



بهینه‌سازی ساختار هندسی مواد ابرسانا با ضخامت متغیر درون پره با هدف بیشینه‌سازی عملکرد گرمایی

محمد احمدیان علمی، محمدرضا حاج محمدی*، سید سلمان نورآذر

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۶
بازنگری: ۱۳۹۷/۱۲/۰۳
پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۰۳
آرائه آنلاین: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰

کلمات کلیدی:

پره
بهینه‌سازی
مواد ابرسانای گرمایی
آنالیز گرمایی
سطوح گسترده

خلاصه: در مطالعه حاضر افزایش انتقال حرارت از پره با قراردادن موادی با ضریب هدایت گرمایی بسیار بالا (ابرسانا) در داخل یک پره مستقیم، مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به ملاحظات اقتصادی، تنها بخشی از ساختار پره را می‌توان به این مواد اختصاص داد. بنابراین، یک ساختار هندسی مناسب و تا جای ممکن بهینه‌شده برای این مواد ارائه می‌گردد. هدف از بهینه‌سازی، بیشینه‌سازی انتقال گرما از پره، با تغییر هندسه ساختار مواد ابرسانا تحت قیدهایی نظیر ثابت بودن نسبت حجمی مواد ابرسانا می‌باشد. ساختار هندسی مواد ابرسانا با توزیع شاخه‌هایی با ضخامت‌های متغیر و توزیع خطی ارائه می‌گردد. تأثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی مختلف، مانند عدد بایوت، نسبت ضخامت پره به طول آن، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره و نسبت ضریب هدایت گرمایی ابرسانا به پره بر نتایج بهینه‌سازی گزارش می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که برای شاخه‌های ابرسانا، یک هندسه بهینه وجود دارد، به گونه‌ای که برای آن هندسه بهینه، انتقال گرما از پره به بیش‌ترین مقدار ممکن افزایش می‌یابد. این افزایش انتقال گرما با افزایش درجه آزادی‌های ساختار هندسی مواد ابرسانا بیش‌تر می‌شود. مقدار افزایش انتقال گرما و همچنین ساختار بهینه مواد ابرسانا، وابسته به پارامترهایی نظیر عدد بایوت، نسبت ضخامت پره به طول آن، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره و نسبت ضریب هدایت گرمایی ابرسانا به پره می‌باشد. به طوری که با افزایش عدد بایوت، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره، کاهش نسبت ضخامت پره به طول آن و افزایش نسبت ضریب هدایت گرمایی ابرسانا به پره، کارایی مواد ابرسانا در ازدیاد انتقال گرما بیش‌تر و مشهودتر می‌گردد.

۱- مقدمه

قید هندسی حجم اشغال شده و ماده پره بهینه‌سازی کنند، به گونه‌ای که پره کمترین مقاومت گرمایی را داشته باشد. در سال ۲۰۰۵، المقبل [۷] ساختار درختی را که در واقع حاصل اتصال چند پره T شکل به یکدیگر بود، به عنوان طرحی جدید برای پره پیشنهاد داد. این پره از یک تنه اصلی و چند زوج شاخه فرعی تشکیل شده بود. المقبل دریافت که هر اندازه تعداد زوج شاخه‌ها بیش‌تر شود، عملکرد پره (انتقال گرما از پایه) بهتر است. همچنین او دریافت که اگر طی فرآیند بهینه‌سازی نسبت طول و ضخامت شاخه‌ها به طول و ضخامت تنه نیز ثابت بماند، در این صورت تعداد زوج شاخه‌ها دارای یک مقدار بهینه است. در سال ۲۰۰۶، لورنزی و روچا [۸] که در جستجوی ساختار بهینه‌تری از ساختار T شکل بودند، ساختار Y شکل را پیشنهاد داده و نشان دادند که عملکرد گرمایی پره Y شکل بهینه‌شده، ۵۵ درصد بهتر از پره T شکل بهینه‌سازی شده است. در سال ۲۰۰۹، لورنزی و روچا [۹] که در پی بهبود هرچه بیش‌تر طرح قبلی خود بودند، ساختار جدیدی تحت عنوان پره T-Y را پیشنهاد دادند. پره T-Y شباهت زیادی به پره T شکل دارد، با این تفاوت که در فاصله بین دو

امروزه مدیریت گرما به دغدغه بزرگی برای مهندسان و طراحان تبدیل شده است. مدیریت گرما در واقع به معنای توانایی کنترل دمای یک سامانه با استفاده از تکنولوژی‌هایی مبتنی بر علوم ترمودینامیک و انتقال گرما است. از سوی دیگر، سامانه‌های انتقال گرما از اهمیت زیادی در زندگی انسان برخوردارند، بنابراین دستیابی به بیشینه عملکرد این سامانه‌ها ضروری است. به همین دلیل امروزه بهینه‌سازی سامانه‌های انتقال گرما بسیار مورد توجه قرار گرفته است و اخیراً تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است [۵-۱].

یکی از روش‌های متداول افزایش انتقال گرما استفاده از سطوح گسترده (پره) می‌باشد. اگرچه پره‌ها دارای ضریب هدایت گرمایی بالایی هستند، لیکن استفاده بهینه از آن‌ها در کمترین فضای اشغال شده همواره مورد توجه بوده است. به عنوان مثال در سال ۲۰۰۰، بجان و المقبل [۶] بهینه‌سازی ساختار هندسی پره‌های T شکل را مطرح کردند. آن‌ها توانستند یک پره T شکل را با در نظر گرفتن دو

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Hajmohammadi@aut.ac.ir



به درون سامانه‌ها بروند. یک رویکرد برای حل این مشکل، طراحی و توسعه مواد ابررسانای گرمایی است. موادی که ساختار شبکه‌ای آن‌ها شبیه به گرافیت و یا الماس بوده و دارای ضریب هدایت گرمایی بسیار بالا است [۱۴]. از آنجایی که استفاده از این مواد، هزینه بسیار بالایی دارد، در سال‌های اخیر تحولات شگرفی در زمینه استفاده از این مواد در خنک‌کاری قطعات الکترونیکی و بهینه‌سازی ساختار هندسی آن‌ها انجام شده است. به عنوان مثال، المقبل و بجان [۱۵] به طراحی بهینه مواد ابررسانا با ساختار هندسی λ شکل در یک قطعه تولیدکننده گرما پرداختند. هدف مطالعه آن‌ها، کمینه کردن دمای بیشینه کل سامانه (دمای نقطه داغ^۳) بود. آن‌ها حجم قطعه و جرم ابررسانای مصرفی را به عنوان قیود مساله ثابت نگه داشتند. لورنزی و همکاران [۱۶ و ۱۷] بهینه‌سازی ساختار هندسی X شکل را برای مواد ابررسانا مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند با قرار دادن ده درصد حجمی ماده ابررسانا، استفاده از ساختار هندسی X شکل، دمای بیشینه را تا ۵۶ درصد در مقایسه با ساختار ساده‌تر λ شکل، کاهش می‌دهد. حاج‌محمدی و همکاران [۱۸] استفاده از مواد ابررسانا با ساختار هندسی چنگالی شکل^۴ در قطعه تولیدکننده گرما را پیشنهاد دادند و نشان دادند استفاده از این ساختار هندسی نتایج را در مقایسه با X تا ۴۵ درصد بهبود می‌بخشد.

با تکیه به کاربرد و ضرورت بهینه‌سازی ساختاری مواد ابررسانا، حاج‌محمدی و همکاران [۱۹] برای اولین بار تاثیر استفاده از این مواد ابررسانا را برای تقویت عملکرد گرمایی یک پره مستقیم بررسی کرده و نشان دادند استفاده از مواد ابررسانا در ساختار داخلی پره می‌تواند تاثیر چشمگیری در کاهش مقاومت گرمایی پره و افزایش عملکرد گرمایی آن داشته باشد. لیکن، آن‌ها یک ساختار هندسی ساده را بررسی کردند، یعنی ساختاری که در آن شاخه مواد ابررسانا دارای ضخامت ثابت باشد و فقط یک درجه آزادی به سیستم داده شده باشد. مواد ابررسانا به صورت تک‌شاخه و ضخامت ثابت اعمال شده‌اند و با توجه به قیود و پارامترهای بهینه‌سازی به ساختاری بهینه (بهترین ضریب منطری ممکن که بیشترین انتقال حرارت را در پی داشته باشد) برای این مواد دست یافته شده است. در مقاله حاضر درجه آزادی سیستم افزایش داده شده است و سعی شده است که ساختار و شکل ابررسانا تغییر یابد و به آرایشی بهینه‌تری از حالت تک‌شاخه

شاخه آن یک حفره مستطیلی ایجاد شده است. لورنزی و روچا نشان دادند که پره T-Y می‌تواند تا هشت درصد عملکردی بهتر (مقاومت گرمایی کمتر) نسبت به پره Y شکل داشته باشد.

پره‌هایی که تا بدین جا به آن‌ها اشاره شد، به منظور افزایش انتقال گرما، در سطح خارجی جسم و در تماس با آن قرار می‌گرفتند. علاوه بر دسته یاد شده دسته‌ای دیگر از پره‌ها تحت عنوان پره‌های وارونه^۱ نیز وجود دارند. این پره‌ها در واقع حفره‌هایی با اشکال مختلف هستند که درون جسم تعبیه می‌شوند. مزیت پره‌های وارونه در عدم اشغال فضا در خارج از جسم است. مزیت دیگر آن‌ها این است که برای ایجاد آن‌ها ماده‌ای مصرف نمی‌شود؛ بلکه از سطح درونی خود جسم به عنوان سطح انتقال گرما استفاده می‌شود. لذا در شرایطی که فضای اشغال شده برای طراح بسیار حائز اهمیت بوده و امکان ایجاد پره وارونه در عمل وجود داشته باشد، پره وارونه می‌تواند گزینه خوبی باشد. این ایده برای اولین بار در سال ۲۰۰۴، توسط بیسرنی و همکاران [۱۰] مطرح شد. آن‌ها دو ساختار هندسی شکل C و شکل T را برای پره‌های وارونه پیشنهاد داده و به کمک نظریه ساختاری^۲ و با در نظر گرفتن دو قید هندسی حجم جسم و حجم حفره ساختار هندسی آن‌ها را بهینه‌سازی کردند. بیسرنی و همکاران [۱۱] بعدها ساختار H شکل را پیشنهاد دادند و بدین نتیجه رسیدند که این ساختار عملکردی بسیار بهتر نسبت به حالت‌های C و T شکل از خود نشان می‌دهد. لورنزی و همکاران [۱۲] ساختار هندسی جدیدی تحت عنوان TY شکل را برای پره وارونه پیشنهاد دادند. اگرچه برتری عملکرد این شکل از پره وارونه نسبت به ساختار C شکل قابل توجه بود، اما در مقابل ساختارهایی مانند H شکل توان رقابت نداشت. سرانجام در سال ۲۰۱۷، حاج‌محمدی [۱۳] طرح ψ شکل را پیشنهاد داده و نشان داد که این طرح می‌تواند عملکرد بهتری نسبت به سایر طرح‌های هندسی موجود برای پره‌های وارونه داشته باشد.

تا بدین جا، اهمیت بهینه‌سازی ساختار بیرونی سامانه‌های انتقال گرما مورد بحث بوده است. اگرچه، همواره انتقال گرما در یک فضای کوچک برای طراحان تراشه‌های الکترونیکی که روز به روز به سوی کوچک‌تر شدن پیش می‌روند، دغدغه‌ای بزرگ بوده است. این امر مستلزم این است که به جای تغییر هندسه خارجی ابزارهای انتقال گرما، خنک‌کننده‌ها و مسیرهایی که انتقال گرما را میسرتر می‌کنند،

3 Hot Spot
4 Fork-Shaped

1 Inverted Fins (Cavities)
2 Constructal Theory

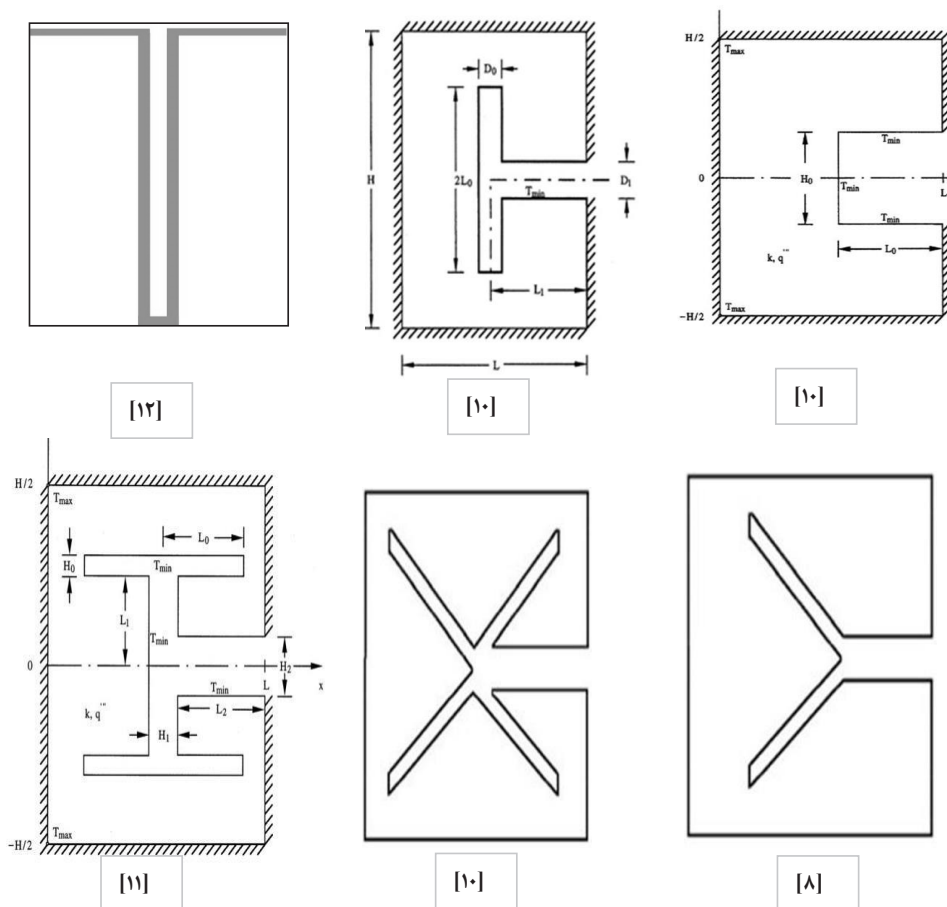
پره $(\frac{H}{L})$ بر نتایج بهینه‌سازی ارایه می‌گردد.

۲- شرح مسئله

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، مواد ابررسانا با یک حجم مشخص در مرزهایی از پره که در مجاورت با محیط هستند و از یک طرف به پای پره متصل هستند، قرار داده می‌شود. علت این جانمایی اولیه ایجاد بیشترین دسترسی بین پای پره و محیط پیرامون است. مواد ابررسانای گرمایی حجم ثابت و محدودی از پره را پوشش می‌دهند.

پای پره در دمای ثابت بوده و انتقال گرمای جابجایی با محیط در مرز بالایی و پایینی پره صورت می‌گیرد. انتهای پره نیز عایق فرض شده است. جنس پره و ابررسانا از مواد ایزوتروپیک بوده و ضریب هدایت گرمایی آن‌ها، k ، مستقل از دما فرض می‌شود [۶]. همچنین فرض می‌شود که مقاومت تماسی بین ابررسانا و پره ناچیز باشد که این فرض با پیشرفت‌هایی که در زمینه طراحی تراشه‌های

دست یابیم. بدین منظور شاخه‌های ابررسانا با ضخامت‌های متفاوت به صورت دو، چهار و هشت شاخه در پره قرار داده شده است. در این حالت سعی گردیده است که تمامی حالت‌های ممکن قرارگیری و آرایش این شاخه‌ها بررسی گردد و به بهترین آرایش ساختاری که به ازای آن مقدار انتقال حرارت در بیشترین مقدار خود است، دست یافته شود. از آنجایی که بر پایه نظریه ساختاری [۶] بالا بردن درجه آزادی در ساختار هندسی می‌تواند تاثیر چشمگیری در ارتقای عملکرد یک سامانه داشته باشد، در مطالعه حاضر سعی می‌شود تا ساختار هندسی ابررسانا در پره با تکیه بر طراحی شاخه‌های ابررسانا با ضخامت‌های متفاوت بهینه گردد. بدین منظور ابتدا از تعدادی شاخه ابررسانا با ضخامت‌های متفاوت استفاده شده و نسبت منظری (ضخامت‌های) هر یک بهینه می‌گردد و در انتها یک توزیع بهینه خطی برای ضخامت شاخه ابررسانا ارایه می‌شود. نهایتاً، تأثیر پارامترهای فیزیکی مختلف نظیر عدد بایوت (B_i)، نسبت مساحت ابررسانا به مساحت پره (ϕ)، نسبت ضریب هدایت گرمای ابررسانا به پره ($\frac{k_i}{k_f}$) و نسبت منظری



شکل ۱. به ترتیب از راست به چپ، پره‌های C، T، TY، Y، X، H (اعداد زیر اشکال شماره مرجع می‌باشد).

Fig. 1. Right to left respectively; C, T, TY, Y, X, H shaped Fin (The numbers below the figures are the reference number)

جدول ۱. متغیرهای بهینه‌سازی
Table 1. Optimization variables

متغیرهای بهینه‌سازی	ساختار هندسی ابرسانا
$\frac{A_2}{A_1}, \frac{H_1}{L_i}$	$N = 2$
$\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_2}, \frac{A_4}{A_3}, \frac{H_1}{L_i}$	$N = 4$
$\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_2}, \frac{A_4}{A_3}, \frac{A_5}{A_4}, \frac{A_6}{A_5}, \frac{A_7}{A_6}, \frac{A_8}{A_7}, \frac{H_1}{L_i}$	$N = 8$
$\frac{H_2}{H_1}, \frac{H_1}{L_i}$	توزیع خطی ضخامت

برای چند نمونه در جدول ۱ لیست شده‌اند.

۳- قیدها و معادلات حاکم

قید اساسی در نظر گرفته شده در مساله حاضر، نسبت مشخص (محدود) حجم مواد ابرسانا به حجم کل پره، φ ، است که آن را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$\varphi = \frac{A_i}{A_{tot}} = \frac{A_i}{A_i + A_f} = \frac{\sum H_i L_i}{HL} = Const \quad (1)$$

که در آن، A مساحت پیشانی بوده و زیروندهای f و i به ترتیب نمایانگر پره و مواد ابرسانا هستند. A_i مجموع کل مساحت شاخه‌های ابرسانا و A_f مساحت پره می‌باشد. معادله دویعدی گرما در شرایط پایا و بدون تولید گرما برای پره و ابرسانا، یک معادله دیفرانسیلی پاره‌ای به صورت رابطه (۲) است:

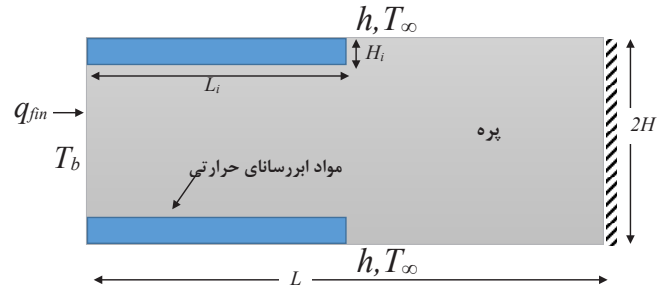
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{y}^2} = 0 \quad (2)$$

که در آن:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} \quad (3)$$

$$\left(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n} \right) = \frac{(x, y, n)}{H} \quad (4)$$

شرایط مرزی لازم برای حل معادله (۲) در شکل ۲ نمایش داده شده است و به صورت بی بعد به صورت زیر نوشته می‌شود:

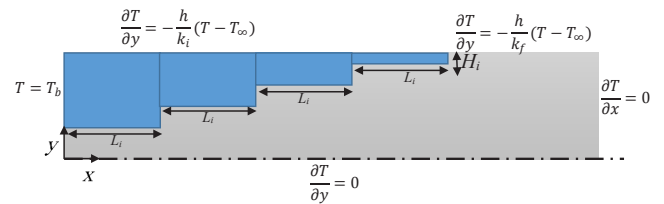


شکل ۲. هندسه و شرایط مرزی مسئله (انتقال حرارت در فین مستقیم با شاخه‌های ابرسانا- هاشور بیانگر شرط عایق است. مستطیل با رنگ تیره، نمایشگر شاخه‌های ابرسانا و مابقی ناحیه مربوط به ماده اولیه پره است.)

Fig. 2. Geometry and boundary conditions of the problem

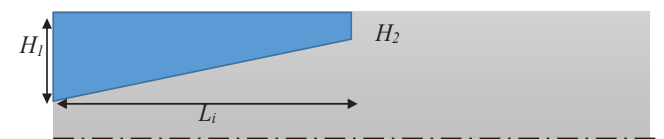
بسیار کوچک در قرن اخیر انجام شده فرضی قابل قبول است [۶]. مطابق شکل ۲، ابعاد خارجی پره، $2H$ و L است و طول و ضخامت مواد ابرسانا، H_i و L_i است. به علت تقارن در راستای محور y تنها نیمی از مساله مورد نظر مدل‌سازی می‌شود. مدل‌های هندسی بررسی شده در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است. در شکل ۲، تعداد N شاخه ابرسانا با ضخامت متفاوت در نظر گرفته شده و در شکل ۴، ضخامت ابرسانا به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. هدف از بهینه‌سازی، رسیدن به بیشینه انتقال گرما از پره با تعیین ساختار هندسی بهینه شاخه‌های ابرسانا در شکل ۳ و یا شکل ۴ می‌باشد.

متغیرهای بهینه‌سازی با توجه به شکل جسم، تعیین می‌گردند و



شکل ۳. قراردادن شاخه‌های ابرسانا با ضخامت‌های متغیر در پره (حالت چهار شاخه)

Fig. 3. Highly conductive branches with variable thickness embedde in a fin



شکل ۴. حالت خطی ابرسانا

Fig. 4. Highly conductive branch with linear variation of thickness

$$q_{ni} = -k_f \int_0^H \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (11) \quad \theta = \theta_b @ \hat{x} = 0 \quad (5)$$

زمانی که مواد ابررسانی گرمای در پره جای گذاری شوند، این انتقال گرما به شکل زیر تغییر می یابد.

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0 @ \hat{x} = \frac{L}{H} \quad (6)$$

$$q_{wi} = -k_f \int_0^{H-H_i} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy - k_i \int_{H-H_i}^H \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (12) \quad \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}=0} = 0 @ \hat{y} = 0 \quad (7)$$

و نهایتاً انتقال گرما بی بعد از تقسیم این دو عبارت بر یکدیگر به دست می آید،

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}=1} = Bi \theta @ \hat{y} = 1 \quad (8)$$

$$\hat{q} = \frac{q_{wi}}{q_{ni}} \quad (13) \quad \theta_i = \theta_f \quad \text{در مرزهای مشترک بین پره و ابررسانا} \quad (9)$$

معادله حاکم (۲) و شرایط مرزی آن به صورت عددی و با استفاده از روش المان محدود در نرم افزار متلب، حل می شود. شبکه بندی در راستای x و y به صورت نامنظم و غیریکنواخت انجام می پذیرد. اندازه شبکه ها به صورت متوالی کوچک تر می شود تا زمانی که همگرایی مورد نظر ارضا شود. بدین منظور، نمونه ای از استقلال نتایج از شبکه، در جدول ۲ ارائه شده است. همچنین، برای اعتبارسنجی مطالعه انجام شده، مساله ای مشابه مساله حاضر که توسط بجان و المقبل مورد مطالعه قرار گرفته، در نظر گرفته می شود. در مطالعه بجان و المقبل [۱۵]، اثر یک ابررسانا بر دمای بیشینه بی بعد در نسبت های مختلفی از ضریب رسانش گرمایی ابررسانا به قطعه، بررسی شده است. در جدول ۳، نتایج حاضر از مدل عددی مورد استفاده در کار حاضر

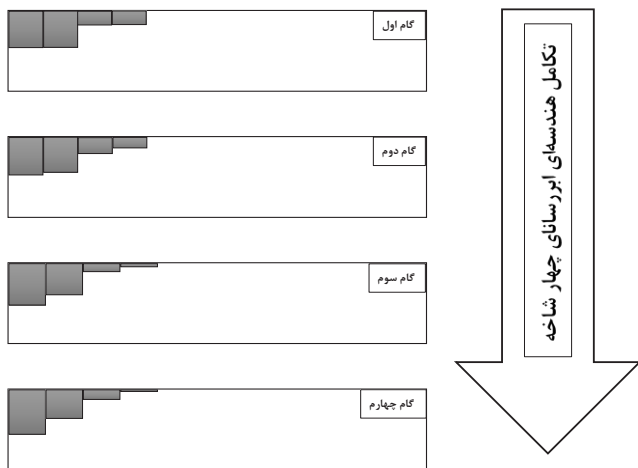
$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \hat{n}} \right|_{\hat{n}} = \frac{k_i}{k_f} \frac{\partial \theta_i}{\partial \hat{n}} \quad \text{در مرزهای مشترک بین پره و ابررسانا} \quad (10)$$

در این معادلات، $Bi = \frac{hH}{k_f}$ عدد بایوت است که در آن، h ضریب انتقال گرمای بین سطوح پره (یا ابررسانا) با هوای محیط پیرامون است. شرط آورده شده در روابط (۹) و (۱۰) بیانگر شرط پیوستگی دما و شار گرمایی در مرزهای مشترک بین پره و ابررسانا است. همچنین Π ، مولفه مکانی عمود بر این مرزهای مشترک می باشد. هدف از بهینه سازی، بیشینه سازی انتقال گرما از طریق قرار دادن مواد ابررسانا در داخل پره می باشد. مقدار انتقال گرما بر واحد عرض پره در غیاب مواد ابررسانا به صورت زیر محاسبه می شود،

جدول ۲. بررسی استقلال از شبکه در حالت $Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 20, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.5$

Table 2. Mesh independency, in the case of $Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 20, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.5$

$\frac{q^{j+1} - q^j}{q^j}$ (درصد)	q_m	تعداد المان های شبکه
۳/۲۳	۲/۰۶۹۱۰۷۷	۸۰
۱/۷۶	۲/۱۳۵۹۳۹۹	۳۲۰
۰/۸۸	۲/۱۷۳۵۳۲۵	۱۲۸۰
۰/۱۲	۲/۱۹۲۶۵۹۶	۵۱۲۰
	۲/۱۹۵۲۹۰۸	۲۰۴۸۰



شکل ۶. روند تکامل هندسه‌ای ابرسانای چهار شاخه
Fig. 6. Evolution of the optimum geometry

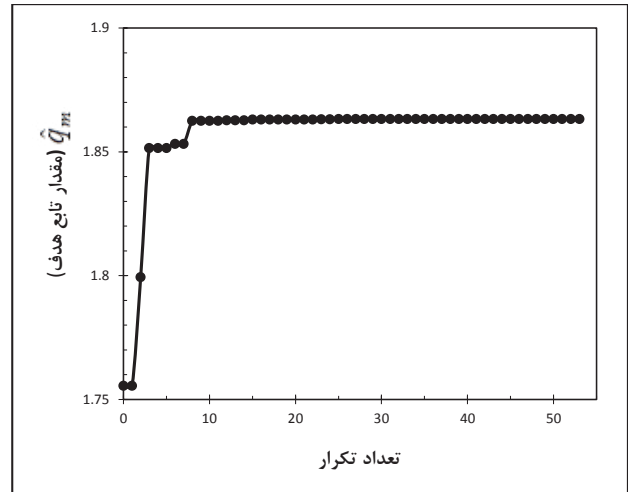
[۲۰] استفاده می‌شود.

با افزایش تعداد درجه آزادی و تعداد شاخه‌های ابرسانا، تعداد متغیرهای بهینه‌سازی افزایش می‌یابد. با افزایش متغیرهای بهینه‌سازی، استفاده از روش‌های مستقیم از لحاظ زمانی به صرفه نمی‌باشد، لذا از روش جستجوی الگو استفاده می‌گردد. در شکل ۵، یک نمونه از روند همگرایی الگوریتم جستجوی الگو در حالت ابرسانای چهار شاخه و در حالتی که $(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 10, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.05)$ ترسیم گردیده است. همان‌طور که در شکل ۵ مشهود است، روند همگرایی مطلوبی حاصل می‌گردد. الگوریتم جستجوی الگو نیاز به حدس اولیه برای نقطه شروع جستجو دارد. در هر حالت بهینه‌سازی سعی گردیده است از پاسخ‌های مرحله قبل به عنوان نقطه شروع مرحله جدید استفاده گردد؛

جدول ۳. مقایسه مقدار حداکثر دمای بدون بعد در یک جسم مربعی با تولید گرما گزارش شده توسط بجان و المقبل [۱۵] و حاصل شده توسط کد عددی مورد استفاده در کار حاضر

Table 3. The comparison of the maximum dimensionless temperature in a square-shaped body with heat generating reported by Bejan and Almgobel [15] and the present numerical code

درصد اختلاف	دمای بیشینه بی‌بعد (بجان و المقبل [۱۵])	دمای بیشینه بی‌بعد (کار حاضر)	$\frac{k_i}{k_f}$
۰/۸۳	۰/۳۷۵۳۹	۰/۳۷۲۲۷	۱۰
۰/۵۸	۰/۱۵۲۹۹۴	۰/۱۵۳۸۸	۱۰۰
۰/۱۷	۰/۱۳۵۴۰۸	۰/۱۳۵۱۷	۳۰۰
۰/۰۸	۰/۱۲۸۹۷۹	۰/۱۲۸۸۸	۱۰۰۰



شکل ۵. روند همگرایی ابرسانای چهار شاخه در حالتی که
 $(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 10, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.05)$

Fig. 5. Convergence diagram for the case of

$$(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 10, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.05)$$

با نتایج گزارش شده توسط بجان و المقبل [۱۵] مقایسه شده است. نتایج درج شده در این جدول نشان می‌دهد که تطابق قابل قبولی بین نتایج وجود دارد.

در حالتی که ضخامت ابرسانا ثابت است $(N=1)$ ، با توجه به این‌که تنها یک متغیر بهینه‌سازی وجود دارد، از روش جستجوی مستقیم استفاده شده، به‌گونه‌ای که محدوده وسیعی از نسبت منطقی‌ها آزموده شده و بهترین آن انتخاب می‌گردد. در مراحل بعدی، ساختار ابرسانا پیشرفته‌تر می‌شود، ابرسانا با ضخامت متغیر وارد پره و در حالت نهایی به صورت خطی وارد ابرسانا می‌شود. در این حالت، تعداد متغیرهای بهینه‌سازی بیشتر می‌شود و به دلیل به صرفه نبودن از نظر هزینه زمانی، از روش بهینه‌سازی جستجوی الگو

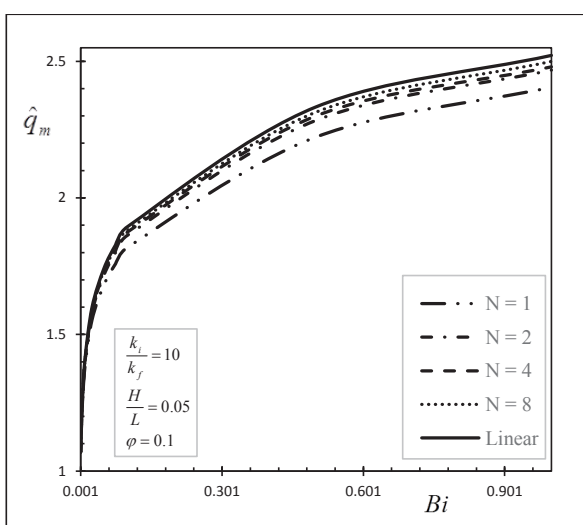
می‌توان بیشینه انتقال گرما را بیش از ۲۰۰ درصد نسبت به حالت بدون ابرسانا افزایش داد. شکل ۷ کارایی تغییر ساختاری را نیز به خوبی بیان می‌کند. همانطور که از نمودار پیداست، هرچه تعداد شاخه‌ها بیش‌تر شود، ماکزیمم انتقال گرما افزایش می‌گردد. نکته‌ی قابل توجه در نمودار، بهترین حالت ساختاری می‌باشد که مربوط به ابرسانای خطی است. از دقت در نمودار نیز می‌توان فهمید، با افزایش تعداد شاخه‌ها، پاسخ‌ها به هم نزدیک‌تر می‌گردد. دلیل افزایش کارایی یا افزایش تعداد شاخه‌ها این است که با افزایش تعداد شاخه‌ها، تعداد درجه آزادی‌های سیستم بیشتر شده و سیستم مورد نظر انعطاف و توانایی بیشتری برای نزدیک نزدیک‌تر شدن به حالت بهینه را دارد [۶].

شکل ۸ تأثیر پارامتر Bi بر انتقال گرما ماکزیمم در پره را نشان می‌دهد. با افزایش عدد بایوت، مقدار بیشینه انتقال گرما نیز افزایش می‌یابد؛ به طوری که میزان انتقال حرارت بیشینه با تغییر مقدار بایوت از ۰/۱ تا ۰/۱ در حالی که نسبت ضریب هدایت حرارتی ابرسانا به ضریب هدایت حرارتی پره ۱۰، نسبت مساحت ابرسانا به مساحت پره ۰/۱ و نسبت منطری پره ۰/۰۵ باشد، از ۱/۳۸ به ۱/۸۲ تغییر می‌کند و میزان انتقال حرارت بیشینه را ۳۲ درصد بهبود می‌بخشد. به وضوح، سودمندی روش افزایش شاخه‌های ابرسانا قابل مشاهده است. بهترین حالت ساختاری، حالت خطی است. در هرکدام از شکل‌های ۹ و ۱۰ یکی از پارامترها تغییر داده می‌شود تا روند تأثیرگذاری بهتر

به عنوان مثال پاسخ‌های به دست آمده برای حالت دو شاخه به عنوان نقاط شروع برای حالت چهار شاخه در نظر گرفته شده است (گام اول در شکل ۶). این حدس اولیه به الگوریتم بهینه‌سازی جستجوی الگو که در نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی می‌شود، داده می‌شود و سپس همان‌طور که در شکل ۶ نمایش داده شده، نمونه‌های هندسی مختلفی که در آن ضخامت تمامی شاخه‌های ابرسانا متفاوت است توسط این الگوریتم تولید می‌شود تا ضمن ثابت ماندن نسبت حجمی مواد ابرسانا به حجم کل پره، نهایتاً هندسه بهینه تولید گردد.

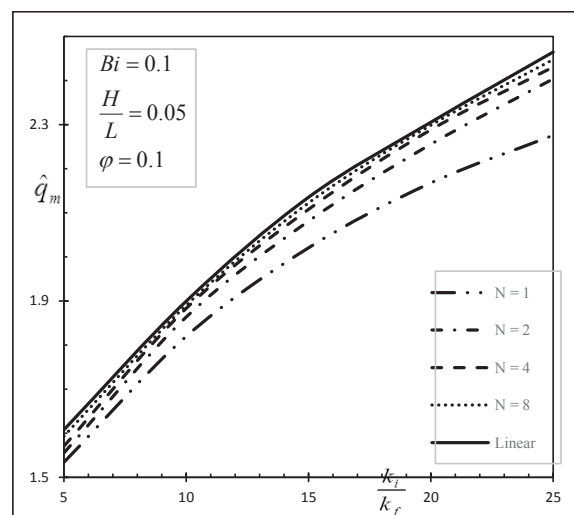
۴- نتایج

در شکل ۷ روند تأثیر پارامتر $\frac{k_i}{k_f}$ در حالات ساختاری مختلف بر مقدار انتقال گرما ماکزیمم نشان داده شده است. در حالت شبیه‌سازی شده، سه پارامتر دیگر بهینه‌سازی، در مقادیر خاصی ثابت فرض شده‌اند و بهینه‌سازی صورت می‌پذیرد ($Bi=0.1, \frac{H}{L}=0.05, \phi=0.1$). نتایج این بهینه‌سازی برای حالت‌های ضخامت ثابت ($N=1$), ابرسانای دو شاخه ($N=2$), چهار شاخه ($N=4$), هشت پله ($N=8$) و خطی (Linear) نشان داده شده است. همان‌گونه که پیش‌بینی می‌شود، با افزایش نسبت ضریب هدایت گرمای ابرسانا به ضریب هدایت گرمای پره، مقدار ماکزیمم انتقال گرما به مقدار قابل توجهی افزایش یابد؛ به‌گونه‌ای که اگر از مواد ابرسانایی استفاده شود که ضریب هدایت گرمای آن‌ها ۲۰ برابر ضریب هدایت گرمای پره باشد،



شکل ۸. تأثیر Bi بر \hat{q}_m در حالات ساختاری مختلف

Fig. 8. Influence of Bi on \hat{q}_m



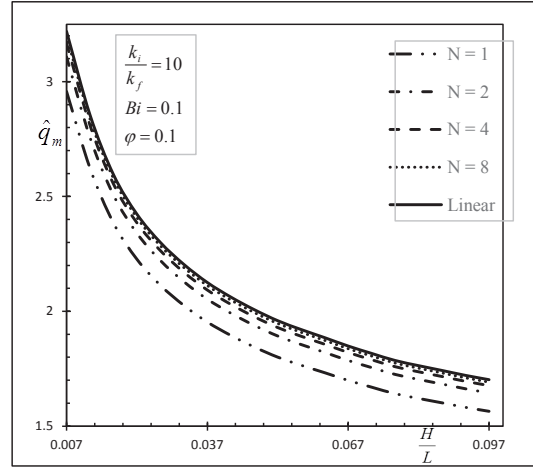
شکل ۷. تأثیر $\frac{k_i}{k_f}$ بر \hat{q}_m در حالات ساختاری مختلف

Fig. 7. Influence of $\frac{k_i}{k_f}$ on \hat{q}_m

شدن پره و کاهش ضخامت آن، مقاومت گرمایی پره که موجب کاهش بازده پره می‌شود، زیادتر شده و لذا استفاده از شاخه‌های ابرسانا که وظیفه کاهش مقاومت گرمایی را عهده‌دار هستند نمود بیشتری می‌یابد.

در آخرین بخش از آنالیز به بررسی تأثیر ϕ بر نقطه بهینه پرداخته می‌شود. همان‌طور که از شکل ۱۰ پیداست و همچنین قابل پیش‌بینی است، هرچه مساحت ابرسانا افزایش یابد، میزان انتقال گرما به میزان چشم‌گیری بهبود می‌یابد. سودمندی تکنیک افزایش تعداد شاخه‌های ابرسانا در افزایش ماکزیمم انتقال گرما پره و کارایی مؤثر اضافه کردن مواد ابرسانا به پره در این اشکال قابل مشاهده است. همان‌طور که مشخص است، بهترین حالت استفاده از مواد ابرسانا به صورت خطی می‌باشد.

برای درک بهتر تأثیر افزایش تعداد شاخه‌های ابرسانا (با ثابت ماندن مساحت ابرسانا) شکل ۱۱ ترسیم شده است. در این شکل عدد بایوت، نسبت منظری پره و نسبت مساحت ابرسانای به کار رفته به مساحت پره ثابت نگه داشته شده و بهینه‌سازی به ازای سه مقدار مختلف از نسبت ضریب هدایت گرمای ابرسانا به پره انجام گرفته است. مشاهده می‌گردد که با افزایش تعداد شاخه‌های ابرسانا، مقدار انتقال حرارت ماکزیمم افزایش یافته و کارایی روش اضافه کردن ابرسانا به پره بیشتر می‌گردد. به عنوان مثال درحالتی که $(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 20, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.05)$ افزودن مواد ابرسانای

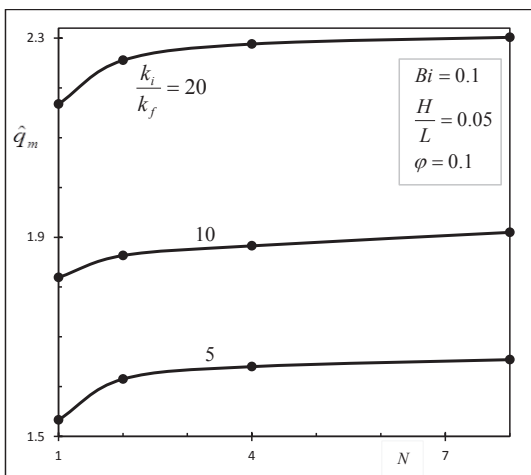


شکل ۹: تأثیر $\frac{H}{L}$ بر \hat{q}_m در حالات ساختاری مختلف

Fig. 9. Influence of $\frac{H}{L}$ on \hat{q}_m

درک گردد.

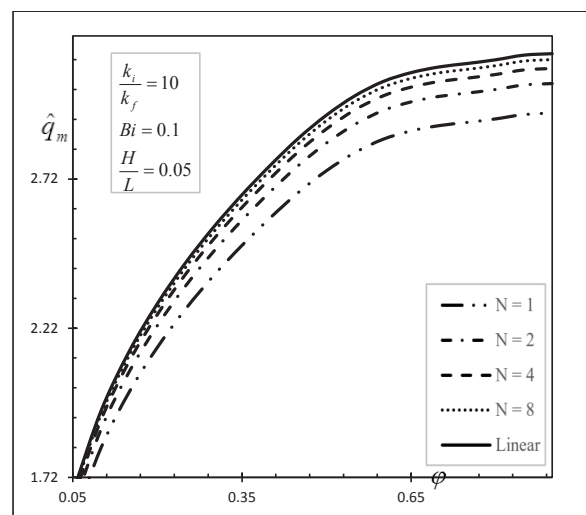
نمودار ۹ گویای بهبود انتقال گرمای ماکزیمم، با تغییر آرایش ابرسانا در نسبت‌های منظری مختلف پره است. مطابق انتظار، افزایش شاخه‌های ابرسانا (با ثابت ماندن مساحت کل ابرسانا) باعث بهبود بهینه‌سازی گردیده شده است و مزیت استفاده از این تکنیک را نشان می‌دهد. هرچه این نسبت کاهش یابد، یعنی مستطیل پره باریک‌تر گردد، ماکزیمم انتقال حرارت صورت گرفته افزایش می‌یابد و کارایی استفاده از مواد ابرسانا را اثبات می‌کند. دلیل این‌که با باریک‌تر شدن پره، کارایی استفاده از ابرسانا زیاد می‌شود این است که با باریک



شکل ۱۱. تأثیر افزایش تعداد شاخه‌های ابرسانا بر انتقال گرما ماکزیمم در سه

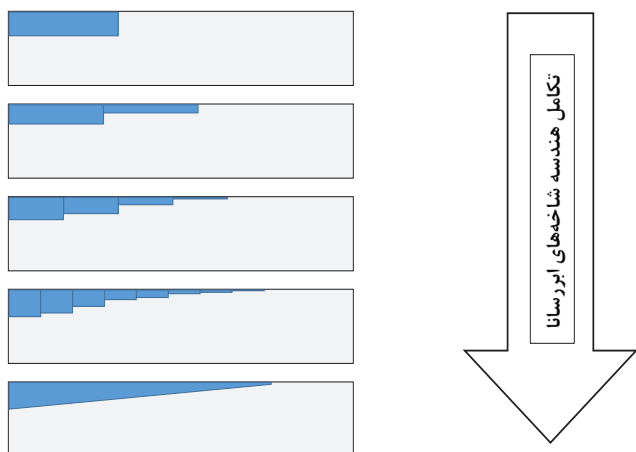
حالت مختلف $\frac{k_i}{k_f}$

Fig. 11. The effect of the number of highly conductive branches on maximum heat transfer



شکل ۱۰. تأثیر ϕ بر \hat{q}_m در حالات ساختاری مختلف

Fig. 10. Influence of ϕ on \hat{q}_m

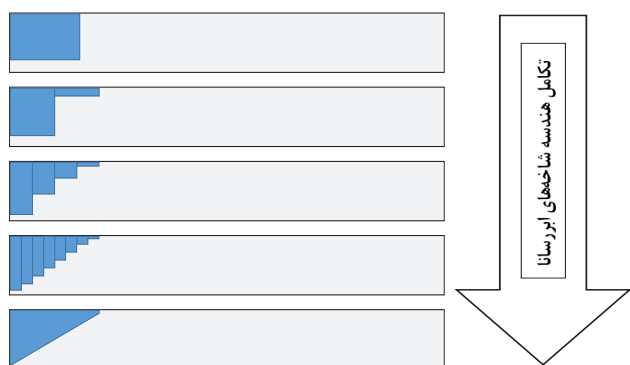


شکل ۱۳. ساختارهای بهینه برای شاخه‌های ابررسانا درحالتی که

$$(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 1, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.5)$$

Fig. 13. Optimal structures for highly conductive branches, in the case of $(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 1, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.5)$

می‌توان فهمید که اگر تعداد شاخه‌های ابررسانا بی‌نهایت شود، شکل نهایی قرارگیری آن‌ها مشابه حالت خطی می‌گردد؛ یعنی حالت خطی بهینه‌ترین شکل ابررسانا در یک حالت خاص می‌باشد. تأثیر کاهش عدد بایوت بر شکل هندسی ابررسانا در شکل ۱۳ به نمایش گذاشته شده است. در این حالت عدد بایوت نسبت به شکل ۱۲ کاهش می‌یابد $(Bi = 0.1)$. کاهش عدد بایوت باعث کاهش نسبت ضخامت به طول بهینه خواهد شد و مستطیل ابررسانا کشیده و باریک می‌گردد. پارامتر مورد بررسی در شکل ۱۴، نسبت منطری پره می‌باشد.



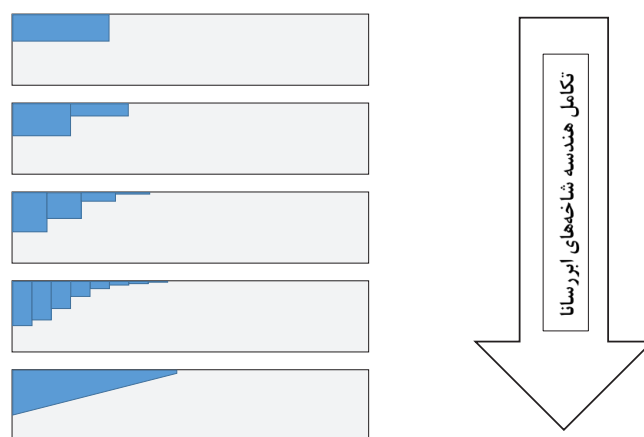
شکل ۱۴. ساختارهای بهینه برای شاخه‌های ابررسانا درحالتی که

$$(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 1, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.1)$$

Fig. 14. Optimal structures for highly conductive branches, in the case of $(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 1, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.1)$

حرارتی به پره به صورت ضخامت ثابت $(N=1)$ ، میزان انتقال حرارت بیشینه را ۱۱۶ درصد بهبود می‌بخشد. با اعمال شاخه‌های ابررسانا با ضخامت‌های متفاوت و یافتن بهترین و بهینه‌ترین حالت ممکن، در حالی که ابررسانا به صورت دوشاخه وارد می‌شود $(N=2)$ ، ۹ درصد نتیجه بهبود می‌یابد. نکته قابل توجه دیگر در این شکل‌ها، شیب تند ابتدایی آن‌هاست؛ به طوری که با زیاد شدن تعداد شاخه‌ها، درصد بهبود نتایج کاهش می‌یابد. در حالت چهار شاخه و هشت شاخه نسبت به حالت قبل، نتایج به ترتیب سه و چهار درصد بهبود می‌یابند تا بدین جا بهینه‌سازی در حضور پارامترهای بهینه‌سازی صورت گرفت و به نتایج مهمی دست یافته شد. ثابت شد که هر پارامتر چگونه بر نقطه بهینه تأثیر می‌گذارد و سپس سودمندی تغییر آرایش ابررسانا و افزایش تعداد شاخه‌های آن به اثبات رسید.

به عنوان آخرین بخش از بهینه‌سازی و درک بهتر تأثیرگذاری پارامترهای بهینه‌سازی بر نقطه بهینه، شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ ترسیم شده است. شبیه‌سازی در سه حالت مختلف انجام می‌گیرد و تغییرات ساختاری ابررسانا نشان داده می‌شود. شکل ۱۲ درحالتی که شبیه‌سازی شده است. در این شکل روند افزایش شاخه‌های ابررسانا (پله پله شدن) به خوبی دیده می‌شود. شاخه‌ها در مقادیر بهینه خود ترسیم گردیده‌اند. نکته شایان توجه روند تغییرات شاخه‌ها به سمت شکل ابررسانای خطی است؛ به طوری که طی هر مرحله، شکل‌های بهینه شاخه‌ها به سمت خطی شدن حرکت می‌کنند. به عبارت دیگر



شکل ۱۲. ساختارهای بهینه برای شاخه‌های ابررسانا درحالتی که

$$\{ (Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 1, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.5) \}$$

Fig. 12. Optimal structures for highly conductive branches, in the case of $(Bi = 0.1, \frac{k_i}{k_f} = 1, \phi = 0.1, \frac{H}{L} = 0.5)$

۲) افزایش انتقال حرارت با افزایش درجه آزادی‌های ساختار هندسی مواد ابرسانا بیشتر می‌شود، به گونه‌ای که شاخه ابرسانا با ضخامت متغیر، به مراتب از شاخه ابرسانا با ضخامت ثابت بهتر است. ۳) مقدار افزایش انتقال حرارت و همچنین ساختار بهینه مواد ابرسانا، وابسته به پارامترهایی نظیر عدد بایوت، نسبت ضخامت پره به طول آن، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره و نسبت ضریب هدایت گرمایی ابرسانا به پره می‌باشد. با افزایش عدد بایوت، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره و نسبت ضریب هدایت گرمایی ابرسانا به پره و کاهش نسبت ضخامت پره به طول آن، کارایی مواد ابرسانا در ازدیاد انتقال حرارت بیشتر و مشهودتر می‌شود.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت، m^2
Bi	عدد بایوت
H	ضخامت، m
h	ضریب انتقال گرما جابجایی، W/m^2K
k	ضریب هدایت گرمایی، W/mK
L	طول، m
n	مختصات در جهت عمود بر مرزهای مشترک پره و ابرسانا، m
q	مقدار انتقال گرما، W
T	دما، K
V	حجم، m^3
W	عرض، m
x, y	مختصات کارترین، m

علائم یونانی

ϕ	نسبت حجمی ابرسانا به پره
θ	دمای بی‌بعد

زیرنویس

b	پایه
f	پره
i	مواد ابرسانای گرمایی
m	بهینه
ni	بدون ابرسانا
opt	بهینه
tot	مجموع
wi	با ابرسانا
∞	محیط

در این حالت نسبت منظری پره نسبت به شکل ۱۲ کاهش می‌یابد ($\frac{H}{L} = 0.5$). با کاهش نسبت ضخامت به طول پره، نسبت منظری بهینه در ابرسانا کاهش یافته و شاخه‌های ابرسانا به صورت عمودی قرار می‌گیرد و ناحیه بیشتری از تماس با منبع گرم را در بر می‌گیرد.

۵- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر سعی شد با قرار دادن موادی با ضریب هدایت گرمایی بسیار بالا (ابرسانا) در داخل یک پره مستقیم، از مقاومت گرمایی پره کاسته شود تا عملکرد و انتقال حرارت از آن افزایش یابد. با توجه به ملاحظات اقتصادی جهت تامین مواد، تنها بخشی از ساختار پره را می‌توان به این مواد اختصاص داد. بنابراین در این مطالعه، یک ساختار هندسی مناسب برای این مواد ارائه گردید. هدف از بهینه‌سازی، بهینه‌سازی انتقال حرارت از پره، با تغییر هندسه ساختار هندسی مواد تحت قیدهایی نظیر ثابت بودن شکل هندسی پره، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره می‌باشد. تغییر ساختار هندسی مواد رسانا از ساده‌ترین شکل به صورت یک شاخه ابرسانا با ضخامت ثابت شروع شده و تا ارائه ساختارهایی پیچیده‌تر مانند شاخه‌های ابرسانا با توزیع ضخامت متغیر (پله‌ای) و خطی تکامل می‌یابد. تاثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی مختلف، مانند عدد بایوت، نسبت منظری پره، نسبت حجمی مواد ابرسانا به پره و نسبت ضریب هدایت گرمایی ابرسانا به پره بر نتایج بهینه‌سازی گزارش شده است.

هندسه مساله شامل دو ناحیه حل دوبعدی، یعنی پره و ابرسانا بوده است و در هر یک، معادله هدایت دوبعدی و پایا به همراه شرایط مرزی به صورت عددی و با استفاده از روش المان محدود حل شده است تا توزیع دما در هر حالت و نرخ انتقال حرارت پره محاسبه گردد. برای هر دو ناحیه، از مش‌های غیرساختاریافته با اندازه‌های غیریکنواخت استفاده می‌شود. در فرآیند بهینه‌سازی برای تعیین نسبت منظری یک ابرسانا با ضخامت ثابت داخل پره، تنها یک متغیر بهینه‌سازی وجود دارد. برای بهینه‌سازی پره با ضخامت متغیر، به دلیل داشتن متغیرهای بیشتر، از روش بهینه‌سازی جستجوی الگو استفاده می‌شود.

۱) برای شاخه‌های ابرسانا، یک هندسه بهینه وجود دارد، به گونه‌ای که برای آن هندسه بهینه، انتقال حرارت از پره به بیشترین مقدار ممکن افزایش می‌یابد.

منابع

- geometric optimization of the intrusion into a conducting wall, *International journal of heat and mass transfer*, 47(12-13) (2004) 2577-2586.
- [11] C. Biserni, L. Rocha, G. Stanescu, E. Lorenzini, Constructal H-shaped cavities according to Bejan's theory, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(11-12) (2007) 2132-2138.
- [12] G. Lorenzini, L.A.O. Rocha, Geometric optimization of TY-shaped cavity according to constructal design, *International Journal of heat and mass transfer*, 52(21-22) (2009) 4683-4688.
- [13] M. Hajmohammadi, Introducing a ψ -shaped cavity for cooling a heat generating medium, *International Journal of Thermal Sciences*, 121 (2017) 204-212.
- [14] S.L. Shindé, J. Goela, *High thermal conductivity materials*, Springer, 2006.
- [15] M. Almgobel, A. Bejan, Conduction trees with spacings at the tips, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(20) (1999) 3739-3756.
- [16] G. Lorenzini, C. Biserni, L. Rocha, Constructal design of non-uniform X-shaped conductive pathways for cooling, *International Journal of Thermal Sciences*, 71 (2013) 140-147.
- [17] G. Lorenzini, C. Biserni, L. Rocha, Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 58(1-2) (2013) 513-520.
- [18] M. Hajmohammadi, V.A. Abianeh, M. Moezzinajafabadi, M. Daneshi, Fork-shaped highly conductive pathways for maximum cooling in a heat generating piece, *Applied Thermal Engineering*, 61(2) (2013) 228-235.
- [19] M. Hajmohammadi, M. Ahmadian, S. Nourazar, Introducing highly conductive materials into a fin for heat transfer enhancement, *International Journal of Mechanical Sciences*, 150 (2019) 420-426.
- [20] P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright, *Practical optimization*, (1981).
- [1] S.N. Nyamsi, F. Yang, Z. Zhang, An optimization study on the finned tube heat exchanger used in hydride hydrogen storage system—analytical method and numerical simulation, *international journal of hydrogen energy*, 37(21) (2012) 16078-16092.
- [2] G. Lorenzini, S. Moretti, A. Conti, Fin shape thermal optimization using Bejan's constructal theory, *Synthesis Lectures on Engineering*, 6(1) (2011) 1-219.
- [3] D. Heymann, D. Pence, V. Narayanan, Optimization of fractal-like branching microchannel heat sinks for single-phase flows, *International journal of thermal sciences*, 49(8) (2010) 1383-1393.
- [4] B. Kundu, D. Bhanja, Performance and optimization analysis of a constructal T-shaped fin subject to variable thermal conductivity and convective heat transfer coefficient, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(1-3) (2010) 254-267.
- [5] Q. Chen, M. Wang, N. Pan, Z.-Y. Guo, Optimization principles for convective heat transfer, *Energy*, 34(9) (2009) 1199-1206.
- [6] A. Bejan, M. Almgobel, Constructal T-shaped fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(12) (2000) 2101-2115.
- [7] M.A. Almgobel, Constructal tree-shaped fins, *International journal of thermal sciences*, 44(4) (2005) 342-348.
- [8] G. Lorenzini, L.A.O. Rocha, Constructal design of Y-shaped assembly of fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(23-24) (2006) 4552-4557.
- [9] G. Lorenzini, L.A.O. Rocha, Constructal design of T-Y assembly of fins for an optimized heat removal, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(5-6) (2009) 1458-1463.
- [10] C. Biserni, L. Rocha, A. Bejan, Inverted fins:

