{\mathrm{i}}-\delta_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\omega\right)^2\right)\sin\phi_{\mathrm{i}}+\left(\delta_{\mathrm{i}}\ddot{\phi}_{\mathrm{i}}+2\dot{\delta}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\omega\right)\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}\right]+ c_y\dot{y}+2M\omega\dot{x}+\left(k_y-M\omega^2\right)y+c_y\omega x=0 \quad (۱۰)$$

$$m_b\delta_{\mathrm{i}}\begin{bmatrix}\left(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}-\left(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x\right)\\ \sin\phi_{\mathrm{i}}+\delta_{\mathrm{i}}\ddot{\phi}_{\mathrm{i}}+2\dot{\delta}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\omega\right)\end{bmatrix} +c_r\delta_{\mathrm{i}}^2\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+k_pd^2q_{\mathrm{i}}\left(\phi_{\mathrm{i}}\right)=0 \quad (۱۱)$$

$$q_1(\phi)=\left(\phi_1-\phi_2-\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$q_{\mathrm{i}}(\phi)=\left(2\phi_{\mathrm{i}}-\phi_{\mathrm{i}-1}-\phi_{\mathrm{i}+1}\right)$$
$$q_{\mathrm{n}}(\phi)=\left(\phi_{\mathrm{n}}-\phi_{\mathrm{n}-1}-\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$i=2,3,\cdots,n-1$$

$$m_b\begin{bmatrix}\left(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y\right)\sin\phi_{\mathrm{i}}+\left(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}-\\ \delta_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\omega\right)^2+\ddot{\delta}_{\mathrm{i}}\end{bmatrix}+ c_r\dot{\delta}_{\mathrm{i}}+k_r\left(\delta_{\mathrm{i}}-a\right)=0 \quad (۱۲)$$

صحت روابط اخیر با قرار دادن $\delta_{\mathrm{i}}=R$، $\dot{\delta}_{\mathrm{i}}=0$، $k_x=k_y=k$، $c_x=c_y=c$ و $k_r=k_p=0$ در روابط (۹) تا (۱۲)، که به روابط موجود در مقالات [۱۰] و [۱۱] منجر می‌شود تائید می‌گردد. به منظور کسب نتایج عمومی‌تر، مختصه‌ها و پارامترهای بی‌بعد به‌صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\begin{gathered}\bar{x}=\frac{x}{\gamma},\ \bar{y}=\frac{y}{\gamma},\ \bar{\delta}_{\mathrm{i}}=\frac{\delta_{\mathrm{i}}}{\gamma},\ \tau=\omega_n t,\ r=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2},\ \gamma=\frac{k_r a}{k_r-m_b\omega^2}\\ \zeta_x=\frac{c_x}{2M\omega_n},\ \zeta_y=\frac{c_y}{2M\omega_n},\ \bar{m}=\frac{m_b}{M},\ e=\frac{\varepsilon}{\gamma},\ \bar{\omega}=\frac{\omega}{\omega_n},\ \beta=\frac{c_r}{2m_b\omega_n}\\ \omega_b=\sqrt{\frac{k_r}{m_b}},\ \omega_n=\sqrt{\frac{k_x}{m_d}},\ f=\frac{\omega_b}{\omega_n},\ \eta=\frac{k_p d^2}{m_b\gamma^2\omega_n^2},\ \sigma=\frac{k_y}{k_x}\end{gathered} \quad (۱۳)$$

که در آن ζ_x و ζ_y بیانگر نسبت میرایی روتور در راستاهای x و y، β نسبت میرایی بالانسر، $\bar{\delta}_{\mathrm{i}}$ جابجایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی و λ طول تعادل فنرهای شعاعی می‌باشد. همچنین ω_b فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی و σ نسبت سفتی معادل روتور در راستای y به راستای x است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده به‌صورت روابط (۱۴) تا (۱۷) بدست می‌آیند:

$$\ddot{\bar{x}}+\bar{m}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}\left(\ddot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}-\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\bar{\omega}\right)^2\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}-\\ \left(\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\ddot{\phi}_{\mathrm{i}}+2\dot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\bar{\omega}\right)\right)\sin\phi_{\mathrm{i}}\end{bmatrix}- (1-\bar{m})e\,\bar{\omega}^2+2\zeta_x\dot{\bar{x}}-2\bar{\omega}\dot{\bar{y}}+\left(1-\bar{\omega}^2\right)\bar{x}-2\zeta_x\bar{\omega}\bar{y}=0 \quad (۱۴)$$

$$\ddot{\bar{y}}+\bar{m}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left[\left(\ddot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}-\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\bar{\omega}\right)^2\right)\sin\phi_{\mathrm{i}}+\left(\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\ddot{\phi}_{\mathrm{i}}+2\dot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\bar{\omega}\right)\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}\right] +2\zeta_y\dot{\bar{y}}+2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}+\left(\sigma-\bar{\omega}^2\right)\bar{y}+2\zeta_y\bar{\omega}\bar{x}=0 \quad (۱۵)$$

$$\bar{m}\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\begin{bmatrix}\left(\ddot{\bar{y}}+2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}-\bar{\omega}^2\bar{y}\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}+\left(\ddot{\bar{x}}-2\bar{\omega}\dot{\bar{y}}-\bar{\omega}^2\bar{x}\right)\\ \sin\phi_{\mathrm{i}}+\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\ddot{\phi}_{\mathrm{i}}+2\dot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\bar{\omega}\right)\end{bmatrix}+ 2\bar{m}\beta\bar{\delta}_{\mathrm{i}}^2\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\eta\bar{m}q_{\mathrm{i}}\left(\phi_{\mathrm{i}}\right)=0 \quad (۱۶)$$

$$\bar{m}\begin{bmatrix}\left(\ddot{\bar{y}}+2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}-\bar{\omega}^2\bar{y}\right)\sin\phi_{\mathrm{i}}+\left(\ddot{\bar{x}}-2\bar{\omega}\dot{\bar{y}}-\bar{\omega}^2\bar{x}\right)\cos\phi_{\mathrm{i}}-\\ \bar{\delta}_{\mathrm{i}}\dot{\phi}_{\mathrm{i}}^2-2\bar{\omega}\bar{\delta}_{\mathrm{i}}\dot{\phi}_{\mathrm{i}}+\ddot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}\end{bmatrix}+ 2\bar{m}\beta\dot{\bar{\delta}}_{\mathrm{i}}+\bar{m}\left(\bar{\delta}_{\mathrm{i}}-1\right)\left(f^2-\bar{\omega}^2\right)=0 \quad (۱۷)$$

۳- استخراج پاسخ زمانی

در این بخش پاسخ ارتعاشی روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش نیمه تحلیلی مقیاس‌های چندگانه استخراج می‌گردد. در اکثر پژوهش‌های پیشین از روش عددی برای استخراج پاسخ زمانی اتوبالانسر ساچمه- فنر استفاده شده است. در مقاله حاضر با توجه به مزیت‌های روش‌های نیمه‌تحلیلی از روش مقیاس‌های چندگانه برای بررسی استخراج پاسخ دینامیکی اتوبالانسر مذکور استفاده شده است. بدین منظور پاسخ معادلات غیرخطی به

صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\tau;\varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0,T_1,...) + \varepsilon^2 x_2(T_0,T_1,...) + ... \\
\bar{y}(\tau;\varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0,T_1,...) + \varepsilon^2 y_2(T_0,T_1,...) + ... \\
\phi_i(\tau;\varepsilon) &= \phi_{i0} + \varepsilon \phi_{i1}(T_0,T_1,...) + \varepsilon^2 \phi_{i2}(T_0,T_1,...) + ... \\
\bar{\delta}_i(\tau;\varepsilon) &= \delta_{i0} + \varepsilon \delta_{i1}(T_0,T_1,...) + \varepsilon^2 \delta_{i2}(T_0,T_1,...) + ...
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

با در نظر گرفتن سه جمله از روابط (۱۸) و جایگذاری آن‌ها در معادلات (۱۴) تا (۱۷)، و از مساوی هم قرار دادن ضرایب جملات هم مرتبه از ε، دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های ε^0، ε^1 و ε^2 به ترتیب مطابق روابط (۱۹) تا (۲۱) به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases}
\left(1-\bar{\omega}^2\right)x_0 - 2\zeta_x \bar{\omega} y_0 - (1-\bar{m})e\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2 \bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\cos\phi_{i0}\right) = 0 \\
\left(\sigma-\bar{\omega}^2\right)y_0 - \bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\sin\phi_{i0}\right) + 2\zeta_y\bar{\omega}x_0 = 0 \\
\bar{\omega}^2\bar{m}\delta_{i0}\left(x_0\sin\phi_{i0} - y_0\cos\phi_{i0}\right) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \\
\bar{m}\left[\left(f^2-\bar{\omega}^2\right)\left(\delta_{i0}-1\right) - \bar{\omega}^2\left(x_0\cos\phi_{i0} + y_0\sin\phi_{i0}\right)\right] = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n
\end{cases} \tag{۱۹}$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases}
D_0^2 x_1 + 2\zeta_x D_0 x_1 + \left(1-\bar{\omega}^2\right)x_1 - 2\bar{\omega}D_0 y_1 - 2\zeta_x\bar{\omega}y_1 + \\
\bar{m}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1}\right)\cos\phi_{i0}\right. \\
\qquad \left.+\left(\delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i1} - \delta_{i0}D_0^2\phi_{i1} - 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1}\right)\sin\phi_{i0}\right] = 0 \\
\\
D_0^2 y_1 + 2\zeta_y D_0 y_1 + \left(\sigma-\bar{\omega}^2\right)y_1 + 2\bar{\omega}D_0 x_1 + 2\zeta_y\bar{\omega}x_1 + \\
\bar{m}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1}\right)sin\phi_{i0}\right. \\
\qquad \left.+\left(\delta_{i0}D_0^2\phi_{i1} - \delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i1} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1}\right)\cos\phi_{i0}\right] = 0 \\
\\
\bar{m}\left[\left(\delta_{i0}D_0^2 y_1 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0 x_1 - \delta_{i0}\bar{\omega}^2 y_1 + \right.\right. \\
\left.\bar{\omega}^2\delta_{i0}x_0\phi_{i1} - \delta_{i1}\bar{\omega}^2 y_0\phi_{i1}\right)\cos\phi_{i0} + \\
(2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0 y_1 - \delta_{i0}D_0^2 x_1 + \delta_{i0}\bar{\omega}^2 x_1 \\
\qquad \left.+\bar{\omega}^2\delta_{i0}y_0\phi_{i1} + \delta_{i1}\bar{\omega}^2 x_0\right)\sin\phi_{i0} + \delta_{i0}^2 D_0^2\phi_{i1}\Big] + \\
2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_0\phi_{i1} + 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\delta_{i1} + \eta\bar{m}q_i(\phi_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n \\
\\
\left.\begin{array}{l}
\bar{m}\left[\left(D_0^2 x_1 - \bar{\omega}^2\phi_{i1}y_0 - \bar{\omega}^2 x_1 - 2\bar{\omega}D_0 y_1\right)\cos\phi_{i0} + \right. \\
\left.(D_0^2 y_1 + \bar{\omega}^2\phi_{i1}x_0 - \bar{\omega}^2 y_1 + 2\bar{\omega}D_0 x_1)\sin\phi_{i0}\right]
\end{array}\right. \\
\qquad + 2\beta\bar{m}D_0\delta_{i1} + \bar{m}D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\phi_{i1} + \\
\bar{m}\bar{\delta}_{i1}\left(f^2-\bar{\omega}^2\right) = 0, \qquad i = 1,\ldots,n
\end{cases} \tag{۲۰}$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases}
\qquad -2\bar{\omega}\delta_{i0}D_1\phi_{i1} - \delta_{i0}\left(D_0\phi_{i1}\right)^2 - 2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\delta_{i1})\cos\phi_{i0} + \\
(\bar{\omega}^2\delta_{i1}\phi_{i1} - \phi_{i1}D_0^2\delta_{i1} - \delta_{i1}D_0^2\phi_{i1} - 2\delta_{i0}D_0D_1\phi_{i1} \\
\qquad -2D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1} - 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1} + 2\delta_{i0}\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1})\sin\phi_{i0}\Big] + \\
2D_0D_1x_1 + 2\zeta_x D_1 x_1 - 2\bar{\omega}D_1 y_1 = 0 \\
\\
D_0^2 y_2 + 2\zeta_y D_0 y_2 + \left(\sigma-\bar{\omega}^2\right)y_2 + 2\bar{\omega}D_0 x_2 + \\
2\zeta_y\bar{\omega}x_2 + \bar{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[\left(D_0^2\delta_{i2} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2\delta_{i2}\right)\sin\phi_{i0} \\
\qquad +\left(\delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i2} + \delta_{i0}D_0^2\phi_{i2} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i2}\right)\cos\phi_{i0}\Big] + \\
\bar{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[(2D_0D_1\delta_{i1} - \delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2\phi_{i1} - 2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} \\
\qquad -2\bar{\omega}\delta_{i0}D_1\phi_{i1} - \delta_{i0}\left(D_0\phi_{i1}\right)^2 - 2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\delta_{i1})\sin\phi_{i0} + \\
(\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1}\phi_{i1} + \phi_{i1}D_0^2\delta_{i1} + 2\delta_{i0}D_0D_1\phi_{i1} \\
\qquad +2D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1})\cos\phi_{i0}\Big] + \\
2D_0D_1y_1 + 2\zeta_y D_1 y_1 + 2\bar{\omega}D_1 x_1 = 0 \\
\\
\bar{m}\Big[\left(\delta_{i0}D_0^2 y_2 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0 x_2 - \delta_{i0}\bar{\omega}^2 y_2 - \right. \\
\left.\bar{\omega}^2\delta_{i0}x_0\phi_{i2} - \delta_{i2}\bar{\omega}^2 y_0\right)\cos\phi_{i0} + (2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0 y_2 - \delta_{i0}D_0^2 x_2 \\
\qquad +\delta_{i0}\bar{\omega}^2 x_2 + \bar{\omega}^2\delta_{i0}y_0\phi_{i2} + \delta_{i2}\bar{\omega}^2 x_0\Big)\sin\phi_{i0} + \delta_{i0}^2 D_0^2\phi_{i2}\Big] + \\
2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_0\phi_{i2} + 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\delta_{i2} \\
\qquad +\bar{m}\Big[\left(\delta_{i1}D_0^2 y_1 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_1 x_1 - \delta_{i1}\bar{\omega}^2 y_1 + \right. \\
\bar{\omega}^2 x_0\delta_{i1}\phi_{i1} + \bar{\omega}^2\phi_{i1}\delta_{i0}x_1 + 2\delta_{i0}\phi_{i1}\bar{\omega}D_0 y_1 - \phi_{i1}\delta_{i0}D_0^2 x_1 \\
\qquad +2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0 x_1 + 2\delta_{i0}D_0D_1 y_1\Big)\cos\phi_{i0} - (\delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2 y_1 - \\
\bar{\omega}^2\phi_{i1}\delta_{i0}y_1 - 2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0 y_1 + \delta_{i1}D_0^2 x_1 - \bar{\omega}^2 y_0\delta_{i1}\phi_{i1} \\
\qquad +2\bar{\omega}\phi_{i1}\delta_{i0}D_0 x_1 - \bar{\omega}^2\delta_{i1}x_1 - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_1 y_1 \begin{array}{l}+2\delta_{i0}D_0D_1x_1)\sin\phi_{i0} \\ +2\delta_{i0}\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1}\end{array}\Big] + \\
\eta\bar{m}q_i(\phi_i) + 2\bar{m}\delta_{i0}^2 D_0D_1\phi_{i1} \\
\qquad +4\beta\delta_{i0}\delta_{i1}\bar{m}D_0\phi_{i1} + 2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_1\phi_{i1} + 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_1\delta_{i1} + \\
2\bar{m}\delta_{i0}D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1} + 2\bar{m}\bar{\omega}\delta_{i1}D_0\delta_{i1} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n \\
\\
\bar{m}\Big[\left(D_0^2 x_2 + \bar{\omega}^2 y_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2 x_2 - 2\bar{\omega}D_0 y_2\right)\cos\phi_{i0} \\
+(\bar{\omega}^2 x_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2 y_2 + 2\bar{\omega}D_0 x_2 + D_0^2 y_2)\sin\phi_{i0}\Big] \\
\qquad +2\beta\bar{m}D_0\delta_{i2} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\phi_{i2} + \bar{m}\bar{\delta}_{i2}\left(f^2-\bar{\omega}^2\right) \\
+\bar{m}D_0^2\delta_{i2} + \bar{m}\Big[(2D_0D_1x_1 - \bar{\omega}^2\phi_{i1}y_1 + \phi_{i1}D_0^2 y_1 \\
\qquad +2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0 x_1 - 2\bar{\omega}D_1 y_1)\cos\phi_{i0} + \\
(2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0 y_1 + \bar{\omega}^2\phi_{i1}x_1 + 2D_0D_1y_1 - \phi_{i1}D_0^2 x_1 + 2\bar{\omega}D_1 x_1)\sin\phi_{i0}\Big] \\
\qquad +2\beta\bar{m}D_1\delta_{i1} + 2\bar{m}D_0D_1\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_1\phi_{i1} \\
-2\bar{m}\bar{\omega}\delta_{i1}D_0\phi_{i1} - \bar{m}\delta_{i0}\left(D_0\phi_{i1}\right)^2 = 0, \qquad i = 1,\ldots,n
\end{cases} \tag{۲۱}$$

در معادلات (۱۹) نقاط x_0، y_0، ϕ_{i0} و δ_{i0} نشانگر نقطه تعادل سیستم بوده و مقدار آن‌ها ثابت و مشتق آن‌ها برابر صفر است. پس از استخراج جملات هم‌مرتبه از ε برای بدست آوردن نقاط تعادل سیستم با بیان x_0 و y_0 به صورت قطبی $x_0 = r_0\cos\theta_0$ و $y_0 = r_0\sin\theta_0$ که r_0 نشانگر دامنه ارتعاشات روتور در حالت

پایا می‌باشد، و با جایگذاری آن‌ها در روابط (۱۹)، روابط (۲۲) تا (۲۵) بدست می‌آید:

$$\left(1-\bar{\omega}^2\right)r_0\cos\theta_0-2\zeta_x\bar{\omega}r_0\sin\theta_0-\left(1-\bar{m}\right)e\bar{\omega}^2-\bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\cos\phi_{i0}\right)=0 \tag{۲۲}$$

$$\left(\sigma-\bar{\omega}^2\right)r_0\sin\theta_0+2\zeta_y\bar{\omega}r_0\cos\theta_0-\bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\sin\phi_{i0}\right)=0 \tag{۲۳}$$

$$\bar{\omega}^2\bar{m}\delta_{i0}r_0\sin\left(\phi_{i0}-\theta_0\right)=0 \tag{۲۴}$$

$$\bar{m}\left[\left(f^2-\bar{\omega}^2\right)\left(\delta_{i0}-1\right)-\bar{\omega}^2r_0\cos\left(\phi_{i0}-\theta_0\right)\right]=0 \tag{۲۵}$$

براساس معادلات به‌دست آمده از روابط (۲۲) تا (۲۵) می‌توان وضعیت‌های تعادل سیستم را برای دو مقدار $r_0=0$ و $r_0\neq 0$ استخراج کرد. با توجه به اهمیت حالت بالانس، در این‌جا فقط وضعیت بالانس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت بالانس، معادلات (۲۲) تا (۲۵) سه معادله (۲۶) تا (۲۸) حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\cos\phi_{i0}\right)+\frac{\left(1-\bar{m}\right)e}{\bar{m}}=0 \tag{۲۶}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\phi_{i0}=0 \tag{۲۷}$$

$$\delta_{i0}=1 \tag{۲۸}$$

با در نظر گرفتن دو ساچمه، و با توجه به همگن بودن معادلات (۲۰)، پاسخ معادلات مذکور به صورت نمایی و مطابق روابط (۲۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1&=c_1e^{\lambda T_0}\check{\mathbf{z}} & y_1&=c_2e^{\lambda T_0}\\ \phi_{11}&=c_3e^{\lambda T_0} & \phi_{21}&=c_4e^{\lambda T_0}\\ \delta_{11}&=c_5e^{\lambda T_0} & \delta_{21}&=c_6e^{\lambda T_0}\end{aligned} \tag{۲۹}$$

که با جایگذاری در معادلات داریم:

$$\left[\mathbf{A}\right]_{6\times 6}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\c_6\end{Bmatrix}=0 \tag{۳۰}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی است که جهت رعایت اختصار، از آوردن آن خودداری شده است. شرط وجود جواب غیربدیهی برای c_i ها در دستگاه معادلات (۳۰)، صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب می‌باشد. به این ترتیب پاسخ زمانی سیستم روتور و اتوبالانسر با دو ساچمه را می‌توان به صورت رابطه (۳۱) در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} x_1&=C_1\left(T_1\right)c_{1j}e^{\lambda_jT_0}+cc\,\check{\mathbf{z}} & y_1&=C_2\left(T_1\right)c_{2j}e^{\lambda_jT_0}+cc\\ \phi_{11}&=C_3\left(T_1\right)c_{3j}e^{\lambda_jT_0}+cc & \phi_{21}&=C_4\left(T_1\right)c_{4j}e^{\lambda_jT_0}+cc\\ \delta_{11}&=C_5\left(T_1\right)c_{5j}e^{\lambda_jT_0}+cc & \delta_{21}&=C_6\left(T_1\right)c_{6j}e^{\lambda_jT_0}+cc\end{aligned} \tag{۳۱}$$

که در آن $j=1,2,\ldots,6$ ، λ_j و c_{ij} به ترتیب مقادیر و المان‌های بردارهای ویژه سیستم است که از ماتریس $\mathbf{A}$ به دست آمده‌اند. برای استخراج پاسخ سیستم لازم است $C_i\left(T_1\right)$ها استخراج گردد. جمله دوم پاسخ، به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{z}}_2&=b_{1j}e^{\lambda_jT_0}+cc & y_2&=b_{2j}e^{\lambda_jT_0}+cc\\ \phi_{12}&=b_{3j}e^{\lambda_jT_0}+cc & \phi_{22}&=b_{4j}e^{\lambda_jT_0}+cc\\ \delta_{12}&=b_{5j}e^{\lambda_jT_0}+cc & \delta_{22}&=b_{6j}e^{\lambda_jT_0}+cc\end{aligned} \tag{۳۲}$$

با جایگذاری معادلات (۳۱) و (۳۲) در معادلات مربوط به ضرایب ε^2 و انجام عملیات مفصل ریاضی مشخص می‌شود که $\frac{dC_i\left(T_1\right)}{dT_1}=0$. که به دلیل مفصل بودن روابط از آوردن آن‌ها خودداری شده است. پس برای به دست آوردن جواب نهایی لازم است ثابت C_i با اعمال شرایط اولیه محاسبه شود. بدین منظور با در نظر گرفتن دو جمله اول از روابط (۱۸) و در $t=0$ داریم:

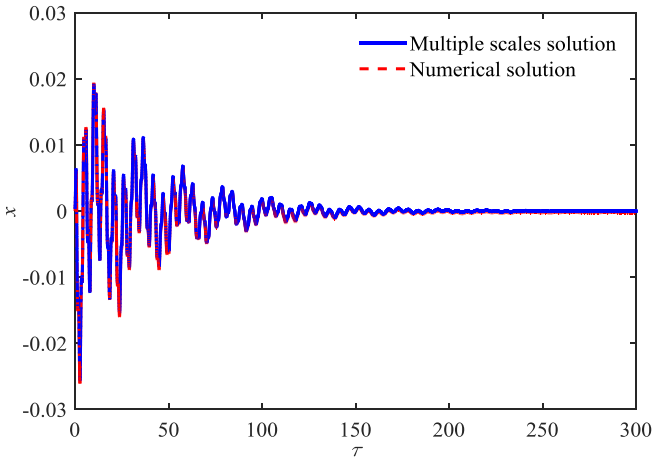
$$\varepsilon\mathbf{C}=\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{X}\left(0\right)-\mathbf{X}_0\right) \tag{۳۳}$$

که در آن $\mathbf{B}$ ماتریسی بر حسب λ_i و c_{ij} است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}\\\mathbf{N}\end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

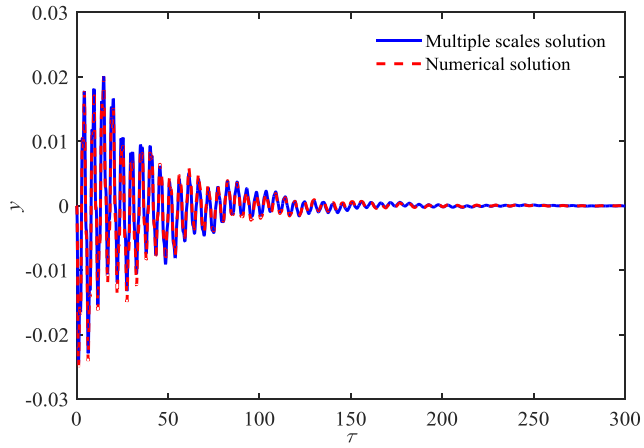
که $M_{ij}=c_{ij}$ و $N_{ij}=\lambda_ic_{ij}$ می‌باشد. بدین ترتیب ثوابت C_i به دست می‌آیند، و در نهایت پاسخ سیستم استخراج می‌گردد. با استفاده از روش توضیح داده شده در این بخش پاسخ ارتعاشی سیستم با در نظر گرفتن دو جمله از رابطه (۱۸) به دست آمد. به منظور اطمینان از دقت روش حل نیمه‌تحلیلی و برای صحه‌سنجی نتایج، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به روش رانگ- کوتا نیز استخراج شد. شکل ۲ و ۳ به ترتیب مولفه x و y پاسخ زمانی ارتعاش روتور نابالانس را به ازای پارامترهای ارائه شده در جدول ۱ نشان می‌دهد. همان‌طور از این شکل‌ها مشاهده می‌شود، پاسخ بدست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه انطباق مناسبی با پاسخ به دست آمده از روش رانگ کوتا دارد.

بعد از اطمینان از صحت نتایج حاصل از روش مقیاس‌های



شکل ۲: مقایسه پاسخ‌های زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر استخراج شده با روش تحلیلی مورد استفاده در این مقاله با روش عددی به ازای پارامترهای $\bar{m}=$ ۰/۰۲، $\zeta_x=$ ۰/۰۱، $\zeta_y=$ ۰/۰۵، $e=$ ۰/۰۱، $\beta=$ ۰/۱، $\sigma=$ ۵، $\bar{\omega}=$ ۳، $\eta=$ ۰/۰۰۴ و $f=$ ۴

Fig. 2: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB extracted by the analytical method and the numerical method for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\sigma=5$, $\bar{\omega}=3$, $\eta=0.004$ and $f=4$



شکل ۳: مقایسه پاسخ‌های زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر استخراج شده با روش تحلیلی مورد استفاده در این مقاله با روش عددی به ازای پارامترهای $\bar{m}=$ ۰/۰۲، $\zeta_x=$ ۰/۰۱، $\zeta_y=$ ۰/۰۵، $e=$ ۰/۰۱، $\beta=$ ۰/۱، $\sigma=$ ۵، $\bar{\omega}=$ ۳، $\eta=$ ۰/۰۰۴ و $f=$ ۴

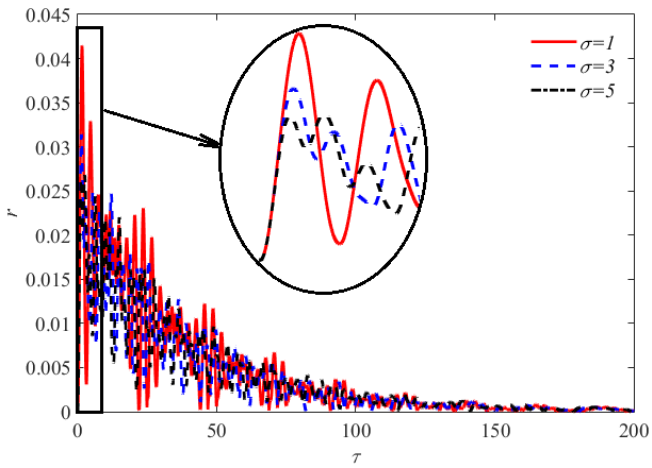
Fig.3: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB extracted by the analytical method and the numerical method for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\sigma=5$, $\bar{\omega}=3$, $\eta=0.004$ and $f=4$

چندگانه، در ادامه به بررسی تاثیر پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها بر روی پاسخ ارتعاشی سیستم پرداخته می‌شود. همانطور که از شکل ۴ مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای افزایش ناهمگنی

جدول ۱: مقادیر پارامترهای سیستم [22]

Table1: Values of the system parameters [22]

پارامتر	اندازه
$\bar{m}$	۰/۰۲
ζ_x	۰/۰۱
ζ_y	۰/۰۵
e	۰/۰۱
β	۰/۱
σ	۵
$\bar{\omega}$	۳
f	۴



شکل ۴: پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناهمگنی‌های مختلف یاتاقان به ازای پارامترهای $\bar{m}=$ ۰/۰۲، $\zeta_x=$ ۰/۰۱، $\zeta_y=$ ۰/۰۵، $e=$ ۰/۰۱، $\beta=$ ۰/۱، $\bar{\omega}=$ ۳، $\eta=$ ۰/۰۰۴ و $f=$ ۴

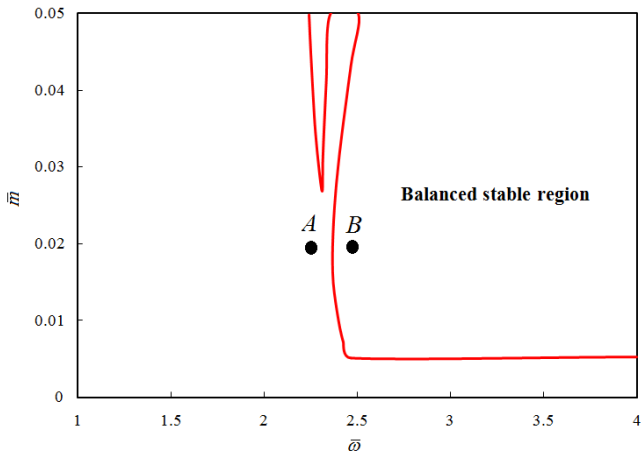
Fig. 4: Vibration response of the rotor with ball-spring AB for three different values of anisotropic parameters for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\bar{\omega}=3$, $\eta=0.004$ and $f=4$

یاتاقان‌ها باز قادر به بالانس روتور است. همانطور که در قسمت بزرگنمایی شده مشاهده می‌شود، مطابق انتظار با افزایش سفتی در راستای y دامنه کاهش پیدا می‌کند. عملکرد اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به نابالانسی متغیر به این طریق است که در اثر ایجاد نابالانسی ساچمه‌ها در اثر نیروی مماسی و شعاعی ناشی از نیروی گریز از مرکز در دورهای بالای دور بحرانی اول در خلاف جهت نابالانسی حرکت کرده و با رسیدن به موقعیت تعادل خود، باعث رفع نابالانسی و ارتعاشات می‌گردد.

۴- بررسی پایداری سیستم

برای بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی حول نقاط تعادل سیستم با معادلات پیچیده همانند سیستم غیرخطی مورد مطالعه، غالباً از خطی‌سازی معادلات حول نقاط تعادل استفاده می‌شود. بنابراین در این مقاله با در نظر گرفتن دو جمله از بسط روش مقیاس‌های چندگانه، معادلات غیرخطی حول نقاط تعادل سیستم خطی‌سازی شده و ماتریس $\mathbf{A}$ به دست آمده است. سپس دترمینان ماتریس $\mathbf{A}$ استخراج و با صفر قرار دادن آن معادله مشخصه سیستم به دست می‌آید. به این ترتیب با حل معادله مشخصه λها به دست می‌آید. هنگامی‌که همه λها دارای قسمت حقیقی منفی باشند، سیستم به صورت مجانبی پایدار است. اگر حداقل یکی از λها دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است. پس با استفاده از ماتریس $\mathbf{A}$ ناحیه بالانس پایدار برای سیستم قابل استخراج است. با توجه به اینکه نواحی پایدار بر حسب تمامی پارامترها را نمی‌توان در یک نمودار واحد نشان داد لذا نواحی پایدار برای دو به دوی پارامتر رسم می‌شود.

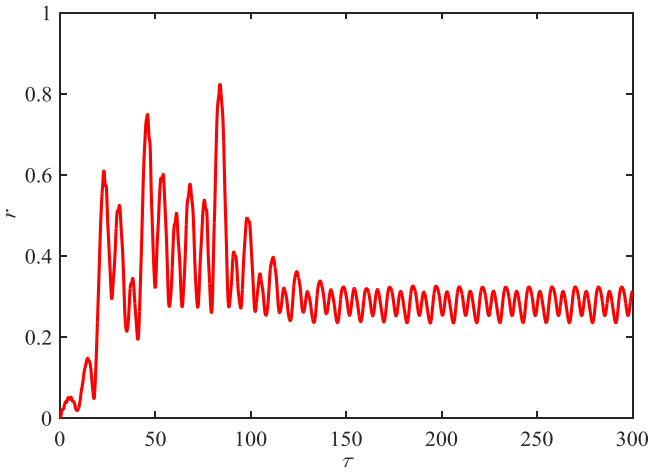
در شکل ۵ نواحی پایدار روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر بر حسب پارامترهای $\bar{m}$ و $\bar{\omega}$ به ازای $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $e=۰/۰۱$، $\beta=۰/۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۵ مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای محدوده خاصی از پارامترها قادر است روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرهمگن را بالانس کند.



شکل ۵: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر: تغییرات $\bar{m}$ در مقابل $\bar{\omega}$ به ازای $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $e=۰/۰۱$، $\beta=۰/۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

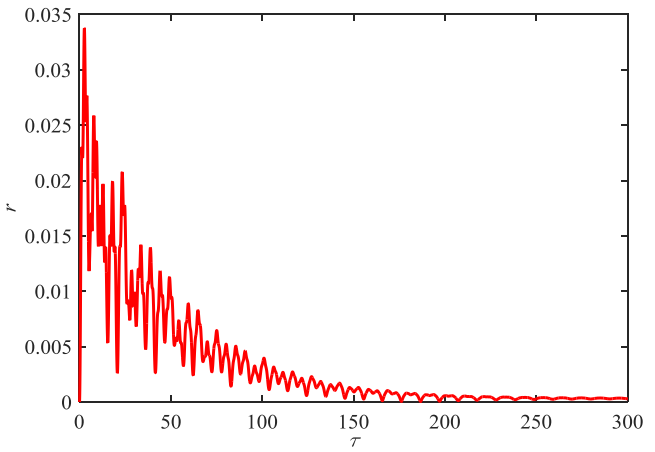
Fig.5:Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of $\bar{m}$ versus $\bar{\omega}$ for $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\eta=0.004$, $\sigma=5$ and $f=4$.

به منظور صحه‌سنجی نتایج پایداری، در ادامه پاسخ‌های زمانی مربوط به روتور مجهز به اتوبالانسر جدید به ازای $\bar{m}=۰/۰۲$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $e=۰/۰۱$، $\beta=۰/۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$، و در دو حالت الف) $\bar{\omega}=۲/۳$ ب) $\bar{\omega}=۲/۵$ به دست آمده است. دو حالت اخیر در شکل ۵ به ترتیب توسط نقاط A و B مشخص شده است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود در حالت (الف) اتوبالانسر



شکل ۶: پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای $\bar{\omega}=۲/۳$

Fig. 6: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB for $\bar{\omega}=2.3$



شکل ۷: پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای $\bar{\omega}=۲/۵$

Fig.7: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB for $\bar{\omega}=2.5$

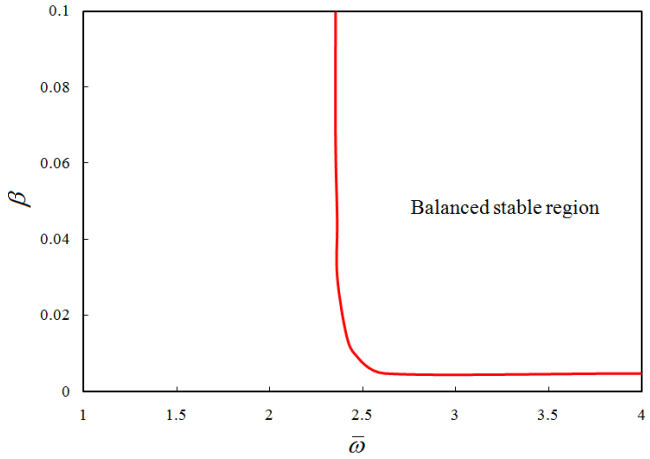
قادر به بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن نبوده‌اند ولی در حالت (ب) اتوبالانسر جدید قادر به بالانس سیستم است. در شکل‌های ۶ و ۷ پاسخ‌های زمانی متناظر با دو حالت ذکر شده رسم شده است. بررسی پاسخ‌های زمانی، صحت نتایج بدست آمده در شکل ۵ را تایید می‌کند.

بعد از اطمینان از نتایج پایداری، ناحیه بالانس پایدار به ازای سایر پارامترها بی‌بعد سیستم استخراج گردید. همانطور که در شکل‌های ۸ تا ۱۰ مشاهده می‌شود اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای محدوده خاصی از پارامترها قادر به بالانس روتور است. شکل ۸ محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر بر حسب نسبت میرایی بالانسر و سرعت دورانی بی‌بعد روتور را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود اولاً به ازای دورهای بالاتر از دور بحرانی اول، اتوبالانسر قادر است روتور را بالانس نماید، ثانیاً به ازای $\beta=۰$ یعنی حالتی که نیروی ناشی از میرائی ویسکوز به ساچمه وارد نمی‌شود اتوبالانسر توانایی بالانس سیستم را ندارد.

در شکل ۱۰ نواحی بالانس پایدار سیستم بر حسب پارامترهای e و $\bar{\omega}$ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای جرم مشخصی از ساچمه‌ها قادر است روتور با مقدار ماکزیمم نابالانسی مشخصی را بالانس کند.

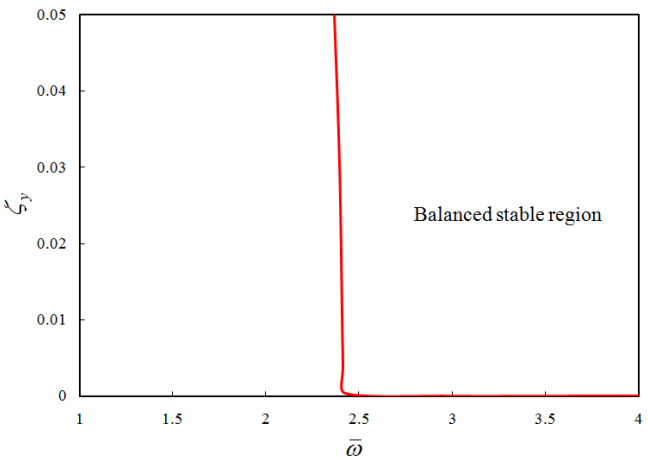
در این قسمت به بررسی تاثیر پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها بر ناحیه بالانس پایدار سیستم پرداخته می‌شود. در شکل ۱۱ ناحیه بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای سه مقدار مختلف σ آورده شده است. همانطورکه از این شکل مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها ناحیه بالانس پایدار سیستم کاهش می‌یابد. این امر اهمیت در نظر گرفتن ناهمگنی یاتاقان‌ها در بررسی رفتار روتور مجهز به اتوبالانسر جدید را نشان می‌دهد. برای مثال، در حالت ایده‌آل، یاتاقان همگن، ممکن است نتایج در محدوده خاصی از پارامترهای سیستم حاکی از توانایی اتوبالانسر ساچمه- فنر برای بالانس روتور باشد در حالی‌که با در نظر گرفتن حالت واقع‌بینانه، یعنی یاتاقان‌های غیرهمگن، اتوبالانسر ساچمه- فنر قادر به بالانس سیستم نباشد.

همچنین در ادامه به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری سیستم بر حسب تابع زمان پرداخته می‌شود. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ تراجکتوری فاز- زمان و صفحه فاز در دو راستای x و y آورده شده است. در شکل‌های ۱۲-الف و ۱۲-ب تراجکتوری فاز- زمان به ازای دو سرعت زاویه‌ای $\omega=۲/۸$ و $\omega=۲/۳$ در راستای x رسم شده است. همانطور که از شکل۱۲ -الف مشاهده می‌شود در $\omega=۲/۸$ دامنه ارتعاشی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر بعد از مدتی به صفر میل می‌کند ولی در $\omega=۲/۳$ دامنه ارتعاشی سیستم مذکور صفر نمی‌شود (شکل ۱۲-ب). همچنین در شکل‌های ۱۲-ج و ۱۲-د صفحه فاز رسم شده است. همانطور که در این شکل‌ها مشاهده



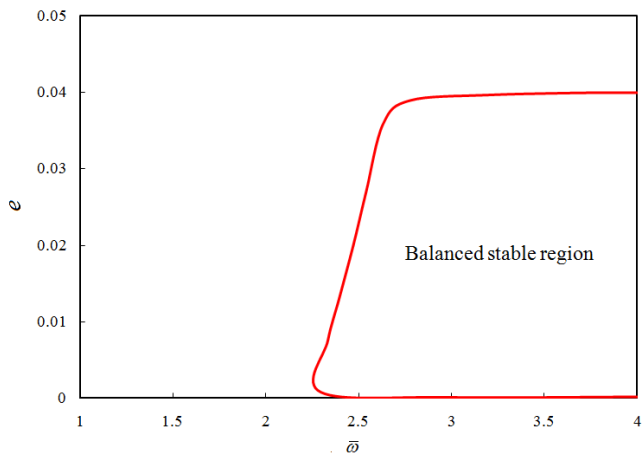
شکل ۸: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر: تغییرات β در مقابل $\bar{\omega}$ به ازای $\bar{m}=۰/۰۲$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $e=۰/۰۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig.8: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of β versus $\bar{\omega}$ for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\eta=0.004$, $\sigma=5$ and $f=4$



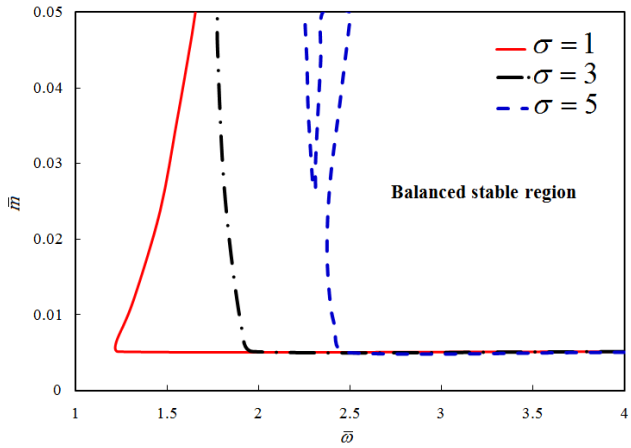
شکل ۹: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر: تغییرات ζ_y در مقابل $\bar{\omega}$ به ازای $\bar{m}=۰/۰۲$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $e=۰/۰۱$، $\beta=۰/۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig.9: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of ζ_y versus $\bar{\omega}$ for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\eta=0.004$, $\sigma=5$ and $f=4$



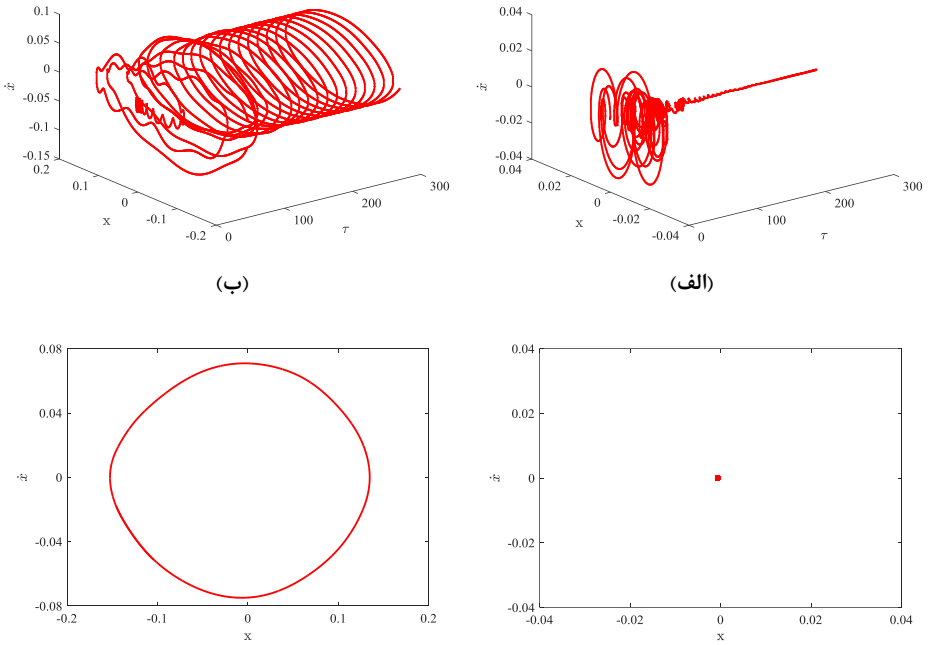
شکل ۱۰: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر: تغییرات e در مقابل ϖ به ازای $\bar{m}=۰/۰۲$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $\beta=۰/۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig. 10: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of e versus ϖ for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $\beta=0.1$, $\eta=0.004$, $\sigma=5$ and $f=4$



شکل ۱۱: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناهمگنی‌های مختلف یاتاقان: تغییرات $\bar{m}$ در مقابل ϖ به ازای $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $e=۰/۰۱$، $\beta=۰/۱$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig. 11: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB for three different values of anisotropic parameter for $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\eta=0.004$ and $f=4$

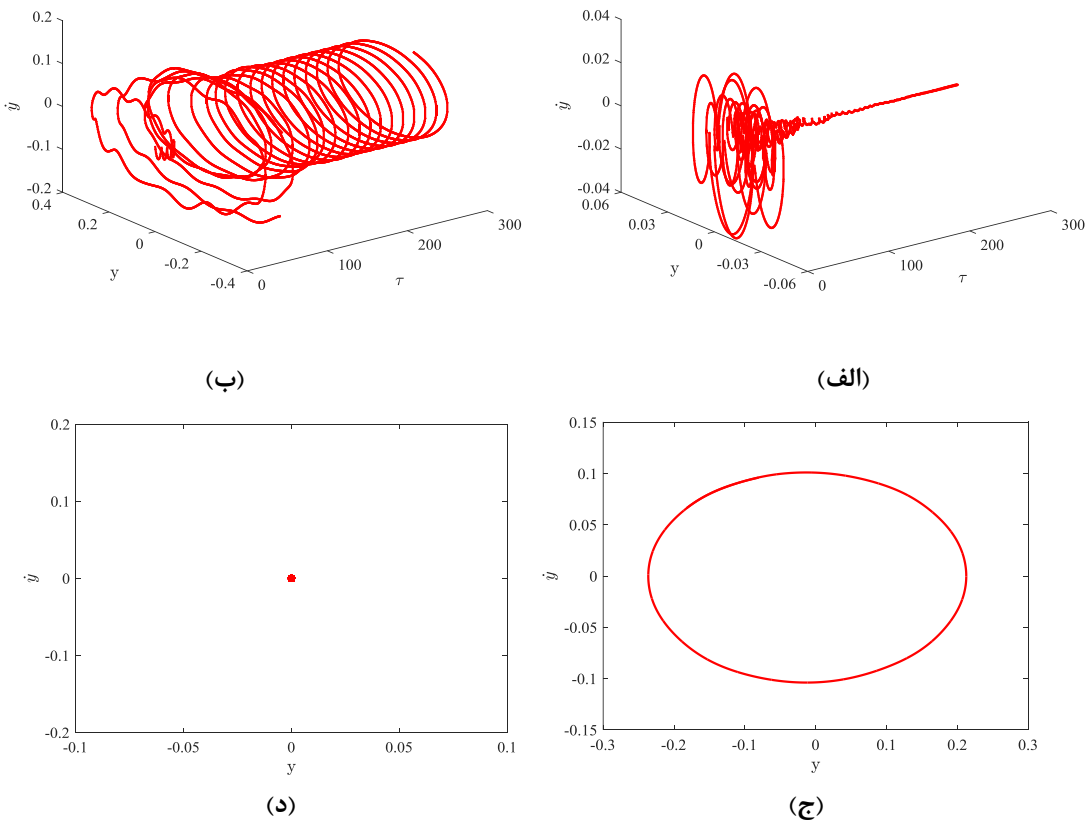


شکل ۱۲: تراجکتوری فاز- زمان و صفحه فاز برای روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در راستای x به ازای $\bar{m}=۰/۰۱$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $\beta=۰/۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig. 12: Phase-time trajectories and phase planes for the rotor with ball- spring AB for x direction for $\bar{m}=0.01$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\sigma=5$, $\eta=0.004$ and $f=4$

می‌شود به ازای $\omega=۲/۸$ دامنه نوسانات نهایتاً به مقدار صفر میل می‌کند (شکل ۱۲-ج) در حالیکه به ازای $\omega=۲/۳$ دامنه نوسانات نهایتاً به یک مسیر بسته تبدیل می‌شود (شکل ۱۲-د).

در شکل‌های ۱۳-الف و ۱۳-ب تراجکتوری فاز- زمان به ازای دو سرعت زاویه‌ای $\omega=۲/۸$ و $\omega=۲/۳$ در راستای y رسم شده است. همانطور که از شکل‌ها مشاهده می‌شود سیستم رفتاری



شکل ۱۳: تراجکتوری فاز- زمان و صفحه فاز برای روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در راستای y به ازای $\bar{m}=۰/۰۱$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $\beta=۰/۱$، $e=۰/۰۱$، $\sigma=۵$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

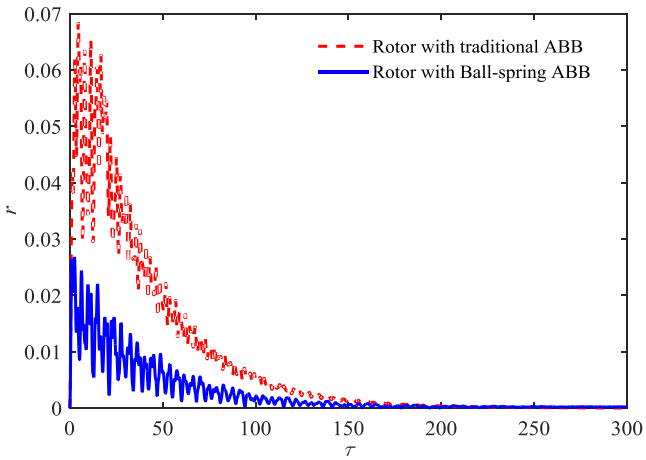
Fig. 13: Phase-time trajectories and phase planes for the rotor with ball- spring AB for y direction for $\bar{m}=0.01$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\sigma=5$, $\eta=0.004$ and $f=4$.

مشابه رفتار در راستای x را دارد. بنابراین در سرعت $\omega=۲/۳$ اتوبالانسر قادر به بالانس روتور نبوده ولی در $\omega=۲/۸$ سیستم بالانس می‌شود. نتیجه حاصل از بررسی پایداری در صفحه فاز تایید کننده نتیجه پایداری حاصل از روش لیاپانوف است.

۵- مقایسه نتایج اتوبالانسر ساچمه- فنر با اتوبالانسر متداول

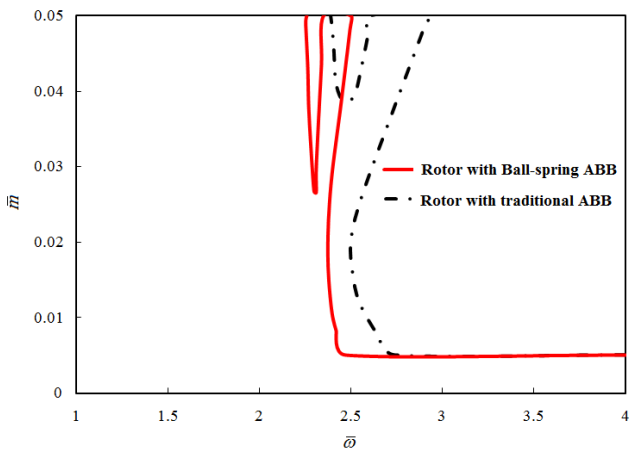
در این بخش برای نشان دادن اینکه مزیت‌های ادعایی اتوبالانسر جدید در حالت یاتاقان غیرهمگن همچنان پابرجاست، نتایج مربوط به روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه-فنر با روتور مجهز به اتوبالانسر متداول مقایسه شده است. شکل ۱۴ پاسخ زمانی روتور در دو حالت نشان می‌دهد: الف- روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر ب- روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر متداول. همان‌طور که از شکل ۱۴ مشاهده می‌شود پاسخ ارتعاشی در سیستم مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناحیه گذرا نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول کاهش یافته است، یعنی یاتاقان‌های غیرهمگن خللی بر اولین مزیت اتوبالانسر ساچمه- فنر یعنی کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا وارد نمی‌کند. این مزیت ناشی از فنرهای محیطی در اتوبالانسر ساچمه- فنر می‌باشد. به‌طوری‌که در ناحیه گذرا وجود این فنرها سبب جلوگیری از همگرایی ساچمه‌ها به طرف نابالانسی شده و مانع افزایش دامنه سیستم در ناحیه گذرا می‌شوند.

همچنین برای بررسی دومین مزیت ادعایی برای اتوبالانسر ساچمه- فنر یعنی وسیع‌تر شدن ناحیه بالانس پایدار، این ناحیه برای روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر و روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر متداول به ازای شرایط یکسان در شکل ۱۵ آورده شده است. همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود، محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول بیشتر است.



شکل ۱۴: مقایسه پاسخ‌های زمانی روتور مجهز به اتوبالانسرساچمه- فنر با روتور مجهز به اتوبالانسر متداول به ازای پارامترهای $\bar{m}=۰/۰۲$، $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $\beta=۰/۱$، $e=۰/۰۱$، $\sigma=۵$، $\bar{\omega}=۳$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig. 14: The time response of a rotor equipped with ABB for $\bar{m}=0.02$, $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\sigma=5$, $\bar{\omega}=3$, $\eta=0.004$ and $f=4$



شکل ۱۵: مقایسه محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر متداول: تغییرات $\bar{m}$ در مقابل $\bar{\omega}$ به ازای $\zeta_x=۰/۰۱$، $\zeta_y=۰/۰۵$، $\beta=۰/۱$، $e=۰/۰۱$، $\eta=۰/۰۰۴$ و $f=۴$

Fig. 15: Balanced stable region of the rotor with ABB: variation of $\bar{m}$ versus $\bar{\omega}$ for $\zeta_x=0.01$, $\zeta_y=0.05$, $e=0.01$, $\beta=0.1$, $\eta=0.004$ and $f=4$.

این موضوع نشان می‌دهد که اتوبالانسر ساچمه- فنر توانایی بالانس روتور با محدوده وسیع‌تری از پارامترهای سیستم را دارد.

دلیل وسیع بودن ناحیه بالانس پایدار اتوبالانسر ساچمه- فنر ناشی از فنرهای شعاعی می‌باشد. در اتوبالانسر نوع جدید برخلاف نوع متداول که ساچمه‌ها مقید به حرکت در مسیر دایره‌ای شکل هستند، ساچمه‌ها به دلیل متصل بودن به فنرهای شعاعی آزادی عمل بیشتری داشته که سبب افزایش ناحیه بالانس پایدار سیستم می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

یاتاقان‌ها یکی از اجزای تاثیرگذار بر رفتار دینامیکی سیستم‌های دوار هستند. عوامل متعددی باعث ایجاد غیرهمگنی در یاتاقان‌ها می‌شوند. در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر مورد بررسی قرار گرفت. معادلات غیرخطی سیستم با استفاده از روش لاگرانژ استخراج و با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌های چندگانه ناحیه بالانس پایدار و پاسخ ارتعاشی سیستم استخراج گردید. اهم نتایج تحقیق حاضر به شرح زیر می‌باشد:

۱- مقایسه نتایج حاصل از روش تحلیلی و روش عددی حاکی از دقت مطلوب روش مورد استفاده است.

۲- اتوبالانسر ساچمه- فنر قادر است روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن را در محدوده خاصی از پارامترهای سیستم، بالانس کند.

۳- ناحیه بالانس سیستم با افزایش پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها کاهش پیدا می‌کند.

۴- مقایسه پاسخ زمانی و ناحیه بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با پاسخ زمانی و ناحیه بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر متداول نشان داد که وجود اثر غیرهمگنی در یاتاقان‌ها خللی در دو مزیت ادعایی اتوبالانسر ساچمه- فنر، کاهش دامنه در ناحیه گذرا و افزایش ناحیه بالانس، ایجاد نمی‌کند.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

C مرکز هندسی روتور

e خروج از مرکزی بی‌بعد

G مرکز جرم روتور

J ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم، $kg.m^2$

k_p سفتی فنرهای محیطی، N/m^2

k_r سفتی فنرهای شعاعی، N/m^2

k_x سفتی معادل روتور در راستای x، N/m^2

k_y سفتی معادل روتور در راستای y، N/m^2

m_d جرم روتور، kg

m_b جرم هر یک از ساچمه‌ها، kg

$\bar{m}$ جرم بی‌بعد ساچمه‌ها

n تعداد ساچمه‌ها

علائم یونانی

β نسبت میرایی بالانسر

$\bar{\delta}_i$ جابجایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی

σ نسبت سفتی معادل روتور در راستای y به راستای x

$\bar{\omega}$ فرکانس بی‌بعد سیستم

ω_b فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی، rad/s

ζ_x نسبت میرایی روتور در راستای x

ζ_x نسبت میرایی روتور در راستای y

مراجع

[1] Y. Ishida, Recent development of the passive vibration control method, Mechanical Systems and Signal Processing, 29 (2012) 2-18.

[2] W. Kim, J. Chung, Performance of automatic ball balancers on optical disc drives, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 216(11) (2002) 1071-1080.

[3] P.C. Chao, C.-K. Sung, C.-C. Wang, Dynamic analysis of the optical disk drives equipped with an automatic ball balancer with consideration of torsional motions, Journal of applied mechanics, 72(6) (2005) 826-842.

[4] P.C.-P. Chao, C.-K. Sung, H.-C. Leu, Effects of rolling friction of the balancing balls on the automatic ball balancer for optical disk drives, Journal of Tribology, 127(4) (2005) 845-856.

[5] C. Rajalingham, S. Rakheja, Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers, Journal of Sound and Vibration, 217(3) (1998) 453-466.

[6] Thearle E. L, Automatic Dynamic Balancers, Machine Design, 22 (1950) 119-124.

[7] Y. Jinnouchi, Y. Araki, J. Inoue, Y. Ohtsuka, C. Tan, Automatic balancer (static balancing and transient response of a multi-ball balancer), Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., Ser. C, 59(557) (1993) 79-84.

[8] J. Chung, D. Ro, Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms, Journal of Sound and vibration, 228(5) (1999) 1035-1056.

[9] J. Chung, I. Jang, Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor, Journal of Sound and Vibration, 259(1) (2003) 31-43.

[10] C.-J. Lu, M.-C. Wang, S.-H. Huang, Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer, Mechanical Systems and Signal Processing, 23(3) (2009) 884-896.

[11] C.-J. Lu, C.-H. Hung, Stability analysis of a three-ball automatic balancer, Journal of Vibration and Acoustics, 130(5) (2008) 051008.

[12] J. Ehyaei, M.M. Moghaddam, Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with n automatic ball-balancers, Journal of Sound and Vibration, 321(3) (2009) 554-571.

[13] T. Chan, C. Sung, P.C. Chao, Non-linear suspension of an automatic ball balancer, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(2) (2011) 415-424.

[14] C. Sung, T. Chan, C. Chao, C. Lu, Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer, Mechanism and Machine Theory, 69 (2013) 115-126.

[15] B. Bykov, Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 77(4) (2013) 369-379.

[16] M. Rezaee, R. Fathi, The effect of damping ratio and balls mass on the stability of automatic ball balancer and determining their optimum values, 14(3) (2014) 110-118 (in Persian).

[17] M. Rezaee, R. Fathi, A.M. Alizadeh Fard, Investigating the stability of automatic ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the Nelder-Mead simplex algorithm,

Modares Mechanical Engineering, 14(14) (2015) 155-166 (in Persian).

[18] M. Rezaee, R. Fathi, Dynamic analysis of an automatic double-race ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the genetic algorithm, Journal of Mechanical Engineering, 46(3) (2016)129-137 (in Persian).

[19] T. Majewski, D. Szwedowicz, M.A.M. Melo, Self-balancing system of the disk on an elastic shaft, Journal of Sound and Vibration, 359 (2015) 2-20.

[20] D. Jung, H. DeSmidt, Limit-Cycle Analysis of Planar Rotor/Autobalancer System Influenced by Alford's Force, Journal of Vibration and Acoustics, 138(2) (2016) 021018.

[21] D. Jung, H. DeSmidt, Limit-Cycle Analysis of Three-Dimensional Flexible Shaft/Rigid Rotor/Autobalancer System With Symmetric Rigid Supports, Journal of Vibration and Acoustics, 138(3) (2016) 031005.

[22] M. Rezaee, R. Fathi, Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism, Journal of Sound and Vibration, 358 (2015) 375-391.