Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(11) (2021) 769-770
DOI: 10.22060/mej.2019.14961.5984

Numerical Solution of Viscoplastically Lubricated Multi-layer Core-Annular Flow Using the Spectral Element Method

M. Parsaei[1], M. Sefid[1], A. A. Dehghan[1*], A. Jafari[2], E. Izadpanah[3]

[1] Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran
[2] Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
[3] Department of Mechanical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iran

ABSTRACT: The aim of this research is to simulate a multi-layer flow of the core-annular type in a two-dimensional channel, in which a Newtonian fluid in the core is surrounded by a viscoplastic fluid of the regularized Bingham type. This simulation is based on the volume of fluid method. Flow and concentration equations are discretized spatially by the spectral element method. The velocity correction scheme, as a high order algorithm, is developed for splitting the velocity and pressure variables. Considering a developed flow leads to a nonlinear equation in the plastic region of the flow, which is numerically solved and is called semi-analytic solution and along with the previously published works, is used to validate the spectral element results. The effect of the main parameters of the flow, i.e. Bingham number, viscosity ratio and core thickness on the pressure drop and un-yielded region thickness is evaluated. The results show that the Bingham number is the most effective parameter on the pressure drop and un-yielded region thickness. Also the profiles of secondary variables, including apparent viscosity and shear stress, across the channel section are presented and show that in the interface of the fluids, there is a difference between numerical and semi-analytic solutions.

Review History:

Received: 2018/09/11
Revised: 2018/12/12
Accepted: 2019/02/04
Available Online: 2019/02/09

Keywords:

Spectral element method
Core-annular flow
Two-dimensional channel
Viscoplastic lubrication
Semi-analytic solution

1- Introduction

The core- annular arrangement of two immiscible fluids has applications in multi-layer extrusion, film coating, and heavy oil transportation. The stability of flow regime may be the most challenging problem in this field [1]. A proposed solution to overcome this problem is employing a viscoplastic fluid as the lubricant [2].

A viscoplastic or yield stress fluid is a kind of fluid which behaves like a solid until the loading stress reaches a threshold value, i.e. yield stress, τ_Y, afterward it starts to show viscous behavior like a fluid. When the interfacial shear stress is smaller than the yield stress, an un-yielded solid-like layer will be formed in the boundary of two fluids and leads to suppression of possible instabilities.

In the present work, a high order splitting scheme, which is based on spectral element discretization, is developed to model the core- annular multi- layer flow with viscoplastic lubrication in a two-dimensional channel. Moreover, a semi-analytic solution for the developed flow region is developed and solved using Wolfram language and is used for validating the numerical solution. The effect of hydrodynamic parameters, i.e. inlet core thickness and viscosity ratio, and rheological parameters like Bingham number (dimensionless yield stress) on the un-yielded region thickness is evaluated and discussed.

*Corresponding author's email: adehghan@yazd.ac.ir

2- Methodology

2- 1- Governing equations

The sketch of the present work may be seen in Fig. 1. The channel initially is filled with a viscoplastic fluid at the rest. At t = 0, a Newtonian fluid enters the channel through the core region, of thickness $2Y_i$, and simultaneously, the lubricant fluid is driven due to the applied pressure gradient through the outer layers (annulus). Both fluids have the same velocity at the inlet.

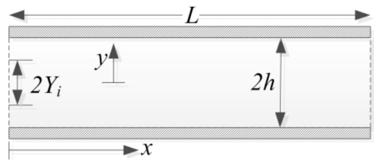


Fig. 1. Sketch of the problem

The volume of fluid method is used to model the two phase flow. In this method, the same momentum and continuity equations are solved for the whole domain and a concentration equation is employed to track the presence of each fluid in the whole region. Dimensionless governing equations are as:

$$
\begin{aligned}
&u_{j,j}=0,\\
&\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right]u_i=\frac{1}{Re}\tau_{ij}-P_{,i},\\
&\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{Pe}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\right]C=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

In which u, P and C are velocity, pressure, and concentration, respectively and τ_{ij} is the deviatoric stress tensor that can be calculated by harmonic interpolation through:

$$\tau_{ij}=\left(\frac{C}{\tau_{ij}^{[1]}}+\frac{1-C}{\tau_{ij}^{[2]}}\right)^{-1}. \tag{2}$$

The superscripts 1 and 2 are for core and annular fluids, respectively. The constitutive equation for the two fluids is as:

$$\tau_{ij}^{[1]}=r_\mu\dot{\gamma}_{ij},$$
$$\tau_{ij}^{[2]}=\left(1+\frac{Bn}{\sqrt{\dot{\gamma}^2+\varepsilon^2}}\right)\dot{\gamma}_{ij}=\mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{ij}, \tag{3}$$

The regularized Bingham model is used for the viscoplastic fluid. The strain scalar is as:

$$\dot{\gamma}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{3}\dot{\gamma}_{ij}^{2}\right]}. \tag{4}$$

The dimensionless groups in the Eqs. (1) to (4) are:

$$r_\mu=\frac{\mu_1}{\mu_2},\ Re=\frac{\rho Uh}{\mu_2},\ Pe=\frac{Uh}{D_m},\ Bn=\frac{h}{\mu_2 U}\tau_Y, \tag{5}$$

In which, ρ is the density of both fluids, h and U are characteristic length and velocity, respectively, μ is viscosity and D_m is the molecular diffusion coefficient.

Developed and steady flow considerations lead to a series of equations, which can be solved numerically by trial error method, to find the velocity profile and pressure drop in the developed region. This solution, which is achieved through a code in Wolfram language, is labeled as Semi-Analytic (SA) solution and used for the comparison with Spectral Element Method (SEM) results.

3- Numerical method

The rectangular domain is decomposed into a number of quadrilateral elements and then each element is transformed into a standard coordinate element using a mapping system. Every unknown value is approximated on this standard element through a modal expansion based on Legendre function. After linearization, all of the equations can be seen as a general Helmholtz equation. The spectral element discretization of the Helmholtz equation is the key part of the multi-step algorithm that is used to decouple the primitive variables, i.e. u, v, P and C. This algorithm is called velocity correction scheme and basically is used for the Navier-Stokes equations [3].

In the present work, the velocity correction scheme is developed in two steps. The first step is to upgrade the solver for Helmholtz equation with variable diffusion coefficient. This coefficient is used for the two phase flow with viscoplastic lubrication and is defined as:

$$D(\dot{\gamma},C)=\left[\frac{C}{r_\mu}+\frac{1-C}{\mu(\dot{\gamma})}\right]^{-1}, \tag{6}$$

which is called the total apparent viscosity. The second step is to add a class to the basic solver for considering the concentration equation. These developments have been implemented on the Nektar++ framework to give the desired solver.

4- Results and Discussion

In Fig. 2, SEM, SA and the numerical results by Hormozi et al. [4] for the outflow profile of x- velocity component, u, is presented. A good agreement between these three cases can be observed. The uniform distribution of velocity is related to the un-yielded region where the viscosity goes to infinity and strain approaches to zero.

The contour of total apparent viscosity is presented in Figure 3. The results of Figs. 2 and 3 are achieved for Re = 5, Bn = 10, r_μ = 1 and Y_i = 0.44. The total apparent viscosity has the highest value in the un-yielded region.

5- Conclusions

A two-dimensional multi-layer core-annular flow with Bingham plastic fluid as the lubricant has been studied in this paper. The volume of fluid method has been used for the two phase flow modeling and the governing equation has been discretized spatially by the spectral element method. A high order multi-step splitting algorithm has been implemented on the Nektar++ framework. Moreover, a semi-analytic solution for the developed flow has been achieved by using a Wolfram code in Mathematica for comparing with the SEM one. The results show that the Bingham number is the most effective parameter on the pressure drop and un-yielded region thickness.

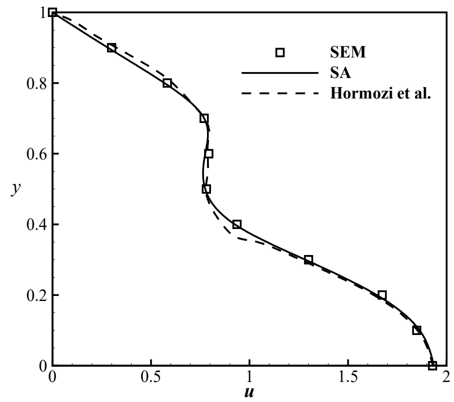


Fig. 2. Comparison of SEM and SA results of the channel outflow velocity profiles with the work of Hormozi et al. [4].

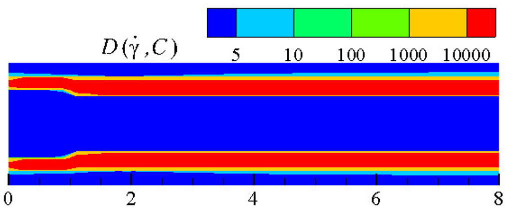


Fig. 3. SEM contour of total apparent viscosity

6- References

[1] S. Ghosh, T.K. Mandal, G. Das, P.K. Das, Review of oil water core annular flow, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 13(8) (2009) 1957-1965.

[2] I.A. Frigaard, Super-stable parallel flows of multiple visco-plastic fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 100(1–3) (2001) 49-75.

[3] G.E. Karniadakis, S.J. Sherwin, Spectral/hp Element Methods for CFD, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, (1999).

[4] S. Hormozi, K.W. Burchard, I.A. Frigaard, Multi-layer channel flows with yield stress fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166(5–6) (2011) 262-278.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱۱، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۱۰۷ تا ۳۱۲۴
DOI: 10.22060/mej.2019.14961.5984

حل عددی جریان چندلایه هسته- حلقه با روان‌کار ویسکوپلاستیک به روش المان طیفی

مهران پارسایی[۱]، محمد سفید[۱]، علی‌اکبر دهقان[۱*]، آزاده جعفری[۲]، احسان ایزدپناه[۳]

[۱]دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران
[۲]دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[۳]دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

خلاصه: هدف پژوهش حاضر شبیه‌سازی جریان چندلایه از نوع هسته- حلقه درون یک کانال دوبعدی است که در آن سیال نیوتنی در هسته قرار گرفته و بوسیله سیال ویسکوپلاستیک از نوع نظم‌یافته بینگهام به عنوان روان‌کار احاطه شده است. این شبیه‌سازی بر اساس تکنیک حجم سیال انجام گرفته است. معادلات جریان و غلظت، به روش المان طیفی گسسته‌سازی مکانی شده‌اند. طرح تصحیح سرعت، به عنوان یک الگوریتم مرتبه بالا، برای جداسازی متغیرهای سرعت و فشار برای جریان دو فاز با روان‌کار ویسکوپلاستیک، توسعه داده شده است. اعمال فرضیات جریان توسعه یافته، منجر به معادله غیرخطی در ناحیه پلاستیک جریان می‌شود که به صورت عددی حل شده و به عنوان حل نیمه تحلیلی شناخته می‌شود و برای اعتبار سنجی نتایج المان طیفی، در کنار کارهای گذشته، استفاده شده است. اثر پارامترهای اصلی جریان، یعنی عدد بینگهام، نسبت لزجت دو سیال و ضخامت هسته، بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که عدد بینگهام تأثیر بیشتری بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده دارد. همچنین توزیع متغیرهای ثانویه، شامل لزجت ظاهری و تنش برشی، در مقطع کانال ارائه شده و نشان می‌دهد وجود اختلاط در مرز دو سیال، باعث تفاوت بین حل عددی و نیمه‌تحلیلی می‌گردد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۰-۰۶-۱۳۹۷
بازنگری: ۲۱-۰۹-۱۳۹۷
پذیرش: ۱۵-۱۱-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۲۰-۱۱-۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
روش المان طیفی
جریان هسته- حلقه
کانال دوبعدی
روان‌کار ویسکوپلاستیک
حل نیمه‌تحلیلی

۱- مقدمه

آرایش جریان دو سیال غیر قابل اختلاط در کانال به نحوی که معمولاً سیال با لزجت کمتر در ناحیه با نرخ برش بیشتر- یعنی در مجاورت مرز جامد- مانند یک روان‌کار قرار گیرد، به صورت عمده، در انتقال سیالات سنگین، اکستروژن و پوشش سطحی قابل مشاهده است. در این حالت، یک الگوی هسته- حلقه یا چندلایه ساندویچی (در حالت دوبعدی) شکل می‌گیرد [۱]. البته شایان ذکر است که مهمترین بخش از کاربردهای جریان هسته- حلقه به انتقال سیالات سنگین و به ویژه انتقال نفت سنگین، بوسیله روان‌کار آب، مربوط است که در سالهای اخیر تقاضا برای آن به نحو چشمگیری افزایش یافته است [۲].

ایده تزریق آب به خط لوله انتقال نفت برای کاهش افت فشار و در نتیجه توان پمپاژ، نخستین بار در ۱۹۵۰ میلادی بوسیله کلارک و شاپیرو [۳] مطرح شد و منجر به دسته ای مهم از کارهای پژوهشی در این حوزه گردید که تا حال ادامه دارد. دو هدف عمده در اکثر این کارها دنبال می‌شود؛ که یکی مبتنی بر تشخیص الگوی هیدرودینامیک حاکم بر جریان و تعیین افت فشار و توان پمپاژ است و دیگری متمرکز بر تعیین شرایطی است که در آن این الگوی جریان، در مدت زمان طولانی و در یک طول مسیر قابل توجه، پایدار بماند [۴].

یک استراتژی مهم برای حل مسأله پایداری جریان استفاده از سیال ویسکوپلاستیک به عنوان روان‌کار است. سیالات ویسکوپلاستیک در دسته سیالات لزج خالص قرار می‌گیرند. مشخصه رفتاری چنین سیالی، وجود تنش تسلیم، τ_Y، است که شرط لازم برای تغییر فرم ویسکوز گذشتن تنش اعمالی خارجی از مقدار آن است و پس از آن رفتار تنش- کرنش ممکن است خطی و یا غیر خطی باشد؛ و اگر به عکس، مقدار تنش اعمالی از تنش تسلیم کمتر باشد رفتار جامد از خود نشان می‌دهند. گل حفاری، مواد غذایی، بیولوژیک، معدنی، مذاب آتشفشان و بسیاری از پلیمرهای صنعتی در دسته سیالات

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: adehghan@yazd.ac.ir

ویسکوپلاستیک هستند[۵]. سه مدل ریاضی متداول برای توصیف رفتار سیالات ویسکوپلاستیک وجود دارد؛ شامل بینگهام، کیسون و هرشل-بالکلی که از این میان مدل بینگهام ساده‌ترین و متداول‌ترین مدل است [۶] که به صورت:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{ij} = 0 & \text{for} \quad \tau(\dot{\gamma}) \le \tau_Y \,, \\ \tau_{ij} = \left(\dfrac{\tau_Y}{\dot{\gamma}} + \mu_B \right) \dot{\gamma}_{ij} & \text{for} \quad \tau(\dot{\gamma}) > \tau_Y \,, \end{cases} \qquad (۱)$$

می‌باشد. که در آن μ_B، لزجت سیال بینگهام در ناحیه تسلیم است و پارامترهای $\tau(\dot{\gamma})$ و $\dot{\gamma}$ به ترتیب اسکالرهای تنش و نرخ کرنش هستند؛ که به صورت:

$$\tau(\dot{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij}^{2}\right]}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{3} \dot{\gamma}_{ij}^{2}\right]}, \qquad (۲)$$

تعریف می‌شوند. که در آن:

$$\dot{\gamma}_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \,, \qquad (۳)$$

مؤلفه تانسور نرخ کرنش است.

معادله بینگهام یک معادله دوضابطه‌ای است و بهتر است یک منحنی هموار تک‌ضابطه را جایگزین رابطه تکه‌ای (۱) نمود که در مسائل ریاضی کار با آن راحت‌تر است. از نظر فیزیکی نیز لزجت بینهایت در شرایط تسلیم، قابل قبول نیست و منطقی‌تر است که لزجت بزرگ ولی محدود باشد [۷]. بنابراین باید به دنبال یک مدل هموار بود که رابطه تنش- کرنش سیال بینگهام را برازش کند. به این گونه مدل‌ها که همراه با معرفی پارامترهای برازش منحنی هستند، مدل‌های نظم‌یافته[1] گویند. مدل‌های نظم یافته زیادی ارائه شده است. یکی از دقیق‌ترین مدل‌ها، توسط برکوویر و انگلمن [۸] پیشنهاد شده است، که به صورت:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{\tau_Y}{\sqrt{\dot{\gamma}^{2} + \varepsilon^{2}}} + \mu_B \right) \dot{\gamma}_{ij} \,, \qquad (۴)$$

می‌باشد و در کار حاضر به عنوان مدل مشخصه سیال ویسکوپلاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. در معادله (۴)، ε مقدار بسیار کوچکی است که پارامتر تنظیم نامیده می‌شود.

ایده استفاده از سیال ویسکوپلاستیک به عنوان روان‌کار و در مجاورت مرز جامد، نخستین بار بوسیله فریگارد [۹] مطرح شد. بر اساس این ایده چنانچه تنش در مرز دو سیال به مقدار تنش تسلیم، τ_Y، نرسیده باشد، یک توده تسلیم نشده در فصل مشترک دو سیال شکل می‌گیرد که مانند یک دیوار دو سیال را از هم جدا نموده و مانع ناپایداری جریان می‌شود. فریگارد به بررسی پایداری خطی جریان چند لایه مربوط به دو سیال ویسکوپلاستیک، درون کانال دوبعدی پرداخت و استنتاج کرد چنانچه سیال نزدیک به مرز جامد تنش تسلیم بیشتری داشته باشد، پایداری جریان از حالتی که تنها سیال ویسکوپلاستیک هسته (با تنش تسلیم کمتر و یا صفر) درون کانال باشد، بیشتر است و همچنین به صورت مشخص و متمایزی این جریان نسبت به جریان مشابه دو سیال نیوتنی و یا نیوتنی تعمیم‌یافته- که در آن ناپایداری‌های با طول موج کوتاه، حتی در رینولدزهای پایین بین دو لایه دیده می‌شد- پایدارتر است.

هُوِن و همکاران [۱۰] به مشاهده آزمایشگاهی جریان هسته-حلقه با روان‌کار ویسکوپلاستیک پرداختند. این کار آزمایشگاهی متشکل از چهار نوبت آزمایش با استفاده از محلول کربوپال[2] به عنوان روان‌کننده ویسکوپلاستیک با غلظت‌های مختلف و در نتیجه خواص رئولوژیکی متفاوت بود. در هر مورد جریان پایدار پیش‌بینی شده بوسیله تئوری مشاهده شد. همچنین مشاهده شده بود که علاوه بر پایداری، این جریان در دبی‌های مختلف و نسبت‌های مختلف شعاع هسته به حلقه، کاملاً متقارن است. در هر حال، آزمایش به دلیل محدودیت در توان پمپاژ دبی‌های مختلف و نیز از لحاظ تنوع خواص رئولوژیکی به دلیل نوع سیال، امکان مطالعه جامع را در این حوزه ندارد.

هرمزی و همکاران به بررسی عددی جریان با حلقه ویسکوپلاستیک درون لوله [۱۱] و کانال دوبعدی [۱۲] پرداختند. تمرکز آنان نخست بر این جنبه بود که چگونه می‌توان چنین جریانی را برقرار نمود. برای تضمین وجود توده تسلیم نشده در فصل مشترک دو سیال،

1 Regularized

2 Carbopol

مقدار عدد رینولدز کمتر از ۱۰۰ در نظر گرفته شد. آنان مشاهده کردند ناپایداری اولیه و اختلاط نامنظم در ناحیه جلویی جریان شکل می‌گیرد و با خروج از انتهای لوله یک جریان پایدار را در پشت خود به جا می‌گذارد. آنان به بررسی طول ناحیه در حال توسعه در چنین جریانی پرداختند و برای هندسه لوله [۱۱] نتایج خود را با کار آزمایشگاهی هوون و همکاران [۱۰] مقایسه کردند. طول ناحیه در حال توسعه با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد و با افزایش عدد بینگهام و نسبت لزجت دو سیال کاهش می‌یابد. جنبه دوم کار آنان بر پایداری جریان تمرکز داشت. آنان کد عددی را نخست برای جریان چند لایه دو سیال نیوتنی به کار بردند و نشان دادند به خوبی پدیده‌های مرتبط با این جریان را، که توسط دی‌آلس و همکاران [۱۳] به صورت آزمایشگاهی مشاهده شده بود، شبیه‌سازی می‌کند. سپس به مطالعه پایداری این جریان پرداختند و نشان دادند که جریان حتی در رینولدزهای بالا و دامنه زیاد اغتشاشات، که قادر است توده تسلیم نشده را بشکند، پایدار است. آنان یک حل تحلیلی بر مبنای در نظر گرفتن مدل بینگهام، که در معادله (۱) ظاهر شده است، برای سیال ویسکوپلاستیک برای جریان توسعه یافته درون کانال دوبعدی به دست آوردند و به مقایسه آن با حل عددی پرداختند. در این شبیه‌سازی معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و غلظت (کسر حجمی) حل شد. حل آنان مبتنی بر روش حجم محدود بود.

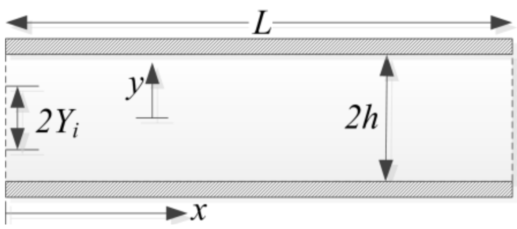
اخیراً در کار دیگری توسط سرمدی و همکاران [۱۴] جریان سه لایه درون لوله بررسی شده است که شامل یک توده ویسکوپلاستیک تسلیم نشده در بین هسته و سیال روان‌کار می‌شود. آنان با استفاده از تئوری کلاسیک روان‌کاری به بررسی اثر نسبت لزجت، هندسه و شکل هسته روی افت فشار، دبی جریان هسته و سیالات روان‌کار و نیروی وارد بر هسته پرداختند و نشان دادند که نسبت لزجت و شعاع هسته پارامترهای اصلی کنترل کننده افت فشار و دبی جریان هستند. همچنین به تخمین تنش تسلیم لازم برای وجود ناحیه تسلیم نشده اطراف هسته پرداختند.

در کار حاضر ، تلاش شده است که جنبه‌هایی از جریان چندلایه هسته- حلقه با سیال بینگهام به عنوان حلقه، در کانال دوبعدی، به روش حل عددی مورد ارزیابی قرار گیرد. اگرچه این کار قبل از این توسط هرمزی و همکاران [۱۲] صورت گرفته است، ولی نوآوری کار حاضر استفاده از روش مرتبه بالای المان طیفی برای گسسته‌سازی مکانی معادلات جریان و معادلات مشخصه است. اهمیت روش‌های مرتبه بالا از این جهت است که در آن‌ها، مرتبه اندازه خطای تقطیع عددی، در قیاس با دامنه ناپایداری‌های فیزیکی موجود در جریان، قابل صرف نظر است و بنابراین در جریان با ناپایداری‌های فیزیکی با دامنه کم و با فرکانس زیاد، استفاده از روش‌های مرتبه بالا باعث می‌شود که مدهای مزاحم عددی مانع فهم درست فیزیک جریان نشوند؛ به خصوص زمانی که مسأله پایداری جریان مطرح است [۱۵]. در کار حاضر قدم‌های اولیه در این مسیر برداشته شده است و زیربنای یک حل عددی مرتبه بالا فراهم شده است. و البته حجم محاسبات و فضای حافظه و زمان پردازش هم به نحو چشم‌گیری کاهش می‌یابد. ضرورت دیگر کار حاضر در بررسی متغیرهای ثانویه، نظیر تنش برشی و لزجت ظاهری جریان دوفاز مطرح شده می‌باشد. همچنین تلاش شده است که یک حل تحلیلی برای جریان توسعه یافته جریان هسته- حلقه نیوتنی- ویسکوپلاستیک بر اساس مدل نظم‌یافته برکوویر- انگلمن ارائه شود که قبل از این در کار دیگری مشاهده نشده است.

۲- تئوری حاکم

۲-۱- معادلات مدل

طرحواره مسأله حاضر، که در شکل ۱ نشان داده شده است، کانالی به طول $L = ۰/۸\ \text{m}$ و عرض $h = ۰/۱\ \text{m}$ می‌باشد که در ابتدا حاوی سیال ویسکوپلاستیک، در حالت سکون است. در لحظه $t = ۰$ گرادیان فشار اعمال شده و همزمان سیال هسته از طریق ورودی به عرض $۲Y_i$ وارد می‌شود. سرعت هر دو سیال ثابت فرض می‌شود به گونه‌ای که لغزشی نسبت به هم ندارند و از اثر کشش سطحی بین دو سیال صرف‌نظر می‌گردد. متوسط سرعت ورودی به کانال برابر U می‌باشد که در مسأله حاضر مقدار ثابتی برای آن فرض



شکل ۱:طرحواره مسأله حاضر

Fig. 1. The sketch of the problem

می‌شود. در خروجی کانال، فشار نسبی روی صفر ثابت شده است. برای توصیف از مختصات کارتزین استفاده شده است.

تحلیل جریان‌های دو فازی، و به طور خاص جریان هسته-حلقه‌ای، نیاز به استفاده از معادلاتی دارد که در عین ارائه تصویر درستی از ویژگی‌های فیزیکی جریان، ساده و قابل حل با کمترین هزینه‌های ممکن به لحاظ زمان و حافظه محاسباتی باشند. بدین منظور، با توجه به شرایط مسأله حاضر که فرض می‌شود دو سیال پیوسته و جدا از هم هستند، روش کسر حجمی گزینه مناسبی به نظر می‌رسد [۱۶]. در این روش معادلات پیوستگی و اندازه حرکت همراه با معادله غلظت برای معین کردن هر فاز به صورت همزمان حل می‌شوند. این کار قبل از این به وسیله محققین زیادی انجام و پیشنهاد شده است [۱۲ و ۱۷].

برای کم کردن تعداد پارامترهای حاکم بر مسأله و کاهش فضای محاسباتی ضروری، با در نظر گرفتن پارامترهای تکراری نظیر سرعت متوسط، U، نیم عرض کانال، h و چگالی دو سیال، ρ، معادلات به صورت بدون بعد ارائه می‌گردند. برای بی‌بعدسازی متغیر ها ی مستقل مسأله، از مقیاس‌های زیر استفاده شده است:

$$x_i^* = \frac{x_i}{h}, u_i^* = \frac{u_i}{U}, t^* = t\frac{U}{h}, \quad P^* = \frac{P}{\rho U^۲}, \tau_{ij}^* = \frac{h}{\mu_۲ U}\tau_{ij}. \qquad (۵)$$

پارامترهای ستاره‌دار پارامترهای بدون بعد هستند. x_i، متغیر موقعیت، u_i، سرعت، t، زمان، P، فشار و τ_{ij}، تانسور تنش است. به این ترتیب عرض کانال بین ۱- و ۱+ تغییر می‌کند. به منظور سادگی، از این به بعد پارامترهای بدون بعد به صورت بدون ستاره نوشته می‌شوند. معادلات اندازه حرکت و پیوستگی بر اساس روش کسر حجمی بدون‌بعد به صورت زیر هستند:

$$u_{j,j} = ۰, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right]u_i = \frac{۱}{Re}\tau_{ij} - P_{,i}, \qquad (۶)$$

که در آن Re، عدد رینولدز است. با دانستن این حقیقت که معادلات (۶)، در واقع توصیف بقای جرم و اندازه حرکت در یک المان دیفرانسیلی هستند، می‌توان تانسور تنش را بر اساس کسر حجمی سیال هسته، C، به صورت:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{C}{\tau_{ij}^{[۱]}} + \frac{۱-C}{\tau_{ij}^{[۲]}}\right)^{-۱}, \qquad (۷)$$

نوشت. معادله (۷) مبتنی بر درونیابی هارمونیک است که به وسیله پاتانکار پیشنهاد شده است [۱۸]. بالانویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب برای سیال هسته و حلقه می‌باشند. به این ترتیب، در هر نقطه یا المان دیفرانسیلی که بوسیله سیال هسته پُر شده باشد ($C = ۱$)، تنش بر اساس معادله مشخصه سیال نیوتنی محاسبه می‌شود:

$$\tau_{ij} = r_\mu \dot{\gamma}_{ij}, \qquad (۸)$$

که در آن r_μ نسبت لزجت سیال هسته به حلقه است؛ و در هر نقطه‌ای که سیال حلقه حاضر باشد ($C = ۰$)، معادله مشخصه سیال ویسکوپلاستیک اعمال می‌شود.

$$\tau_{ij} = \left(۱ + \frac{Bn}{\sqrt{\dot{\gamma}^۲ + \varepsilon^۲}}\right)\dot{\gamma}_{ij} = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{ij}, \qquad (۹)$$

تابع $\mu(\dot{\gamma})$، لزجت ظاهری سیال ویسکوپلاستیک و Bn عدد بینگهام است. در بین این دو حالت نیز تنش بر اساس یک درونیابی هارمونیک از هر دو معادله (۸) و (۹) به دست می‌آید. غلظت (کسر حجمی) بر اساس قانون بقای ذرات، طبق معادله،

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{۱}{Pe}\frac{\partial^۲}{\partial x_j \partial x_j}\right]C = ۰, \qquad (۱۰)$$

به دست می‌آید؛ که Pe، عدد پکله نام دارد.

چهار گروه بدون بعد در معادلات (۶) تا (۱۰) موجود است:

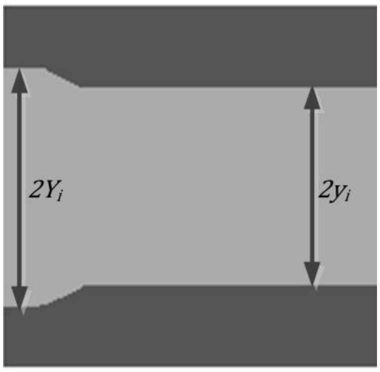
$$r_\mu = \frac{\mu_۱}{\mu_۲}, Re = \frac{\rho U h}{\mu_۲}, Pe = \frac{Uh}{D_m}, Bn = \frac{h}{\mu_۲ U}\tau_Y, \qquad (۱۱)$$

که شامل نسبت لزجت سیال هسته به حلقه، r_μ، عددرینولدز، Re، عدد پکله، Pe، و عدد بینگهام، Bn، می‌شود. پارامتر μ نیز بیان‌گر لزجت سیال است و همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد،

زیرنویس ۱ به سیال هسته و زیرنویس ۲ به حلقه اشاره دارد. ملاحظه می‌شود که Re بر مبنای لزجت سیال حلقه تعریف شده است. در این صورت، عدد رینولدز مربوط به سیال هسته، به صورت Re / r_μ می‌شود. پارامتر D_m به ضریب نفوذ مولکولی اشاره دارد، که در تعریف Pe به کار می‌رود و مقدار آن برای آب در حدود $۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}^۲ / \mathrm{s}$ است [۱۹]. با احتساب لزجت سینماتیک آب، $\nu \approx ۱۰^{-۵}\mathrm{m}^۲ / \mathrm{s}$ و $Re \approx ۱۰$ مرتبه اندازه Pe در حدود $۱۰^۴$ است [۱۳]، که در این حالت غلظت نفوذ ضعیفی دارد [۱۲] و حجم فصل مشترک دو سیال به صفر میل می‌کند. فرض دیگری که در این جا مطرح می‌باشد این است که از اثر کشش سطحی بین دو سیال صرف نظر می‌گردد که خود می‌تواند مانند یک چشمه اندازه حرکت صفحه‌ای عمل کند. عدد بینگهام، Bn، در واقع تنش تسلیم بدون‌بعد است.

۲-۲- حل نیمه‌تحلیلی

با فرض جریان دائمی و توسعه یافته درون کانال، می‌توان از عبارات غیر خطی مرتبط با جابجایی صرف نظر و حل تحلیلی برای این جریان ارائه نمود؛ که برای اعتبار سنجی و مقایسه با نتایج عددی مناسب است. در حل تحلیلی پایه، فرض می‌شود مرز دو سیال صاف و بدون هر گونه ناپایداری و موج هستند. به علاوه این که مرز دو سیال یک فیلم بسیار نازک است که حجم آن به صفر میل می‌کند و به عبارتی $Pe \to \infty$. پارامترهای ضخامت هسته در ورودی و خروجی کانال در شکل ۲ نمایش داده شده است. در اثر کاهش سرعت جریان سیال حلقه در مجاورت دیوار جامد به دلیل اثر مرز، برای بقای جرم، منطقی است که سطح مقطع آن افزایش یابد؛ هر چند خواص سیال



شکل ۲: پارامترهای ضخامت هسته در ورودی و خروجی کانال

Fig. 2. Core thickness parameters at inlet and outlet of the channel

نیز بر این مهم می‌تواند تأثیر گذار باشد [۲۰]. در شرایط توسعه یافتگی تنها مؤلفه برشی نرخ کرنش، غیر صفر است؛ به صورت:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{du}{dy}, \tag{۱۲}$$

که u مؤلفه افقی سرعت، در جهت x است. برای $۰ \le |y| \le y_i$، از معادلات (۶)، (۸) و (۱۰) بدست می‌آید:

$$C = ۱, \qquad \frac{dP}{dx} = \frac{r_\mu}{Re}\frac{d^۲u^{[۱]}}{dy^۲}, \tag{۱۳}$$

و برای $y_i \le |y| \le ۱$ از معادلات (۶)، (۹) و (۱۰) می‌توان یافت:

$$C = ۰, \qquad \frac{dP}{dx} = \frac{۱}{Re}\frac{d}{dy}\left[\left(۱ + \frac{Bn}{\sqrt{\frac{d^۲u^{[۲]}}{dy^۲} + \varepsilon^۲}}\right)\frac{du^{[۲]}}{dy}\right], \tag{۱۴}$$

با توجه به تقارن فیزیکی و هندسی روی خط مرکزی کانال، $y = ۰$، وشرط عدم لغزش روی دیواره کانال، $|y| = ۱$، می‌توان شرایط مرزی زیر را استنباط نمود:

$$\begin{aligned} &\frac{du^{[۱]}}{dy} = ۰ \quad \text{at} \quad y = ۰, \\ &u^{[۲]} = ۰ \quad \text{at} \quad y = |۱|. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

به علاوه دو شرط مرزی در فصل مشترک دو سیال، $|y| = y_i$، با توجه به پیوستگی تنش برشی و سرعت قابل اعمال است که به صورت:

$$\text{at} \quad |y| = y_i: \quad u^{[۱]} = u^{[۲]}, \quad \tau_{xy}^{[۱]} = \tau_{xy}^{[۲]}, \tag{۱۶}$$

می‌باشد. با توجه به معادلات مشخصه (۸) و (۹) می‌توان قید پیوستگی تنش را به صورت،

$$r_\mu \frac{du^{[۱]}}{dy} = \left[۱ + \frac{Bn}{\sqrt{\left(du^{[۲]}/dy\right)^۲ + \varepsilon^۲}}\right]\frac{du^{[۲]}}{dy}, \tag{۱۷}$$

استخراج نمود. حل معادله (۱۳) منجر می‌شود به:

$$u^{[۱]}(y)=\frac{\alpha}{r_\mu}\frac{y^{۲}}{۲}+c_{۰}, \qquad (۱۸)$$

که در آن $\alpha = Re\left(dP/dx\right)$ تعریف می‌شود. $c_{۰}$ نیز ثابت انتگرال‌گیری است. حل معادله غیر خطی (۱۴) به صورت تحلیلی ممکن نیست و باید به صورت عددی انجام شود. اگر چنانچه به جای معادله (۹) از معادله دوضابطه‌ای (۱) به عنوان مشخصه سیال ویسکوپلاستیک استفاده شود، حل تحلیلی کامل میسر می‌شود؛ که این کار توسط هرمزی و همکاران [۱۲] صورت گرفته است؛ هر چند این کار نیازمند پیش فرض درباره رفتار تنش قبل از محاسبه آن است. حل عددی معادلات (۱۴) و (۱۸) با اعمال شرایط مرزی (۱۵) تا (۱۷) نیازمند دانستن مقادیر $c_{۰}$ و α است. می‌توان این مقادیر را با حدس و خطا به دست آورد. بنابراین می‌توان پس از حدس اولیه برای این پارامترها، با حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی (۱۴) با استفاده از شرط عدم لغزش و پیوستگی سرعت در فصل مشترک دو سیال، به یک جواب برای $u^{[۲]}(y)$ رسید؛ پس از آن با استفاده از دو قید پیوستگی تنش در فصل مشترک، معادله (۱۷) و شرط پیوستگی کلی جریان به صورت:

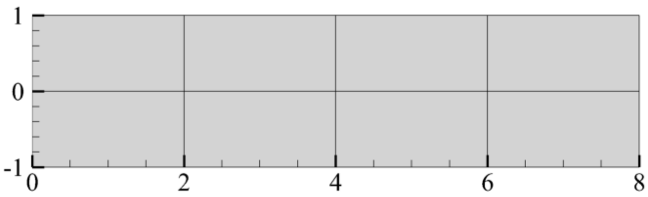
$$۱=\int_{۰}^{۱}u(y)\,dy \qquad (۱۹)$$

خطا بودن حدس اولیه را بررسی نمود. فرآیند حدس و خطا تا رسیدن به جواب سازگار برای هر دو قید باید ادامه یابد. بدین منظور یک کد به زبان والفریم[۱] توسعه داده شده است و با استفاده از نرم‌افزار ریاضی متمتیکا[۲]، جواب جریان توسعه یافته به دست آمده است. در کار حاضر این جواب با عنوان حل نیمه- تحلیلی[۳] شناخته می‌شود.

۳- روش حل عددی

۳-۱- روش المان طیفی

در کار حاضر، مشتقات مکانی به روش المان طیفی گسسته شده‌اند که از کلاس المان محدود به شمار می‌رود. دامنه حل به تعدادی المان مستطیلی با اندازه ثابت تقسیم می‌شود که در شکل ۳



شکل ۳: المان‌های مستطیلی دامنه حل

Fig. 3. Rectangular elements of the domain

نشان داده شده است. این المان، به یک المان استاندارد محاسباتی نگاشته شده و هر متغیر وابسته اولیه شامل فشار، سرعت و غلظت روی المان استاندارد، از طریق بسط پایه تانسوری به صورت:

$$\psi(\xi,\eta)\cong\sum\sum\phi_p(\xi)\phi_q(\eta)\hat{\psi}_{pq} \qquad (۲۰)$$

درونیابی می‌شود. که در آن، ψ، متغیر وابسته عمومی، $\hat{\psi}_{pq}$، ضریب مجهول و ξ و η متغیرهای مکانی المان استاندارد محاسباتی هستند که بین ۱+ و ۱− قرار دارند. N درجه بسط پایه گفته می‌شود و هر چه بیشتر باشد، درونیابی دقیق‌تر است. افزایش N معادل با تظریف شبکه‌بندی داخل المان است که در شکل ۳ نمایش داده شده است. تابع درونیاب ϕ_p پایه مودال[۴] گفته می‌شود و به صورت:

$$\phi_p=\begin{cases}(۱-\xi)/۲ & \text{for} \quad p=۰,\\ \dfrac{(۱-\xi)}{۲}\dfrac{(۱+\xi)}{۲}P_{p-۱}^{۱,۱} & \text{for} \quad ۰<p<N,\\ (۱+\xi)/۲ & \text{for} \quad p=N.\end{cases} \qquad (۲۱)$$

در نظر گرفته می‌شود که $P_{p-۱}^{۱,۱}$ تابع ژاکوبی را نشان می‌دهد [۲۱].

در غالب معادلات جریان سیال، ضمن گسسته‌سازی مکانی، می‌توان به یک معادله کلی از نوع هلمهلتز رسید. برای متغیر کلی ψ:

$$\left[\left(D(\psi)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{,j}+\lambda\right]\psi=f, \qquad (۲۲)$$

که در آن، λ، ضریب ثابت، f، عبارت چشمه و متغیر $D(\psi)$ نیز ضریب نفوذ معادله هلمهلتز است [۲۲]. برای گسسته‌سازی مکانی، ابتدا باید به فرم ضعیف معادله رسید. برای این منظور، طرفین

1 Wolfram language
2 Mathematica
3 Semi- Analytic (SA)
4 Modal basis

معادله در تابع وزن، ω، که بر اساس طرح گالرکین همان تابع بسط است، ضرب شده و روی دامنه المان، Ω، از آن انتگرال‌گیری می‌شود. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان داشت:

$$-\int \nabla \omega D(\psi) \nabla \psi d\Omega + \int \lambda \omega \psi d\Omega = \int \omega f d\Omega - \left[\omega D(\psi) \nabla \psi \right]_{\partial\Omega}, \quad (۲۳)$$

که در آن $\partial\Omega$ مبین مرز المان است و شرایط مرزی را پوشش می‌دهد. با انجام مشتق و انتگرال‌های معادله (۲۳) معادلات دیفرانسیل معمولی وابسته به زمان به تعداد درجه بسط پایه برای هر المان ایجاد می‌شود. بر اساس پیوستگی متغیرهای وابسته اولیه روی مرزِ المان‌های دارای سطح مشترک باید معادلات را تجمیع نمود. برای جزییات بیشتر به [۲۱] رجوع شود.

۲-۳- طرح تصحیح سرعت توسعه یافته

برای خارج کردن متغیرهای وابسته اولیه در معادلات مدل (۶) و (۱۰) از حالت جفت‌شدگی، کارنیاداکیس و همکاران [۱۵] الگوریتم موسوم به تصحیح سرعت[1] را پیشنهاد داده‌اند، که ضمن آن مرتبه بالای گسسته‌سازی مکانی به روش المان طیفی حفظ شود. در این روش به دست آوردن سرعت و فشار در گام جدید $n+1$، طی سه مرحله صورت می‌گیرد. در هر مرحله برای انتگرال‌گیری زمانی از روش مرتبه بالای آدامز- بشفورث استفاده می‌شود [۲۳]. در قدم اول، یک سرعت واسطه نخستین، $\tilde{u}_i$، بر اساس عبارات گذرا، $\partial u_i/\partial t$، و جابجایی، $u_j u_{i,j}$، در معادله اندازه حرکت (۶)، به صورت صریح حاصل می‌شود:

$$\tilde{u}_i = \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\alpha_q}{\gamma_0} u_i^{\,n-q} + \Delta t \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\beta_q}{\gamma_0} \left[u_j u_{i,j} \right]^{n-q} \quad (۲۴)$$

که در آن، n، گام زمانی معلوم، Δt، اندازه گام زمانی، ضرایب α_q، β_q و γ_0، مربوط به روش عددی آدامز- بشفورث برای انتگرال‌گیری زمانی، و J نیز مرتبه این انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد [۲۳].

در قدم بعد، با محاسبه دیورژانس معادله اندازه حرکت، این بار شامل عبارات گرادیان فشار، $P_{,j}^{\,n+1}$، و عبارت گذرا، $\partial u_i/\partial t$، و اعمال شرط پیوستگی، یعنی صفر بودن دیورژانس سرعت در گام معلوم، یک معادله از نوع پواسون برای فشار به دست می‌آید؛

$$P_{,jj}^{\,n+1} = \left(\frac{\gamma_0}{\Delta t} \right) \tilde{u}_{j,j}, \quad (۲۵)$$

که در آن $n+1$ گام زمانی جدید و مجهول است. بر اساس پیشنهاد ارائه شده توسط کارنیاداکیس و همکاران [۱۵]، برای محاسبه فشار در مرز ورودی و نیز روی دیواره‌ها می‌توان از شرط موسوم به مرتبه بالا برای فشار[2] استفاده نمود که از معادله اندازه حرکت، (۶)، استخراج شده است.

$$P_{,i}^{\,n+1} = \sum_{q=0}^{J-1} \beta_q \left[-u_j u_{i,j} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \right]^{n-q}, \quad (۲۶)$$

در قدم سوم، با استفاده از گرادیان فشار محاسبه شده و عبارات گذرا، $\partial u_i/\partial t$ ، دومین سرعت واسطه، $\tilde{\tilde{u}}_i$، به صورت جبری به دست می‌آید؛

$$\tilde{\tilde{u}}_i = \tilde{u}_i + \left(\frac{\Delta t}{\gamma_0} \right) P_{,i}^{\,n+1}, \quad (۲۷)$$

و با انتگرال‌گیری زمانی مجدد از معادله اندازه حرکت با وجود عبارت نفوذ، $\left(D(\dot{\gamma},C) u_{i,j} \right)_{,j}$ و عبارت گذرا، $\partial u_i / \partial t$ می‌توان به معادله هلمهلتز برای محاسبه سرعت در گام جدید، $u_i^{\,n+1}$، رسید.

$$\left[\left(D(\dot{\gamma},C) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{,j} - Re \frac{\gamma_0}{\Delta t} \right] u_i^{\,n+1} = -\left(Re \frac{\gamma_0}{\Delta t} \right) \tilde{\tilde{u}}_i, \quad (۲۸)$$

که برای جریان چندلایه با روان‌کار ویسکوپلاستیک، ضریب نفوذ $D(\dot{\gamma},C)$ بر اساس معادلات (۶) الی (۹) به صورت:

$$D(\dot{\gamma},C) = \left[\frac{C}{r_\mu} + \frac{1-C}{\mu(\dot{\gamma})} \right]^{-1}, \quad (۲۹)$$

تعریف می‌شود. در معادله (۲۹) متغیر غلظت، C، و تابع لزجت ظاهری سیال ویسکوپلاستیک، $\mu(\dot{\gamma})$، از گام معلوم n محاسبه می‌شود. در واقع تابع $D(\dot{\gamma},C)$ در حکم لزجت ظاهری جریان دوفاز است.

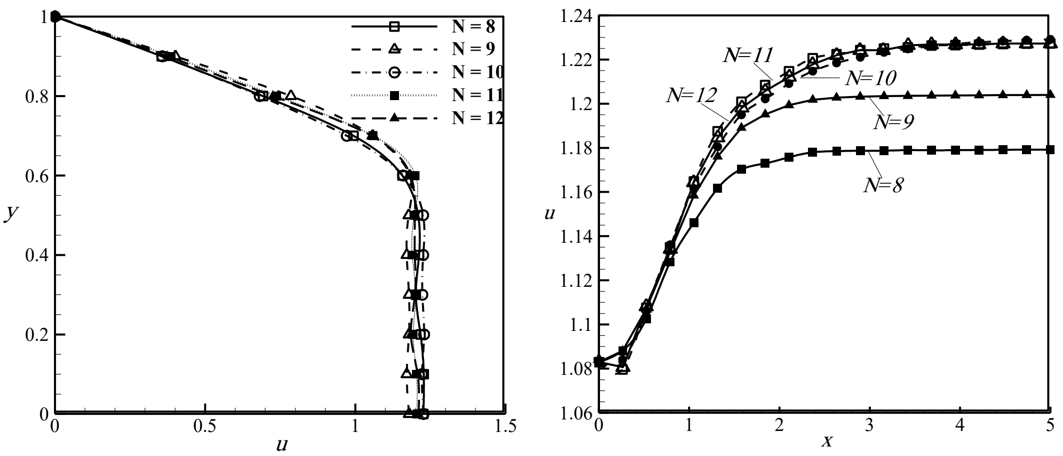
1 Velocity correction scheme

2 High order pressure boundary condition

جدول ۱: بررسی میزان استقلال نتایج از درجه بسط پایه و گام زمانی

Table. 1. Study of results dependency to polynomial degree and time step

مورد	Δt	N	زمان مصرفی CPU(s)	$R.E.$
مطالعه درجه بسط پایه				
۱	۰/۰۱	۸	۴۴/۷	-
۲	۰/۰۱	۹	۶۵/۹	۲/۵۵
۳	۰/۰۱	۱۰	۸۳/۴	۱/۲۴
۴	۰/۰۱	۱۱	۱۰۲/۱	۰/۴۲
مطالعه گام زمانی				
۵	۰/۰۰۵	۱۰	۱۵۲/۷	۰/۵۶۹
۶	۰/۰۰۲۵	۱۰	۲۹۹/۴	۰/۱۵۶
۷	۰/۰۰۱۲۵	۱۰	۶۳۵/۷	۰/۰۳۵
۸	۰/۰۰۱	۱۰	۷۹۵/۲	۰/۰۱۲



(الف) (ب)

شکل ۴: استقلال نتایج عددی از درجه بسط پایه، N، به ازای $Re=۱۰$، $r_\mu=۱۰$، $Bn=۱۰$، $Y_i=۰/۲$ و $L=۸$ برای مؤلفه طولی سرعت، u، (الف) روی خط تقارن، $y=۰$ و (ب) در مقطع $x=۴$

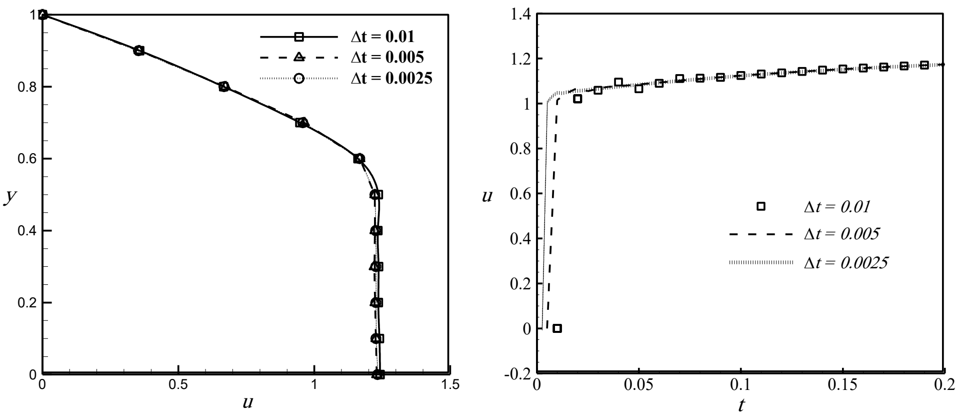
Fig. 4. Independency of the numerical results from the basis expansion degree, N, per $Re = 10$, $r_\mu = 10$, $Bn = 10$, $Y_i = 0.2$ and $L = 8$ for x- velocity component, u, (a) on the symmetry line, $y = 0$ and (b) at the section $x = 4$

برای انجام این شبیه‌سازی، در ++C از کد منبع باز ++Nektar استفاده شده است که چارچوبی قوی و مطمئن برای حل معادلات جریان تراکم ناپذیر تک سیال نیوتنی (معادلات ناویر- استوکس) به روش المان طیفی است و برای کار حاضر توسعه داده شده است [۲۴]. در کار حاضر، این توسعه، شامل دو قسمت عمده است. یکی ارتقای معادله هلمهلتز به صورت معادله (۲۸) است که در کد منبع ضریب نفوذ، $D(\dot{\gamma},C)$ ، برای سیال تک نیوتونی برابر ۱ است؛ و دیگر اضافه کردن یک کلاس به کد ++Nektar جهت توسعه الگوریتم فوق برای محاسبه غلظت، C، همراه با بقیه متغیرهاست. برای این کار، ابتدا یک غلظت واسطه $\tilde{C}$ بر اساس عبارات گذرا، $\partial C/\partial t$، و جابجایی، $u_j C_{,j}$، در معادله (۱۰)، به صورت صریح به دست می‌آید؛

$$\tilde{C} = \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\alpha_q}{\gamma_0} C^{n-q} + \Delta t \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\beta_q}{\gamma_0} \left[u_j C_{,j}\right]^{n-q}, \qquad (۳۰)$$

و سپس، در نظر گرفتن عبارات گذرا، $\partial C/\partial t$ ، و نفوذ، $C_{,jj}/Pe$، منجر به معادله هلمهلتز با ضریب نفوذ برابر ۱، برای یافتن C در گام $n+1$، به صورت ضمنی می‌شود؛

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - Pe\frac{\gamma_0}{\Delta t}\right] C^{n+1} = -\left(Pe\frac{\gamma_0}{\Delta t}\right)\tilde{C}. \qquad (۳۱)$$



(ب) (الف)

شکل ۵: استقلال نتایج عددی از گام زمانی، Δt، به ازای $Re=۱۰$، $r_\mu=۱۰$، $Bn=۱۰$، $Y_i=۰/۲$ و $L=۸$ برای مؤلفه طولی سرعت، u، (الف) در نقطه $x=۸$ و $y=۰$ و (ب) در مقطع $x=۴$

Fig. 5. Independency of the numerical results from the time step, Δt, per $Re=10$, $r_\mu=10$, $Bn=10$, $Y_i=0.2$ and $L=8$ for x- velocity component, u, (a) at the point $x=0$, $y=0$ and (b) at the section $x=4$

۴- نتایج

۴-۱- مطالعه استقلال نتایج از درجه بسط و گام زمانی

برای تضمین استقلال حل از درجه بسط پایه، N، و گام زمانی، Δt، حل عددی به ازای مقادیر مختلف از این دو پارامتر مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج مربوط به بررسی میزان استقلال حل عددی از دو پارامتر فوق در جدول ۱ به ازای $N=۸$، $N=۹$، $N=۱۰$ و $N=۱۱$ برای درجه بسط پایه و $\Delta t=۰/۰۱$، $\Delta t=۰/۰۰۵$، $\Delta t=۰/۰۰۲۵$ و $\Delta t=۰/۰۰۱$ برای گام زمانی گردآوری شده است. این نتایج به ازای $Re=۱۰$، $r_\mu=۱۰$، $Y_i=۰/۲$ و $Bn=۱۰$ ارائه شده است. در هر مورد زمان اجرای بسیار ناچیز نشان می‌دهد که تا چه میزان استفاده از یک روش مرتبه بالا در تسریع استحصال جواب مفید است. در هر مورد خطای نسبی، $R.E.$، با مورد قبل از آن آورده شده است که به صورت:

$$R.E.=\frac{\left|u_{\text{new}}-u_{\text{previous}}\right|_\infty}{\left|u_{\text{previous}}\right|_\infty}\times ۱۰۰ \qquad (۳۲)$$

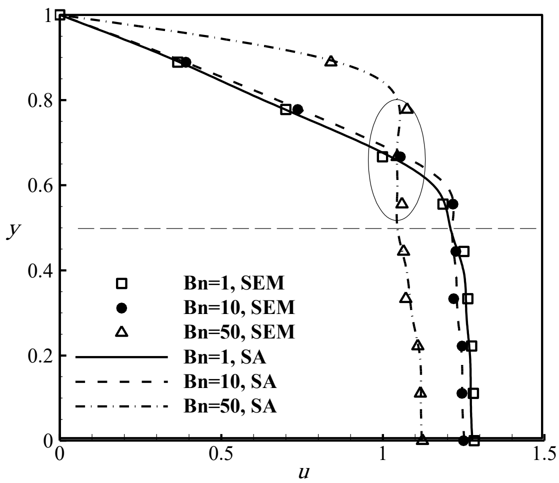
تعریف می‌شود و در آن $|u|_\infty$ بیانگر نرم بینهایت سرعت در کل دامنه حل است. در نهایت مورد شماره ۷ از جدول ۱ به عنوان مبنای گرفتن اجراها انتخاب شد. در شکل ۴ نمودار سرعت دائم روی خط تقارن کانال، $y=۰$، و نیز در مقطع $x=۴$ به ازای مقادیر مختلف درجه بسط پایه، N، نمایش داده شده است. اختلاف نسبی بین مقادیر $N=۱۰$ و $N=۱۱$ کمتر از ۱% است. همچنین در شکل ۵ مقادیر سرعت طولی در نقطه انتهای کانال و روی خط تقارن به مختصات $x=۸$ و $y=۰$ و همچنین در مقطع $x=۴$ به ازای همان پارامترها نمایش داده شده است. بعد از نوسانات اولیه مشاهده می‌شود که اختلاف نتایج مربوط به تغییر گام زمانی، Δt، غیر قابل تشخیص است. برای وضوح بیشتر نتایج، فقط $t\le۰/۲$ نمایش داده شده است.

۴-۲- اعتبارسنجی حل طیفی و نیمه تحلیلی

ایده اصلی سنجش میزان درستی حل عددی، مقایسه دو حل عددی[1] و نیمه‌تحلیلی به ازای تغییر پارامترهای مختلف است. این مقایسه شامل متغیرهای اولیه نظیر مؤلفه طولی سرعت، u، فشار، P، و نیز متغیرهای ثانویه نظیر تنش برشی، τ_{xy}، و لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma},C)$، است. به ازای پارامترهای مشخصی نیز نتایج کار هرمزی و همکاران [۱۲] با کار حاضر مقایسه شده است.

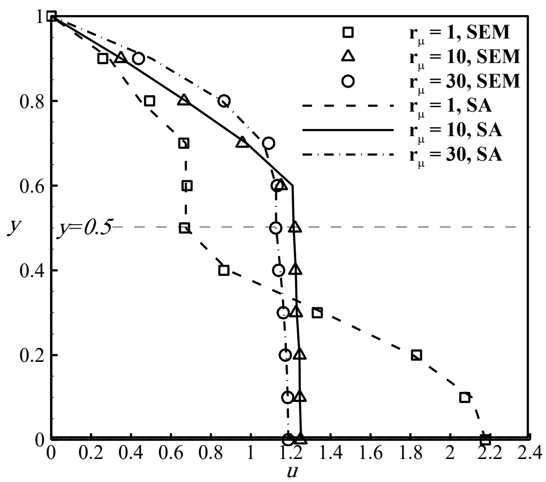
در شکل ۶، توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای $r_\mu=۱۰$ و $y_i=۰/۲$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام، Bn، ارائه شده است. در این شکل و شکل‌های مقایسه‌ای بعد، نتایج روش المان طیفی با نماد، و نتایج حل نیمه تحلیلی با خطوط نمایش داده می‌شود. به دلیل تقارن، نتایج فقط روی نیم عرض کانال، $y\ge۰$، ارائه شده

1 Spectral Element Method (SEM)



شکل ۶: مقایسه حل طیفی و نیمه‌تحلیلی پروفایل سرعت در خروجی کانال برای $Re=۱۰$، $y_i=۰/۵$، $r_\mu=۱۰$ و به ازای $Bn=۱,۱۰,۵۰$.

Fig. 6. Comparison of Spectral with semi-analytical solutions of channel out flow velocity profiles for $Re=10, y_i=0.5, r_\mu=10$ and per $Bn=1,10,50$



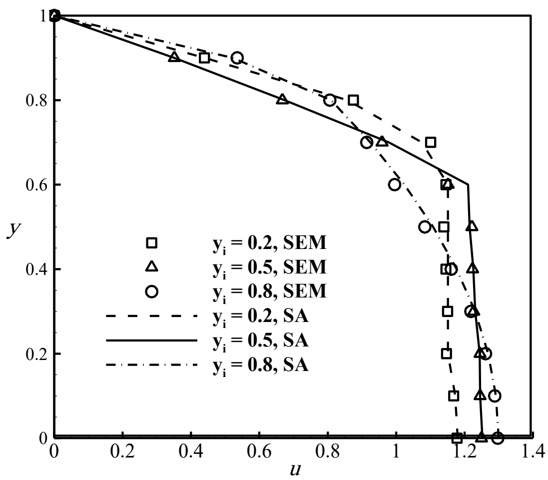
شکل ۷: مقایسه حل طیفی و نیمه‌تحلیلی پروفایل سرعت در خروجی کانال برای $Re=۱۰$، $y_i=۰/۵$، $Bn=۱۰$ و به ازای $r_\mu=۱,۱۰,۳۰$.

Fig. 7. Comparison of Spectral with semi-analytical solutions of channel out flow velocity profiles for $Re=10, y_i=0.5, Bn=10$ and per $r_\mu=1,10,30$

است. در حالت $Bn=۱$ ، سیال ویسکوپلاستیک در تمام ناحیه به حالت تسلیم رسیده است و فقط شیب نمودار با تغییر سیال از حلقه به هسته کاهش می‌یابد. مرز دو سیال با خطچین مشخص شده است. در دو حالت $Bn=۱۰,۵۰$ ناحیه تسلیم نشده وجود دارد که در حالت $Bn=۵۰$ درون بیضی نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد اثر افزایش عدد بینگهام، Bnافزایش ضخامت ناحیه تسلیم نشده و یکنواخت‌تر شدن نمودار سرعت است.

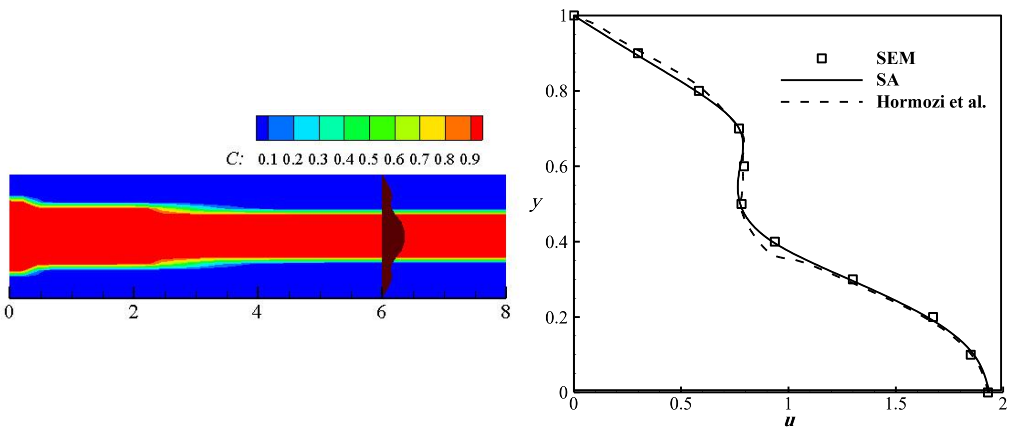
در شکل ۷، توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای پارامترهای اصلی $Bn=۱۰$، $y_i=۰/۵$ و $r_\mu=۱,۱۰,۳۰$ به واسطه دو روش عددی و نیمه‌تحلیلی ارائه و مقایسه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد افزایش نسبت لزجت، r_μ، باعث کاهش ضخامت ناحیه تسلیم نشده می‌گردد. البته ضخامت ناحیه تسلیم‌نشده در دو حالت $r_\mu=۱۰,۳۰$ بسیار به هم نزدیک هستند (اختلاف آن‌ها کمتر از ۰/۰۱ است) و این نشان می‌دهد که با افزایش r_μ، تأثیر آن روی ضخامت ناحیه تسلیم نشده کمتر می‌شود.

در شکل ۸ نیز، توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای پارامترهای



شکل ۸: مقایسه حل طیفی و نیمه‌تحلیلی پروفایل سرعت در خروجی کانال برای $Re=۱۰$، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱۰$ و به ازای $y_i=۰/۲,۰/۵,۰/۸$.

Fig. 8. Comparison of Spectral with semi-analytical solutions of channel out flow velocity profiles for $Re = 10, Bn = 10, r_\mu = 10$ and per $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$



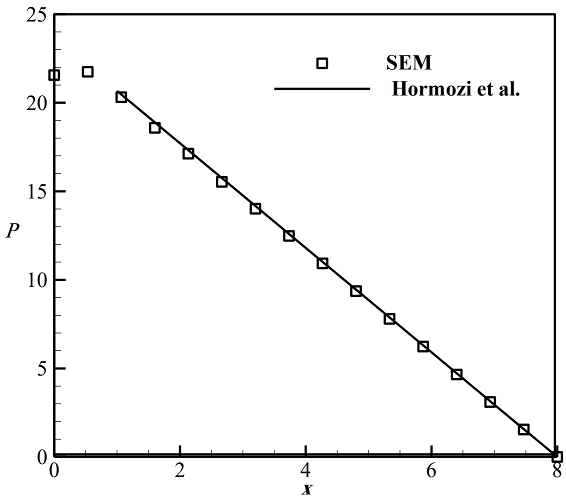
(ب) (الف)

شکل ۹: (الف)، مقایسه نتایج حل طیفی و نیمه‌تحلیلی برای پروفایل سرعت در خروجی کانال با کار هرمزی و همکاران [۱۲] و (ب)، کانتور غلظت به همراه توزیع سرعت الحاق شده، به ازای $Re=۵$، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱$ و $y_i=۰/۴$.

Fig. 9. (a), Comparison of Spectral (SEM) and semi-analytical results of the channel out flow velocity profiles with the work of Hormozi et. al [12] and (b), concentration contour with superimposed velocity profile, for $Re = 5, Bn = 10, r_\mu = 1$ and $y_i = 0.4$

اصلی، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱۰$ و مقادیر مختلف ضخامت سیال هسته، y_i، شامل $y_i=۰/۲,۰/۵,۰/۸$ برای هر دو روش عددی و نیمه تحلیلی ارائه و مقایسه شده‌اند. در این حالت نیز تطابق خوب دو روش عددی و نیمه‌تحلیلی کاملاً مشهود است. با افزایش ضخامت سیال هسته، y_i، از ۰/۲ به ۰/۵ ناحیه تسلیم نشده کوچکتر شده و در حالت $y_i=۰/۸$ سیال ویسکوپلاستیک کاملاً تسلیم می‌شود. این تسلیم به علت این است که تنش از مرکز کانال به سمت دیواره بزرگتر شده و با رسیدن به سیال پلاستیک از حد تنش تسلیم عبور کرده است.

در شکل ۹ (الف) نتایج حل عددی و نیمه‌تحلیلی با حل عددی ارائه شده توسط هرمزی و همکاران [۱۲] مقایسه شده است. توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای پارامترهای اصلی، $Re=۵$، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱$ و $y_i=۰/۴$ ارائه شده است. نتایج تطابق بسیار خوبی را با هم نشان می‌دهند. البته در نواحی تسلیم نشده دقت این تطابق کم می‌شود که می‌توان آن را به بد وضع بودن رفتار تابع نظم یافته ویسکوپلاستیک، معادله (۹)، در این ناحیه نسبت داد. همچنین



شکل ۱۰: نتایج حل المان طیفی برای فشار روی خط تقارن، $y=0$، به ازای $Re=5$، $Bn=10$، $r_\mu=1$ و $y_i=0/4$ و مقایسه با حل هرمزی و همکاران [۱۲].

Fig. 10. SEM results for pressure profile across the symmetry line, $y = 0$, for $Re = 5$, $Bn = 10$, $r_\mu = 1$ and $y_i = 0.4$, compared with the work of Hormozi et al. [12]

در قسمت (ب) از شکل ۹ کانتور غلظت به همراه توزیع سرعت الحاق شده در آن ارائه شده است.

توزیع فشار روی خط تقارن کانال، $y=0$، برای پارامترهای قبلی یعنی $Re=5$، $Bn=10$، $r_\mu=1$ و $y_i=0/4$ در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. همچنین به این نتایج، حل تحلیلی هرمزی و همکاران [۱۲] برای جریان توسعه یافته الحاق شده است. در ورودی کانال، افزایش فشار ناچیز، قبل از شروع به افت مشاهده می‌شود. می‌توان بر اساس شرط مرزی (۲۶)، این افزایش فشار را به قوی‌تر بودن نفوذ اندازه حرکت به جابجایی در جهت جریان در عدد رینولدز پایین نسبت داد.

۴-۳- اثر پارامترهای اصلی بر افت فشار و ضخامت تسلیم نشده

در جدول ۲، نتایج حل نیمه‌تحلیلی برای افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده، y_{UY}، به ازای مقادیر مختلف عدد بینگهام، Bn، نسبت لزجت، r_μ و ضخامت هسته، y_i، و برای $Re=1$ ارائه شده است. منظور از ناحیه تسلیم نشده، ناحیه‌ای است که در آن گرادیان سرعت به صفر میل می‌کند. برای این کار از معیارِ مطلقِ

$$u\left(y_i\right)-u\left(y_i+y_{UY}\right)\leq 10^{-4}, \qquad (۳۳)$$

استفاده شده است. عدم استفاده از معیار نسبی به این دلیل است که مقدار متوسط سرعت در حدود واحد است و استفاده از آن لزومی ندارد. این نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد بینگهام، افت فشار، افزایش می‌یابد. همچنین افزایش نسبت لزجت، r_μ، نیز باعث افزایش افت فشار می‌شود که البته با افزایش نسبت لزجت میزان این تأثیر کمتر می‌شود. می‌توان اضافه نمود هر چه r_μ بزرگتر باشد، همان‌طور که از شکل ۷ نیز بر می‌آید منحنی سرعت سیال یکنواخت‌تر،گرادیان سرعت در آن کمتر و به منحنی سیال بینگهام شبیه‌تر می‌شود. همچنین با افزایش ضخامت هسته، y_i، میزان افت فشار کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان استنتاج نمود که هر چه میدان عمل سیال بینگهام و خاصیت پلاستیسیته افزایش می‌یابد، افت فشار افزایش می‌یابد. علت آن هم می‌تواند به افزایش لزجت ظاهری جریان در ناحیه تسلیم نشده نسبت داده شود. از آن جا که هدف نهاییِ استفاده از سیال روان‌کار کم کردن افت فشار و توان پمپاژ است، باید توجه نمود که استفاده از سیال پلاستیک به عنوان روان‌کار نباید افت فشار چشمگیری را بوجود آورد؛ به نحوی که استفاده از آن را غیر موجه سازد. همچنین از جدول ۲ مشاهده می‌شود که ضخامت تسلیم نشده، y_{UY}، با عدد بینگهام، Bn، نسبت مستقیم و با ضخامت هسته، y_i و نسبت لزجت، r_μ، نسبت عکس دارد.

۴-۴- بررسی متغیرهای ثانویه

توزیع لزجت ظاهری، $D\left(\dot{\gamma},C\right)$، و تنش برشی، τ_{xy}، در

جدول ۲: نتایج حل نیمه‌تحلیلی برای ضخامت ناحیه تسلیم نشده، y_{UY} و افت فشار، $-\left(dP/dx\right)$، به ازای $Re=۱$، $Bn=۱,۱۰,۵۰$، $r_\mu=۱,۱۰,۳۰$ و $y_i=۰/۲,۰/۵,۰/۸$.

Table 2. Semi-analytic results for un-yielded region thickness, y_{UY} and pressure drop, $-(dp/dx)$, for $Re=1$, $Bn=1,10,50$, $r_\mu=1,10,30$ and $y_i=0.2,0.5,0.8$

نسبت لزجت، r_μ	ضخامت هسته، y_i	ضخامت تسلیم نشده، y_{UY}	افت فشار، $-\left(dP/dx\right)$
	$Bn=۱$		
۱	۰/۲	۰/۰۲۵۳	۴/۴۳۹۱
	۰/۵	۰/۰	۳/۹۷۱۸
	۰/۸	۰/۰	۲/۹۴۳۵
۱۰	۰/۲	۰/۰۲۳۶	۴/۴۷۱۴
	۰/۵	۰/۰	۴/۴۲۲۱
	۰/۸	۰/۰	۴/۲۵۳۶
۳۰	۰/۲..	۰/۰۲۳۵	۴/۴۷۳۸
	۰/۵	۰/۰	۴/۴۶۰۱
	۰/۸	۰/۰	۴/۳۹۹۰
	$Bn=۱۰$		
۱	۰/۲	۰/۴۲۹۲	۱۵/۸۹۳۵
	۰/۵	۰/۲۳۵۵	۱۳/۵۹۵۵
	۰/۸	۰/۰	۱۳/۰۰۴۱
۱۰	۰/۲	۰/۴۲۳۵	۱۶/۰۴۵۰
	۰/۵	۰/۱۳۲۹	۱۵/۷۹۹۵
	۰/۸	۰/۰	۱۵/۰۲۹۰
۳۰	۰/۲	۰/۴۲۲۸	۱۶/۰۵۶۳
	۰/۵	۰/۱۲۶۰	۱۵/۹۷۳۹
	۰/۸	۰/۰	۱۵/۷۰۴۷
	$Bn=۵۰$		
۱	۰/۲	۰/۶۲۸۳	۶۰/۳۶۵۶
	۰/۵	۰/۳۴۱۵	۵۹/۰۲۷۳
	۰/۸	۰/۱۶۲۴	۴۳/۵۸۷۴
۱۰	۰/۲	۰/۶۱۵۱	۶۱/۳۴۰۱
	۰/۵	۰/۳۳۶۹	۵۹/۷۴۱۶
	۰/۸	۰/۱۴۰۴	۵۳/۱۶۹۳
۳۰	۰/۲	۰/۶۱۴۲	۶۱/۴۱۱۳
	۰/۵	۰/۳۲۱۲	۶۰/۸۸۷۸
	۰/۸	۰/۰۴۶۱	۵۹/۰۹۳۸

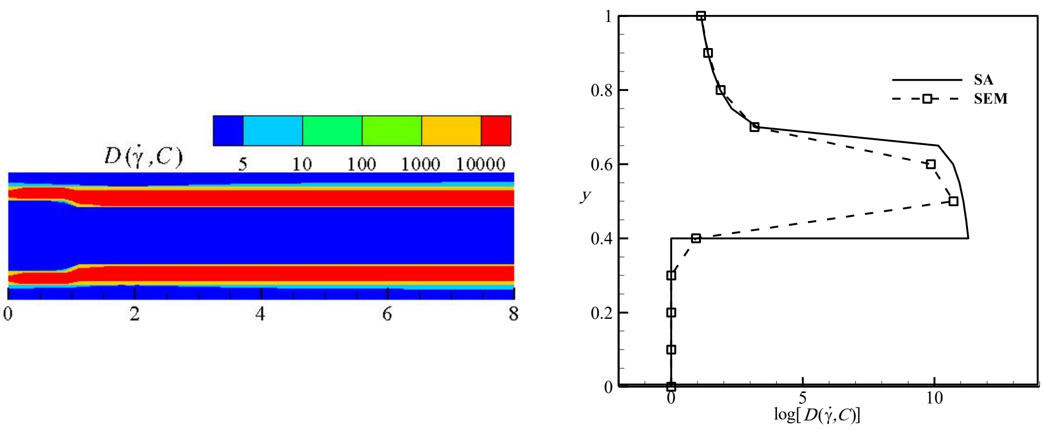
نیم‌عرض ($۰ \le y \le ۱$) و در خروجی کانال به همراه کانتورهای مربوطه به ازای پارامترهای $Re=۵$، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱$ و $y_i=۰/۴$ به ترتیب در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نشان داده شده‌اند. لزجت و تنش در هر دو روش نیمه تحلیلی و عددی از طریق پردازش متغیر اولیه، یعنی سرعت، حاصل شده است. به شیوه نیمه‌تحلیلی از رابطه:

$$\tau_{xy}\big]_{SA}=\mu(\dot{\gamma})_{SA}\left(\frac{du}{dy}\right)_{SA} \qquad (۳۴)$$

می‌توان تنش برشی را به دست آورد که در آن لزجت ظاهری سیال ویسکوپلاستیک از طریق:

$$\mu(\dot{\gamma})_{SA}=\left(1+\frac{Bn}{\sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)_{SA}^{۲}+\varepsilon^{۲}}}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)_{SA} \quad \text{for} \quad y>y_i, \qquad (۳۵)$$

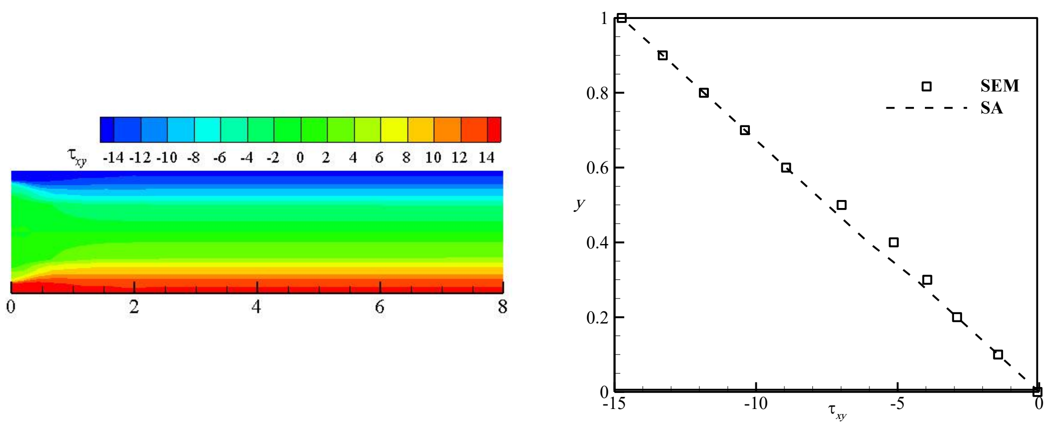
به دست می‌آید. به دلیل فرض مرز مشخص با $Pe\to\infty$، به صورت لزجت هسته، $y\le y_i$، برابر با r_μ است. این ناپیوستگی اگرچه در شکل ۱۱ (الف) واضح است ولی در نتایج مربوط به تنش، شکل ۱۲، خود را نشان نمی‌دهد و توزیع تنش کاملاً خطی و پیوسته مشاهده می‌گردد. همچنین ملاحظه می‌شود که به عنوان نرخ کرنش فقط du/dy محاسبه می‌گردد. تنش برشی در روش المان طیفی با استفاده از پردازش



(ب) (الف)

شکل ۱۱: (الف) نتایج المان طیفی و نیمه تحلیلی توزیع لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma},C)$، در خروجی و (ب) کانتور المان طیفی مربوطه به ازای $Re=۵$، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱$ و $y_i=۰/۴$.

Fig. 11. (a) SEM and SA results of apparent viscosity, $D(\dot{\gamma},C)$, profile at out flow and (b) related SEM contour per $Re=5$, $Bn=10$, $r_\mu=1$ and $y_i=0.4$



(ب) (الف)

شکل ۱۲: (الف) نتایج المان طیفی و نیمه تحلیلی توزیع تنش برشی، τ_{xy}، در خروجی و (ب) کانتور المان طیفی مربوطه به ازای $Re=۵$، $Bn=۱۰$، $r_\mu=۱$ و $y_i=۰/۴$.

Fig. 12. (a) SEM and SA results of shear stress, τ_{xy}, profile at out flow and (b) related SEM contour per $Re=5$, $Bn=10$, $r_\mu=1$ and $y_i=0.4$.

متغیرهای اولیه در نرم افزار تک‌پلات[1] و از طریق رابطه‌ی:

$$\tau_{xy}\big]_{SEM}=D(\dot{\gamma},C)_{SEM}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{SEM} \quad (۳۶)$$

حاصل شده است. که در آن لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma},C)$، از روابط (۲۹) و (۹) محاسبه می‌گردد. متغیر v نیز مؤلفه عمودی سرعت، در جهت y است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد لزجت ظاهری در ناحیه تسلیم نشده بسیار زیاد است. می‌توان مشاهده نمود که سیال نیوتنی هسته (که طبق شکل لزجت بسیار کمی دارد و به صورت آبی رنگ نمایش داده شده است) پس از توسعه‌یافتگی کاملاً منقبض شده و در ناحیه منقبض شده لزجت کماکان کوچک (آبی رنگ) است. در اطراف آن سیال روان‌کار بینگهام قرار دارد که در مجاورت سطح مشترک دو سیال که هنوز تنش به مقدار تسلیم نرسیده است لزجت ظاهری آن بسیار بزرگ (ناحیه قرمز رنگ) بوده و بعد از تسلیم دوباره لزجت آن به حدود لزجت سیال نیوتنی (آبی رنگ) می‌رسد. از معادلات (۳۵) و نیز (۹) پیداست که در این ناحیه به دلیل کوچک

1 Tecplot

شدن گرادیان سرعت، لزجت به بینهایت میل می‌کند. از نظر فیزیکی نیز می‌توان این موضوع را به تسلیم نشدن سیال بینگهام در مرز مشترک دو سیال نسبت داد که معادل با لزجت بسیار زیاد است. نکته دیگر اختلاف دو لزجت عددی و نیمه تحلیلی است که می‌توان آن را ناشی از عدم احتساب مؤلفه کرنش $\partial v/\partial x$ در این ناحیه نسبت داد. در حل نیمه تحلیلی این مقدار برابر صفر است ولی در حل عددی مقدار ناچیزی در مرتبه اندازه $\partial u/\partial y$ دارد. که باعث بروز خطای زیاد در این ناحیه می‌شود. دلیل دیگر خطا در این قسمت، اختلاط دو سیال در نواحی نزدیک به مرز دو سیال است. انتظار می‌رود با افزایش عدد پکله، Pe، این مورد بهبود یابد، ولی باید در نظر داشت هم از نظر فیزیکی و هم از جهت ریاضی برای این افزایش محدودیت وجود دارد.

۵- نتیجه‌گیری

جریان دوبعدی و چندلایه با سیال نیوتنی به عنوان هسته در احاطه سیال ویسکوپلاستیک به عنوان روان‌کار یا حلقه، در کار حاضر بررسی شد. بدین منظور بر مبنای تکنیک حجم سیال معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و کسر حجمی به روش المان طیفی گسسته‌سازی مکانی شدند. برای مدل‌کردن سیال ویسکوپلاستیک از مدل نظم‌یافته برکوویر- انگلمن برای سیال بینگهام استفاده شد. برای خارج کردن معادلات از حالت جفت‌شدگی، الگوریتم تصحیح سرعت کارنیاداکیس، برای سیال ویسکوپلاستیک و نیز جریان دوفاز برای کار حاضر توسعه داده شد. این الگوریتم روی چارچوب کد عددی Nektar++ پیاده‌سازی و توسعه داده شده است. همچنین با فرض توسعه‌یافتگی و دائمی بودن جریان یک حل نیمه‌تحلیلی، برای جریان ارائه شده است که برای آن یک کد به زبان والفریم توسعه داده شده است.

ضمن ارائه نمودارهایی برای نشان دادن استقلال نتایج از درجه بسط پایه و گام زمانی، توزیع سرعت در خروجی کانال و فشار در طول کانال، به ازای تغییر در پارامترهای اصلی جریان، شامل عدد بینگهام، نسبت لزجت دو سیال و ضخامت ورودی هسته ارائه و با حل نیمه تحلیلی مقایسه شد. این مقایسه نشان از تطابق خوب دو حل مذکور با هم و همچنین کارهای گذشته می‌دهد. اثر پارامترهای اصلی جریان بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده سیال ویسکوپلاستیک مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که افزایش عدد بینگهام و نسبت لزجت تأثیر مستقیم بر افزایش افت فشار دارند زیرا هر دو، به نوعی، لزجت یا لزجت ظاهری را افزایش می‌دهند. افزایش ضخامت سیال هسته تأثیر عکس بر افت فشار و نیز ضخامت تسلیم نشده دارد و نیز این که عدد بینگهام در واقع مهمترین پارامتر مؤثر بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده است. همچنین با پردازش متغیرهای اولیه، توزیع متغیرهای ثانویه جریان، شامل تنش برشی و لزجت ظاهری، در عرض کانال، در هر دو روش و کانتور آن‌ها در روش المان طیفی ارائه شد. مطابق انتظار، رفتار کاملاً خطی برای تنش در عرض کانال مشاهده شد. در ناحیه اختلاط دو سیال در فصل مشترک، بین دو روش مذکور تفاوت دیده می‌شود. این تفاوت برای لزجت چشمگیر است و می‌تواند به ایده‌آل نبودن مرز دو سیال در حالت عددی نسبت به حالت نیمه‌تحلیلی، از لحاظ عدد پکله محدود و نیز بعضی محدودیت‌های پردازش متغیرهای اولیه، نسبت داده شود.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

Bn	عدد بینگهام
C	غلظت (کسر حجمی)، m^3/m^3
D_m	ضریب نفوذ مولکولی، m^2/s
$D(\dot{\gamma},C)$	لزجت ظاهری جریان دوفاز
$D(\psi)$	ضریب نفوذ هلمهلتز
$f(\psi)$	چشمه هلمهلتز
h	نیم عرض کانال، m
L	طول کانال، m
N	درجه بسط پایه
P	فشار، kg/ms^2
Pe	عدد پکله
Re	عدد رینولدز
r_μ	نسبت لزجت

u	مؤلفه طولی سرعت، m/s
u_i	بردار سرعت، m/s
v	مؤلفه عرضی سرعت، m/s
x	مؤلفه طولی موقعیت، m
x_i	بردار موقعیت، m
y	مؤلفه عرضی موقعیت، m
y_i	ضخامت خروجی سیال هسته
Y_i	ضخامت ورودی سیال هسته

علائم یونانی

η	مؤلفه عرضی استاندارد
λ	ضریب هلمهلتز
μ	لزجت دینامیکی، kg/ms
ν	لزجت سینماتیکی، $m^۲/s$
ξ	مؤلفه طولی استاندارد
ρ	چگالی، $kg/m^۳$
τ	تنش، $kg/ms^۲$
ϕ	تابع بسط پایه
ψ	متغیر وابسته عمومی
ω	تابع وزن

زیرنویس

B	سیال بینگهام
۱	سیال هسته
۲	سیال حلقه
$,j$	$\partial/\partial x_j$
$,jj$	$\partial^۲/\partial x_j \partial x_j$

بالانویس

*	متغیر بدون بعد
n	گام زمانی

مراجع

[1] D. D. Joseph, R. Bai, K. P. Chen, Y. Y. Renardy, Core-annular flows, Annual Review of Fluid Mechanics, 29(1) (1997) 65-90.

[2] R. Martínez-Palou, M.L. Mosqueira, B. Zapata-Rendón, E. Mar-Juárez, C. Bernal-Huicochea, J. de la Cruz Clavel-López, J. Aburto, Transportation of heavy and extra-heavy crude oil by pipeline: A review, Journal of Petroleum Science and Engineering, 75(3–4) (2011) 274-282.

[3] A.F. Clark, S. Abraham, Method of pumping viscous petroleum, U.S. Patent No. 2,533,878 (1950).

[4] S. Ghosh, T.K. Mandal, G. Das, P.K. Das, Review of oil water core annular flow, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 13(8) (2009) 1957-1965.

[5] R.P. Chhabra, J.F. Richardson, Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications, 2nd Edition, Butterworth-Heinemann Press, (2008).

[6] E.C. Bingham, Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York, (1922).

[7] I.A. Frigaard, C. Nouar, On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 127(1) (2005) 1-26.

[8] M. Bercovier, M. Engelman, A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows, Journal of Computational Physics, 36(3) (1980) 313-326.

[9] I.A. Frigaard, Super-stable parallel flows of multiple visco-plastic fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 100(1–3) (2001) 49-75.

[10] C.K. Huen, I.A. Frigaard, D.M. Martinez, Experimental studies of multi-layer flows using a visco-plastic lubricant, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 142(1) (2007) 150-161.

[11] S. Hormozi, K. Wielage-Burchard, I.A. Frigaard, Entry, start up and stability effects in visco-plastically lubricated pipe flows, Journal of Fluid Mechanics, 673 (2011) 432-467.

[12] S. Hormozi, K.W. Burchard, I.A. Frigaard, Multi-layer channel flows with yield stress fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166(5–6) (2011) 262-278.

[13] M. d'Olce, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, L. Talon, Pearl and mushroom instability patterns in two miscible fluids' core annular flows, Physics of Fluids, 20(2) (2008) 024104.

[14] P. Sarmadi, S. Hormozi, I.A. Frigaard, Triple-layer configuration for stable high-speed lubricated pipeline transport, Physical Review Fluids, 2(4) (2017) 044302.

[15] G. Karniadakis, M. Israeli, S.A. Orszag, High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations, Journal of Computational Physics, 97(2) (1991) 414-443.

[16] S.M. Ghiaasiaan, Two-Phase Flow, Boiling and Condensation, Cambridge University Press, Cambridge, (2008).

[17] S. Ghosh, G. Das, P.K. Das, Simulation of core annular downflow through CFD—A comprehensive study, Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, 49(11) (2010) 1222-1228.

[18] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, (1980).

[19] M. Le Bars, A. Davaille, Stability of thermal convection in two superimposed miscible viscous fluids, Journal of Fluid Mechanics, 471 (2002) 339-363.

[20] S. Hormozi, D.M. Martinez, I.A. Frigaard, Stable core-annular flows of viscoelastic fluids using the visco-plastic lubrication technique, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166(23–24) (2011) 1356-1368.

[21] A. Bolis, Fourier Spectral/hp Element Method: Investigation of Time-Stepping and Parallelisation Strategies, PhD Thesis, Imperial College London, 2013.

[22] G.E. Karniadakis, S.J. Sherwin, Spectral/hp Element Methods for CFD, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, (1999).

[23] C.W. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice Hall PTR, (1971).

[24] C.D. Cantwell, D. Moxey, A. Comerford, A. Bolis, G. Rocco, G. Mengaldo, D. De Grazia, S. Yakovlev, J.E. Lombard, D. Ekelschot, B. Jordi, H. Xu, Y. Mohamied, C. Eskilsson, B. Nelson, P. Vos, C. Biotto, R.M. Kirby, S.J. Sherwin, Nektar++: An open-source spectral/hp element framework, Computer Physics Communications, 192 (2015) 205-219.

این صفحه عمداً خالی است