نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۸، سال ۱۳۹۹، صفحات ۲۰۴۵ تا ۲۰۶۲
DOI: 10.22060/mej.2019.14773.5936

مدل سازی رفتار مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی

غلامحسین رحیمی*، محمد مهدی معماریان، یاور عنانی ، شهرام حسینی چالشتری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

خلاصه: در این مقاله رفتار لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی با تغییر شکل‌های بزرگ و تحت بارگذاری خمشی و با فرض ماده هایپرالاستیک تراکم‌ناپذیر مدل سازی شده است. برای مدل کردن رفتار غیر خطی ماده از تئوری هایپرالاستیسیته و توابع انرژی کرنشی که تابعی از نامتغیرهای تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین هستند، استفاده می‌شود. برای اینکه بتوان توابع انرژی موجود را برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به کار برد، باید در آنها تغییراتی صورت گیرد. بنابراین برای تصحیح کردن ثوابت مربوط به توابع انرژی ذکر شده، با توجه به ناهمگن بودن ماده مدرج تابعی، این ثابت‌ها به صورت توانی و در راستای شعاع انحناء پس از خمش، فرض شده است. برای مدل سازی از تابع انرژی مونی–ریولین تعمیم یافته استفاده شده است. از مهمترین نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر می‌توان به، فرض توانی بودن ثابت‌های تابع انرژی کرنشی جهت مدل‌سازی رفتار ماده در روش تحلیلی، که این فرض رفتار ماده را به خوبی مدل کرده است، اشاره کرد. همچنین مدل سازی ماده مدرج تابعی غیر همگن به صورت لایه لایه‌ای در نرم افزار اجزاء محدود مدل شده است، که این روش نیز به خوبی رفتار ماده را توصیف کرده و با نتایج تحلیلی همپوشانی خوبی دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۰-۰۵-۱۳۹۷
بازنگری: ۲۱-۰۷-۱۳۹۷
پذیرش: ۱۲-۰۹-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۱۰-۱۱-۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
ماده هایپرالاستیک
تراکم ناپذیر
خمش مقطع مستطیلی
ماده مدرج تابعی
حل دقیق

۱- مقدمه

گروه‌های مختلفی از مواد از قبیل فوم‌ها، الاستومرها، بافت‌های بیولوژیکی و پلیمرها قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ هایپرالاستیک را دارند. مهم‌ترین و بارزترین مشخصه فیزیکی لاستیک‌ها و موادی از این دسته، این است که در اثر کشیده شدن، کش آمده و پس از رهاشدن به حالت اولیه خود باز می‌گردد. لاستیک‌های طبیعی گاه تا هشت برابر طول اولیه خود کش آمده و سپس به حالت اول خود بر می‌گردند، همچنین لاستیک‌ها توانایی کشش‌پذیری بالایی در برابر تنش‌های کوچک دارند. از جمله لاستیک‌های طبیعی می‌توان به قیر، پوشش خارجی لاک پشت، شاخ حیوانات و صمغ درختان و لاستیک‌های مصنوعی به پلی بوتادین[1]، استایرن بوتادین[2]، نیتریل[3]، بوتیل[4] و غیره اشاره کرد.

مهم‌ترین کاربرد لاستیک‌ها در ساخت انواع تایر و تیوب اتومبیل‌ها، ساخت کفش، تیوب توپ‌های ورزشی، تسمه و نوارهای نقاله ، روکش کابل و سیم، لوله‌ها و سایر وسایل لاستیکی است. همچنین از این ماده ارزشمند در پوشش مخازن و لوله‌ها، لاستیک‌های ضربه گیر و صداگیر در اطراف یاتاقان‌ها، ساخت قطعات مکانیکی و واشرهای مسطح و مدور استفاده می‌شود. بوشی‌های به کار رفته در صنایع، شیرهای کنترلی، درز بندهای به کار رفته در صنایع، پوشش داخلی پمپ‌ها، شیرها، لوله‌ها، خرطومی‌های به کار رفته در صنایع مختلف از جمله کاربردهای اساسی این مواد می‌باشند. سوندهای به کار رفته در صنایع پزشکی نیز جزء موارد استفاده از این مواد هستند. از دیگر موارد استفاده آن در لوله‌های داخلی و تجهیزات کارخانجات مواد شیمی‌آیی مثلاً آب‌بندی تانکرهای حامل گاز می‌باشد. همچنین لاستیک‌ها به صورت فراوان به عنوان عایق ارتعاشی، قطعات ذخیره کننده انرژی در صنایع خودرو، سپر و محافظ در قطعاتی که در برابر بارهای ضربه‌ای قرار دارد به کار می‌روند.

1 Polybutadiene
2 Styrene Butadiene
3 Nitryl
4 Butyl

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: rahimi_gh@modares.ac.ir

از جمله کاربردهای مواد مدرج تابعی[1] با رفتار هایپرالاستیک در صنعت، می‌توان به لاستیک‌های مسابقات فرمول یک، که تحت تنش و حرارت بسیار بالا قرار دارند؛ و همچنین بالن‌های هواشناسی و اینترنت بالن‌ها که در ارتفاع بسیار بالا، تحت فشار و دماهای بسیار متغیر، مورد استفاده قرار می‌گیرند، اشاره کرد. از دیگر مواد مدرج تابعی که رفتار هایپرالاستیک از خودشان نشان می‌دهند، بافت‌های بدن موجودات زنده است. پوست بدن برخی موجودات زنده و ماهیچه‌ها و رباط‌های موجودات زنده، رفتار کاملاً هایپرالاستیک از خود نشان می‌دهد. شش و جگر، دریچه‌های قلب نیز رفتارشان با رفتار هایپرالاستیک مدل‌سازی می‌شود. مثانه موجودات زنده، سرخرگ‌ها و دهلیز و بطن قلب آن‌ها نیز، رفتاری شبیه مخازن تحت فشار هایپرالاستیک از خود نشان می‌دهند.

در تغییر شکل‌های کوچک، رفتار ماده مدرج تابعی می‌تواند به خوبی با تئوری خطی الاستیسیته یا یکی از تئوریهای پلاستیسیته بیان گردد و تئوری‌های مناسبی موجود و معمول است. روند طراحی برای مواد الاستیک غیرخطی در گام‌های ابتدایی‌تری نسبت به آنچه در بالا اشاره شد، قرار دارد. در این مورد تئوری بسط یافته‌ای که از منظر کاربرد عملی مورد قبول باشد، وجود ندارد و به همین دلیل پیشرفت کمی در جمع‌آوری اطلاعات و توسعه روندهای عملی طراحی صورت گرفته است. نمی‌توان گفت که تئوری غیرخطی الاستیک برای مواد مدرج تابعی وجود ندارد ولی این امر بیشتر در حوزه مکانیک نظری بوده و کمتر جنبه کاربردی داشته است. با افزایش کاربرد مواد و سازه‌های غیرخطی و پیشرفته در صنایع مختلف و نیاز به تحلیل رفتار آن‌ها، تحلیل‌های غیرخطی نیز مورد توجه اغلب محققین قرار گرفته است. طبیعت غیرخطی معادلات حاکم و عدم دسترسی به معادله رفتاری ماده- که بتواند رفتار ماده را به درستی توصیف نماید- دو مشکل عمده در حل مسائل مقدار مرزی غیر خطی می‌باشند .با توسعه و گسترش کامپیوترها و پیشرفت روز افزون روش‌های عددی از جمله روش اجزاء محدود، مشکل اول تا حدودی بر طرف شده است ولی مشکل دوم همچنان باقی مانده است.

دسته‌های مختلفی از مواد مثل لاستیک‌ها، قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک را دارند. ماکزیمم مقدارکشش معمولاً در محدوده ۱۰-۵ (نسبت طول ثانویه به طول اولیه) می‌باشد و منحنی

1 Functionally graded material

تنش-کشش غیرخطی است، لذا ماده از قانون هوک تبعیت نمی‌کند. برای مدل سازی رفتار این مواد، ماده به صورت یک محیط پیوسته در نظر گرفته می‌شود و یک تابع چگالی انرژی کرنشی به دست می‌آید که معمولاً بر حسب ناورداهای تغییر شکل است [۱]. برای کشش‌های کوچک می‌توان شیب منحنی را به عنوان مدول الاستیسیته تعریف کرد که در حدود۱ مگاپاسکال است. کشش‌پذیری زیاد و مدول الاستیسیته پایین لاستیک‌ها در مقایسه با جامداتی مثل فلزات که مدول الاستیسیته آن‌ها حدود ۲۰۰ گیگاپاسکال و ماکزیمم کشش‌پذیری آن‌ها حدود ۱/۰۱ است باعث می‌شود تا اختلاف چشمگیری بین لاستیک‌ها و جامدات سختی مثل فلزات وجود داشته باشند. روابط ساختاری مواد هایپرالاستیک، برای مدل کردن رفتار مواد الاستیک، در تغییر شکل‌های بزرگ به کار می‌رود. در واقع این روابط برای مدل‌سازی رفتار غیرخطی مواد و تغییر شکل‌های بزرگ کاربرد دارد. عمده‌ترین کاربرد این تئوری، مدل کردن رفتار مواد پلیمری لاستیک مانند، پلیمرهای فوم مانند و بافت‌های بیولوژیک می‌باشد که تغییر شکل‌های بزرگ و برگشت پذیر دارند. حالت الاستیک غیرخطی مواد، با رفتار همانند لاستیک، می‌تواند با استفاده از توصیف فیزیکی اثر متقابل مولکول‌ها با استفاده از تئوری‌هایی مثل تئوری کلاسیک گوسی، تئوری باندهای لغزشی، تئوری شبکه ماکرو مولکولی، که توسط افرادی چون ترلور [۲]، بویس و ارودا [۳]، گوس و جیمز [۴]، فلوری [۵]، وال [۶]، الکساندر لاین [۷]، ون دایک و هوگر [۸]، میسنر و ماتجکا [۹] و آتارد [۱۰ و ۱۱] بحث شده است، توصیف شود و یا با استفاده از روش‌هایی که مبتنی بر پدیده‌شناسی می‌باشند، توصیف گردد. توابع انرژی که با استفاده از روش‌های مولکولی فرمول‌بندی می‌شوند معمولاً پیچیده بوده و مخصوص ماده خاصی می‌باشند. ولی در روش‌های مبتنی بر پدیده شناسی، ماده به صورت یک محیط پیوسته فرض می‌شود و یک تابع چگالی انرژی کرنشی استخراج می‌گردد که معمولاً بر حسب نامتغیر[2]های تغییر شکل می‌باشند. تعدادی از معمول‌ترین و معروف‌ترین توابع انرژی عبارتند از تابع انرژی نئوهوکین[3]، مونی-ریولین[4]، آگدن[5] و یئوه[6]. جهت نشان دادن رفتار غیرخطی ماده معمولاً به چندین ثابت مادی

2 Invariant
3 Neo-Hookean
4 Mooney-Rivlin
5 Ogden
6 Yeoh

نیاز است. این ثوابت با استفاده از نتایج آزمایشگاهی و تست‌های انجام شده روی ماده تعیین می‌گردند که این ثابت‌ها با استفاده از روش‌های عددی، به دست می‌آیند. با استفاده از برخی از توابع انرژی ذکر شده، رفتار سازه‌های هایپرالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

در خصوص بررسی رفتار هایپرالاستیک لاستیک‌ها، ترلور، آزمایش‌های متعددی از جمله، کشش تک محوره، دو محوره و برش خالص را بر روی مواد مختلفی مانند لاستیک طبیعی[1]، انجام داده است. با توجه به داده‌های تجربی به دست آمده از این تست‌ها، و با توجه به معادلات تنش-کشیدگی برای این نوع بارگذاری‌ها، ثابت‌های توابع انرژی مختلف قابل محاسبه می‌باشند [۱۲]. در خصوص مدل‌سازی رفتار سازه‌های هایپرالاستیک، اتارد [۱۳] در سال ۲۰۰۳ رفتار تیر تیموشنکو با تغییر شکل بزرگ، تحت بارگذاری کششی را با در نظر گرفتن تابع انرژی نئوهوکین تعمیم یافته، مورد بررسی قرار داده است. وی [۱۴ و ۱۵] همچنین کمانش و کمانش عرضی[2] میله هایپرالاستیک تحت بارگذاری محوری و عرضی را نیز مورد مطالعه قرار داده و اثرات تغییر شکل‌های برشی را بررسی کرده است و به استخراج روابط ساختاری و معادلات کمانش پرداخته است. نقدآبادی و عنانی [۱۶] نیز رفتار میله ویسکو-هایپرالاستیک تحت بارگذاری محوری در تغییر شکل‌های بزرگ را مورد بررسی قرار داده‌اند. استفاده از مواد هایپرالاستیک برای افزایش شکل‌پذیری مهاربندهای هم‌محور نیز توسط کافی و همکاران [۱۷] مورد توجه قرارگرفته است. فرمول‌بندی صفحات هایپرالاستیک تحت بارگذاری عرضی و به روش المان محدود توسط سیج و جلنیچ [۱۸] صورت پذیرفته است .دقت فوق العاده و راندمان بالای روش ارائه شده، با مثال‌های عددی نشان داده شده است. کاربرد روش حاضر برای آنالیز سازه‌های هایپرالاستیک، تحت نیروهای غیرمحافظه‌کارانه استاتیکی نشان داده شده و بعضی نتایج بارهای بحرانی برای ناپایداری دینامیکی در حالت لرزان ارائه شده است. همینطور آلتنباخ و ارمیف [۱۹] سختی مؤثر صفحات هایپرالاستیک تحت بارگذاری خمشی را بررسی کرده و آن را محاسبه کرده‌اند. در این پژوهش آن‌ها معادلات ساختاری دو بعدی برای یک صفحه ارائه کرده‌اند. همچنین تأثیر تنش‌های اولیه در حجم ماده، روی رفتار صفحه را نیز مطرح کردند. در خصوص غشاهای هایپرالاستیک نیز، تنش‌های تماسی دو صفحه کروی هایپرالاستیک توسط کومار و داس گوپتا [۲۰] به دست آمده است. آن‌ها مشاهده کردند که حالت چروکیدگی در حال پیدایش، در محدوده تماس رخ می‌دهد. بر این اساس، حداقل کشش اولیه مورد نیاز برای جلوگیری از چروک شدن در هر نقطه از غشاء را مشخص کردند. همینطور جیل [۲۱]، رفتار غشاء هایپرالاستیک با کرنش‌های متوسط و با درنظر گرفتن تنش پسماند را تحلیل نموده است. ایشان یک فرمول کامل برای تحلیل ساختار غیرخطی غشاهای تقویت شده، برای حل مشکل هندسه غیرخطی آن‌ها، ارائه کرده است به طوری که نتایج عددی به خوبی فرمول‌بندی فوق را تأیید می‌کنند. در مقاله‌ای دیگر نیز جیل به همراه بونت [۲۲]، چروکیدگی غشاء هایپرالاستیک تحت کرنش‌های متوسط و با درنظر گرفتن تنش پسماند را مورد بررسی قرار داده است. همین طور در خصوص نانو تیوب‌های کربنی هایپرالاستیک تحت کشش نیز، مطالعاتی با استفاده از روش اجزاء محدود، توسط فلورس و همکاران [۲۳] صورت گرفته است. مدل ارائه شده توسط آن‌ها از قابلیت پیش بینی خوبی برخوردار است، به طوری که در مقایسه با نتایج منتشر شده، مدل سازی عددی ارائه شده به خوبی نتایج حاصله را تأیید می‌کند. بیلگیلی [۲۴] نیز معادلات ساختاری برای مواد هایپرالاستیک مدرج تابعی را ارائه داد و به صورت آزمایشگاهی به ساخت این مواد پرداخت. ایشان در این مطالعه تلاش کردند تا شکاف موجود در کمبود اطلاعات دردسترس، راجع به رفتار مکانیکی لاستیک‌های ساخته شده را از طریق مدل‌سازی ریاضی از بین ببرند. در خصوص مخازن جدار ضخیم تراکم ناپذیر غیرخطی، باترا [۲۵] به مطالعه عددی مخزن استوانه‌ای با استفاده از روش المان محدود پرداخت. وی تغییر شکل مخزن را متقارن در نظر گرفت و ماده تشکیل دهنده مخزن را مونی-ریولین با دو ثابت که به آرامی در راستای شعاع تغییر می‌کنند، فرض کرد. نتایج به دست آمده از مدل‌سازی ایشان، با نتایجی که به صورت تحلیلی محاسبه شده‌اند، به طور مناسب و بسیار نزدیکی همخوانی خوبی دارد. بیلگیلی [۲۶] تغییر شکل برشی و محوری مخزن استوانه‌ای ساخته شده از جنس لاستیک را در دو حالت دما ثابت و غیر دما ثابت در نظر گرفت و با این فرضیات به حل مسئله پرداخت و باترا [۲۷] طراحی مخازن مدرج تابعی کروی و استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد الاستیک غیرخطی تراکم ناپذیر را ارائه نمود. ایشان راه حل‌های فرم بسته را برای تغییر شکل‌های شعاعی کرنش صفحه‌ای متقارن محوری یک استوانه توخالی مدرج

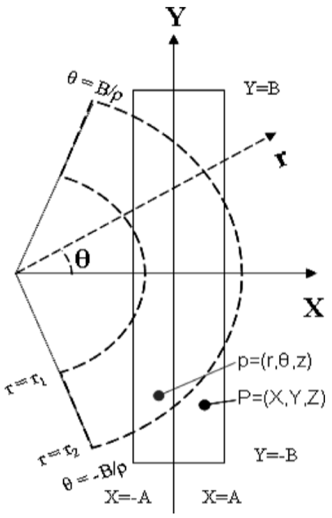
1 Natural Rubber
2 Lateral buckling

تابعی و همچنین انبساط و انقباض یک کره توخالی بارگذاری شده در سطح داخلی و خارجی تحت فشار هیدرواستاتیک یکنواخت، ارائه کرده‌اند. نتایج تحلیلی ارائه شده در این مقاله، معیار خوبی برای تأیید و مقایسه با نتایج به دست آمده از روش‌های عددی می‌باشد. نی و باترا [۳۰-۲۸] سازگاری بهینه ماده تشکیل دهنده مخزن جدار ضخیم استوانه‌ای و کروی را ارائه دادند. باترا [۳۱] سازگاری بهینه مخازن جدار ضخیم مدرج تابعی ساخته شده از جنس مواد لاستیک-مانند و روابط ساختاری کلی آن را بیان نموده است. همچنین ایشان مقطع هایپرالاستیک تحت پیچش را در سال ۲۰۱۳ انجام داده است [۳۲]. در خصوص بررسی رفتار ویسکو-هایپرالاستیک لاستیک‌ها و فوم‌ها در بارگذاری کشش تک محوره، دو پژوهش توسط عنانی و همکاران [۳۳ و ۳۴] انجام شده است. همچنین معرفی معادلات میدانی و راه حل عمومی برای پوسته جدار ضخیم متقارن محوری، متشکل از مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر مدرج تابعی، توسط رحیمی و عنانی [۳۵] ارائه گردیده است. کنر [۳۶] نیز به بررسی رفتار هایپرالاستیک تیرهای مستطیلی لاستیک‌مانند تحت خمش پرداخته است. با توجه به پژوهش‌های صورت گرفته ذکر شده بالا، در این مقاله مدل‌سازی رفتار هایپرالاستیک لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی و استخراج روابط تنش کوشی حاکم بر سطح مقطع، ناشی از این بارگذاری صورت گرفته است. برای مدل سازی از تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته استفاده شده و فرض توانی بودن ثابت‌های تابع انرژی کرنشی جهت مدل‌سازی رفتار ماده، در نظر گرفته شده است. همچنین تغییر خواص در راستای شعاعی پس از خمش، در نظر گرفته شده و تغییرات ناهمگنی نیز بررسی و ارائه می‌گردد. در پایان از آن جایی که بسیاری از مواد به صورت ناهمگن هستند، استفاده از فرض مواد ناهمگن مدرج تابعی یکی از کاربردی‌ترین روش‌هاست.

۲- مبانی تئوریک

مقطع قبل و بعد از تغییر شکل، که هندسه آن به شرح زیر می‌باشد، مطابق شکل ۱ نشان داده شده است. میدان جابه‌جایی تغییر شکل ذکر شده به صورت زیر است:

$$r = f(X), \quad \theta = \frac{Y}{\rho}, \quad z = Z. \qquad (۱)$$



شکل ۱: مقطع مستطیلی قبل از تغییر شکل و دایروی بعد از تغییر شکل [۳۶]

Fig. 1. The rectangular section before deformation and circular section after deformation [36]

که r، θ و z مختصات استوانه‌ای و X، Y و Z مختصات کارتزین می‌باشند. قبل از تغییر شکل، هندسه سطح مقطع، یک هندسه مستطیلی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-A \le X \le A \;, -B \le Y \le B \;, -C \le Z \le C \qquad (۲)$$

که A، B و C همانطور که در شکل ۱ مشخص است، ابعاد سطح مقطع و ارتفاع آن می‌باشند.

تانسور گرادیان تغییر شکل برای این نوع بارگذاری به صورت زیر تعریف می‌شود[۳۶]:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{df}{dX} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

که این رابطه با توجه به معادله $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$، که x_i, X_j به ترتیب مختصات فضایی و مادی ماده می‌باشند، به دست آمده است. که ρ شعاع انحناء یا میانگین هندسی بوده و برای ماده هایپرالاستیک همگن به صورت $\sqrt{r_1 r_2}$ تعریف می‌گردد.که برای مواد تراکم ناپذیر

دترمینان F برابر با یک است بنابراین خواهیم داشت:

$$\left(\frac{df}{dX}\right)\left(\frac{f}{\rho}\right)=1 \quad (۴)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$f\left(X\right)=r=\sqrt{2\rho X+\beta} \quad (۵)$$

که β ثابت عمل انتگرال‌گیری بوده و با استفاده از شرط مرزی هندسی به دست می‌آید. هندسه بعد از تغییر شکل به صورت قطاعی از دایره تبدیل می‌شود و به صورت شکل ۱ می‌باشد. با توجه به روابط (۵) و (۲)، رابطه زیر حاصل خواهد شد که r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی دایره می‌باشند:

$$r_1=\sqrt{\beta-2\rho A}\le r\le\sqrt{\beta+2\rho A}=r_2 \quad ,-\frac{B}{\rho}\le\theta\le\frac{B}{\rho} \quad (۶)$$

که $\beta=\sqrt{\rho^{4}+4\rho^{2}A^{2}}$ و Z نیز بعد از تغییر شکل، تغییر نمی‌کند.

تانسورکشیدگی چپ کوشی-گرین به صورت $B=FF^T$ تعریف می‌شود که F گرادیان تغییر شکل می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\frac{\rho}{r} & 0 & 0\\ 0 & \frac{r}{\rho} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{\rho^2}{r^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{r^2}{\rho^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$\lambda_1=\frac{\rho}{r},\lambda_2=\frac{r}{\rho},\lambda_3=1$$

که $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ کشش‌های اصلی می‌باشند.

همچنین برای یک ماده ایزوتروپ، ناورداهای تانسور B به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$I_1=tr\boldsymbol{B}=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \quad (۸)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\left(tr\boldsymbol{B}\right)^2-tr\left(\boldsymbol{B}^2\right)\right]=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_1^2\lambda_3^2 \quad (۹)$$

$$I_3=det\boldsymbol{B}=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \quad (۱۰)$$

در مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر، $I_3=det\left(\boldsymbol{B}\right)=1$ فرض می‌شود و با استفاده از روش ریولین [۳۷]، رابطه ساختاری برای مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر و همسانگرد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{T}=-p\boldsymbol{I}+2\frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{B}-2\frac{\partial W}{\partial I_2}\boldsymbol{B}^{-1} \quad (۱۱)$$

که p ترم فشار هیدرواستاتیک وابسته به قید تراکم ناپذیری، T تنش کوشی و I ماتریس همانی است. $W=W\left(I_1,I_2\right)$، تابع انرژی پتانسیل کرنشی است که به صورت چند جمله‌ای بر اساس $\left(I_1-3\right)$ و $\left(I_2-3\right)$ در نظرگرفته می‌شود و چگالی انرژی کرنشی کلاسیک برای لاستیک تراکم ناپذیر همگن، انرژی کرنشی مونی-ریولین[1] است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^{MR}=C_1\left(I_1-3\right)+C_2\left(I_2-3\right), \quad (۱۲)$$

که C_1 و C_2 ثوابت تابع انرژی مونی ریولین می‌باشند.

برای مواد مدرج تابعی، تابع انرژی مونی-ریولین به صورت $W=\mu(r)(I_1-3)+\mu'(r)(I_2-3)$ در نظرگرفته می‌شود، که μ بیانگر مدول برشی ماده در پیکربندی تغییر شکل یافته است. در این جا برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، $\mu(r)=\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n,\mu'(r)=\mu_{01}\left(\frac{r}{r_2}\right)^m$ در نظر گرفته می‌شود که n و m ضرایب ناهمگنی ماده می‌باشند. بنابراین تابع انرژی مونی ریولین تعمیم یافته برای مواد ناهمگن مدرج تابعی برابر است با:

$$W=\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n\left(I_1-3\right)+\mu_{01}\left(\frac{r}{r_2}\right)^m\left(I_2-3\right) \quad (۱۳)$$

که μ_{10} و μ_{01} همان C_1 و C_2 می‌باشند که ثابت تابع انرژی برای ماده همگن بوده و با توجه به داده‌های تجربی استخراج شده از سه

1 Mooney-Rivlin

تست کشش تک محوره، دو محوره و برش خالص، و همچنین روابط تئوری تنش-کشیدگی حاکم بر یک جسم هایپرالاستیک همگن تحت این بارگذاری‌ها و با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها به دست می‌آیند. این دو ثابت یعنی μ_{10} و μ_{01} با توجه به رابطه $\mu = 2\left(\mu_{10} + \mu_{01}\right)$، با مدول برشی ماده نسبت مستقیم داشته و با افزایش و کاهش آن‌ها، ماده سخت‌تر و یا نرم‌تر می‌شود.

۳- روش حل و فرضیه‌ها

با توجه به رابطه (۱۱) و تعریف تانسور S ،تنش‌های اصلی کوشی برابر است با:

$$T_{rr} = -p + 2\frac{\rho^2}{r^2}W_1 - 2\frac{r^2}{\rho^2}W_2 \tag{۱۴}$$

$$T_{\theta\theta} = -p + 2\frac{r^2}{\rho^2}W_1 - 2\frac{\rho^2}{r^2}W_2 \tag{۱۵}$$

$$T_{zz} = -p + 2W_1 - 2W_2 \tag{۱۶}$$

که به ترتیب معرف تنش شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند.

$$T_{r\theta} = T_{rz} = T_{z\theta} = 0 \tag{۱۷}$$

که به دلیل وجود تقارن محوری در مقطع تحت خمش (به عبارتی، وجود تقارن هندسی در سازه تحت خمش) و همچنین نوع بارگذاری که به صورت خمش خالص است، تنش‌های برشی صفر فرض می‌شوند (رابطه (۱۷)).

همچنین $\left(i = 1,2\right)$ $W_i = \dfrac{\partial W}{\partial I_i}$ و $I_1 = I_2 = \dfrac{\rho^2}{r^2} + \dfrac{r^2}{\rho^2} + 1$ ، بنابراین روابط (۱۴) و (۱۵) به صورت زیر خواهند شد:

10

$$T_{rr} = -p + 2\frac{\rho^2}{r^2}\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n - 2\frac{r^2}{\rho^2}\mu_{01}\left(\frac{r}{r_2}\right)^m \tag{۱۸}$$

$$T_{\theta\theta} = -p + 2\frac{r^2}{\rho^2}\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n - 2\frac{\rho^2}{r^2}\mu_{01}\left(\frac{r}{r_2}\right)^m \tag{۱۹}$$

معادلات تعادل در راستای شعاع و در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر ساده می‌شوند[۳۶]:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(T_{rr} - T_{\theta\theta}\right) = 0,\ \ \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0,\ \ \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{۲۰}$$

حال برای محاسبه تنش‌های اصلی، با استفاده از معادله تعادل، روابط (۱۸) و (۱۹) را در رابطه (۲۰) جایگزین کرده و پس از ساده سازی و انتگرال‌گیری از طرفین و اعمال شرایط مرزی، به روابط تنش‌های کوشی برای مواد ناهمگن مدرج تابعی می‌رسیم. با دانستن این موضوع که به دلیل نوع بارگذاری ،سطوح جانبی مقطع بعد از بارگذاری عاری از تنش کششی و بدون نیروی کشش می‌باشند، شرایط مرزی برای تیر تحت خمش به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{rr} = 0\ \ at\ \ r = r_1\ \ \&\ \ r = r_2 \tag{۲۱}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه تعادل (رابطه (۲۰))، و قرار دادن مؤلفه‌های تنش در آن، تنش شعاعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_{rr}\left(r\right) = & -\frac{2\mu_{10}\rho^2}{\left(n-2\right)r_2^n} + \frac{2\mu_{01}}{\left(m+2\right)\rho^2 r_2^m}\left(r^{m+2}\right) + \frac{2\mu_{10}}{\left(n+2\right)\rho^2 r_2^n}\left(r^{n+2}\right) \\ & + \frac{2\mu_{10}}{\left(n+2\right)\rho^2 r_2^n}\left(r^{n+2}\right) - \frac{2\mu_{01}\rho^2}{\left(m-2\right)r_2^m}\left(r^{m-2}\right) + \frac{2\mu_{10}\rho^2}{\left(n-2\right)r_2^n}\left(r_1^{n-2}\right) \\ & - \frac{2\mu_{01}}{\left(m+2\right)\rho^2 r_2^m}\left(r_1^{m+2}\right) + \frac{2\mu_{01}\rho^2}{\left(m-2\right)r_2^m} \\ & \left(r_1^{m-2}\right) - \frac{2\mu_{10}}{\left(n+2\right)r^2 r_2^n}\left(r_1^{n+2}\right) \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که با ساده سازی و عمل فاکتورگیری، تنش شعاعی به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\begin{aligned} T_{rr}\left(r\right) = & \frac{2\mu_{10}\rho^2}{\left(n-2\right)r_2^n}\left(r_1^{n-2} - r^{n-2}\right) + \frac{2\mu_{01}}{\left(m+2\right)\rho^2 r_2^m} \\ & \left(r^{m+2} - r_1^{m+2}\right) + \frac{2\mu_{10}}{\left(n+2\right)\rho^2 r_2^n}\left(r^{n+2} - r_1^{n+2}\right) \\ & + \frac{2\mu_{01}\rho^2}{\left(m-2\right)r_2^m}\left(r_1^{m-2} - r^{m-2}\right). \end{aligned} \tag{۲۳}$$

با مقایسه رابطه (۱۸) و (۲۳)، فشار p به صورت زیر محاسبه

می‌شود:

$$p=\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n}\left(r^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{n-2}-\frac{r_1^{n-2}}{n-2}\right)+\frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m}\left(-r^{m+2}+\frac{r_1^{m+2}}{m+2}-\frac{r^{m+2}}{m+2}\right)+\frac{2\mu_{10}}{(n+2)\rho^2 r_2^n}\left(r_1^{n+2}-r^{n+2}\right)+\frac{2\mu_{01}\rho^2}{(m-2)r_2^m}\left(r^{m-2}-r_1^{m-2}\right). \quad (۲۴)$$

سایر مؤلفه‌های تنش نیز با مقایسه روابط (۱۵) و (۱۶) با رابطه (۲۳) به دست می‌آیند:

$$T_{\theta\theta}(r)=-\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n}\left(r^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{n-2}-\frac{r_1^{n-2}}{n-2}\right)-\frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m}\left(-r^{m+2}+\frac{r_1^{m+2}}{m+2}-\frac{r^{m+2}}{m+2}\right)-\frac{2\mu_{10}}{\rho^2 r_2^n}\left(\frac{r_1^{n+2}}{n+2}-\frac{r^{n+2}}{n+2}-r^{n+2}\right)-\frac{2\mu_{01}\rho^2}{r_2^m}\left(\frac{r^{m-2}}{m-2}-\frac{r_1^{m-2}}{m-2}+r^{m-2}\right). \quad (۲۵)$$

$$T_{zz}(r)=-\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n}\left(r^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{n-2}-\frac{r_1^{n-2}}{n-2}\right)-\frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m}\left(-r^{m+2}+\frac{r_1^{m+2}}{m+2}-\frac{r^{m+2}}{m+2}\right)-\frac{2\mu_{01}}{r_2^m}\left(\frac{r^2 r_1^{m-2}}{m-2}-\frac{r^2 r^{m-2}}{m-2}+r^m\right)-\frac{2\mu_{10}}{r_2^n}\left(\frac{r^{n+2}}{(n+2)\rho^2}-\frac{r_1^{n+2}}{(n+2)\rho^2}-r^n\right). \quad (۲۶)$$

همچنین ρ،که شعاع انحناء می‌باشد، با استفاده از جایگذاری شرط مرزی دوم در رابطه $T_{rr}(r)$ (رابطه (۲۳))، برابر است با:

$$\rho=\left[\frac{\frac{\mu_{01}}{(m+2)r_2^m}\left(r_1^{m+2}-r_2^{m+2}\right)+\frac{\mu_{10}}{(n+2)r_2^n}\left(r_1^{n+2}-r_2^{n+2}\right)}{\frac{\mu_{10}}{(n-2)r_2^n}\left(r_1^{n-2}-r_2^{n-2}\right)+\frac{\mu_{01}}{(m-2)r_2^m}\left(r_1^{m-2}-r_2^{m-2}\right)}\right]^{\frac{1}{4}} \quad (۲۷)$$

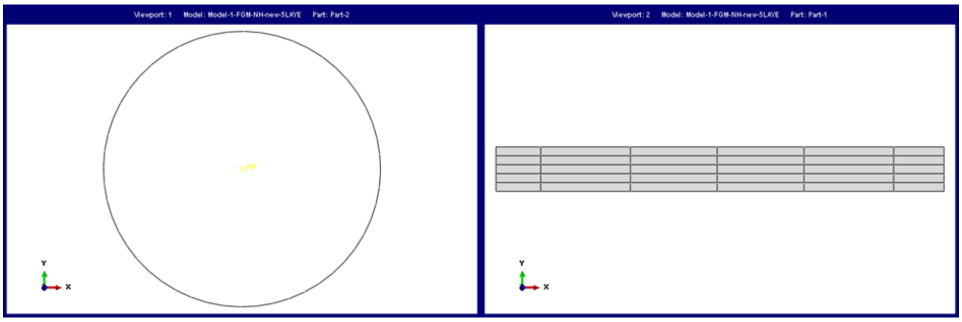
۴- مدل سازی المان محدود

در این قسمت به شبیه سازی تیر تحت خمش در نرم افزار آباکوس[1] پرداخته می‌شود. برای اعمال خمش خالص و بررسی تنش‌های کوشی وارده بر سازه مورد نظر، نمونه تحت خمش چهار نقطه قرار داده شده است؛ به این صورت که تکیه گاه‌ها در طرفین نمونه، ثابت و به فاصله ۰/۰۶ متر از لبه‌ها قرار دارند و دو سنبه که به فاصله ۰/۰۲ متر از لبه‌ها و در بالای نمونه هستند، به طرف پایین جابه جا می‌شوند. طول این جابجایی ۰/۰۰۵ متر می‌باشد. با جابجایی سنبه‌ها به سمت پایین و خم شدن سازه مورد نظر، خمش خالص ایجاد شده بین دو تکیه‌گاه در نظر گرفته شده و به بررسی تنش‌ها در این محدوده پرداخته می‌شود. در ادامه به نحوه مدل سازی نمونه در نرم افزار اشاره می‌شود. برای مدل سازی نمونه، مقطع سازه، تکیه گاه‌ها و سنبه‌ها به صورت جداگانه همانند شکل ۲ مدل می‌شوند. برای مدل‌سازی مقطع، از فضای دو بعدی و حالت تغییر شکل پذیر[2] استفاده شده است. ابعاد مقطع مدل سازی شده به این صورت است، طول مقطع برابر ۰/۲ متر وعرض آن ۰/۰۲ متر است و مقطع به صورت کرنش صفحه‌ای مدل می‌شود. برای مدل سازی مقطع مدرج تابعی به این صورت عمل می‌شود که مقطع مورد نظر را در راستای طول آن با دستور پارتیشن [3]به ۵ قسمت یا ۵ لایه مساوی تقسیم کرده و به هر لایه خواص مخصوص به خودش داده می‌شود. تکیه گاه‌ها و سنبه‌های اعمال جابجایی نیز با مقطع دایروی و با قطر ۰/۰۱ متر و به صورت صلب در نظر گرفته شده است. در شکل ۳ نمونه مدل شده قابل مشاهده می‌باشد.

برای مدل‌سازی مواد هایپرالاستیک در نرم افزار به کمک توابع انرژی کرنشی، نیاز به وارد کردن ثوابت این توابع است که این ثابت‌ها با یک سری روابط مشخص به مدول برشی ماده مربوط می‌شوند. برای محاسبه این ثابت‌ها نیاز به داده‌های تجربی تست‌های کشش تک محوره، دو محوره و برش خالص بر روی مواد است، که در این مقاله که از دو ماده لاستیک طبیعی و سیلیکون استفاده شده است، از داده‌های تجربی ترلور برای لاستیک طبیعی و منییر برای سیلیکون استفاده شده است [۱۲ و ۳۸]. جدول ۱ مقادیر این ثابت‌ها را نشان می‌دهد.

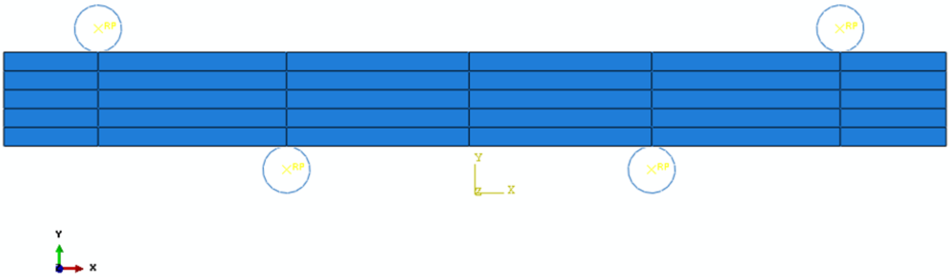
با توجه به رابطه $W=\mu(r)(I_1-3)+\mu'(r)(I_2-3)$ که $\mu(r)=\mu_{۱۰}\left(\frac{r}{r_۲}\right)^n, \mu'(r)=\mu_{۰۱}\left(\frac{r}{r_۲}\right)^m$ ، در نرم افزار آباکوس برای هر

1 ABAQUS
2 Deformable
3 Partition



شکل ۲: مدل‌سازی مقطع نمونه، تکیه گاه‌ها و سنبه‌ها

Fig. 2. Modeling of sample section, supports and pins



شکل ۳: نمونه مدل شده

Fig. 3. Modeling of the sample

جدول ۱: مقادیر ثابت‌های تابع انرژی مونی-ریولین برای دو ماده لاستیک طبیعی و سیلیکون

Table 1. The values of the constants of the Moony-Rivlin energy function for the two materials of the natural rubber and silicon

سیلیکون	لاستیک طبیعی	تابع انرژی
μ_{10} = ۰/۱۴MPa μ_{01} = ۰/۰۲۳MPa	μ_{10} = ۰/۱۹MPa μ_{01} = ۰/۰۱۵MPa	مونی-ریولین

لایه باید دو مقدار $\mu(r),\mu'(r)$ که به ترتیب با C_{10} و C_{01} نشان داده شده است، مشخص شوند. برای این کار ابتدا به محاسبه مقادیر n و m پرداخته می‌شود:

طبق رابطه (۲۸) با توجه به این که لایه پایینی سازه از جنس سیلیکون و لایه بالایی آن، لاستیک طبیعی است، رابطه زیر برقرار است:

$$\mu(r)=\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \Rightarrow \mu(r)=190\text{e}^3\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \quad , \quad \mu(r)=140\text{e}^3\left(\frac{r}{r_1}\right)^n \qquad (۲۸)$$

به طوری که اگر $r=r_2$ باشد $\mu(r)$ برابر ثابت ماده لاستیک طبیعی و اگر $r=r_1$ باشد، $\mu(r)$ برابر ثابت ماده سیلیکون خواهد شد. برای محاسبه n خواهیم داشت:

$$\begin{gathered}\mu(r)=190\text{e}^3\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \xrightarrow{r=r_2} \mu(r)=190\text{e}^3\left(\frac{r_2}{r_2}\right)^n \Rightarrow \mu(r)=190\text{e}^3 \\ \mu(r)=190\text{e}^3\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \xrightarrow{r=r_1} 140\text{e}^3=190\text{e}^3\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\end{gathered} \qquad (۲۹)$$

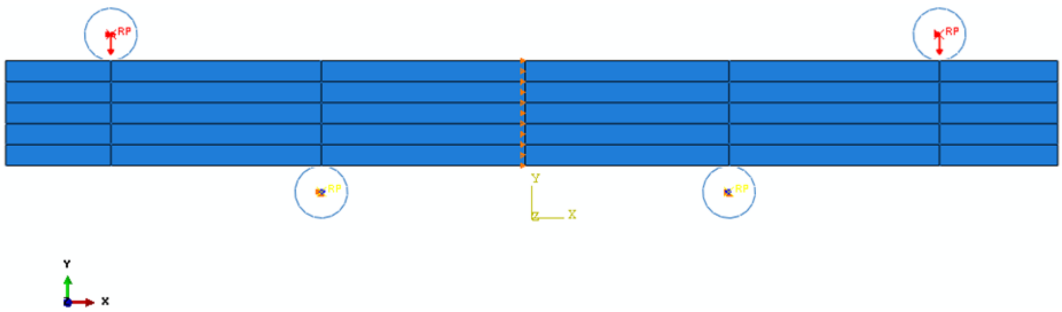
که با یک ln گیری ساده از طرفین مقدار n برابر با $n=۶/۵۴۶$ خواهد شد. به روش مشابه $m=-۹/۱۶۲$ می‌باشد.

همچنین، نیاز به محاسبه شعاع خارجی و شعاع داخلی برای اختصاص دادن خواص به هر لایه می‌باشد. لایه درونی مقطع بعد از خمش از جنس سیلیکون و لایه بیرونی آن از جنس لاستیک طبیعی است و خواص ماده به تدریج از سیلیکون به لاستیک طبیعی تغییر

جدول ۲: خواص ارائه شده به نرم افزار

Table 2. Defined properties for numerical Software

شماره لایه‌ها	C_{10} (Pa) ارائه شده به نرم افزار	C_{01} (Pa) ارائه شده به نرم افزار
لایه اول	۱۴۴۳۷۹,۷۲۷	۲۲۰۲۸,۹۵۴
لایه دوم	۱۵۳۴۸۷,۸۴۹	۲۰۲۲۱,۲۸۳
لایه سوم	۱۶۳۰۷۸,۱۵۸	۱۸۵۷۶,۶۶۹
لایه چهارم	۱۷۳۱۷۱,۳۸۱	۱۷۰۷۹,۰۹۹
لایه پنجم	۱۸۳۷۸۸,۹۳۳	۱۵۷۱۴,۲۵۸



شکل ۴: نحوه اعمال جابجایی و شرط مرزی روی تکیه‌گاه‌ها

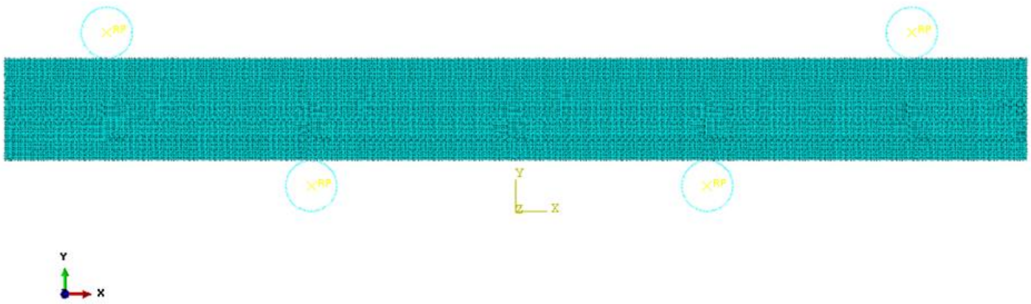
Fig. 4. Imposing the displacement and boundary condition on the supports

می‌یابد. برای محاسبه شعاع داخلی و خارجی ماده مدرج تابعی، به این صورت عمل می‌شود که ابتدا شعاع داخلی و خارجی دو ماده همگن لاستیک طبیعی و سیلیکون به صورت جداگانه محاسبه شده و سپس میانگین این دو شعاع به عنوان شعاع داخلی و خارجی ماده مدرج تابعی در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه شعاع داخلی و خارجی دو ماده همگن، دقیقاً از همان مدل سازی که برای ماده مدرج تابعی در نظر گرفته شده بود، استفاده می‌شود. پس از اعمال بارگذاری و خمش مقطع برای دو ماده همگن، مقادیر جابه‌جایی عمودی لبه بالایی و پایینی مقطع، را محاسبه کرده و با استفاده از نرم افزار اکسل منحنی این جابه‌جایی و همچنین معادله حاکم بر آن محاسبه می‌شود. با استفاده از رابطه شعاع انحناء، که به صورت رابطه $\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^{2})^{\frac{3}{2}}}$ می‌باشد، برای محاسبه شعاع داخلی و خارجی ، از این رابطه انتگرال‌گیری کرده و مقدار حاصله، بر اندازه طول قسمتی از مقطع که جابجایی عمودی نقاط آن محاسبه شد، تقسیم می‌شود.

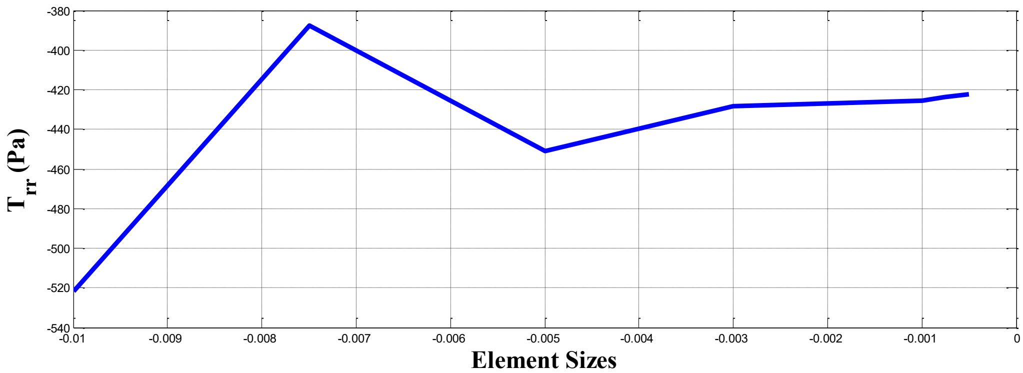
جدول ۲ خواص ارائه شده به آباکوس را نشان می‌دهد:

تکیه‌گاه‌ها و سنبه‌های اعمال جابجایی به صورت صلب مدل می‌شوند. برای تبیین شرایط مرزی سنبه بارگذاری، به این صورت عمل شده است که با تعریف یک نقطه به عنوان مرجع و نسبت دادن کل سنبه بارگذاری به آن نقطه و نهایتاً تعریف قید حرکت برای آن نقطه، شرایط مرزی سنبه بارگذاری مدل شده است. قید حرکت به این صورت است که فقط در یک راستا (راستای اعمال خمش) به اندازه ۰/۰۰۵ متر حرکت می‌کند و در سایر جهات محدود می‌شود. تکیه‌گاه‌ها در تمام راستا مقید شده‌اند (صفر درجه آزادی). برای اینکه مقطع روی تکیه‌گاه‌ها حرکت نکند، صفحه میانی و عمود بر مقطع (و در راستای اعمال جابجایی)، مقید شده است تا فقط در راستای جابجایی سنبه حرکت کند. در شکل ۴ نحوه اعمال جابجایی و شرط مرزی روی تکیه‌گاه‌ها نشان داده شده است.

برای اتصال بین مقطع با تکیه گاه‌ها و سنبه‌ها از تماس بدون



شکل ۵: نحوه مش‌بندی نمونه
Fig. 5. Meshing of the model



شکل ۶: نمودار همگرایی مش
Fig. 6. Mesh Convergence graph

اصطکاک استفاده شده است. مقطع با استفاده از المان چهار وجهی[1] المان بندی شده است. المان از نوع ۸ نوده چهار ضلعی کرنش صفحه‌ای مرتبه چهارم هیبریدی کاهش یافته[2] می‌باشد. برای به دست آوردن سایز مناسب مش‌ها مطالعه همگرایی مش[3] صورت گرفته است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. اندازه یا سایز مش ۰/۰۰۰۵ در نظر گرفته شده است. همچنین برای المان بندی تکیه‌گاه‌ها و سنبه‌ها از المان ۲ نوده خطی دو بعدی صلب[4] استفاده شده است. در شکل ۵ نحوه مش‌بندی نشان داده شده است.

همان طور که در شکل ۶ قابل مشاهده است، سایز مش از ۰/۰۱ تا ۰/۰۰۰۵ در نظر گرفته شده و با توجه به شکل، نمودار از سایز مش ۰/۰۰۳ به بعد تقریباً همگرا شده است.

در نهایت با تعریف یک job در ماژول job، مدل نهایی ایجاد شده برای تحلیل به نرم افزار ارائه می‌شود و نتایج با نتایج به دست آمده از حل تحلیلی مقایسه خواهد شد. در شکل ۷ نحوه خمش مقطع بعد از اعمال جابجایی، نشان داده شده است.

۵- نتایج روش تحلیلی و عددی

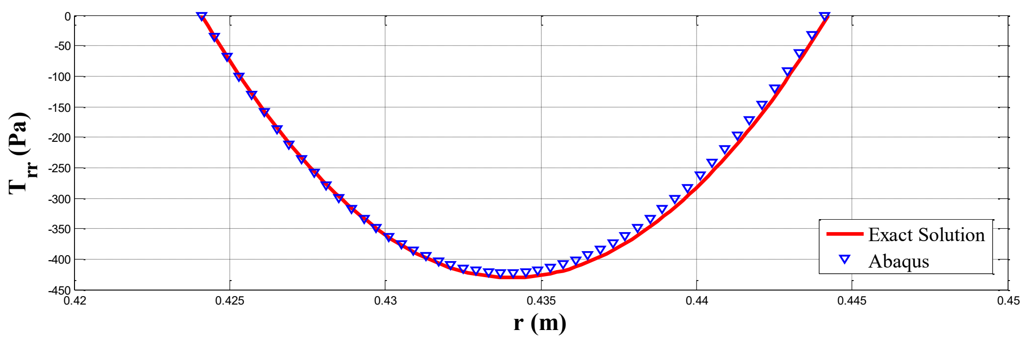
در ابتدا مقایسه‌ای بین نتایج حل دقیق و نرم افزار در حالت همگن نشان می‌دهد که روش استفاده شده در مدل سازی نرم افزار برای حالت مدرج تابعی، با توجه به این که در حالت همگن، مدل‌سازی تا حدود زیادی با حل دقیق مطابقت دارد، صحیح می‌باشد. در شکل‌های ۸ تا ۱۰، مقایسه بین روش حل دقیق و نرم افزار در حالت همگن، به ترتیب برای تنش‌های کوشی شعاعی، محیطی و محوری بر حسب شعاع مقطع، نشان داده شده است.

همچنین مقایسه‌ای بین نتایج حل دقیق در حالت همگن و غیرهمگن (مدرج تابعی)، نشان می‌دهد که چنانچه اگر درجه ناهمگنی (n,m)، در رابطه تنش کوشی شعاعی به دست آمده برای ماده مدرج تابعی، برابر صفر قرار گیرد، نتیجه حاصله نشان دهنده رابطه تنش کوشی شعاعی برای مواد همگن می‌باشد [۳۶]، که این

1 Quad-dominated
2 An 8-node biquadratic plane strain quadrilateral, hybrid, reduced integration (CPE8RH)
3 Mesh convergence study
4 A 2-node 2-D linear rigid link (R2D2)

شکل ۷: نحوه خمش مقطع بعد از اعمال جابجایی

Fig. 7. Bending of the cross section after applying the displacement



شکل ۸: مقایسه بین روش حل دقیق و حل عددی در حالت همگن برای تنش کوشی شعاعی

Fig. 8. Comparison between Exact Solution and numerical Solution in Homogeneous Mode for Radial Cauchy Stress

موضوع نیز خود تاکیدی بر درستی روابط حاکم بر مواد مدرج تابعی می‌باشد. رابطه (۳۰) به بررسی این موضوع می‌پردازد.

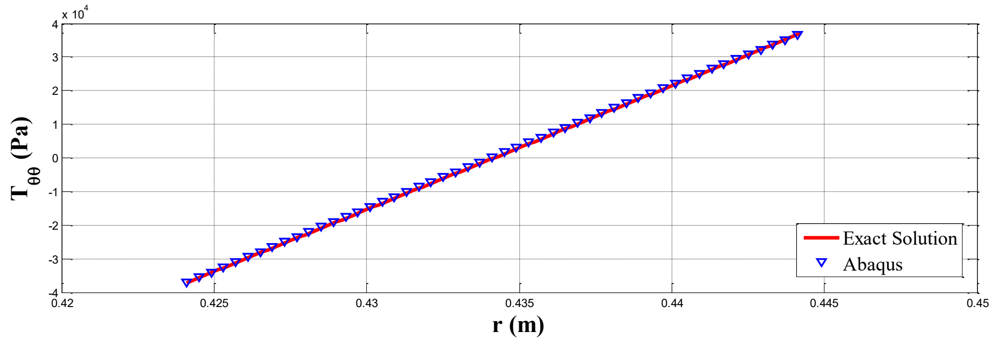
$$T_{rr}(r)=\frac{2\mu_{10}\rho^2}{(n-2)r_2^n}\left(r_1^{n-2}-r^{n-2}\right)+\frac{2\mu_{01}}{(m+2)\rho^2 r_2^m}\left(r^{m+2}-r_1^{m+2}\right)+\frac{2\mu_{10}}{(n+2)\rho^2 r_2^n}\left(r^{n+2}-r_1^{n+2}\right)+\frac{2\mu_{01}\rho^2}{(m-2)r_2^m}\left(r_1^{m-2}-r^{m-2}\right)\xrightarrow{n,m=0}T_{rr}(r)=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\rho^2}{r^2}+\frac{r^2}{\rho^2}-\frac{r_2}{r_1}-\frac{r_1}{r_2}\right) \tag{۳۰}$$

که μ مدول برشی ماده همگن بوده و برابر با $\mu=2\left(\mu_{10}+\mu_{01}\right)$ می‌باشد[۳۶].

در شکل ۱۱ به بررسی تغییرات تنش کوشی شعاعی بر حسب r، با n های مختلف، برای حالت حل دقیق یا تحلیلی پرداخته شده است. همان طور که در شکل دیده می‌شود با افزایش n، ماکزیمم مقدار تنش کوشی شعاعی، کاهش یافته و همچنین این ماکزیمم مقدار در قسمت‌های داخلی‌تر سطح مقطع نمایان می‌شود. چنانچه نسبت تنش برای $n=1$ و $n=5$ در نقطه میانی محاسبه شود حدود ۱/۲ بوده که بیانگر کاهش تنش با افزایش n می‌باشد و این بدان معنی است که با افزایش n ماده مقاوم‌تر شده، در نتیجه تنش کاهش می‌یابد.

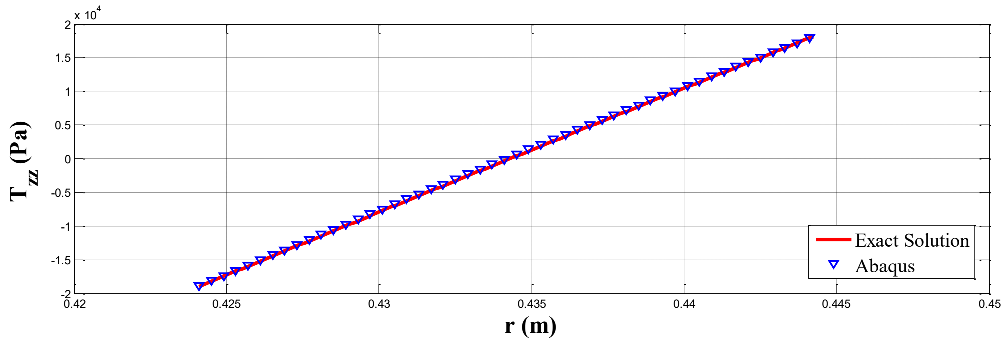
در شکل ۱۲ به بررسی تغییرات شعاع انحناء نسبت به افزایش n پرداخته شده است. نسبت ρ برای $n=1$ و $n=5$ حدود ۰/۹ بوده که بیانگر افزایش ρ با افزایش n می‌باشد پس با افزایش n، شعاع انحناء زیاد شده که بیانگر افزایش مقاومت ماده در برابر خمش و تغییر شکل مقطع است. بنابراین با افزایش n مقاومت ماده در برابر تغییر شکل بیشتر، لذا تغییر شکل ماده کمتر می‌شود در نتیجه تنش کمتری به ماده در راستای اعمال جابجایی وارد می‌شود.

در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ به ترتیب، مقایسه بین تنش‌ها بر حسب



شکل ۹: مقایسه بین روش حل دقیق و حل عددی در حالت همگن برای تنش کوشی محیطی

Fig. 9. Comparison between Exact Solution and numerical Solution in Homogeneous Mode for Circumferential Cauchy stress



شکل ۱۰: مقایسه بین روش حل دقیق و حل عددی در حالت همگن برای تنش کوشی محوری

Fig. 10. Comparison between Exact Solution and numerical Solution in Homogeneous Mode for Axial Cauchy stress

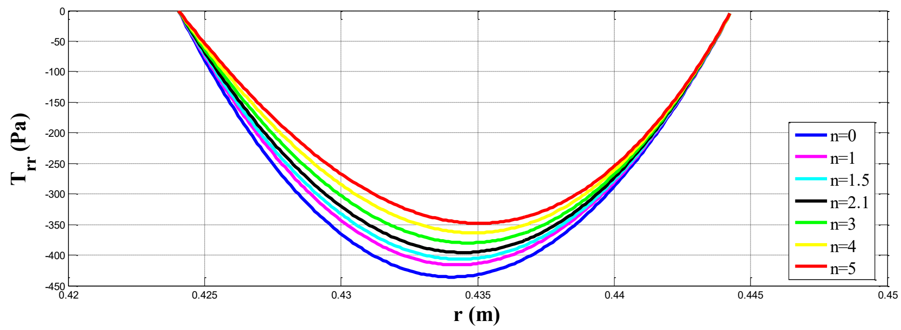
شعاع، در دو حالت حل دقیق و حل نرم‌افزاری برای حالت مدرج تابعی، نشان داده شده است.

درصد خطای ایجاد شده بین دو روش حل دقیق و حل نرم‌افزاری برای سه تنش کوشی شعاعی، محیطی و محوری، به طور میانگین کمتر از ۱۰ درصد می‌باشد.

در مدل‌سازی المان محدود همان طور که قبلاً اشاره شد، تیر به صورت ۵ لایه مدل شد. در شکل ۱۶ و ۱۷ یک مقایسه بین حالت ۵ لایه، ۱۰ لایه، ۱۵ لایه و ۲۰ لایه انجام شده است که حاکی از اختلاف ناچیز بین مقادیر تنش شعاعی در مدل‌ها است و توجیه کننده علت استفاده از مدل ۵ لایه در این مقاله می‌باشد. یکی از روش‌های مرسوم برای مدل‌سازی رفتار مواد مدرج تابعی، لایه لایه در نظر گرفتن آن‌هاست (کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای) [۳۹]، هر چه تعداد لایه‌ها افزایش یابد، رفتار ماده به رفتار مواد مدرج تابعی نزدیک‌تر می‌شود. با توجه به شکل ۱۶، تغییر تعداد لایه‌ها موجب تغییر در تنش‌های شعاعی می‌شود. اما این تغییرات در حدود ۰/۳۴ درصد بوده که مقدار ناچیزی برای تغییرات می‌باشند. بنابراین می‌توان به این نتیجه رسید که با دقت قابل قبولی تعداد ۵ لایه می‌تواند نتایج مطلوب را حاصل کند. در شکل ۱۶، مقدار ماکزیمم تنش شعاعی بین چند لایه‌های مذکور نشان داده شده است.

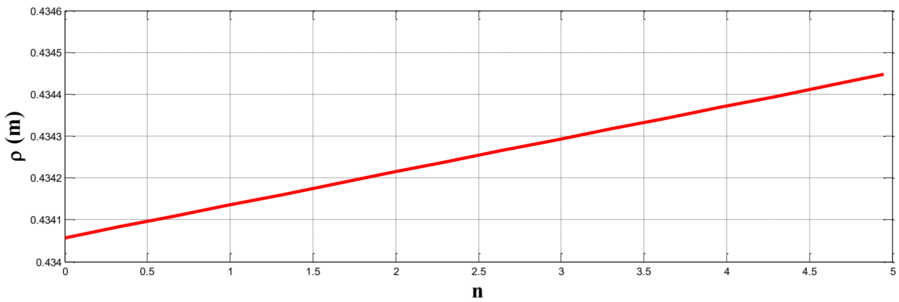
در شکل ۱۸ به بررسی اثر تغییر ضخامت، در تنش وارد شده به سطح مقطع پرداخته می‌شود. همانطور که در شکل دیده می‌شود با افزایش ضخامت سطح مقطع، با توجه به اینکه میزان خمش در هر سه مقطع یکسان می‌باشد، تنش نیز افزایش می‌یابد. واضح است که در مقاطع جدار نازک، تغییرات تنش اندک است ولی در مقاطع جدار ضخیم اینگونه نیست.

شکل ۱۹ به بررسی تغییر خواص در راستای ضخامت به صورت توانی می‌پردازد. مدل استفاده شده برای تغییر خواص در این مقاله به صورت خطی بوده و در این جا همانطور که اشاره شد، یک مقایسه برای توان‌های مختلف صورت گرفته است. معادله به کار برده شده برای بررسی تغییر خواص به صورت توانی، به صورت رابطه (۳۱)



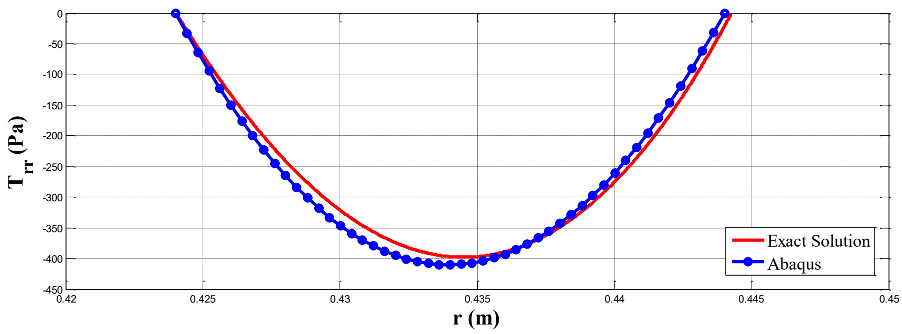
شکل ۱۱: بررسی تغییرات تنش کوشی شعاعی بر حسب *r*، با *n* های مختلف

Fig. 11. Investigation of the variation of the radial Cauchy stress in *r* for different *n*



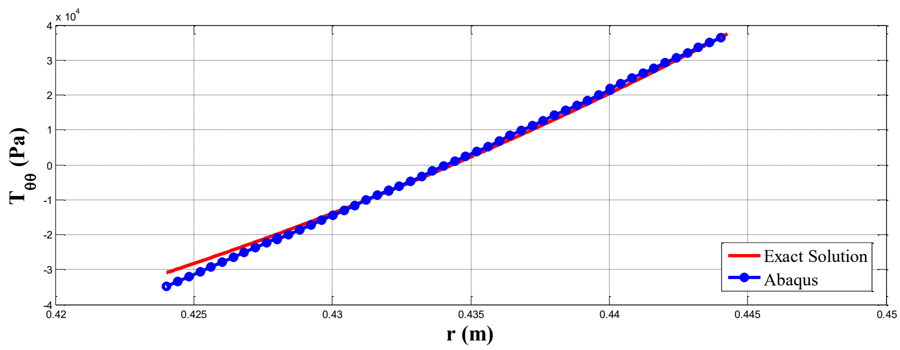
شکل ۱۲: بررسی تغییرات شعاع انحناء نسبت به n

Fig. 12 Investigation of the curvature radius changes relative to n



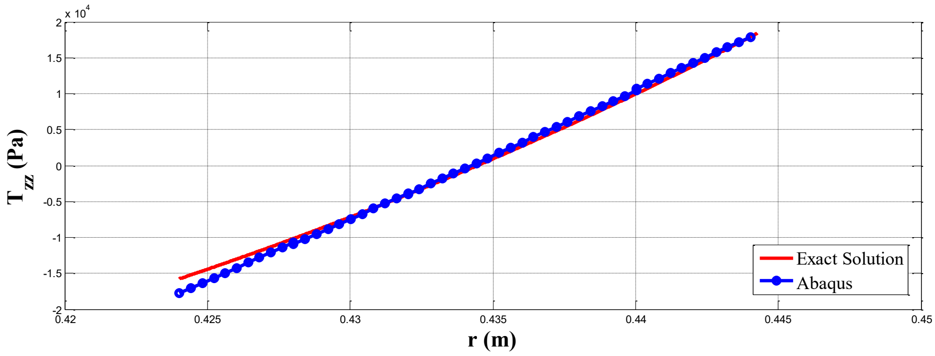
شکل ۱۳: مقایسه نتایج حل تئوری و عددی برای تنش کوشی شعاعی

Fig. 13. Comparison of theoretical and numerical solution results for radial Cauchy stress



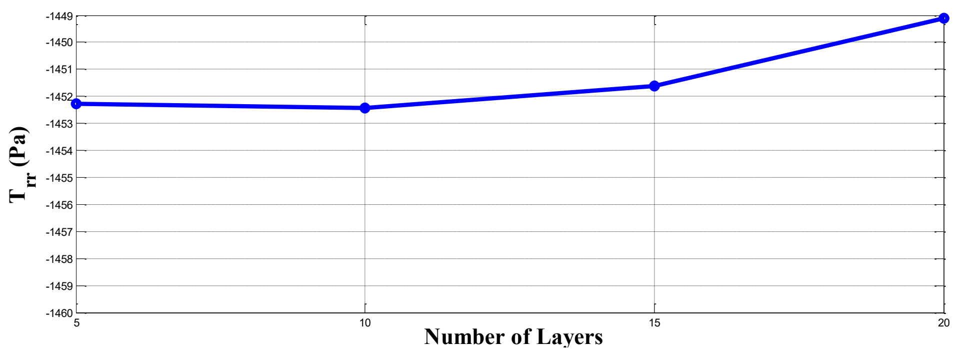
شکل ۱۴: مقایسه نتایج حل تئوری و عددی برای تنش کوشی محیطی

Fig. 14. Comparison of theoretical and numerical solution results for circumferential Cauchy stress



شکل ۱۵: مقایسه نتایج حل تئوری و عددی برای تنش کوشی محوری

Fig. 15. Comparison of numerical and theoretical solution results for axial Cauchy stress



شکل ۱۶: مقایسه مقدار تنش شعاعی ماکزیمم، بین مدل‌های ۵ لایه، ۱۰ لایه، ۱۵ لایه و۲۰ لایه

Fig. 16. Comparison of maximum radial stress values between 5 layers, 10 layers, 15 layers and 20 layers

می‌باشد [۴۰].

$$\mu(r)=\mu_{10Si}+\left(\mu_{10NR}-\mu_{10Si}\right)\left[\frac{r^n-r_1^n}{r_2^n-r_1^n}\right] \quad (۳۱)$$

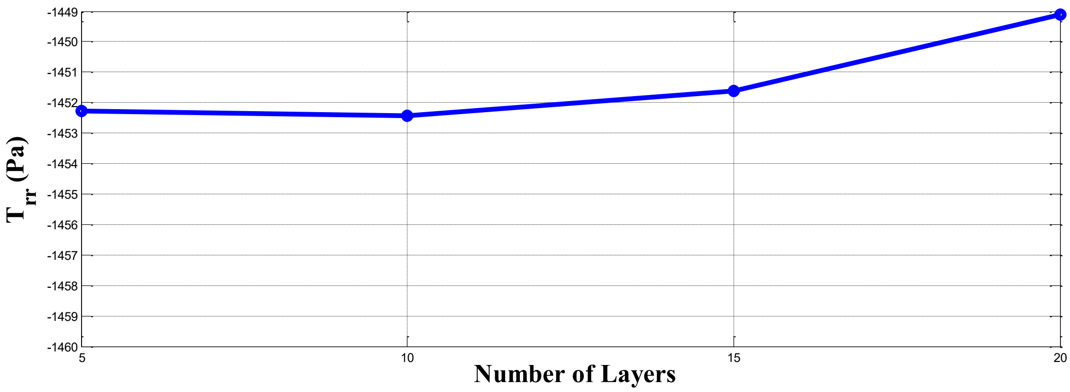
۶- نتایج و بحث

با استفاده از روش به کار گرفته شده در فرمول‌بندی روابط ساختاری در این مقاله، معادلات جدیدی برای توصیف رفتار مقطع مستطیلی هایپرالاستیک تراکم ناپذیر ایزوتروپ ناهمگن تحت خمش به دست می‌آید. با مقایسه روش حل دقیق به کار گرفته شده در این مقاله با مدل عددی، نتیجه گرفته می‌شود که این روابط دقت خوبی دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فرضیات ساده کننده‌ای از جمله صفر بودن تنش‌های برشی، فرضیات خوب و صحیحی هستند. در حل عددی، از دو فرم قوی معادلات مثل روش ریتز که از سری‌ها کمک گرفته می‌شود؛ و فرم ضعیف معادلات مانند المان محدود در آباکوس که در آن از انتگرال‌گیری بهره گرفته می‌شود، استفاده می‌شود، که در هر دو روش تقریب وجود دارد و طبیعتاً در جواب‌ها خطا ایجاد می‌کند. اما مزیت کار این مقاله، در این است که از معادلات تعادل مستقیم انتگرال‌گیری کرده و هیچ خطایی ناشی از روش عددی در آن وجود ندارد.

همان طور که در بالا اشاره شد، با توجه به اشکال ۱۳ تا ۱۵ و مقایسه دو روش مشخص می‌شود که یک هم پوشانی تقریباً مناسبی بین دو روش تحلیلی و عددی وجود دارد و با توجه به اینکه در روش عددی به جای کد نویسی در نرم افزار از روش جایگزین ساده‌تری برای مدل سازی ماده غیر همگن استفاده شده است، نتایج حاصل از نرم افزار تقریباً با نتایج حل دقیق متناسب می‌باشند.

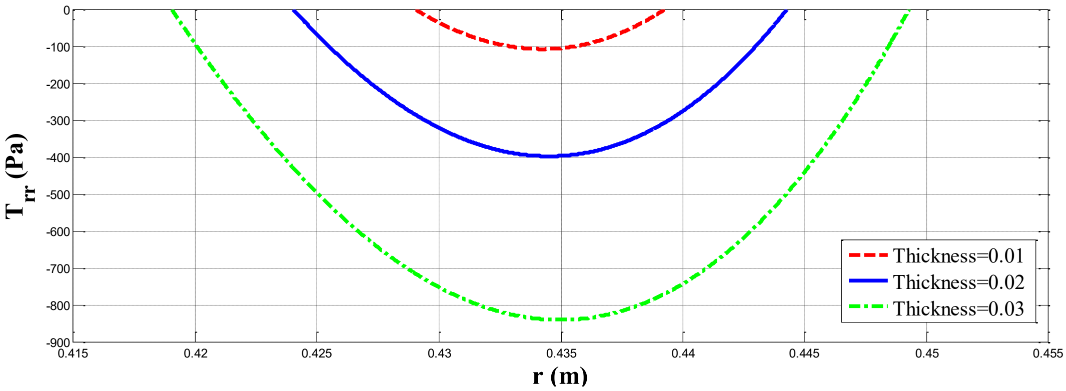
۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل سازی رفتار هایپرالاستیک لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی و استخراج روابط تنش کوشی حاکم بر سطح مقطع، ناشی از این بارگذاری صورت گرفته است. برای مدل سازی از تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته استفاده شده و تغییر خواص در راستای شعاعی در نظرگرفته شده و تغییرات



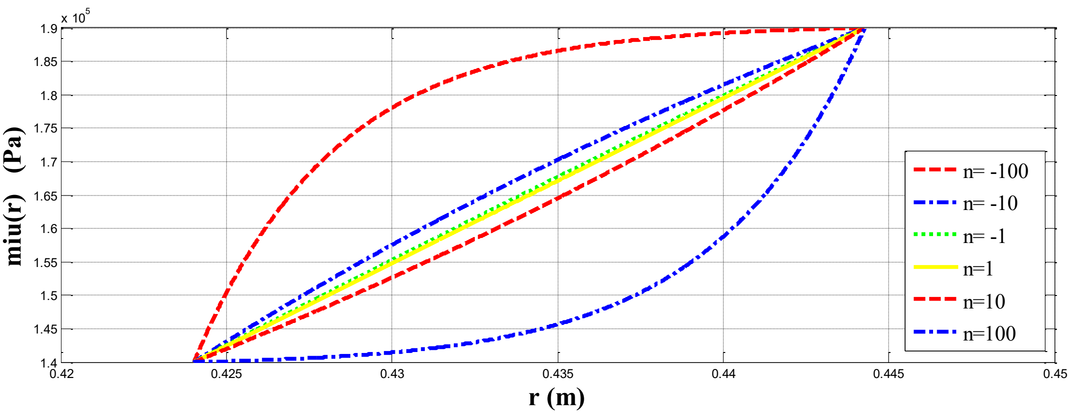
شکل ۱۷: مقایسه مقدار تنش شعاعی، بین مدل‌های ۵ لایه، ۱۰ لایه، ۱۵ لایه و۲۰ لایه

Fig. 17. Comparison of radial stress values between 5 layers, 10 layers, 15 layers and 20 layers



شکل ۱۸: بررسی اثر تغییر ضخامت در تنش وارده به سطح مقطع

Fig. 18. Effect of the change of the thickness in the stress applied to the cross-section



شکل ۱۹: بررسی تغییر خواص در راستای ضخامت به صورت توانی

Fig. 19. Changing of the properties along the thickness in power mode

ناهمگنی نیز بررسی و ارائه گردید. در نهایت نتایج تحلیلی به دست آمده با نتایج عددی مقایسه شده و مشخص گردیده که توابع به کار برده شده، با تقریب بسیار خوبی رفتار ماده را توصیف می‌کنند.

با توجه به نتایج به دست آمده، موارد زیر نتیجه‌گیری می‌شود:

- روش استفاده شده جهت تحلیل و بررسی رفتار خمشی ماده مدرج تابعی و استخراج روابط تنش‌های کوشی، با تقریب نسبتاً خوبی رفتار ماده را با توجه به نتایج عددی توصیف می‌کند.
- نحوه مدل کردن مواد مدرج تابعی در نرم افزار آباکوس به صورت لایه لایه‌ای و معین کردن خواص هر لایه به صورت تدریجی، می‌تواند تا حدود زیادی مدل‌سازی مناسب این گونه مواد را در نرم افزار، امکان‌پذیر کند.
- با مدل سازی مواد مدرج تابعی در نرم افزار آباکوس، مشخص شد که افزایش تعداد لایه‌ها برای مدل کردن این گونه مواد، تأثیر چندانی در افزایش دقت تحلیل این نرم افزار ندارد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

$\boldsymbol{B}$	تانسور کوشی-گرین چپ
$\boldsymbol{B}^{-1}$	معکوس تانسور کوشی گرین چپ
C_1,C_2	ثوابت تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته، Pa
$\boldsymbol{F}$	تانسور گرادیان تغییر شکل
$\boldsymbol{I}$	تانسور یکه (ماتریس همانی)
I_1, I_2, I_3	ناورداهای اصلی تانسور کوشی گرین چپ
n,m	درجه ناهمگنی ماده
p	فشار هیدرواستاتیک، Pa
r	شعاع مقطع پس از خمش، m
r_1, r_2	شعاع داخلی و خارجی مقطع پس از خمش، m
$\boldsymbol{T}$	تانسور تنش کوشی
T_{rr}	تنش کوشی شعاعی، Pa
$T_{\theta\theta}$	تنش کوشی محیطی، Pa
T_{zz}	تنش کوشی محوری، Pa
W	تابع انرژی
X,Y,Z	مختصات کارتزین
r,θ,z	مختصات استوانه‌ای

علائم یونانی

λ	کشیدگی
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	کشش‌های اصلی
μ	مدول برشی ماده، Pa
μ_{10}, μ_{01}	ثوابت تابع انرژی مونی-ریولین، Pa
ρ	شعاع انحناء، m

مراجع

[1] Y. Anani, G.H. Rahimi, Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load, (2016).

[2] L. R. G. Terloar, The Physics of Rubber Elasticity, Oxford University Press, New York, (2005).

[3] E. M. Arruda, M. C. Boyce, A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 41(2) (1993) 389-412.

[4] H. M. James, E. Guth, Theory of the elastic properties of rubber, The Journal of Chemical Physics, 11(10) (1943) 455-481.

[5] P. Flory, Theory of elasticity of polymer networks. The effect of local constraints on junctions, The Journal of Chemical Physics, 66(12) (1977) 5720-5729.

[6] F. T. Wall, P. J. Flory, Statistical thermodynamics of rubber elasticity, The Journal of Chemical Physics, 19(12) (1951) 1435-1439.

[7] L. A., A Constitutive Model for Carbon Black Filled Rubber: Experimental Investigation and Mathematical Representation, j. of Continuum Mechanics and Thermodynamics, 8(3) (1996) 153-169.

[8] T. J. Van Dyke, A. Hoger, A comparison of second-order constitutive theories for hyperelastic materials, International journal of solids and structures, 37(41) (2000) 5873-5917.

[9] B. Meissner, L. Matějka, Comparison of recent rubber-elasticity theories with biaxial stress–strain data: the slip-link theory of Edwards and Vilgis, Polymer, 43(13) (2002) 3803-3809.

[10] M. M. Attard, Finite strain—isotropic hyperelasticity, International Journal of Solids and Structures, 40(17)

to moderate strains, Computers & structures, 84(15-16) (2006) 1012-1028.

[22] A. J. Gil, B. J., Wrinkling analysis of prestressed hyperelastic Saint Venant-Kirchhoff membranes, In: Metro R, editor. Shell and spatial structures: from models to realization. IASS, (2004).

[23] E. S. Flores, S. Adhikari, M. Friswell, F. Scarpa, Hyperelastic finite element model for single wall carbon nanotubes in tension, Computational Materials Science, 50(3) (2011) 1083-1087.

[24] E. Bilgili, Modelling mechanical behaviour of continuously graded vulcanised rubbers, Plastics, rubber and composites, 33(4) (2004) 163-169.

[25] R. Batra, Finite plane strain deformations of rubberlike materials, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(1) (1980) 145-156.

[26] E. Bilgili, Controlling the stress–strain inhomogeneities in axially sheared and radially heated hollow rubber tubes via functional grading, Mechanics Research Communications, 30(3) (2003) 257-266.

[27] R. Batra, Optimal design of functionally graded incompressible linear elastic cylinders and spheres, AIAA journal, 46(8) (2008) 2050-2057.

[28] G. Nie, R. Batra, Material tailoring and analysis of functionally graded isotropic and incompressible linear elastic hollow cylinders, Composite structures, 92(2) (2010) 265-274.

[29] G. Nie, R. Batra, Exact solutions and material tailoring for functionally graded hollow circular cylinders, Journal of Elasticity, 99(2) (2010) 179-201.

[30] G. Nie, Z. Zhong, R. Batra, Material tailoring for functionally graded hollow cylinders and spheres, Composites Science and Technology, 71(5) (2011) 666-673.

[31] R. Batra, Material tailoring and universal relations for axisymmetric deformations of functionally graded rubberlike cylinders and spheres, Mathematics and Mechanics of Solids, 16(7) (2011) 729-738.

[32] R. Batra, Material tailoring in finite torsional

(2003) 4353-4378.

[11] M. M. Attard, G. W. Hunt, Hyperelastic constitutive modeling under finite strain, International Journal of Solids and Structures, 41(18-19) (2004) 5327-5350.

[12] L. Treloar, Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation, Transactions of the Faraday Society, 40 (1944) 59-70.

[13] M. M. Attard, Finite strain—beam theory, International journal of solids and structures, 40(17) (2003) 4563-4584.

[14] M. M. Attard, G. W. Hunt, Column buckling with shear deformations—a hyperelastic formulation, International Journal of Solids and Structures, 45(14-15) (2008) 4322-4339.

[15] M. M. Attard, M. Y. Kim, Lateral buckling of beams with shear deformations–A hyperelastic formulation, International Journal of Solids and Structures, 47(20) (2010) 2825-2840.

[16] Y. Anani, Behavioral Modeling of Large-Deformed Rubber Based on the Model of Visco-Hyperelastic and Comparison with Experimental Results, Master's Thesis, Mechanical Engineering of Sharif University of Technology (2007).

[17] A. Z. Kafi M. A., Bazaz M., Use of Hyperelastic materials to increase the stiffness of braces, First National Conference on Structural and Steel, Steel Structures Association of Iran, Tehran, (2010).

[18] M. Saje, G. Jelenić, Finite element formulation of hyperelastic plane frames subjected to nonconservative loads, Computers & structures, 50(2) (1994) 177-189.

[19] H. Altenbach, V. Eremeyev, On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses, International Journal of Non-Linear Mechanics, 45(10) (2010) 976-981.

[20] N. Kumar, A. DasGupta, On the contact problem of an inflated spherical hyperelastic membrane, International Journal of Non-Linear Mechanics, 57 (2013) 130-139.

[21] A. J. Gil, Structural analysis of prestressed Saint Venant–Kirchhoff hyperelastic membranes subjected

[36] L. M. Kanner, C. O. Horgan, Plane strain bending of strain-stiffening rubber-like rectangular beams, in: International Journal of Solids and Structures, 2008, pp. 1713-1729.

[37] Y. B. Fu, R. W. Ogden, Nonlinear elasticity: theory and applications, Cambridge University Press, 2001.

[38] L. Meunier, G. Chagnon, D. Favier, L. Orgéas, P. Vacher, Mechanical experimental characterisation and numerical modelling of an unfilled silicone rubber, Polymer Testing, 27(6) (2008) 765-777.

[39] A. A. Khan, M. Naushad Alam, M. Wajid, Finite element modelling for static and free vibration response of functionally graded beam, Latin American Journal of Solids and Structures, 13(4) (2016) 690-714.

[40] M. Foroutan, R. Moradi-Dastjerdi, R. Sotoodeh-Bahreini, Static analysis of FGM cylinders by a mesh-free method, Steel & Composite Structures, 12(1) (2012) 1-11.

deformations of axially graded Mooney–Rivlin circular cylinder, Mathematics and Mechanics of Solids, 20(2) (2015) 183-189.

[33] Y. Anani, R. Naghdabadi, R. Avazmohammadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of foams in uniaxial tension, Proceedings of The 16th International Conference on Iranian Society of Mechanical Engineering(ISME 2008) Kerman, Iran. (in Persian), (2008).

[34] Y. Anani, R. Naghdabadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of rubbers in uniaxial tension, Proceedings of 7th Conference of Iranian Aerospace Society(AERO 2008), Tehran, Iran. (in persian) (2008).

[35] Y. Anani, G. H. Rahimi, Field equations and general solution for axisymmetric thick shell composed of functionally graded incompressible hyperelastic materials, International Journal of Mechanical Sciences, (2017).