Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(7) (2020) 479-482
DOI: 10.22060/mej.2019.15328.6095

Hydrodynamic Behavior of Different No-Slip Condition on the Curved Boundaries in the Lattice Boltzmann Method

M. Taghilou, J. Ghasemi*, A. Salimi

Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran

ABSTRACT: This paper examines the various methods of applying no-slip boundary condition on a fixed and rotary cylinder in the lattice Boltzmann framework. For this purpose, five methods of bounce-back, linear and quadratic method of Yu and the linear and quadratic method of Bouzidi are chosen. The main challenge in all of these methods is how to calculate and interpolate the unknown distribution functions at the points around the boundary points. Results show that in the stable conditions (Re=20 and Re=40), the maximum error of calculation of the separation angle is 6.7 % and it is related to the bounce-back method, while in the stable conditions, a significant difference cannot be seen between the bounce-back and other methods. Also, the linear method of Bouzidi has the most error in calculating the separation length (6% for Re=20 and 8.82 % for Re=40). By increasing the Reynolds number and increasing the rotational velocity, a difference in the lift coefficient in the early times, t*> 7.78 grows for the conditions of k=0.2 and Re=200, between the bounce-back and other methods, however with increasing time, this difference reduces, whereas the three methods of linear Yu, linear Bouzidi and quadratic Bouzidi, continue to produce similar results.

Review History:

Received: 25/11/2018
Revised: 01/01/2019
Accepted: 11/03/2019
Available Online: 16/03/2019

Keywords:

Lattice Boltzmann method
No-slip boundary condition
Rotary cylinder
Momentum exchange method

1. INTRODUCTION

In the field of numerical simulations, several attempts have been made to detect the curvilinear boundaries and preventing its step-like behavior. One is to map the curvilinear coordinates into the cartesian coordinate. However, the implementation of curved boundaries in the cartesian coordinate is more widely used because of the simplicity of the application and the lack of limitation to the specific coordinate system. Filippova and Hänel [1], were able to model curve boundaries in the cartesian system using the bounce-back rule and the idea of extrapolating the distribution functions. Mei et al. [2], developed the method of Filippova and Hänel and partially solved the problem of instability.

Since there is no comprehensive study on the comparison of different methods in applying the no-slip boundary conditions in curved boundaries, especially in rotating conditions, five methods of Bounce-Back (BB), linear Yu-Mei-Luo-Shyy (LYMLS), Quadratic Yu-Mei-Luo-Shyy (QYMLS), linear Bouzidi-Firdaouss-Lallemand (LBFL) and quadratic Bouzidi-Firdaouss-Lallemand (LBFL) are selected to compare and find their hydrodynamic behavior. Accordingly, a FORTRAN code is developed to evaluate the hydrodynamic parameters of the flow, such as the separation angle, separation length, and the drag and lift coefficients.

2. IMPLEMENTATION OF CURVED BOUNDARY

2.1. Bounce-back method

In this method, r_l stands for the position of the fluid near the boundary, r_p represents the point inside the cylinder near the boundary and r_w shows the point between them, located on the curved surface. According to the bounce-back rule, the collision step on the curved surface is as follows [3]:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)=\tilde{f}_{\alpha}(r_l,t)-2\rho w_{\alpha}\frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_{\alpha}}{c_s^2} \tag{1}$$

where $\bar{\alpha}$ is opposite to α and α is a direction toward the curved boundary.

2.2. Method of Bouzidi

The exact location of the solid surface is obtained by the following ratio:

$$\Delta_w=\left|(r_l-r_w)/(r_l-r_p)\right| \tag{2}$$

The linear interpolation of BFL is defined as follows:
For $\Delta_w \le 0.5$:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)=(1-2\Delta_w)\tilde{f}_{\alpha}(r_{l'},t)+2\Delta_w\tilde{f}_{\alpha}(r_l,t)-2\rho w_{\alpha}\frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_{\alpha}}{c_s^2} \tag{3}$$

For $\Delta_w > 0.5$:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)=\frac{2\Delta_w-1}{2\Delta_w}\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(r_l,t)+\frac{1}{2\Delta_w}\tilde{f}_{\alpha}(r_l,t)-\frac{1}{2\Delta_w}2\rho w_{\alpha}\frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_{\alpha}}{c_s^2} \tag{4}$$

*Corresponding author's email: j.ghasemi@znu.ac.ir

Table 1. Comparison of the C_d, L/D, and θ with respect to the FEM for Re=20 in a fixed condition

Method	C_d	error%	L/D	error%	θ	error%
BB	2.070	1.2	0.97	3	40.36	7.6
QYMLS1	×	---	×	---	×	---
QYMLS2	2.068	1.12	0.96	2.13	42.18	2.06
LYMLS	2.065	1	0.95	1.1	42.3	3
QBFL1	×	---	×	---	×	---
QBFL2	2.071	1.27	0.93	1.06	43.1	1.37
LBFL	2.075	1.4	1	6	43.86	0.3
FEM [7]	2.045	---	0.94	---	43.7	---

Instead of using the linear interpolation method, we can use the second-order interpolation to find the distribution functions [4].

2.3. Method of Yu

Linear interpolation for finding distribution functions in the YMLS method is as follows [5]:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l, t+\Delta t) = \frac{\Delta_w}{1+\Delta_w} f_{\bar{\alpha}}(r_{l'}, t+\Delta t) + \frac{1}{1+\Delta_w} f_{\bar{\alpha}}(r_w, t+\Delta t) \tag{5}$$

where the amount of $f_{\bar{\alpha}}(r_l, t+\Delta t)$ could be evaluated by the second-degree interpolation as follows:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l, t+\Delta t) = \frac{2}{(2+\Delta_w)(1+\Delta_w)} f_{\bar{\alpha}}(r_w, t+\Delta t) + \frac{2\Delta_w}{1+\Delta_w} f_{\bar{\alpha}}(r_{l'}, t+\Delta t) - \frac{\Delta_w}{2+\Delta_w} f_{\bar{\alpha}}(r_{l''}, t+\Delta t) \tag{6}$$

Also, the amount of force which acts on the cylinder can be calculated as follows [6]:

$$F = \sum_{l} \sum_{\alpha_l^{cyl}} F_{\alpha_l}^{cyl} \tag{7}$$

where:

$$F_{\alpha_l}^{cyl} = c_{\alpha_l}^{cyl} \tilde{f}_{\alpha_l}^{cyl}(r_l^{cyl}, t)\Delta x\, \Delta y + c_{\alpha_l}^{cyl} \tilde{f}_{\bar{\alpha}_l}^{cyl}(r_l^{cyl}, t+\Delta t)\Delta x\, \Delta y \tag{8}$$

3. RESULTS AND DISCUSSION

3.1. Fixed cylinder

The comparison between values of the drag coefficient C_d, the ratio of the vortex length to the diameter L/D, and the angle of separation θ in Re=20 are reported and compared with the available numerical results in Table 1. According to Table 1, the BB method in calculating the angle of separation θ and the LBFL method in calculating the L/D values lead to 7.6% and 6% error respect to the Finite Element Method (FEM), respectively. Table 1 shows the conditions that led to the divergence of QBFL and QYMLS with the QBFL1 and QYMLS1 expressions. These two methods converge with larger computational domain and an increase in the single release time. In this situation, the two QBFL2 and QYMLS2 methods converge to the values given in Table 1.

3.2. Rotating cylinder

In this section, the values of the drag C_d and the lift C_l *coefficients in the* Re=200 have been reported to examine the behavior of the boundary conditions of BB, LYMLS, LBFL and QBFL in the fixed and rotating cylinders. It should be noted that the results of the QYMLS method have not been presented due to non-convergence in the problem conditions (selection of parameters U, D and τ). Table 2 shows the results for $k = R\Omega/U = 0$. Since for k=0 the coefficients of the drag and lift are oscillating, hence, the maximum and minimum values of these values are reported. In order to compare the behavior of boundary conditions, the LYMLS method was selected as the base method and the error of each methods is measured and reported compared to this method.

Now, changes in the drag coefficients for the conditions of k=0.2 and Re=200 are shown in Figs. 1 and 2, respectively. By comparing the results, it is seen that in the early times, $t^*<7.78$, differences between BB results with the other three methods are clear, but with increasing time, this difference is reduced.

4. CONCLUSIONS

Based on the simulations, the following results can be expressed:

- In the case where the cylinder is fixed and the flow has a small Reynolds number, using the bounce-back method, in spite of the simplicity of the operation, has an acceptable accuracy in calculating and predicting the drag coefficient; so that the need to apply methods with higher precision or

Table 2. maximum and minimum values for C_d and C_l for a fixed cylinder, k=0 at Re=200

	BB	LYMLS	LBFL	QBFL
$C_{d,\,max}$	1.464	1.329	1.329	1.315
$E_{Cd,\,max}$ (%)	10.16	0.0	0.0	1.05
$C_{d,\,min}$	1.24	1.116	1.12	1.102
$E_{Cd,\,min}$ (%)	11.11	0.0	0.36	1.25
$C_{l,\,max}$	0.716	0.591	0.585	0.578
$E_{Cl,\,max}$ (%)	21.15	0.0	1.02	2.2
$C_{l,\,min}$	-0.712	-0.565	-0.576	-0.562
$E_{Cl,\,min}$ (%)	26.06	0.0	1.95	0.53

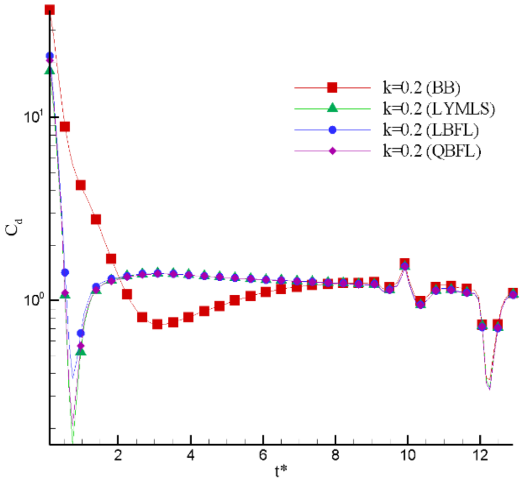


Fig. 1: Variation of drag coefficient for a rotating cylinder at *k*=0.2 and *Re*=200

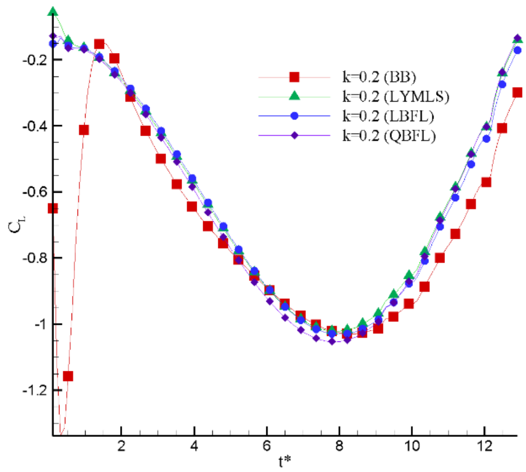


Fig. 2: Variation of lift coefficient for a rotating cylinder at *k*=0.2 and *Re*=200

methods with curvature boundary capability is neglected.

• The BB method has a big error in calculating the angle of separation θ and the LBFL method overshoots in calculating the L/D ratio. So, in the same conditions they become divergent compared to the other three methods.

REFERENCES

[1] O. Filippova, D. Hänel, Boundary-fitting and local grid refinement for lattice-BGK models, International Journal of Modern Physics C, 9(08) (1998) 1271-1279.

[2] R. Mei, W. Shyy, D. Yu, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary, Journal of Computational Physics, 161(2) (2000) 680-699.

[3] A.J. Ladd, Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation, Journal of fluid mechanics, 271 (1994) 285-309.

[4] M.h. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand, Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries, Physics of fluids, 13(11) (2001) 3452-3459.

[5] D. Yu, R. Mei, W. Shyy, A unified boundary treatment in lattice Boltzmann method, in: 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2003, pp. 953.

[6] K. Timm, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, The lattice Boltzmann method: principles and practice, in, Springer: Berlin, Germany, 2016.

[7] L. Budinski, MRT lattice Boltzmann method for 2D flows in curvilinear coordinates, Computers & Fluids, 96 (2014) 288-301.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۷، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۹۲۵ تا ۱۹۴۲
DOI: 10.22060/mej.2019.15328.6095

ارزیابی دقت و رفتار هیدرودینامیکی انواع شرایط مرزی عدم لغزش در مرزهای انحنادار در روش بولتزمن شبکه‌ای

محمد تقیلو، جلال قاسمی*، عارف سلیمی

دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۰۴-۰۹-۱۳۹۷
بازنگری: ۱۱-۱۰-۱۳۹۷
پذیرش: ۲۰-۱۲-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۲۵-۱۲-۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
روش بولتزمن شبکه‌ای
شرط عدم لغزش، استوانه دوار
روش تبادل تکانه

خلاصه: این مقاله به بررسی کمی روش‌های مختلف اعمال شرط مرزی عدم لغزش بر روی استوانه ثابت و دوار در چارچوب روش بولتزمن شبکه‌ای، می‌پردازد. بدین منظور، از پنج روش بازگشت به عقب، روش یو خطی و درجه دو و روش بوزیدی خطی و درجه دو استفاده شده است. چالش اساسی در همه این روش‌ها چگونگی محاسبه و میان‌یابی توابع توزیع مجهول در نقاط اویلری پیرامون نقاط مرزی است. نتایج نشان می‌دهد که در شرایط پایدار (عدد رینولدز ۲۰ و عدد رینولدز ۴۰)، حداکثر خطای محاسبه زاویه جدایش ۷/۶ درصد و مربوط به روش بازگشت به عقب است، درحالی‌که در شرایط پایدار، اختلاف معناداری میان ضرایب پسا در روش‌های مذکور مشاهده نمی‌شود. همچنین روش بوزیدی خطی در محاسبه طول ناحیه جدایش نسبت به روش‌های دیگر دارای خطای بیشتری است (۶ درصد برای عدد رینولدز ۲۰ و ۸/۸۲ درصد برای عدد رینولدز ۴۰). با افزایش عدد رینولدز و افزایش سرعت بی‌بعد دوران، روش بازگشت به عقب در پیش‌بینی ضریب پسا و در زمان‌های اولیه بی‌بعد کمتر از ۷/۷۸و برای شرایط سرعت بی‌بعد دوران ۰/۲ و عدد رینولدز ۲۰۰ دچار اختلاف می‌شود، اما با افزایش زمان، این اختلاف کاهش می‌یابد؛ حال آن‌که سه روش یو خطی، بوزیدی خطی و بوزیدی درجه دو، همچنان نتایج مشابهی را ایجاد می‌کنند.

۱- مقدمه

توسعه روش‌های عددی مبتنی بر دیدگاه مزوسکوپی، به عنوان یک جایگزین برای حل معادلات ماکروسکوپی ناویر-استوکس، جایگاه ویژه‌ای در میان محققین در حوزه شبیه‌سازی جریان سیال دارد. در این میان، روش بولتزمن شبکه‌ای به عنوان یک روش مزوسکوپی که در آن رفتار مجموعه‌ای از ذرات سیستم برای شبیه‌سازی جریان استفاده می‌شود، جایگاه ویژه‌ای بدست آورده است [۱ و ۲]. در کنار مزایای این روش [۲ و ۳] یکی از چالش‌های مهم در روش بولتزمن شبکه‌ای، پیاده‌سازی شرایط مرزی در چارچوب توابع توزیع است.

از نظرهندسی، دو نوع مرز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. یکی مرزهای ساده که منطبق بر خطوط شبکه‌ی بولتزمن هستند و دیگری مرزهای پیچیده که منطبق بر خطوط شبکه‌ی بولتزمن نمی‌باشند. روش رایج در اعمال شرایط مرزی در هندسه‌های ساده که در آن‌ها نقاط روی مرز بر روی شبکه قرار می‌گیرند، روش بازگشت به عقب[۱] [۴ و ۵] است. علی‌رغم سادگی روش بیان شده، این روش در حالت استاندارد خود دارای دقت مرتبه اول است. همچنین اعمال این روش در شرایط هندسی پیچیده، یعنی شرایطی که نقاط مرز بر روی نقاط شبکه قرار ندارند، سبب ایجاد مرز پله‌وار می‌گردد؛ با این وجود اعمال این روش در شرایط پیچیده نظیر فرض لغزش در مرزهای انحنادار مورد توجه است [۶]. کائو و یانگ [۷] به اصلاح مسئله عبور جرم در روش‌های میانیابی پرداختند. بر این اساس، آن‌ها دو مدل جداگانه تحت عناوین میانیابی آزاد نقطه‌ای[۲] و میانیابی آزاد ترکیبی[۳] را معرفی نمودند. مدل‌های معرفی شده بر روی اجسام متحرک مربعی و استوانه‌ای اعمال و کاهش عبور جرم از مرز جامد، نسبت به مدل‌های میانیابی نشان داده شد. ورسچائیو و مولر [۸] مدل پیشنهاد شد توسط لات

1 Bounce Back (BB)
2 On-Site Interpolation-Free (OSIF)
3 Composite Interpolation-Free (CPIF)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: j.ghasemi@znu.ac.ir

[۹] را به منظور استفاده در مرزهای انحنادار تعمیم دادند. این مدل بر اساس میانیابی یا برون‌یابی پارامترهای ماکروسکوپی مانند چگالی و سرعت بر روی مرز، استوار است؛ بدین مفهوم که بعد از محاسبه پارامترهای ماکروسکوپی در مرز و قبل از اعمال فرآیندهای جاری شدن و برخورد، مقادیر توابع توزیع بازسازی می‌شوند.

به منظور تشخیص مرزهای انحنادار و جلوگیری از پله‌وار شدن آن، تلاش‌های مختلفی صورت پذیرفته است؛ که از این میان می‌توان به تغییر مختصات دکارتی به مختصات منحنی‌الخط اشاره نمود [۱۳-۱۰]. با این وجود، پیاده‌سازی مرزهای انحنادار در شبکه دکارتی به دلیل سادگی اعمال و عدم محدودیت به سیستم مختصات خاص، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. فیلیپوا و هانل [۱۴] برای اولین بار توانستند با کمک مفهوم بازگشت به عقب و ایده برون‌یابی توابع توزیع، مرزهای منحنی را در شبکه دکارتی مدل‌سازی کنند. می و همکاران [۱۵ و ۱۶] با توسعه روش فیلیپوا و هانل تاحدودی مشکل ناپایداری آن را برطرف کردند. آن‌ها برای مرز منحنی با تغییر محدوده ضرایب مؤثر در پایداری، توانستند میزان پایداری را بهبود بخشند. همچنین آن‌ها روش برون‌یابی توابع توزیع را در شرایط سه‌بعدی بر روی مرز منحنی اعمال کردند.

یو و همکاران [۱۷ و ۱۸] نشان دادند که اگر دو معادله متفاوت برای تعیین توابع توزیع، متناسب با فاصله مرز منحنی تا نقاط گرهی در نظر گرفته شود، می‌تواند تغییرات شدیدی را به هنگام تعویض معادله در توابع توزیع به همراه داشته باشد. به همین ترتیب آن‌ها توانستند با اتکا به روش بازگشت به عقب، مدل‌سازی شرط مرز منحنی را تنها با یک معادله ممکن سازند، تا از تغییرات ناخواسته توابع توزیع جلوگیری کنند. محمدی‌پور و همکاران [۱۹ و ۲۰] مدل شرط مرزی جدیدی مبتنی بر برون‌یابی خواص ماکروسکوپی ارائه کردند و با استفاده از یک معادله، تغییرات شدید تابع توزیع ناشی از تعدد معادلات برون‌یابی را مهار کرده‌اند. همچنین با ارائه شرط مرزی، شرط عدم لغزش را در تمام هندسه‌های دوبعدی میسر ساختند.

با توجه به مطالب بیان شده و مطالعه کارهای انجام گرفته، مشاهده می‌شود که در خصوص شبیه‌سازی جریان حول استوانه و اعمال شرط مرزی عدم لغزش، روش‌های متعددی گزارش شده است. اما در این میان، مطالعه‌ای جامع در خصوص مقایسه این روش‌ها به ویژه در شرایطی که استوانه در حال چرخش می‌باشد، مشاهده نشده است. از این رو در کار حاضر به اعمال پنج روش بازگشت به عقب، روش یو خطی[۱] و روش یو درجه دو[۲] و روش بوزیدی خطی[۳] و روش بوزیدی درجه دو[۴]، جهت اعمال شرط عدم لغزش در استوانه دوار پرداخته شده است. بر این اساس و با استفاده از برنامه نویسی به زبان فرترن، پارامترهای هیدرودینامیکی جریان از قبیل زاویه جدایش، طول جدایش و ضرایب برآ و پسا محاسبه و با هم مقایسه شده‌اند. مقایسه این نتایج به لحاظ دقت و همگرایی، معیار مناسبی جهت انتخاب روش کارآمد، معرفی می‌کند.

۲- روش بولتزمن شبکه‌ای

معادله بولتزمن برای یک سیستم بدون نیروی خارجی، به شکل رابطه (۱) نوشته می‌شود [۱].

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{c}\cdot\nabla f=\psi(f), \qquad (۱)$$

در معادله (۱)، f تابع توزیع ذرات و ψ عملگر برخورد است. برای عملگر برخورد نیز از مدل باتانگار-گراس-کروک[۵] استفاده شده است [۱ و ۲]:

$$\psi\approx-\frac{f(r,t)-f^{eq}(r,t)}{\tau} \qquad (۲)$$

که در آن $f^{eq}(r,t)$ تابع توزیع تعادلی و τ ضریب زمان رهاسازی یگانه یا تخفیف زمانی است. عبارت مربوط به $f^{eq}(r,t)$ که به رابطه توزیع ماکسول معروف است از طریق بسط تیلور به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۳]:

$$f_\alpha^{eq}=w_\alpha\rho[1+\frac{\mathbf{c}_\alpha\mathbf{u}}{c_s^2}+\frac{(\mathbf{c}_\alpha\mathbf{u})^2}{2c_s^4}-\frac{(\mathbf{uu})}{2c_s^2}] \qquad (۳)$$

در رابطه (۳)، ρ و $\mathbf{u}$ به ترتیب چگالی و بردار سرعت ماکروسکوپی سیستم می‌باشند. حال با گسسته‌سازی معادله (۱) در گام زمانی Δ و جهت‌های α، رابطه گسسته (۴) بدست می‌آید.

$$f_\alpha(\mathbf{r}+\mathbf{c}_\alpha\Delta t,t+\Delta t)-f_\alpha(\mathbf{r},t)=-\frac{\Delta t}{\tau}f_\alpha(\mathbf{r},t)-f_\alpha^{eq}(\mathbf{r},t) \qquad (۴)$$

تعداد جهت‌ها و ارتباط آن‌ها با یکدیگر به آرایش شبکه بستگی

1 Linear Yu-Mei-Luo-Shyy (LYMLS)
2 Quadratic Yu-Mei-Luo-Shyy (QYMLS)
3 Linear Bouzidi-Firdaouss-Lallemand (LBFL)
4 Quadratic Bouzidi-Firdaouss-Lallemand (QLBFL)
5 Bhatnagar–Gross–Krook (BGK)

دارد. در این مقاله از شبکه دو بعدی و نُه سرعتی D۲Q۹ استفاده شده است. برای شبکه D۲Q۹، $\mathbf{c}_\alpha$ و w_α به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} 0, \alpha = 0 \\ (\cos([\alpha-1]\frac{\pi}{4})\ \sin([\alpha-1]\frac{\pi}{4})\ c, \alpha = 1,2,3,4 \\ \sqrt{2}(\cos([\alpha-1]\frac{\pi}{4})\ \sin([\alpha-1]\frac{\pi}{4})\ c, \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (۵)$$

$$w_\alpha = \begin{cases} 4/9, \alpha = 0 \\ 1/9, \alpha = 1,2,3,4 \\ 1/36, \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (۶)$$

رابطه بین مقادیر توابع توزیع و پارامترهای ماکروسکوپی مانند چگالی و بردار سرعت سیال به شکل روابط (۷) و (۸) نوشته می‌شود.

$$\rho(x,t) = \sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha(x,t) \quad (۷)$$

$$\rho(x,t)\mathbf{u} = \sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha(x,t)\mathbf{c}_\alpha \quad (۸)$$

برای محاسبه فشار در هر گره نیز می‌باید از معادله حالت گاز ایده‌آل در فرآیند آیزنتروپیک استفاده کرد (رابطه (۹)).

$$p = \rho c_s^2 \quad (۹)$$

که در آن سرعت صوت از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (۱۰)$$

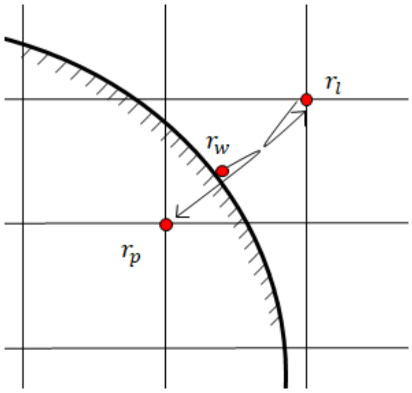
همچنین لزجت سینماتیکی υ توسط رابطه (۱۱) به ضریب زمان رهاسازی یگانه و سرعت صوت شبکه مرتبط می‌شود.

$$\upsilon = c_s^2(\tau - 0.5) \quad (۱۱)$$

۳- پیاده‌سازی مرز منحنی در بولتزمن شبکه‌ای

۳-۱- روش بازگشت به عقب

در این روش و مطابق با شکل ۱ موقعیت شبکه سیال نزدیک مرز منحنی با r_l، نقطه‌ی همسایگی داخل استوانه با r_p و نقطه مابین این دو که بر روی سطح منحنی قرار دارد، با r_l، مشخص شده است. طبق فرض باتانگار-گراس-کروک، تابع توزیع ذرات در زمان t و بعد از برخورد $\tilde{f}_\alpha$، به نقطه همسایه خود در زمان $t+\Delta t$ منتقل می‌شود. طبق قانون بازگشت به عقب، مرحله برخورد بر روی سطح منحنی به



شکل ۱: اعمال روش بازگشت به عقب بر روی سطح منحنی

Fig. 1. Applying the bounce back method on the curved surface

صورت رابطه (۱۲) است [۲۱ و ۲۲].

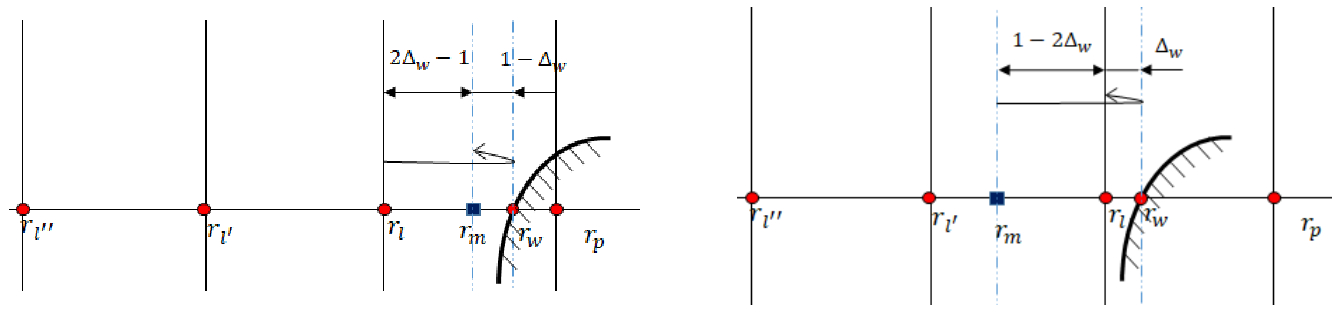
$$f_{\bar{\alpha}}(r_l, t+\Delta t) = \tilde{f}_\alpha(r_l, t) - 2\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w \cdot \mathbf{c}_\alpha}{c_s^2} \quad (۱۲)$$

که $\bar{\alpha}$ جهت مخالف با α و جهت α به سمت مرز منحنی است. توجه به این نکته ضروری است که در هر نقطه r_l و با توجه به موقعیت آن نسبت به مرز استوانه تعدادی از جهات نه‌گانه مجهول هستند. البته جهت صفر شبکه مقداری معلوم دارد. بنابراین کد نوشته شده باید توانایی شناسایی جهاتی را که با مرز استوانه برخورد می‌کنند، داشته باشد. اگر سطح جسم جامد در جهت α حرکت کند تعداد ذراتی که بعد از برخورد باز می‌گردند، کاهش می‌یابد. بنابراین عبارت $۲\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w \cdot \mathbf{c}_\alpha}{c_s^2}$ در سمت راست رابطه (۱۲) برای اصلاح این خطا و اعمال سرعت استوانه الزامی است.

۳-۲- روش بوزیدی

در روش بازگشت به عقب، سطح جامد در نقطه‌ی میانی دونقطه از شبکه قرار می‌گیرد و ذرات سیال مجازی در این نقطه منعکس می‌شوند. به این ترتیب، موقعیت دقیق سطح جامد در روش بازگشت به عقب دیده نمی‌شود. روش بوزیدی تلاش می‌کند تا این مشکل را با توجه به موقعیت دقیق سطح جامد در فرآیند برخورد بین ذرات سیال مجازی و جامد، بهبود بخشد [۲۳].

مطابق شکل ۲، r_l نقطه‌ای درون سیال نزدیک دیواره سطح جامد، r_p نقطه همسایه درون جسم، r_w نقطه روی سطح جامد و بین دونقطه مذکور و $r_{l'}$ و $r_{l''}$ نقاطی در همسایگی به دور از سطح جامد هستند. مکان دقیق سطح جامد با نسبت زیر مشخص می‌شود:



شکل ۲: روش بوزیدی بر روی سطح منحنی

Fig. 2. Method of Bouzidi on the curved surface

$$\Delta_w = \left|\frac{r_l - r_w}{r_l - r_p}\right| \tag{۱۳}$$

از شکل ۲(الف) مشخص است، برای شرایط $\Delta_w < ۰/۵$، تابع توزیع ذرات $\tilde{f}_\alpha(r_m,t)$ در نقطه r_m، از نقطه r_l با تابع توزیع $f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)$ ناشی می‌شود. همچنین، مطابق شکل ۲(ب)، ذرات سیال نقطه r_l را ترک و به جسم جامد برخورد می‌کنند و به نقطه r_m که بین دونقطه r_l و r_w قرار دارد، برمی‌گردند. معادلات درون‌یابی خطی روش بوزیدی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

برای $\Delta_w \le ۰/۵$:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t) = (1-2\Delta_w)\tilde{f}_\alpha(r_{l'},t) + 2\Delta_w\tilde{f}_\alpha(r_l,t) - 2\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_\alpha}{c_s^2} \tag{۱۴}$$

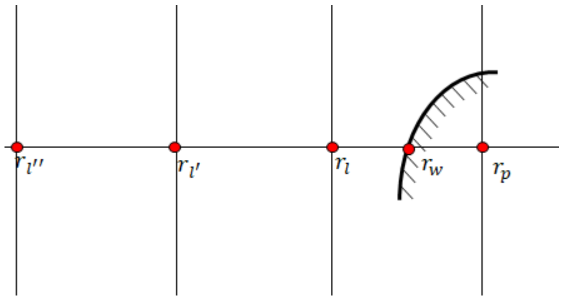
برای $\Delta_w > ۰/۵$:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t) = \frac{2\Delta_w - 1}{2\Delta_w}\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(r_l,t) + \frac{1}{2\Delta_w}\tilde{f}_\alpha(r_l,t) - \frac{1}{2\Delta_w}2\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_\alpha}{c_s^2} \tag{۱۵}$$

به‌جای استفاده از روش درون‌یابی خطی، می‌توان از درون‌یابی درجه دو نیز برای پیدا کردن توابع توزیع به‌صورت زیر بهره گرفت [۲۳]:

برای $\Delta_w \le ۰/۵$:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t) = (1+2\Delta_w)\tilde{f}_\alpha(r_l,t) + (1-4\Delta_w^2)\tilde{f}_\alpha(r_{l'},t) - \Delta_w(1-2\Delta_w)\tilde{f}_\alpha(r_{r''},t) - 2\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_\alpha}{c_s^2} \tag{۱۶}$$



شکل ۳: اعمال روش یو بر روی سطح منحنی

Fig. 3. Method of Yu on the curved surface

برای $\Delta_w > ۰/۵$:

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t) = \frac{1}{1+2\Delta_w}\tilde{f}_\alpha(r_l,t) + \frac{2\Delta_w - 1}{\Delta_w}\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(r_l,t) + \frac{1-2\Delta_w}{1+2\Delta_w}\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(r_{r'},t) - \frac{1}{\Delta_w(1+2\Delta_w)}2\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_\alpha}{c_s^2} \tag{۱۷}$$

۳-۳- روش یو

این روش که توسط یو و همکاران [۱۷ و ۱۸] ارائه گردید نیز مبتنی بر درون‌یابی است. توابع توزیع $f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)$ در جهت $\bar{\alpha}$، از سمت سطح جسم جامد به سمت سیال است

مطابق شکل ۳، توابع توزیع بر روی سطح جسم جامد در جهات α و $\bar{\alpha}$ به ترتیب به‌صورت زیر است:

$$f_\alpha(r_w,t+\Delta t) = (1-\Delta_w)\tilde{f}_\alpha(r_{l'},t) + \Delta_w\tilde{f}_\alpha(r_l,t) \tag{۱۸}$$

$$f_{\bar{\alpha}}(r_w,t+\Delta t) = f_\alpha(r_w,t+\Delta t) - 2\rho w_\alpha \frac{\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{c}_\alpha}{c_s^2} \tag{۱۹}$$

درون‌یابی خطی برای پیدا کردن توابع توزیع نیز به‌صورت رابطه (۲۰) در می‌آید.

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)=\frac{\Delta_w}{1+\Delta_w}f_{\bar{\alpha}}(r_{l'},t+\Delta t)+\frac{1}{1+\Delta_w}f_{\bar{\alpha}}(r_w,t+\Delta t) \tag{۲۰}$$

و مقدار $f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)$ از طریق درون‌یابی درجه دو به صورت رابطه (۲۱) است.

$$f_{\bar{\alpha}}(r_l,t+\Delta t)=\frac{2}{(2+\Delta_w)(1+\Delta_w)}f_{\bar{\alpha}}(r_w,t+\Delta t)+\frac{2\Delta_w}{1+\Delta_w}f_{\bar{\alpha}}(r_{l'},t+\Delta t)-\frac{\Delta_w}{2+\Delta_w}f_{\bar{\alpha}}(r_{l''},t+\Delta t) \tag{۲۱}$$

۴-۳- محاسبه نیروی وارد بر استوانه

برای محاسبه ضرایب پسا و برآ لازم است که نیروی وارد از طرف سیال به استوانه یا برعکس محاسبه شود. با فرض این‌که نقطه r_l^{cyl} نزدیک‌ترین نقطه درون سیال در همسایگی سطح استوانه است، تکانه وارد بر سطح استوانه در زمان t برابر با $c_{\alpha_l}^{cyl}\tilde{f}_{\alpha_l}^{cyl}(r_l^{cyl},t)\Delta x\Delta y$ و بعد از برخورد با سطح استوانه و در زمان $t+\Delta t$ با مقدار $-c_{\bar{\alpha}_l}^{cyl}\tilde{f}_{\bar{\alpha}_l}^{cyl}(r_l^{cyl},t+\Delta t)\Delta x\Delta y$ برابر است. بنابراین مقدار نیرو به صورت رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود [۳ و ۲۴]:

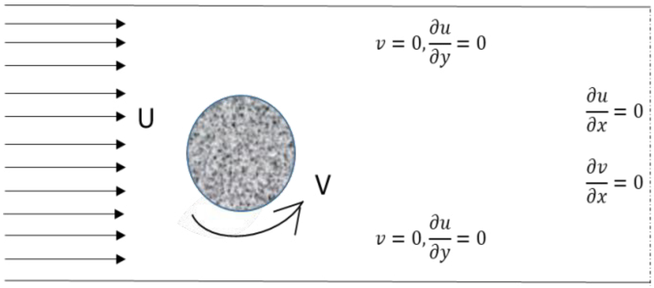
$$F_{\alpha_l}^{cyl}=c_{\alpha_l}^{cyl}\tilde{f}_{\alpha_l}^{cyl}(r_l^{cyl},t)\Delta x\Delta y+c_{\bar{\alpha}_l}^{cyl}\tilde{f}_{\bar{\alpha}_l}^{cyl}(r_l^{cyl},t+\Delta t)\Delta x\Delta y \tag{۲۲}$$

نیروی اعمالی بر روی استوانه توسط سیال، شامل مجموع نیروهای اعمالی تمام نقاط در همسایگی استوانه که با سطح استوانه در تعامل هستند، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F}=\sum_{l}\sum_{\alpha_l^{cyl}}F_{\alpha_l}^{cyl} \tag{۲۳}$$

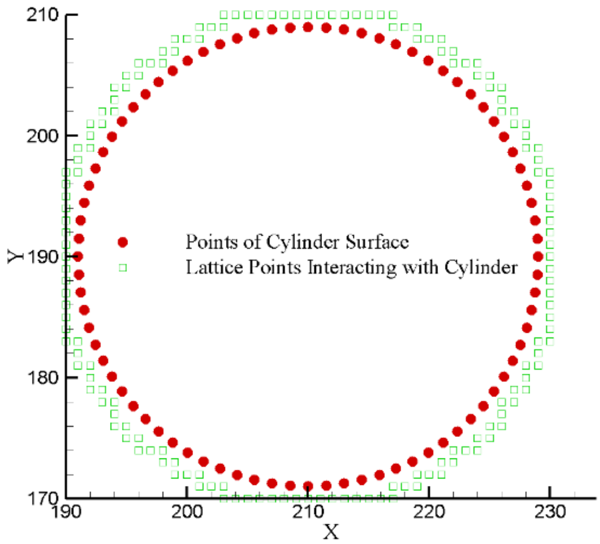
۴- شرح مسئله

شکل ۴ طرحواره جریان در اطراف یک استوانه دوار با شعاع R را نشان می‌دهد؛ که در یک کانال دوبعدی مستطیلی قرار دارد. جریان با سرعت ثابت U از سمت چپ وارد کانال می‌شود. شرایط مرزی در کل کانال بر روی شکل مشخص شده است. میدان سرعت اولیه جریان به صورت $u(x,y)=U, v(x,y)=0$ که u نشان دهنده سرعت در راستای x و v سرعت در راستای y است. همچنین سرعت دورانی استوانه به مقدار Ω در نظر گرفته شده است.



شکل ۴: طرحواره مدل فیزیکی جریان حول استوانه

Fig. 4. Schematic diagram of the physical model of the flow around the cylinder



شکل ۵: نقاط لاگرانژی و اویلری روی سطح و همسایگی استوانه

Fig. 5. Lagrangian and Eulerian points on the surface and the cylinder's vicinity

برای محاسبه رابطه (۱۳) باید نقاط داخل استوانه و نقاط در تعامل با سطح استوانه مشخص شوند. در شکل ۵ نقاط لاگرانژی روی استوانه با دایره توپر و نقاطی که در تعامل با استوانه هستند، با مربع نشان داده شده‌اند. شکل ۶ در مقیاس بزرگ، نقاط در تعامل با سطح استوانه را نشان می‌دهد. نقاطی که در بیرون استوانه و در مجاورت مرز آن هستند، با مثلث تو پر، نقاط داخلی چسبیده به مرز با مربع و نقاط داخل استوانه که در تعامل با نقاط همسایه بیرون نیستند با دایره تو پر نمایش داده می‌شوند. لازم به یادآوری است که مطابق با رابطه (۱۳) مقادیر Δ دارای هشت جهت (جهت صفر محاسبه نمی‌شود) است؛ که باید جهاتی را که با استوانه برخورد می‌کنند انتخاب و مقادیر x_l، x_w و x_p متناظر را محاسبه نمود.

جدول ۱: ضریب پسا C_d در شبکه‌بندی‌های مختلف برای بررسی استقلال از شبکه در Re=۲۰ و Re= ۴۰

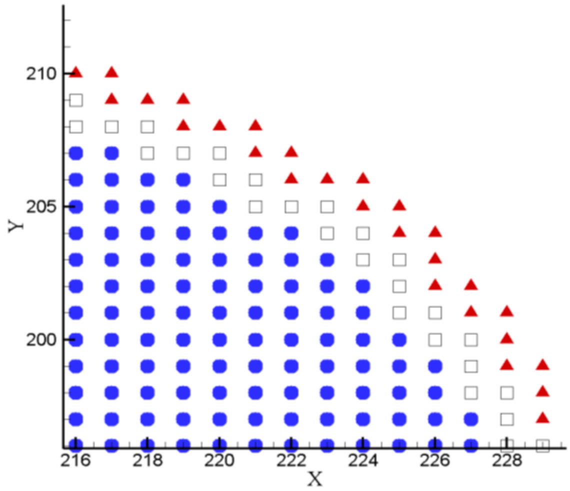
Table 1. The lift coefficient C_d in different lattices for the ensurment of independence of results at Re=20 and Re=40

C_d		ابعاد شبکه
Re=۴۰	Re=۲۰	
۱/۰۶	۲/۱۲۱	۱۸۰×۱۴۰
۱/۵۵	۲/۰۸۲	۲۲۰×۱۸۰
۱/۵۲	۲/۰۶۵	۲۸۰×۲۲۰
۱/۵۲	۲/۰۶۵	۳۴۰×۲۸۰

همچنین، چهار شبکه ۱۸۰×۱۴۰، ۲۲۰×۱۸۰، ۲۸۰×۲۲۰ و ۳۴۰×۲۸۰ به همراه ضریب پسا به عنوان شاخصه‌ای برای بررسی استقلال از شبکه، در نظر گرفته شده است. مطابق تعریف، برای تنظیم عدد رینولدز مورد نظر باید سه مؤلفه D، U و τ در برنامه تعریف گردند. در این قسمت برای Re=۲۰ مقادیر D=۲۰، U=۰/۰۰۵ و τ=۰/۵۱۵ و برای Re=۴۰ مقادیر D=۲۰، U=۰/ ۰۱ و τ=۰/۵۱۵ در نظر گرفته شده است. مطابق جدول ۱ شبکه‌بندی ۲۸۰×۲۲۰ به‌عنوان شبکه مناسب جهت ارائه نتایج، انتخاب شده است.

شکل ۷ تأثیر روش‌های مختلف درون‌یابی جریان حول استوانه در عدد رینولدز را نشان می‌دهد. مطابق شکل، نتایج شبیه‌سازی در شبکه‌بندی ۲۸۰×۲۲۰ و با اعمال شرط مرزی گرادیان صفر در خروجی بدست آمده است. مطابق شکل ۷، تفاوت چندانی در تشکیل گردابه‌ها پشت استوانه وجود ندارد. اما برای بررسی بیشتر، مقایسه‌ای بین مقادیر ضریب پسا C_d، نسبت طول گردابه به قطر L/D و زاویه جدایش گردابه θ در عدد رینولدز ۲۰ با نتایج عددی موجود، بیان و خطا نسبت به روش المان محدود[1] [۲۴] گزارش می‌شود. مطابق جدول ۲ روش بازگشت به عقب در محاسبه‌ی زاویه جدایش θ و روش بوزیدی خطی در محاسبه نسبت طول گردابه به قطر L/D، به ترتیب دارای ۷/۶ درصد و ۶ درصد خطا نسبت به روش المان محدود می‌باشند. نکته مهم در این‌جا آن است که بین روش‌های بیان شده اختلاف زیادی در محاسبه ضریب پسا گزارش نشده است. به عبارت دیگر با وجود شرایط پله‌وار در روش بازگشت به عقب و نیز دقت مرتبه اول روش‌های بوزیدی خطی و یو خطی، مقادیر ضریب پسا

1 Finite Element Method (FEM)



شکل ۶: نمایش نقاط اویلری داخل و خارج استوانه (مثلث توپر: نقاط خارج از استوانه که با سطح استوانه در تماس هستند؛ مربع توخالی: نقاط داخل استوانه و در تماس با آن؛ دایره توپر: نقاط داخل استوانه بدون تماس با نقاط روی استوانه)

Fig. 6. Display of Eulerian points inside and outside the cylinder (solid triangles: points outside the cylinder that are in contact with the cylindrical surface; hollow square: points inside the cylinder and in contact with it; solid circle: points inside the cylinder without contact with points on the cylinder)

۵- نتایج و بحث

۵-۱- استوانه ثابت

در این قسمت جریان آرام و پایدار حول استوانه ثابت با استفاده از پنج روش بازگشت به عقب، روش یو خطی و درجه دو و روش بوزیدی خطی و درجه دو در دو عدد رینولدز ۲۰ و ۴۰ شبیه‌سازی می‌شود؛ که در آن عدد رینولدز به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌شود [۲۴].

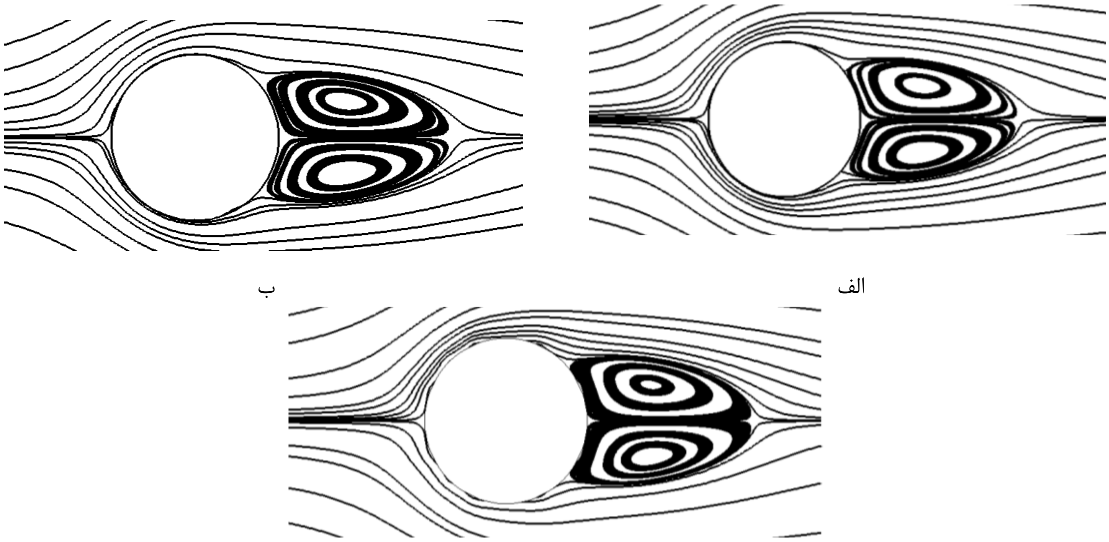
$$Re = \frac{UD}{\upsilon} = \frac{3UD}{\tau - 0.5} \tag{۲۴}$$

به همین صورت ضریب پسا و برآ به صورت روابط (۲۵) و (۲۶) محاسبه می‌شوند.

$$C_d = \frac{F_x}{\rho U^2 R} \tag{۲۵}$$

$$C_l = \frac{F_y}{\rho U^2 R} \tag{۲۶}$$

در روابط (۲۵) و (۲۶) مقادیر نیروی F_x و F_y در واحد عرض کانال در نظر گرفته شده‌اند.



شکل۷: خطوط جریان حول استوانه با استفاده از سه روش درون‌یابی در عدد رینولدز ۲۰؛ الف) روش یو خطی، ب) روش بوزیدی خطی، ج) روش بازگشت به عقب

Fig. 7. The sreamlines around the cylinder using three interpolation methods at the *Re*=20; a) Linear Yu, b) Linear Bouzidi, c) Bounce back

جدول ۲: مقایسه بین ضریب پسا C_d، نسبت طول گردابه به قطر L/D و زاویه جدایش گردابه همراه با خطا نسبت به FEM برایعدد رینولدز ۲۰ در شرایط استوانه ثابت

Table 2. The comparison between the drag coefficient C_d, the ratio of the vortex length to the diameter L/D and the angle of separation with an error relative to the FEM for *Re*=20 in a fixed cylinder

روش	ضریب پسا C_d	درصد خطا	L/D	درصد خطا	θ	درصد خطا
بازگشت به عقب	۲/۰۷۰	۱/۲	۰/۹۷	۳	۴۰/۳۶	۷/۶
یو درجه دو واگرا	×	---	×	---	×	---
یو درجه دو	۲/۰۶۸	۱/۱۲	۰/۹۶	۲/۱۳	۴۲/۸	۲/۰۶
یو خطی	۲/۰۶۵	۱	۰/۹۵	۱/۱	۴۲/۳	۳
بوزیدی درجه دو واگرا	×	---	×	---	×	---
بوزیدی درجه دو	۲/۰۷۱	۱/۲۷	۰/۹۳	۱/۰۶	۴۳/۱	۱/۳۷
بوزیدی خطی	۲/۰۷۵	۱/۴	۱	۶	۴۳/۸۶	۰/۳
روش المان محدود [۲۴]	۲/۰۴۵	---	۰/۹۴	---	۴۳/۷	---

با دقت قابل قبولی بدست آمده‌اند. همچنین مشاهده می‌شود که با انتخاب مقدار τ=۰/۵۱۵ روش‌های بوزیدی درجه دو و یو درجه دو دچار واگرایی می‌شوند؛ که این موضوع محدودیت دامنه همگرایی روش‌های مرتبه دوم در درون‌یابی توابع توزیع را نشان می‌دهد. جدول ۲ شرایطی را که به واگرایی دو روش بوزیدی درجه دو و یو درجه دو، منجر شده با عبارات بوزیدی درجه دو واگرا و یو درجه دو واگرا نشان داده است. با بزرگتر کردن ابعاد محاسباتی به D=۳۰ و ثابت نگه داشتن مقدار U=۰/۰۰۵، مقدار ضریب رهاسازی یگانه به مقدار τ=۰/۵۲۲۵ افزایش می‌یابد. در این شرایط دو روش بوزیدی درجه دو و یو درجه دو، به مقادیر داده شده در جدول ۲ همگرا می‌شوند. به عبارت دیگر، مشاهده می‌شود که برای همگرایی روش‌های با دقت درجه دو، نیاز به بزرگتر شدن دامنه محاسباتی و افزایش حجم محاسبات می‌باشد.

مشابه با نتایج مربوط به عدد رینولدز ۲۰، پارامترهای ضریب

جدول ۳: مقایسه بین ضریب پسا C_d، نسبت طول گردابه به قطر L/D و زاویه جدایش گردابه همراه با خطا نسبت به FEM برای عدد رینولدز ۴۰ در شرایط استوانه ثابت

Table 3. The comparison between the drag coefficient C_d, the ratio of the vortex length to the diameter L/D and the angle of separation with an error relative to the FEM for Re=40 in a fixed cylinder

روش	ضریب پسا C_d	درصد خطا	L/D	درصد خطا	θ	درصد خطا
بازگشت به عقب	۱/۵۱	۰/۷۸	۲/۵۳۳	8	۵۱/۳	۴/۶
یو درجه دو واگرا	×	---	×	---	×	---
یو درجه دو	۱/۵۲۲	۰/۰	۲/۴۴۱	۴/۰۹	۵۲/۹	۱/۶۷
یو خطی	۱/۵۲۲	۰/۰	۲/۴۸	۵/۷	۵۴/۲	۰/۷
بوزیدی درجه دو واگرا	×	---	×	---	×	---
بوزیدی درجه دو	۱/۵۲۴	۰/۱۳	۲/۵۵۲	۸/۸۲	۵۳/۲	۱/۱۲
بوزیدی خطی	۱/۵۲۳	۰/۰۶	۲/۶۱	۱۱	۵۲/۲	۲/۹
روش المان محدود [۲۴]	۱/۵۲۲	---	۲/۳۴۵	---	۵۳/۸	---

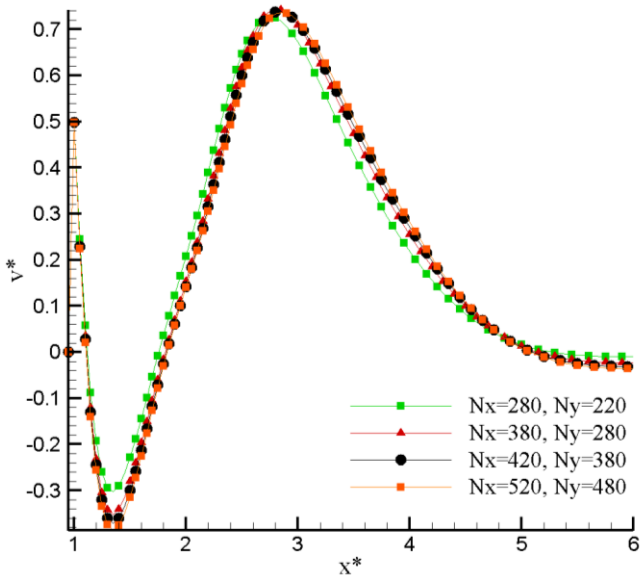
الف ب

شکل ۸: مقایسه خطوط جریان حول استوانه با استفاده از روش‌های الف) بازگشت به عقب و ب) یو خطی

Fig. 8. Comparison of the stralines around the cylinder using methods a) Bounce back and b) Linear Yu

پسا C_d، نسبت طول گردابه به قطر و زاویه جدایش گردابه برای عدد رینولدز ۴۰ در جدول ۳ گزارش شده است. در این شرایط نیز دو روش بوزیدی درجه دو و یو درجه دو به ازای τ=۰/۵۱۵ دچار واگرایی شده‌اند؛ که برای ایجاد همگرایی میدان محاسباتی به مقدار D=۳۰ و ضریب رهاسازی یگانه به مقدار τ=۰/۵۲۲۵ تغییر پیدا کرده است. توجه به این نکته ضروری است که علی‌رغم دقت قابل قبول روش بازگشت به عقب در پیش‌بینی الگوی جریان، این روش فاقد توانایی لازم در پوشش انحنای مرز می‌باشد. این موضوع در شکل ۸ نشان داده شده است. پله‌وار شدن مرز در این روش به روشنی قابل مشاهده است. همچنین مشاهده می‌شود که مقادیر ضریب پسا در این حالت نیز با دقت قابل قبولی در هر پنج روش بدست آمده است. مقایسه نتایج پنج روش مذکور در پیش‌بینی الگوی جریان و محاسبه‌ی پارامترهای مربوط به آن، علاوه بر تأیید صحت کد نوشته شده، نشان می‌دهد که استفاده از روش بازگشت به عقب در محدوده اعداد رینولدز کمتر از ۴۰ با توجه به حجم محاسبات کمتر و روش اعمال ساده‌تر، از توجیه بیشتری برخوردار است.

این موضوع به لحاظ دقت مناسب روش بازگشت به عقب در محاسبه ضریب پسا حائز اهمیت است؛ چرا که از دیدگاه محاسبات عددی محاسبه ضریب پسا بر روی مرز پله‌وار به جای مرز انحنادار، سبب ایجاد خطا خواهد شد. دقت بالای روش بازگشت به عقب در محاسبه ضریب پسا را می‌توان به روش محاسبه نیرو ارتباط داد. برای توضیح بیشتر کافی است به معادله (۲۳) دقت گردد. بیان این



شکل ۹ سرعت بی‌بعد v^* در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن در t^*=۸ برای نسبت سرعت k=۰/۵ در Re=۲۰۰

Fig. 9. The dimensionless velocity v^* on the back of the cylinder and on the horizontal line passing through its center at t^*=8 for a velocity ratio k=0.5 at Re=200

معادله که بر اساس محاسبه شار خالص تکانه خروجی استوار است؛ در چارچوب روش بولتزمن شبکه‌ای سبب تقویت نگاه ذره‌ای به سیال خواهد شد. به عبارت دیگر در محاسبه شار خالص تکانه خروجی فقط ذراتی دخالت دارند که در مسیر برخورد با سطح قرار دارند. این راهکار نیاز به محاسبه‌ی مشتق سرعت بر روی نقاط پله‌وار را مرتفع می‌سازد.

۲-۵- استوانه دوار

در این قسمت، رفتار جریان حول استوانه چرخان بررسی می‌شود. بدین منظور و با توجه به نتایج بخش ۵-۱ از روش یو خطی استفاده می‌گردد. مطابق شکل ۴ عدد بی‌بعد k برای استوانه چرخان به صورت زیر معرفی می‌شود:

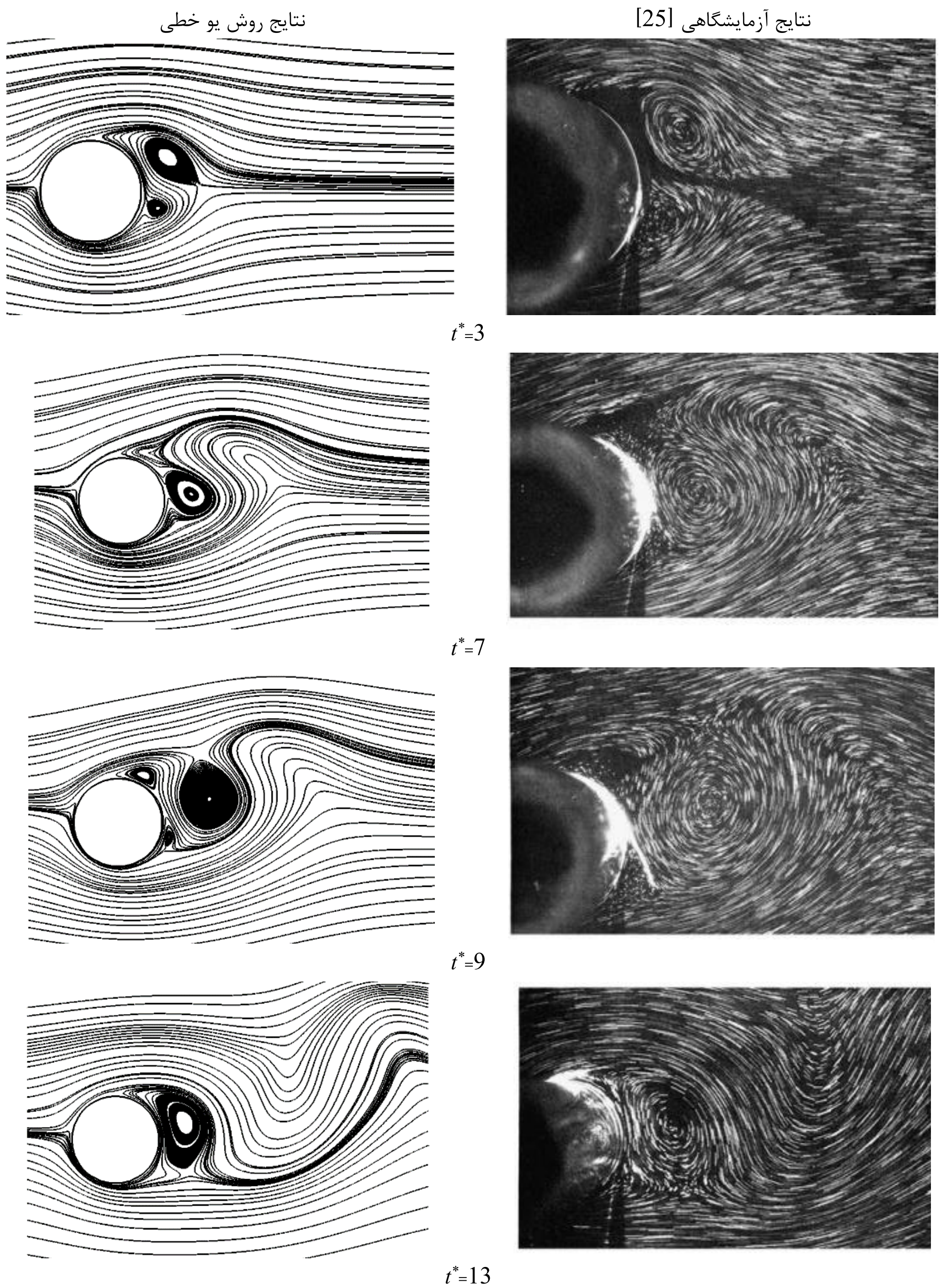
$$k = \frac{R\Omega}{U} \qquad (۲۷)$$

در این قسمت مقادیر τ =۰/۵۴۸، U=۰/۰۸ و D=۴۰ برای Re=۲۰۰ و k=۰/۵ انتخاب شده‌اند. برای بررسی استقلال نتایج از شبکه، چهار شبکه‌بندی به‌صورت ۲۸۰×۲۲۰، ۳۸۰×۲۸۰، ۴۲۰×۳۸۰ و ۵۲۰×۴۸۰ به کار گرفته شده است. شکل ۹ سرعت بی‌بعد v^* را در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن و در زمان t^*=۸ نشان می‌دهد. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود مقادیر سرعت، به ازای شبکه‌های متراکم‌تر از ۲۸۰×۳۸۰ تغییر چندانی ندارد. از این رو در ادامه از شبکه ۲۸۰×۳۸۰ استفاده می‌شود. از آنجا که، الگوی جریان پشت استوانه در Re=۲۰۰ ماهیتی گذرا دارد، به همین علت نتایج بدست آمده در چهار زمان بی‌بعد ۱۳و ۹، ۷، ۳=t^* در شکل ۱۰ و همراه با نتایج تجربی کنتانکو و منارد [۲۵] آورده شده است؛ که در آن زمان بی‌بعد به صورت $t^* = Ut/R$ تعریف می‌شود.

مقایسه نتایج عددی و تجربی تطابق بسیار خوبی را در پیش‌بینی الگوی جریان و گردابه‌های پشت استوانه نشان می‌دهد، به طوری‌که این تطابق با افزایش زمان کاهش پیدا نمی‌کند. برای بررسی بیشتر جریان حول استوانه چرخان و تأیید صحت کد نوشته شده، تغییرات سرعت بی‌بعد u^* و v^* در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن، به ترتیب در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ بر حسب زمان نشان داده شده است. مقایسه این نتایج با نتایج تجربی کنتانکو و منارد [۲۵]، تطابق قابل قبولی را نشان می‌دهد.

۱-۲-۵- اثرات سرعت دورانی

در این قسمت، مقادیر ضریب پسا C_d و ضریب برآ C_l در عدد رینولدز ۲۰ به منظور بررسی رفتار شرایط مرزی بازگشت به عقب، روش بوزیدی خطی و درجه دو و روش یو خطی و درجه دو، در شرایط استوانه ثابت و دوار، گزارش شده است. قابل ذکر است که نتایج روش یو درجه دو در این بخش به دلیل عدم همگرایی در شرایط مسئله (انتخاب پارامترهای U، D و τ) آورده نشده است. جدول ۴ نتایج کار حاضر را برای حالت k=۰ نشان می‌دهد. از آن‌جا که در شرایط k=۰ ضرایب پسا و برآ دچار نوسان می‌شوند، از این‌رو در این جدول، مقادیر بیشینه و کمینه این مقادیر گزارش شده‌اند. همچنین به منظور مقایسه رفتار شرایط مرزی، روش یو خطی، به عنوان روش مبنا انتخاب و میزان خطای هر کدام از سایر روش‌ها نسبت به آن سنجیده و به صورت درصد گزارش شده است. لازم به ذکر است که نتایج در این قسمت با مقادیر τ=۰/۵۱۸، U=۰/۰۸ و D=۱۵ بدست آمده‌اند. با دقت در نتایج بدست آمده در جدول ۴ مشاهده می‌گردد که سه روش یو خطی، بوزیدی خطی و بوزیدی درجه دو دارای نتایج تقریبا یکسانی هستند، به طوری‌که بیشترین اختلاف میان نتایج این



شکل ۱۰: تغییرات میدان سرعت در Re=۲۰۰ و k=۰/۵ (شکل سمت چپ: نتایج روش یو خطی ، شکل سمت راست: نتایج تجربی کنتانکو و منارد [۲۵])

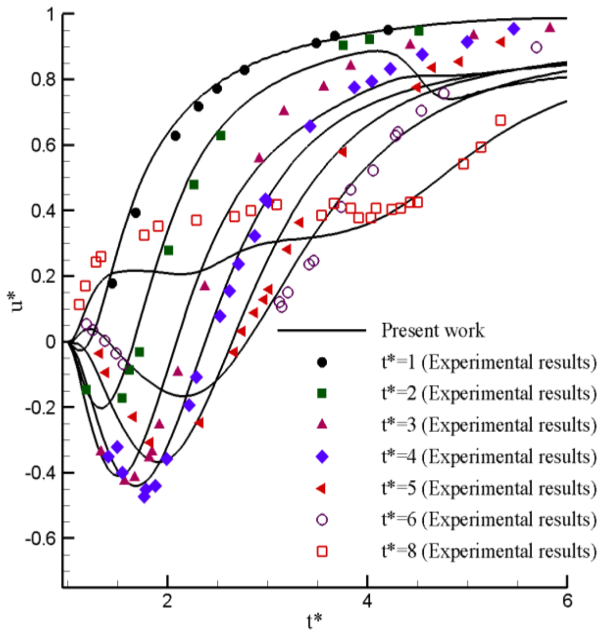
Fig. 10. The variation of the velocity field at Re=200 and k=0.5 (left figure: the results of the linear Yu, right figure: experimental results of Coutanceau, Menard [25])

روش مربوط به محاسبه $C_{l,\,\min}$ بوده که اختلافی معادل ۲/ ۲درصد با روش یو خطی دارد. اما نتایج بدست آمده با روش بازگشت به عقب در کمترین حالت اختلافی معادل ۱۰/۱۶ درصد در محاسبه $C_{d,\,\max}$ و اختلافی معادل ۲۶/۰۶ درصد در محاسبه $C_{l,\,\min}$ دارد. به عبارت دیگر، نتایج روش بازگشت به عقب در عدد رینولدز ۲۰۰ و برای استوانه ساکن با نتایج سه روش دیگر متفاوت است. این نتیجه برخلاف نتیجه بدست آمده در قسمت ۵-۱ می‌باشد. به عبارت دیگر، می‌توان چنین نتیجه گرفت که با افزایش عدد رینولدز روش‌های

جدول ۴: مقادیر بیشینه و کمینه ضرایب پسا و برآ برای استوانه ساکن $k=0$ در شرایط Re=۲۰۰

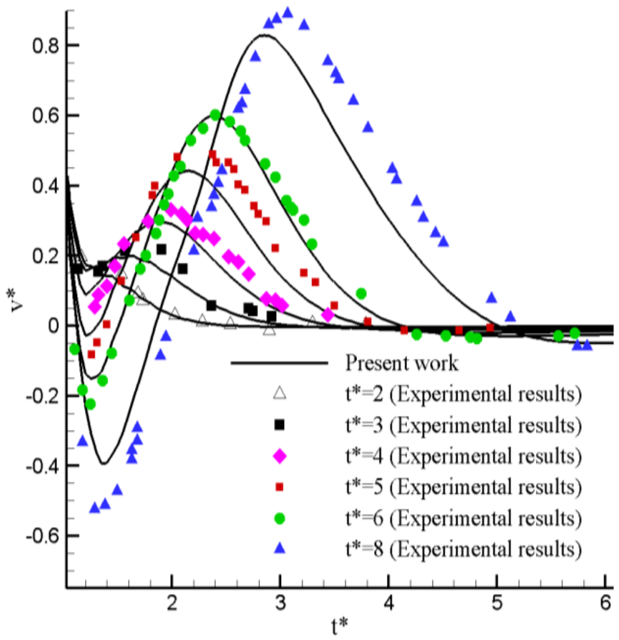
Table 4. Maximum and minimum values of drag and lift coefficients for a fixed cylinder at Re=200 and k=0

	بازگشت به عقب	یو خطی	بوزیدی خطی	بوزیدی درجه دو
ضریب پسای بیشینه $C_{d, max}$	۱/۴۶۴	۱/۳۲۹	۱/۳۲۹	۱/۳۱۵
خطای ضریب پسای بیشینه	٪ ۱۰/۱۶	۰/۰	۰/۰	٪ ۱/۰۵
ضریب پسای کمینه $C_{d, min}$	۱/۲۴	۱/۱۱۶	٪ ۱/۱۲۰	٪ ۱/۱۰۲
خطای ضریب پسای کمینه	٪ ۱۱/۱۱	۰/۰	٪ ۰/۳۶	٪ ۱/۲۵
ضریب برآی بیشینه $C_{l, max}$	۰/۷۱۶	۰/۵۹۱	۰/۵۸۵	۰/۵۷۸
خطای ضریب برآی بیشینه	٪ ۲۱/۱۵	۰/۰	٪ ۱/۰۲	٪ ۲/۲۰
ضریب برآی کمینه $C_{l, min}$	-۰/۷۱۲	-۰/۵۶۵	-۰/۵۷۶	-۰/۵۶۲
خطای ضریب برآی کمینه	٪ ۲۶/۰۶	۰/۰	٪ ۱/۹۵	٪ ۰/۵۳



شکل ۱۱: تغییرات سرعت در جهت x در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن در زمان‌های مختلف در Re=۲۰۰ و k=۰/۵ و مقایسه با کار تجربی کتناکو و منارد [۲۵]

Fig. 11. The velocity changes in the x direction at the back of the cylinder and on the horizontal line passing through its center at different times at Re=200 and k=0.5 and compared with the experimental work of Coutanceau, Menard [25]

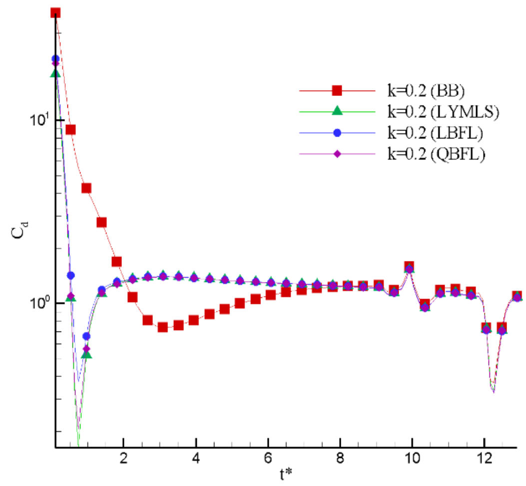


شکل ۱۲: تغییرات سرعت در جهت y در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن در زمان‌های مختلف در Re=۲۰۰ و k=۰/۵ و مقایسه با کار تجربی کتناکو و منارد [۲۵]

Fig. 12. The velocity changes in the y direction at the back of the cylinder and on the horizontal line passing through its center at different times at Re=200 and k=0.5 and compared with the experimental work of Coutanceau, Menard [25]

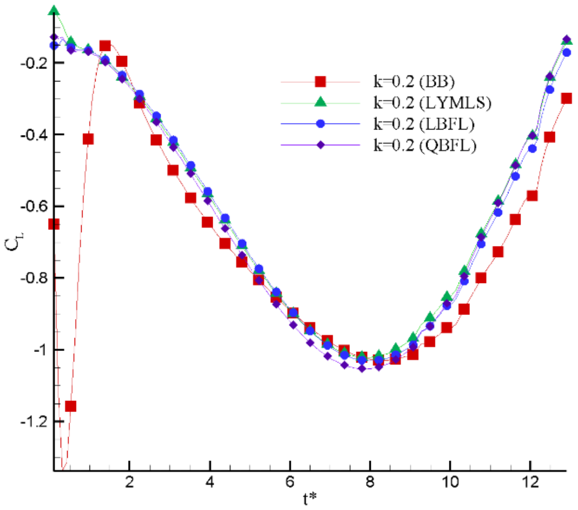
مبتنی بر میان‌یابی در مقایسه با روش بازگشت به عقب از عملکرد بهتری برخوردار هستند.

حال، تغییرات ضرایب پسا و برآ برای شرایط k=۰/۲ و Re=۲۰۰ به ترتیب در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده می‌شود. با مقایسه نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که در زمان‌های اولیه t^*<۷/۷۸ میان نتایج روش بازگشت به عقب با سه روش دیگر، اختلاف ایجاد می‌شود، اما با افزایش زمان، این اختلاف کاهش می‌یابد. این موضوع با اندکی تفاوت در گزارش ضریب برآ نیز مشاهده می‌شود؛ با این تفاوت که اختلاف میان نتایج بازگشت به عقب با سه روش دیگر در زمان‌های t^*<۱/۳۴ قابل توجه بوده و همچنین این اختلاف با افزایش زمان کاهش نمی‌یابد.



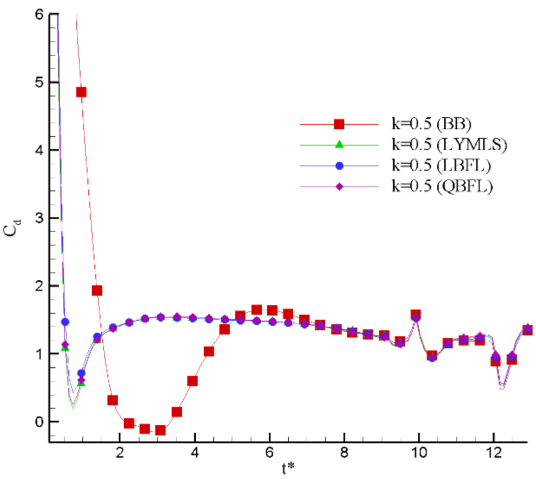
شکل ۱۳: تغییرات ضریب پسا برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۲ و Re=۲۰۰

Fig. 13. Changes in the drag coefficient for a rotary cylinder in the conditions of k=0.2 and Re=200



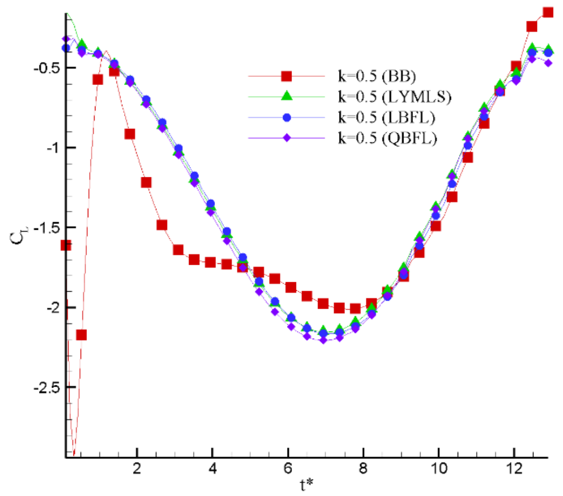
شکل ۱۴: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۲ و Re=۲۰۰

Fig. 14. Changes in the lift coefficient for a rotary cylinder in the conditions of k=0.2 and Re=200



شکل ۱۵: تغییرات ضریب پسا برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۵ و Re=۲۰۰

Fig. 15. Changes in the drag coefficient for a rotary cylinder in the conditions of k=0.5 and Re=200

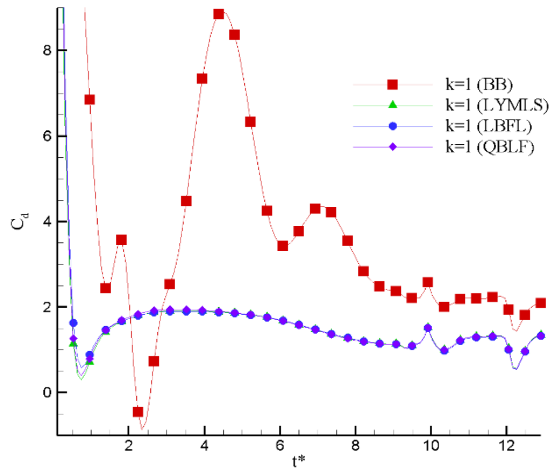


شکل ۱۶: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۵ و Re=۲۰۰

Fig. 16. Changes in the lift coefficient for a rotary cylinder in the conditions of k=0.5 and Re=200

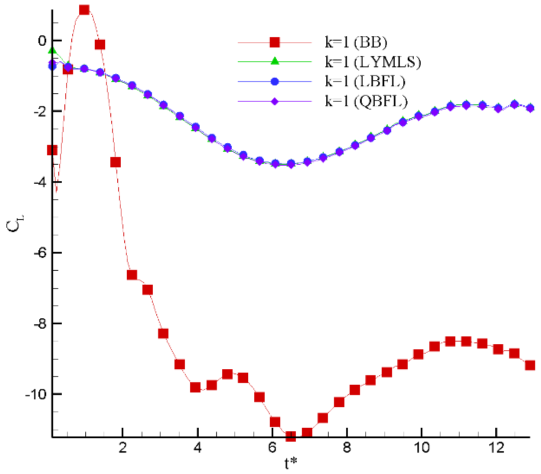
به طور مشابه تغییرات ضریب پسا وبرآ در شرایط k =۰/۵ به ترتیب در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ آورده شده است. در این شرایط نیز اختلاف مقادیر C_d در هر چهار روش در زمان‌های t^*>۷/۳۴ از میان می‌رود. در مورد پیش‌بینی مقادیر C_l نیز به ازای زمان‌های t^*<۸/۳۵ روش بازگشت به عقب نتایج متفاوتی نسبت به روش‌های یو خطی، بوزیدی خطی و بوزیدی درجه دو ایجاد می‌نمایند. لازم به یادآوری است که به ازای مقادیر انتخاب شده برای پارامترهای τ، U و D روش یو درجه دو دچار واگرایی شده است.

در ادامه این قسمت نتایج مربوط به k=۱ گزارش شده است. در این حالت سرعت دورانی استوانه نسبت به حالت‌های قبلی بیشتر شده است. با توجه به شکل‌های ۱۷ و ۱۸ مشاهده می‌شود که سه روش یو خطی، بوزیدی خطی و بوزیدی درجه دو در پیش‌بینی مثادیر C_d و C_l رفتار کاملا مشابهی دارند، اما روش بازگشت به عقب مقادیر کاملا متفاوتی را تخمین می‌زنند، به‌طوری‌که این اختلاف با افزایش زمان نیز از بین نمی‌رود. به عبارت دیگر، با افزایش بیشتر سرعت دورانی استوانه روش بازگشت به عقب در محاسبه ضرایب برآ و پسا عملکرد



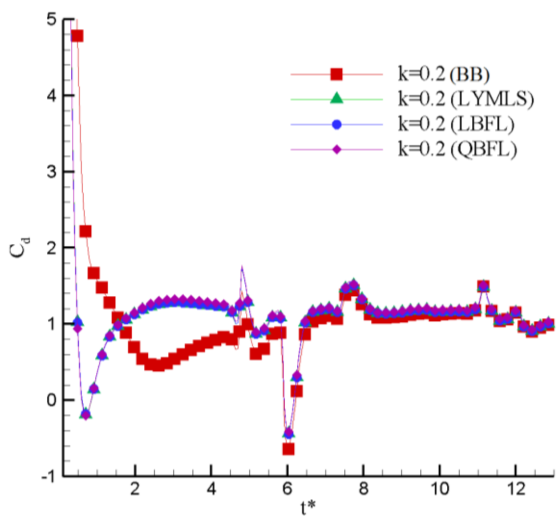
شکل ۱۷: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۱ و Re=۲۰۰

Fig. 17. Changes in the drag coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=1 and *Re*=200



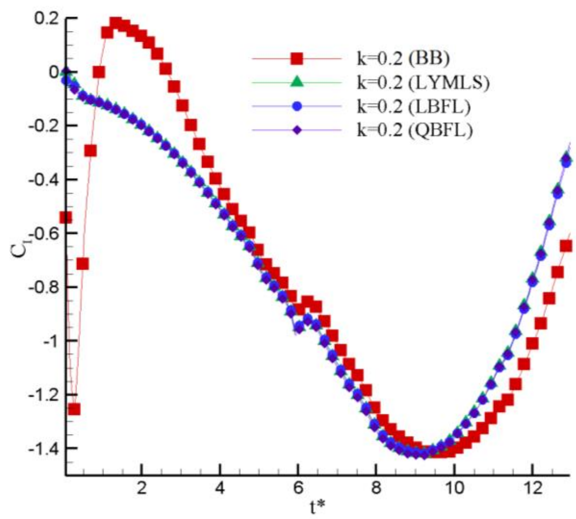
شکل ۱۸: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۱ و Re=۲۰۰

Fig. 18. Changes in the lift coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=1 and *Re*=200



شکل ۱۹: تغییرات ضریب پسا برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۲ و Re=۴۰۰

Fig. 19. Changes in the drag coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=0.2 and *Re*=400



شکل ۲۰: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۲ و Re=۴۰۰

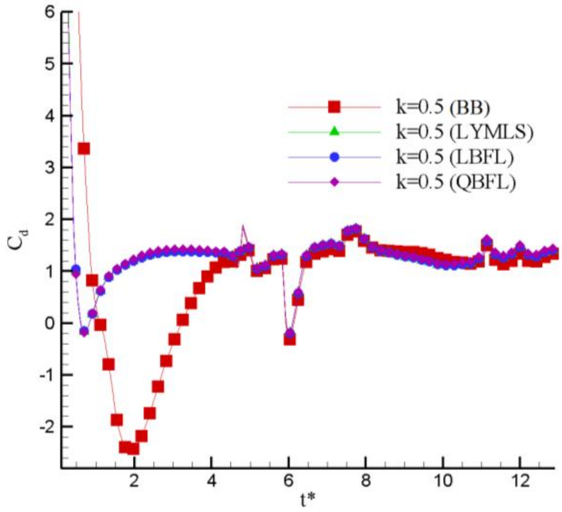
Fig. 20. Changes in the lift coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=0.2 and *Re*=400

قابل قبولی ندارد. این درحالی است که سه روش یو خطی، بوزیدی خطی و بوزیدی درجه دو عملکرد یکسانی را نشان می‌دهند.

در پایان این قسمت، نتایج مربوط به مقادیر ضریب پسا و برآ در شرایط k=۰/۲، k=۰/۵ و k=۱ برای عدد رینولدز ۴۰۰ به ترتیب در شکل‌های ۱۹ تا ۲۴ آورده شده است. نتایج بدست آمده در این قسمت نیز مشابه با شکل‌های ۱۳ تا ۱۸ است؛ بدین معنا است که در کلیه موارد نتایج سه روش یو خطی، بوزیدی خطی و بوزیدی درجه دو اختلاف اندکی با هم داشته، در حالی‌که روش بازگشت به عقب نتایج متفاوتی ایجاد کرده است. همچنین مشاهده می‌شود که در عدد رینولدز ۴۰۰ و در k=۱ روش بازگشت به عقب در شرایط τ=۰/۵۱۸، U=۰/۰۸ و D=۱۵ دچار واگرایی شده است.

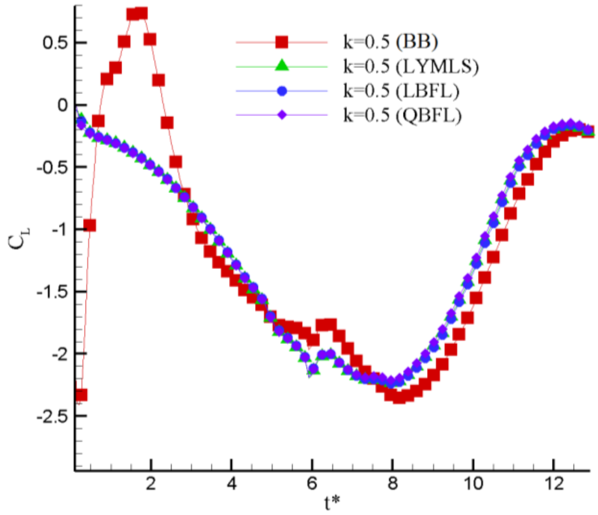
۲-۵-۲- اثرات ضریب رهاسازی یگانه و سرعت

همان‌طورکه پیش‌تر گفته شد، انتخاب دو مقدار ضریب رهاسازی یگانه و سرعت، برای رسیدن به رینولدز مورد نظر بسیار حائز اهمیت است. انتخاب این دو مقدار، کاملاً تجربی بوده و با تحلیل نتایج می‌توان



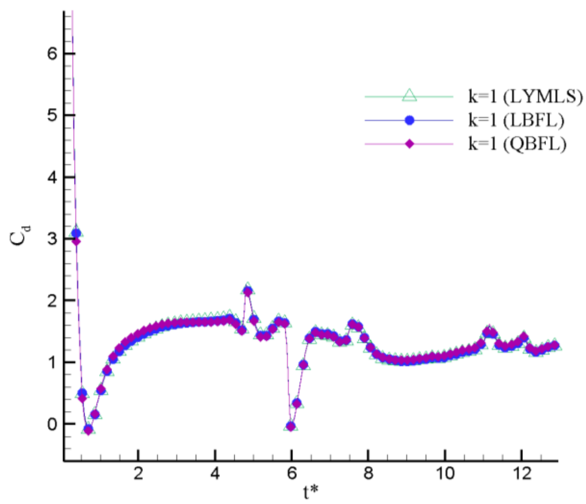
شکل ۲۱: تغییرات ضریب پسا برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۵ و Re=۴۰۰

Fig. 21. Changes in the drag coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=0.5 and *Re*=400



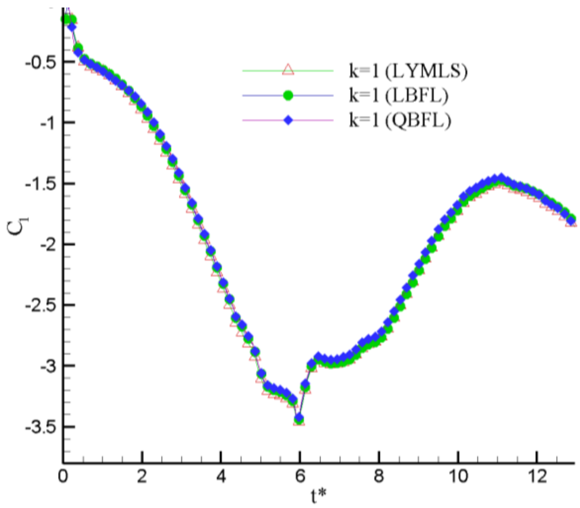
شکل ۲۲: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۰/۵ و Re=۴۰۰

Fig. 22. Changes in the lift coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=0.5 and *Re*=400



شکل ۲۳: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۱ و Re=۴۰۰

Fig. 23. Changes in the drag coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=1 and *Re*=400



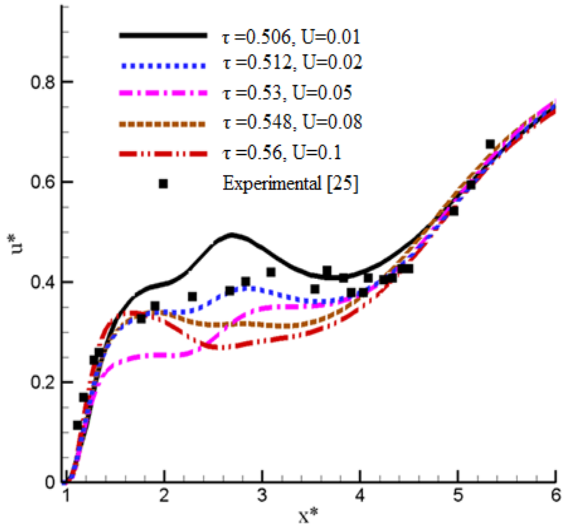
شکل ۲۴: تغییرات ضریب برآ برای استوانه دوار در شرایط k=۱ و Re=۴۰۰

Fig. 24. Changes in the lift coefficient for a rotary cylinder in the conditions of *k*=1 and *Re*=400

در مورد مقادیر نهایی آن‌ها اظهار نظر کرد. در ادامه مقادیر این دو پارامتر برای شرایط Re=۲۰۰، k=۰/۵ و D=۴۰ در شبکه یکسان مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۲۵ سرعت بی‌بعد u^* را در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن و در زمان t^*=۸ برای مقادیر مختلف τ و U نشان می‌دهد. مطابق شکل در حالتی‌که τ بین ۰/۵۱۲ و ۰/۵۰۶ و U به بین ۰/۰۲ و ۰/۰۱ انتخاب شوند، نتایج از دقت خوبی نسبت به سایر مقادیر برخوردار هستند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی کمی رفتار شرایط مرزی مختلف جهت اعمال شرط عدم لغزش، در چارچوب روش بولتزمن شبکه‌ای بر روی استوانه ثابت و دوار پرداخته شده است. بدین منظور از پنج روش بازگشت به عقب، روش یو خطی و درجه دو و روش بوزیدی خطی و درجه دو، جهت محاسبه مقادیر توابع توزیع در نقاط اطراف مرز استوانه استفاده شد. بر اساس شبیه‌سازی‌های صورت گرفته، نتایج



شکل ۲۵: مقایسه تغییرات مؤلفه سرعت در جهت x در پشت استوانه و بر روی خط افقی گذرنده از مرکز آن در زمان ۸= t^* در Re =۲۰۰

Fig. 25. Comparison of the velocity in the *x* direction at the back of the cylinder and on the horizontal line passing through its center at time *t*=8* and *Re*=200

زیر قابل بیان هستند:

• در شرایطی که استوانه ساکن بوده و جریان دارای رینولدز کوچکی است (Re<۴۰)، استفاده از روش بازگشت به عقب، علی‌رغم سادگی اعمال، دارای دقت قابل قبول در محاسبه و پیش‌بینی ضریب پسا می‌باشد؛ به طوری‌که نیاز به اعمال روش‌هایی با دقت بالاتر و یا روش‌های با توانایی پوشش مرز انحنادار را رفع می‌کند.

• روش بازگشت به عقب در محاسبه‌ی زاویه جدایش θ و روش بوزیدی خطی در محاسبه‌ی نسبت طول گردابه به قطر L/D، دارای خطای بیشتری نسبت به روش‌های دیگر می‌باشند.

• بر اساس نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که علی‌رغم دقت مرتبه بالای روش‌های یو درجه دو و بوزیدی درجه دو، این روش‌ها دارای شرایط پایداری محدودتری می‌باشند؛ به‌طوری‌که در شرایط یکسان نسبت به سه روش دیگر، دچار واگرایی می‌شوند. البته این وضعیت برای روش بوزیدی درجه دو در رینولدزهای بالاتر (Re=۲۰۰) بهبود می‌یابد.

• محاسبات نشان می‌دهد که با افزایش عدد رینولدز و افزایش سرعت دوران استوانه، روش بازگشت به عقب در پیش‌بینی مقادیر ضریب پسا و برآ نسبت به روش‌های بوزیدی خطی، بوزیدی درجه دو و یو خطی نتایج متفاوتی را از خود نشان می‌دهد؛ به‌طوری‌که با افزایش سرعت دوران استوانه این اختلاف بیشتر می‌شود. این درحالی است که سه روش بوزیدی خطی، بوزیدی درجه دو و یو خطی در شرایط یکسان، پاسخ کاملا مشابهی را ایجاد می‌کنند.

• انتخاب دو مقدار ضریب رهاسازی یگانه و سرعت، تأثیر عمده‌ای بر نتایج بدست آمده دارند. به‌طوری‌که با تغییر این پارامترها الگوی جریان تحت تأثیر قرار می‌گیرد. با این وجود، انتخاب این دو مقدار، کاملاً تجربی بوده و با تحلیل نتایج می‌توان در مورد مقادیر نهایی آن‌ها اظهار نظر کرد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

c	بردار سرعت ریزمقیاس، در واحد شبکه
C	ضریب پسا یا ضریب برآ، بی‌بعد
D	تعداد ابعاد مسئله
f	تابع توزیع چگالی، در واحد شبکه
F	نیروی وارد بر استوانه، در واحد شبکه
k	سرعت بی‌بعد دوران استوانه
L	طول گردابه، در واحد شبکه
P	فشار، در واحد شبکه
r	بردار مختصات نقطه، در واحد شبکه
R	شعاع استوانه، در واحد شبکه
Re	عدد بی‌بعد رینولدز
t	زمان، در واحد شبکه
u	بردار سرعت ماکروسکوپی، در واحد شبکه
u	مقدار سرعت در راستای x، در واحد شبکه
U	سرعت در ورودی کانال، در واحد شبکه
v	مقدار سرعت در راستای y، در واحد شبکه
w	ضرایب وزنی
x	محور افقی مختصات
y	محور عمودی مختصات

علائم یونانی

Δ	موقعیت نسبی سطح جامد، بی‌بعد
θ	زاویه جدایش، رادیان
υ	لزجت سینماتیک، در واحد شبکه
ρ	چگالی، در واحد شبکه
τ	زمان رهاسازی یگانه، در واحد شبکه
ψ	عملگر برخورد
Ω	سرعت دورانی استوانه، در واحد شبکه

زیرنویس

d	نیروی پسا
l	نیروی برآ، شبکه سیال نزدیک مرز جامد
max	مقدار بیشینه
min	مقدار کمینه
p	نقطه همسایه داخل استوانه
s	سرعت صوت
w	مرز استوانه
x	مختصات در راستای x
y	مختصات در راستای y

بالانویس

cyl	استوانه
eq	مقادیر تعادلی
*	مقدار بی‌بعد

مخففها

BB	Bounce Back
LYMLS	Linear Yu-Mei-Luo-Shyy
QYMLS	Quadratic Yu-Mei-Luo-Shyy
LBFL	Linear Bouzidi-Firdaouss-Lallemand
QBFL	Quadratic Bouzidi-Firdaouss-Lallemand

مراجع

[1] A.A. Mohamad, Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes, Springer Science & Business Media, 2011.

[2] M. Sukop, DT Thorne, Jr. Lattice Boltzmann Modeling Lattice Boltzmann Modeling, (2006).

[3] K. Timm, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, The lattice Boltzmann method: principles and practice, in, Springer: Berlin, Germany, 2016.

[4] T. Lee, G.K. Leaf, Eulerian description of high-order bounce-back scheme for lattice Boltzmann equation with curved boundary, The European Physical Journal Special Topics, 171(1) (2009) 3-8.

[5] S. Chen, S. Bao, Z. Liu, J. Li, C. Yi, C. Zheng, A heuristic curved-boundary treatment in lattice Boltzmann method, EPL (Europhysics Letters), 92(5) (2010) 54003.

[6] S. Tao, Z. Guo, Boundary condition for lattice Boltzmann modeling of microscale gas flows with curved walls in the slip regime, Physical Review E, 91(4) (2015) 043305.

[7] P.-H. Kao, R.-J. Yang, An investigation into curved and moving boundary treatments in the lattice Boltzmann method, Journal of Computational Physics, 227(11) (2008) 5671-5690.

[8] J.C. Verschaeve, B. Müller, A curved no-slip boundary condition for the lattice Boltzmann method, Journal of Computational Physics, 229(19) (2010) 6781-6803.

[9] J. Latt, B. Chopard, O. Malaspinas, M. Deville, A. Michler, Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method, Physical Review E, 77(5) (2008) 056703.

[10] L. Budinski, MRT lattice Boltzmann method for 2D flows in curvilinear coordinates, Computers & Fluids, 96 (2014) 288-301.

[11] Y. Kuwata, K. Suga, Anomaly of the lattice Boltzmann methods in three-dimensional cylindrical flows, Journal of Computational Physics, 280 (2015) 563-569.

[12] Z.-m. Zhao, P. Huang, S.-t. Li, Lattice Boltzmann model for shallow water in curvilinear coordinate grid, Journal of Hydrodynamics, 29(2) (2017) 251-260.

[13] A. Velasco, J. Muñoz, M. Mendoza, Lattice Boltzmann model for the simulation of the wave equation in curvilinear coordinates, Journal of Computational Physics, 376 (2019) 76-97.

[14] O. Filippova, D. Hänel, Boundary-fitting and local grid refinement for lattice-BGK models, International Journal of Modern Physics C, 9(08) (1998) 1271-1279.

[15] R. Mei, L.-S. Luo, W. Shyy, An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method, Journal of computational physics, 155(2) (1999) 307-330.

[16] R. Mei, W. Shyy, D. Yu, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann

method for 3-D flows with curved boundary, Journal of Computational Physics, 161(2) (2000) 680-699.

[17] D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, W. Shyy, Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation, Progress in Aerospace Sciences, 39(5) (2003) 329-367.

[18] D. Yu, R. Mei, W. Shyy, A unified boundary treatment in lattice boltzmann method, in: 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2003, pp. 953.

[19] O.R. Mohammadipoor, H. Niazmand, S. Mirbozorgi, Alternative curved-boundary treatment for the lattice Boltzmann method and its application in simulation of flow and potential fields, Physical Review E, 89(1) (2014) 013309.

[20] O.R. Mohammadipour, S. Succi, H. Niazmand, General curved boundary treatment for two-and three-dimensional stationary and moving walls in flow and nonflow lattice Boltzmann simulations, Physical Review E, 98(2) (2018) 023304.

[21] A.J. Ladd, Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation, Journal of fluid mechanics, 271 (1994) 285-309.

[22] A.J. Ladd, Short-time motion of colloidal particles: Numerical simulation via a fluctuating lattice-Boltzmann equation, Physical Review Letters, 70(9) (1993) 1339.

[23] M.h. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand, Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries, Physics of fluids, 13(11) (2001) 3452-3459.

[24] S. Dennis, G.-Z. Chang, Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100, Journal of Fluid Mechanics, 42(3) (1970) 471-489.

[25] M. Coutanceau, C. Menard, Influence of rotation on the near-wake development behind an impulsively started circular cylinder, Journal of Fluid Mechanics, 158 (1985) 399-446.