



## اندرکنش سیال - سازه ناشی از ضربه قوچ در خط لوله تحت فشار با در نظر گرفتن رفتار غیر خطی هندسی دیواره لوله

محمدعلی مشاک\*، علیرضا کرامت

گروه آب، دانشکده عمران، دانشگاه جندی شاپور، دزفول، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۱۰-۱۷  
بازنگری: ۱۳۹۷-۱۲-۰۷  
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۲-۰۸  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۲-۲۷

### کلمات کلیدی:

اجزاء محدود غیر خطی  
اندرکنش سیال-سازه  
تحلیل حوزه فرکانس  
ضربه قوچ  
ناپایداری سازه ای

**خلاصه:** جریان گذرا در لوله سبب رخداد اندرکنش بین دیواره لوله و سیال درون آن می شود که به وسیله یک مدل ریاضی که در آن خط لوله به عنوان یک تیر با بارگذاری ناشی از فشار سیال درون آن است قابل بررسی می باشد. مدل مورد نظر یک خط لوله حاوی جریان سیال است که در بالادست به مخزن و در پایین دست به یک شیر متصل است و با بسته شدن ناگهانی شیر تحت نیروهای ضربه قوچ قرار می گیرد. هدف بررسی امکان ناپایداری در این خط لوله در حالتی است که جابجایی های جانبی نسبتا زیاد و در عین حال کرنش ها کوچک هستند. مدل های متعارف تحلیل دینامیکی در تیرها که بر اساس فرضیات کرنش های بسیار کوچک ( $\epsilon = \partial^2 u / \partial x^2$ ) بنا شده اند نمی توانند اثر جابجایی های جانبی زیاد را در معادلات حاکم منعکس کنند. در معادلات حاکم تنش های محوری بصورت خطی و کرنش ها به کمک کرنش غیر خطی فون-کارمن مدل می شوند. معادلات دیفرانسیل جزئی بدست آمده به وسیله روش اجزاء محدود در حوزه زمان حل می شوند. از سوی دیگر معادلات خطی ارتعاش جانبی در لوله بی بعد شده و با رسم نمودارهای فرکانس های بدون بعد در مقابل سرعت بدون بعد سیال، پایداری در حوزه فرکانس بررسی می شود. مشاهده شد که در طولهای گیرداری کوتاه معیار حوزه فرکانس (سرعت بدون بعد  $\pi$  و  $2\pi$  به ترتیب برای شرایط تکیه گاهی دوسر مفصل و دوسر گیردار) بر سیستم حاکم است و معیار فشار بحرانی کماتش رفتار سیستم را پیش بینی نمی کند.

### ۱- مقدمه

ریاضی این پدیده فیزیکی دو دسته معادلات سازه ای و هیدرولیکی است. معادلات سازه ای ارتعاش خمشی و ارتعاش محوری و معادلات هیدرولیکی مومنوم و پیوستگی برای جریان غیر ماندگار. معادلات ضربه قوچ کلاسیک تحت عنوان معادلات جوکوفسکی ذیل مبحث معادلات هیدرولیکی و بار بحرانی اولر در کماتش تیر-ستونها ذیل مبحث معادلات سازه ای مورد بررسی قرار می گیرند.

در روند مطالعات پیشین مدل ریاضی فوق سیر پیشرفت خود را تدریجا پشت سر گذاشته ولی تاکنون در خصوص اثرات تغییر شکلهای جانبی زیاد ناشی از کماتش خط لوله که تحت عنوان هندسه غیر خطی از آن یاد می شود اصلاحات لازم صورت نگرفته بود که

ورود سیال به یک مجرای بسته منجر به افزایش فشار فراتر از فشار اتمسفر می شود. لوله های تحت فشار همچون ستونهای تحت بار در برابر کماتش آسیب پذیر هستند [۱]. بروز ضربه قوچ و افزایش فشار قابل ملاحظه ناشی از آن سبب حادث شدن اندرکنش سیال-سازه می شود که پتانسیل ایجاد ناپایداری سازه ای در لوله را دارد. ساده ترین ترکیب برای بررسی این مقوله سیستم مخزن-لوله-شیر است. یک خط لوله مستقیم که از سویی به مخزن حاوی سیال و از سوی دیگر به یک شیر متصل است. معادلات حاکم بر مدل

\* نویسنده عهده دار مکاتبات: m.mashak@jnu.ac.ir



لی و چونگ (Lee and Chung) در مقاله ای با استفاده از کرنش های عمومی لاگرانژ که اغلب تحت عنوان کرنش فون کارمن از آن یاد می شود معادلات پایدوسی را توسعه داده و مدل جدیدی برای تحلیل جریان سیال در لوله با در نظر گرفتن اثرات هندسه غیر خطی سازه لوله ارائه نمودند. در این معادلات سرعت سیال نقش مهمی دارد [۵].

ردی (Reddy) در کتاب خود مدل محاسباتی حل غیر خطی اجزاء محدود را ارائه کرده است. در این مدل اثرات هندسه غیر خطی در ماتریس سختی سازه در هر مرحله محاسبه می شود [۶]. مدل این کتاب یک مدل استاتیکی است که برای حالت های دینامیکی به کمک حل نیومارک توسعه داده می شود [۲].

ساختار پیروی شده در این تحقیق مشابه ساختار مورد مطالعه در خصوص ناپایداری ناشی از حرکت سیال در لوله است. گرچه در این رویکرد عامل ناپایداری سازه ای خط لوله، سرعت سیال می باشد و به پدیده ضربه قوچ اشاره نمی شود اما روش عبور از تئوری کرنش های بسیار کوچک به سمت کرنش عمومی لاگرانژ (کرنش فون کارمن) برای شامل کردن اثرات هندسه غیر خطی و صحت سنجی نتایج آن به کمک تحلیل حوزه فرکانس برای معادلات خطی ارتعاش سازه خط لوله راهگشا بوده است. همچنین تحلیل حوزه فرکانس، بازه های الگوهای ناپایداری و نقاط انفصال هر کدام را به روشنی نشان می دهد که برای تفسیر نتایج حل حوزه زمان قابل استفاده است.

## ۲- معادلات حاکم

در این قسمت ابتدا بحث مختصری در خصوص بررسی کمانش در لوله های حاوی سیال ارائه می شود. نتیجه این بحث فرمول بار بحرانی اولر برای لوله حاوی سیال و ارتباط آن با فشار سیال است. سپس معادلات ارتعاش سازه لوله مورد بررسی قرار می گیرند. در قدم اول معادله ارتعاش محوری تحت بارگذاری داخلی هیدرولیکی به اختلاف فشار سیال مربوط می شود. در ادامه بحثی در خصوص نحوه لحاظ کردن اثر جابجایی جانبی زیاد (هندسه غیرخطی) در معادلات حاکم ارائه می شود. از میان سه روش مدلسازی ممکن، روش میانه یعنی تنش ها، خطی و کرنش ها، غیر خطی فرض می شود. دو معادله جدید ارتعاش غیر خطی محوری و خمشی با استفاده از تئوری کرنش غیر خطی فون کارمن معرفی می شوند.

این امر در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت. با معرفی معادلات غیر خطی ارتعاش خمشی و ارتعاش محوری، مدل ریاضی جدید می تواند اثر تغییر شکل های جانبی زیاد و در عین حال کرنش های اندک را در روند ناپایداری سازه لوله در حالت بروز ضربه قوچ نشان دهد.

اولر (Euler) نشان داد که در ازای چه نیرویی یک ستون لاغر پیش از بروز شکست در مصالح دچار کمانش می شود. بازانت (Bazant) در کتاب خود در خصوص پایداری سازه ها نشان داد که لوله های تحت فشار هیدروستاتیک مشابه ستونهای تحت بار استاتیکی محوری متمرکز دچار کمانش می شوند. مقدار این فشار در سطح مقطع لوله برابر با بار بحرانی اولر قابل تحمل برای سازه لوله بدون حضور سیال محاسبه شده است [۱]. نوعی دیگر از ناپایداری سازه ای که در مباحث دینامیک سازه ها کلاف (Clough) به آن پرداخته است بحث نزدیک شدن فرکانس طبیعی سازه به فرکانس تحریک و بروز پدیده تشدید است [۲].

ژوکوفسکی (Joukowski) رابطه ای جهت سرعت انتشار موج فشاری بدست آورد که در آن کشسان بودن سیال و جدار لوله در نظر گرفته شده بود. همچنین او با استفاده از معادلات پیوستگی و اندازه حرکت، رابطه ای ما بین کاهش سرعت و افزایش فشار ناشی از آن بدست آورد. وی همچنین تحقیقاتی درباره اثرات سرعت بسته شدن یک شیر انجام داد و دریافت که افزایش فشار در لوله به زمان بسته شدن شیر ارتباط دارد [۳].

پایدوسیسی (Paigdoussis) در زمینه آنالیز غیرخطی سازه لوله، معادلات اساسی حاکم را با در نظر گرفتن انواع ترم های غیرخطی و اثرات سیال بر لوله ارائه می دهد. رفتار دینامیکی در حالت سه بعدی برای یک لوله یک سر گیردار محتوی آب، در حالت غیرخطی بررسی شده و روش حل معادلات با روش اجزای محدود ارائه شده است. گرچه معادلات ارائه شده توسط وی و مباحث تحلیل غیر خطی لوله ها و اثرات سیال بر لوله دارای اهمیت زیادی می باشند اما چون منشاء در نظر گرفته شده به عنوان عامل رفتار دینامیکی، پدیده ضربه قوچ نیست نمی توان آن را در زمره تحقیقات بررسی اثرات تداخلی در شبکه لوله های تحت فشار قرار داد. با این وجود مشابهاً بسیار زیادی بین این دسته از مسائل و مسائل تداخلی سیال-سازه تحت اثر ضربه توج وجود دارد از جمله در روش حل معادلات سازه و در امکان رخ دادن پدیده کمانش و ایجاد ناپایداری سازه ای [۴].

در اینجا  $p_h$  فشار هیدروستاتیک سیال درون لوله،  $A$  سطح مقطع لوله،  $P_r$  نیروی برآیند به شکل شعاعی بر دیواره داخلی لوله و  $w$  جابجایی جانبی یا همان خیز لوله است.

میدان جابه جایی حاکم بر مسئله برابر است با:

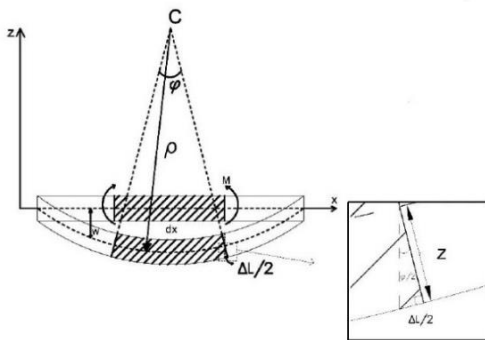
$$u_z = w(x) \quad u_y = 0, \quad u_x = u - z \frac{dw}{dx}, \quad (2)$$

در اینجا  $u$  و  $w$  جابه جایی نقاط واقع بر محور خنثی به ترتیب در راستای  $x$  و  $z$  می باشد. همانطور که در شکل ۲ ملاحظه می شود در راستای محور  $z$  جابجایی کلی در هر نقطه از مقطع تیر با جابجایی محور گذرنده از مرکز سطح مقطع که در اینجا با خط چین نشان داده شده برابر است. اما در محاسبه جابجایی کلی نقاط خارج از محور خط چین در راستای محور  $x$  بعلت چرخش صفحات مستوی مفروض در مدل تیر اولر-برنولی، به نسبت حاصلضرب فاصله  $z$  در زاویه چرخش، جابه جایی افزوده یا کاسته شده خواهیم داشت. فاصله نقاط با  $z$  نشان داده شده است که در بازه ای بین صفر تا نصف ارتفاع مقطع متغیر است. علامت منفی بعلت قرارداد جهت بالا بعنوان جهت مثبت می باشد.

از سوی دیگر معادله دیفرانسیل خمش تیر تحت بار گسترده جانبی  $p$  و بار متمرکز محوری  $F$  را از روابط تعادل بدست می آوریم.

$$EIw'''' + (Fw')' = p \quad (3)$$

در اینجا  $E$  مدول الاستیسیته و  $I$  ممان دوم (ممان اینرسی) سطح مقطع تیر است.



شکل ۲. خمش در تئوری تیر اولر-برنولی

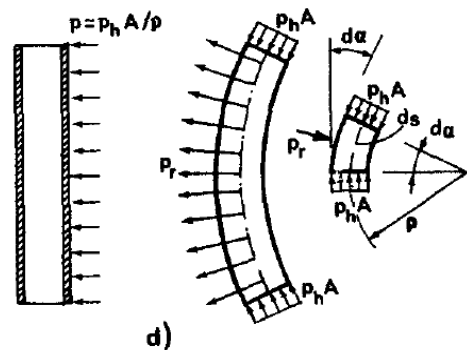
Fig. 2. Bending of a straight bar according to Bernoulli-Navier hypothesis.

معادلات هیدرولیکی حاکم بر جریان درون لوله در حالت غیرماندگار بصورت معادلات مومنوم و پیوستگی ارائه می شود. در ذیل آنها معادلات کلاسیک ضربه قوچ مورد بررسی قرار می گیرد. در اینجا مدل ریاضی مورد نظر ما کامل می شود. برای صحت سنجی و درک بیشتر خروجی این مدل به تحلیل حوزه فرکانس نیاز است. از خطی سازی و بی بعد کردن معادلات حرکت سیال در لوله و حل آنها نمودارهای فرکانس حقیقی و موهومی ارتعاش خط لوله در برابر سرعت بدون بعد رسم می شود. نقاط صفر شدن فرکانس حقیقی روی نمودار بعنوان نقاط ناپایداری قابل شناسایی هستند. همچنین بازه های بین این نقاط هر کدام الگوی خاصی از ناپایداری را نشان می دهند. در پایان این الگوهای ناپایداری شرح داده می شوند.

## ۲-۱- بررسی کماتش در لوله های حاوی سیال

لوله های حاوی سیال تحت فشار نیز همچون ستونهای تحت بار در برابر کماتش آسیب پذیر هستند. بار گسترده جانبی ناشی از فشار سیال به دیواره لوله وارد می شود. در صورت بروز تغییر شکل در لوله ملاحظه می کنیم که مساحت دیواره داخلی در یک طرف بیشتر از طرف دیگر می شود که سبب ایجاد برآیند نیرویی بر واحد سطح لوله می شود (شکل ۱). این برآیند به شکل شعاعی بر دیواره داخلی لوله وارد می شود. مقدار این برآیند به وسیله نوشتن روابط تعادل برای یک برش از سیال به طول  $ds$  در جهت شعاعی قابل محاسبه است.

$$P_r = p_h A w'' \quad (1)$$



شکل ۱. بار جانبی ناشی از فشار سیال به دیواره لوله (شکل از Bazant (۱۹۹۱)

Fig. 1. Buckling of hydraulic column supports and pressurized pipes

$$\rho_p A_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA_p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{A_p \nu D}{2e} \rho_f g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

در اینجا  $t$  زمان و  $\rho$  چگالی است.

معادلات ۵ و ۶ دو شکل از معادله ارتعاش محوری غیر خطی می باشند که تفاوت آنها در ساده سازی روابط کرنش غیر خطی است. اغلب نویسندگان از جمله پایدوسیسی [۴]، ردی [۶] و تورمان [۸] (THURMAN) شکل دوم را در آثار خود ارائه داده اند. در این میان لی و چونگ [۵] طی بحث مبسوطی شکل اول را دقیقتر دانسته اند.

$$EI_p \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\rho_p A_p + \rho_f A_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA_p \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - EI_p \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (7)$$

### ۲-۲-۲- معادله ارتعاش خمشی

دو شکل تفصیلی و مختصر معادله ارتعاش خمشی غیر خطی برابر است با:

$$EI_p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\rho_p A_p + \rho_f A_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA_p \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = 0 \quad (8)$$

در اینجا  $M_{xx}$  ممان خمشی داخلی حول محور عمود بر کاغذ،  $N_{xx}$  نیروی محوری داخلی،  $V$  نیروی برشی داخلی و  $C$  فاصله قائم

دو حالت خاص برای معادله (۳) متصور است. حالت اول در صورت عدم وجود نیروی گسترده جانبی به معادله کمانش تیر تحت یک نیروی محوری متمرکز می رسیم. حالت دوم نیروی محوری متمرکز نداریم و فقط نیروی جانبی گسترده وجود دارد. در مسئله مورد بحث، بار محوری خارجی نداریم. لذا جمله دوم معادله (۳) حذف می شود. از جایگزینی برآیند نیروی جانبی ناشی از فشار سیال (۱) در معادله دیفرانسیل خمش تیر تحت یک نیروی گسترده جانبی به معادله ای مشابه معادله کمانش تیر تحت یک نیروی محوری متمرکز می رسیم.

$$EIw'''' + p_h A w'' = 0 \quad (4)$$

### ۲-۲-۲- معادلات ارتعاش سازه لوله

#### ۲-۲-۱- معادله ارتعاش محوری

رفتار مکانیکی مصالح لوله به سه روش قابل مدلسازی است:

- ۱- تنش ها و کرنش ها هر دو خطی فرض شوند.
  - ۲- تنش ها خطی و کرنش ها غیر خطی فرض شوند.
  - ۳- تنش ها و کرنش ها هر دو غیر خطی فرض شوند.
- در حالت اول معادلات حاکم بر کرنشها در هر صفحه یا هر بعد محوره‌های مختصات از کرنشهای خارج از آن صفحه مستقل بوده و اصطلاحاً غیرکوپله هستند. در حالت دوم کرنشها در هر بعد یا صفحه با کرنش های خارج از صفحه بر هم تاثیر دارند و اصطلاحاً کوپله هستند اما در عین حال معادلات حاکم بر کرنشهای درون صفحه فقط وابسته به جابه جایی های درون صفحه هستند و لذا حل ساده تری نسبت به حالت سوم دارند. در حالت سوم معادلات حاکم بر کرنشهای درون صفحه و کرنشهای خارج از صفحه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کاملاً کوپله خواهند بود که نیازمند حل های پیچیده عددی هستند [۷].

در نهایت دو شکل تفصیلی و مختصر معادله ارتعاش محوری غیر خطی برابر است با:

$$\rho_p A_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA_p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) + \frac{1}{2} EI_p \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right) - \frac{A_p \nu D}{2e} \rho_f g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

فرکانس تحریک برای لوله ای به طول  $L$  بدون لحاظ اندرکنش سیال و لوله برابرست با

$$\dot{U}_{WH} = \frac{\pi c_f}{2L} \quad (13)$$

نیروی محوری دینامیکی حاصل از فشار ضربه قوچ در محل شیر برابرست با

$$P = \rho_f g A_f (H - H_0), \quad (14)$$

نیروی بحرانی قابل تحمل توسط سازه لوله برابرست با [۱]

$$F_{cr} = \frac{\delta^2 EI}{(kL)^2} \quad (15)$$

فشار معادل این نیرو برابرست با

$$H_{cr} = \frac{\delta^2 EI}{\tilde{n}_f g A_f (kL)^2} \quad (16)$$

در اینجا  $k$  با توجه به شرایط تکیه گاهی لوله تعیین می شود. همچنین فرکانس طبیعی ارتعاش لوله بدون سیال در حالت ارتعاش آزاد  $\dot{U}_{0p}$  و سرعت موج تنش  $c_t$  برابرست با

$$c_t = \sqrt{\frac{E_p}{\rho_p}} \quad \dot{U}_{0p} = \frac{\pi c_t}{2L} \quad (17)$$

#### ۲-۴- تحلیل ارتعاش خمشی در حوزه فرکانس

مهمترین عامل موثر در رخ دادن پدیده ضربه قوچ صفر شدن سرعت اولیه سیال با بسته شدن ناگهانی شیر در لوله است. بزرگی نیروی حاصل از آن بسته به سرعت اولیه سیال است. اما فرکانس این نیرو که فرکانس محرک نیز نامیده می شود مستقل از سرعت اولیه سیال و وابسته به سرعت انتشار موج فشار در لوله است. از سوی دیگر وجود سیال درون لوله حتی در حالت سکون سیال، یعنی لوله حاوی سیال ساکن، فرکانس های طبیعی ارتعاش لوله دستخوش تغییر می شوند.

با به جریان افتادن سیال هر چه سرعت سیال افزوده شود فرکانس های طبیعی سیستم لوله-سیال کاسته می شوند. مشاهده می شود که حتی در صورت عدم رخداد پدیده ضربه قوچ، یعنی در صورت باز ماندن شیر، افزایش سرعت سیال تا سرعت بحرانی می تواند باعث

مرکز سطح نیروی گسترده جانبی تا محور ممان گیری است.  $A$  و  $\rho$  بترتیب سطح مقطع و چگالی که با اندیس  $f$  مربوط به سیال و اندیس  $p$  مربوط به لوله است.

معادلات ۷ و ۸ دو شکل از معادله ارتعاش خمشی غیر خطی می باشند که تفاوت آنها در ساده سازی روابط کرنش غیر خطی در معادله ۸ است. در هر دوی آنها از فرضیات تیر اولر-برنولی در مرحله روابط میدان جابجایی برای نوشتن روابط تعادل در المان تیر استفاده شده است.

#### ۲-۳- معادلات هیدرولیک جریان غیر ماندگار

معادلات حاکم بر جریان درون لوله در حالت غیرماندگار بصورت معادلات مومنتم و پیوستگی ارائه می شود [۹].

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} - 2v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

در اینجا  $V$  سرعت سیال،  $H$  هد فشار سیال،  $u$  جابجایی محوری لوله و  $c_f$  سرعت انتشار موج فشاری است. در این معادلات ترم کوپله کننده  $2v \frac{\partial u}{\partial x}$  هیدرولیک جریان را با رفتار دینامیکی دیواره لوله مرتبط می کند. ضمناً در مرزها هم (در اینجا شیر) روابط سازگاری جابجایی عامل دیگر رفتار تداخل سیال-سازه است.

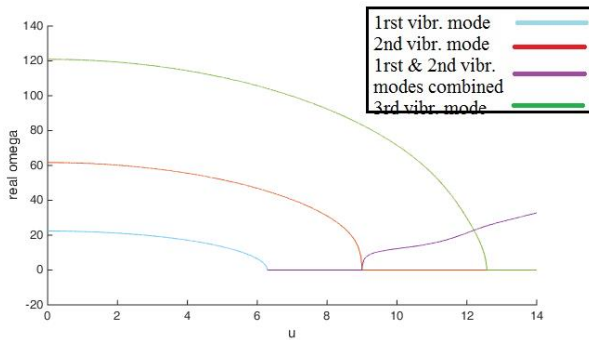
دو کمیت مهم در مقوله ضربه قوچ مقدار نیرو و فرکانس محرک است. مقدار نیروی حاصل از ضربه قوچ را می توان از سرعت اولیه سیال  $V_0$  و سرعت انتشار موج فشار  $c_f$  محاسبه کرد. رابطه زیر توسط جوکوفسکی برای محاسبه فشار ضربه قوچ ارائه شده است [۳].

$$H_{j0} = \frac{V_0 c_f}{g} \quad (11)$$

در اینجا  $g$  شتاب گرانش است. سرعت انتشار موج فشار  $c_f$  برابر است با

$$c_f = \left( \rho_f \left( \frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{D}{eE} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

در اینجا  $D$  قطر لوله،  $e$  ضخامت دیواره لوله،  $K$  مدول بالک،  $E$  مدول الاستیسیته،  $\tilde{\sigma}$  نسبت پواسون و چگالی  $\rho_f$  سیال است.



شکل ۴. نمودار فرکانس حقیقی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار در حالت  $\beta$  برابر ۰.۱ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۱۴  
**Fig. 4. Dimensionless real natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta=0.1$  and clamped-clamped pipeline**

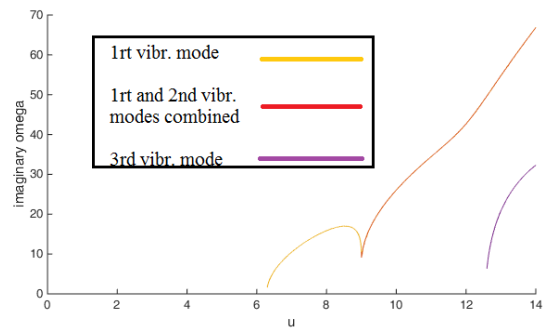
دیگر متغیرها در ادامه تعریف شده اند [۴]

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \left[ \frac{EI}{M+m} \right]^2 \frac{1}{L^2}, \quad \beta = \frac{M}{M+m} \quad (21)$$

نمودار فرکانس بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار در حالت  $\beta$  برابر ۰.۱ و برای مودهای ارتعاشی اول، دوم و سوم در شکل ۴ رسم شد. سرعت بدون بعد در بازه صفر تا ۱۴ با گام ۰.۰۰۱ مورد بررسی قرار گرفت.

همانطور که در شکل ۴ دیده می شود هرچه به سرعت افزوده می شود فرکانس های طبیعی و به تبع آنها فرکانس های طبیعی بدون بعد رسم شده در نمودار کاهش می یابند. اولین نقطه ناپایداری در سرعت بدون بعد  $\pi^2$  با صفر شدن بخش حقیقی فرکانس طبیعی (شکل ۴) و پدیدار شدن بخش موهومی برای مود اول ارتعاشی (شکل ۳) رخ می دهد. این ناپایداری از نوع کماتش است. در نقطه دوم ناپایداری یعنی سرعت بدون بعد ۸.۹۹ بخش حقیقی فرکانس طبیعی برای مود دوم ارتعاشی نیز صفر می شود. در این مرحله مود اول و دوم دارای هر دو بخش حقیقی (شکل ۴) و موهومی (شکل ۳) فرکانس طبیعی هستند که نمودار آنها بر هم منطبق است. این مرحله ناپایداری از نوع تشدید فزاینده نوسان یا فلاتر نام دارد. در نقطه سوم ناپایداری در سرعت بدون بعد  $\pi^3$  بخش حقیقی فرکانس طبیعی برای مود سوم ارتعاشی صفر می شود (شکل ۴) و بخش موهومی برای مود سوم پدیدار می شود (شکل ۳) [۴].

با اعمال شرایط مرزی تیر دو سر مفصل برای داشتن جواب غیر



شکل ۳. نمودار فرکانس موهومی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار در حالت  $\beta$  برابر ۰.۱ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۱۴  
**Fig. 3. Dimensionless imaginary natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta=0.1$  and clamped-clamped pipeline**

بروز ناپایداری در لوله شود. نقاط آغاز این ناپایداری ها همان نقاط صفر شدن فرکانس طبیعی سیستم لوله-سیال است. آنچه در اینجا مد نظر است اینست که دو عامل بزرگی نیرو یا فشار ضربه قوچ وابسته به سرعت سیال، با فرکانس محرک مشخص از یک سو و کاسته شدن فرکانس طبیعی سیستم لوله-سیال بر اثر سرعت سیال از سوی دیگر چگونه نقاط ناپایداری را تحت تاثیر قرار می دهند. این امر برای بررسی ریسک ناپایداری سیستم در سرعت های بالا در صورت بروز حادثه ای مانند توقف پمپ حائز اهمیت است.

#### ۲-۴-۱- معادلات خطی حرکت سیال در لوله

ساده ترین شکل معادله حرکت سیال در لوله به فرم زیر است [۴]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M+m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

در اینجا  $M$  جرم سیال،  $m$  جرم لوله و  $U$  سرعت سیال است.

#### ۲-۴-۲- معادلات خطی بدون بعد حرکت سیال در لوله

فرم بی بعد معادله حرکت بشکل زیر است [۴].

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta^{1/2} u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (19)$$

در اینجا  $u$  سرعت بدون بعد است.

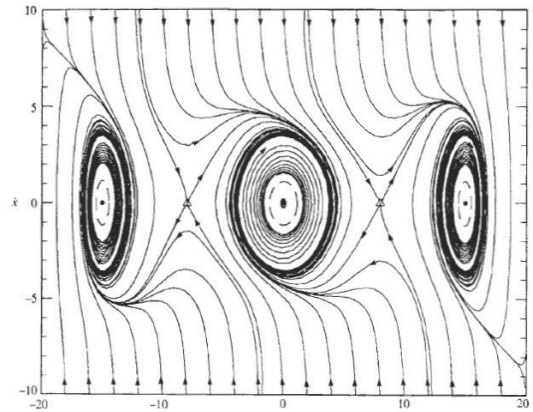
$$u = \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2} LU \quad (20)$$

مرتبه دوم است.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (22)$$

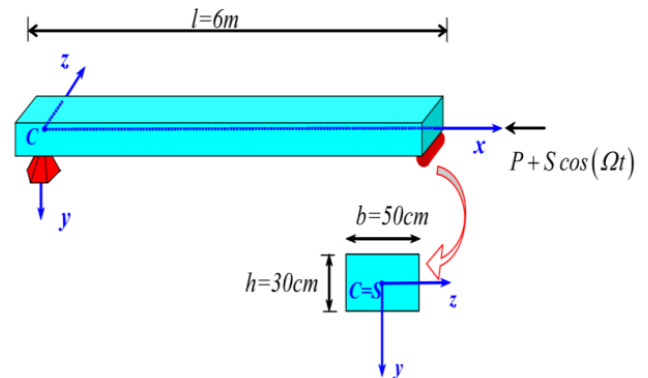
با توجه به شکل معادله حرکت یک بعدی، در صورت صفر شدن جمله سختی  $k$  و یا جمله میرایی  $c$  شاهد انواع الگوهای ناپایداری دینامیکی خواهیم بود. در محل ریشه های جمله سختی شاهد دویارگی (Bifurcation) و در اطراف ریشه های جمله میرایی شاهد دویار جذب کننده و دفع کننده دامنه نوسان در نمودار جابجایی-سرعت (فاز پلان) هستیم (شکل ۵). چراکه با عبور از ریشه های جمله میرایی وارد محدوده میرایی منفی یا همان تشدید فزاینده نوسان (Flutter) خواهیم بود. فلاتر، نوسانی خود محرک است که از نوسانات نزدیک صفر به یک نوسان ماندگار با دامنه مشخص و فرکانس ثابت رشد می یابد [۴]. این تشدید سیستم را به سمت دایره دوم جذب کننده یا به بیان دیگر سطح دوم پایداری سوق می دهد. این بیان فیزیکی انعکاسی در معادلات ریاضی نیز دارد. حل معادله دیفرانسیل حرکت اصطلاحاً یک مسئله مقادیر ویژه است. در صورتی که سیستم پایستار باشد (مانند لوله دو سر گیردار)، ناپایداری از نوع کمانش است. این امر از آنچه تاکنون گفته شد واضح است. چراکه در سیستم های پایستار اساساً میرایی وجود ندارد و ماتریس میرایی صفر است. در صورتی که سیستم ناپایستار باشد (مانند لوله طره)، بروز ناپایداری از نوع کمانش و فلاتر امکانپذیر است. نوع دیگری از سیستم که پایستار ژيروسکوپیک نامیده می شود (مانند لوله یک سر مفصل یک سر غلتک) نیز وجود دارد که در این نوع سیستم نیز ناپایداری از نوع فلاتر ممکن است. در این سیستم ها جمع جبری یا برآیند کار برخی نیروهای وابسته به سرعت سیال (مخصوصاً نیروی کریولیس (Coriolis)) در یک دوره نوسان صفر است. لذا رفتار دینامیکی یک لوله که در آن سیالی در جریان است با رفتار دینامیکی یک میله با شرایط تکیه گاهی مشابه، متفاوت است. چراکه دومی سیستمی کاملاً پایستار اما اولی پایستار ژيروسکوپیک است [۴]. سیستم های کاملاً پایستار پس از کمانش نمی توانند به خودی خود به شرایط پایداری بازگردند. در حالیکه نیروهای ژيروسکوپیک می توانند سیستم های پایستار ژيروسکوپیک را پس از کمانش به شرایط پایداری بازگردانند [۴].

در نمودار فاز پلان هرگونه خروج از شکل دایره در اطراف مبداء



شکل ۵. نمودار جابجایی-سرعت (فاز پلان) نمایش محل دویارگی (مثلثها) و دویار جذب کننده و دفع کننده دامنه نوسان (شکل از Païdoussis ۱۹۹۸)

Fig. 5. Displacement versus velocity Diagram (Phase-plane trajectories). Here three stable fixed points are shown, and two unstable ones (saddle points, denoted by triangles). Each stable fixed point is encircled by an unstable limit cycle (---), and farther out by a stable limit cycle (dark oval patch) (figure was taken from Païdoussis 1998)



شکل ۶. تیر مساله متیو (شکل از Sapountzakis & Dourakopoulos ۲۰۰۹)

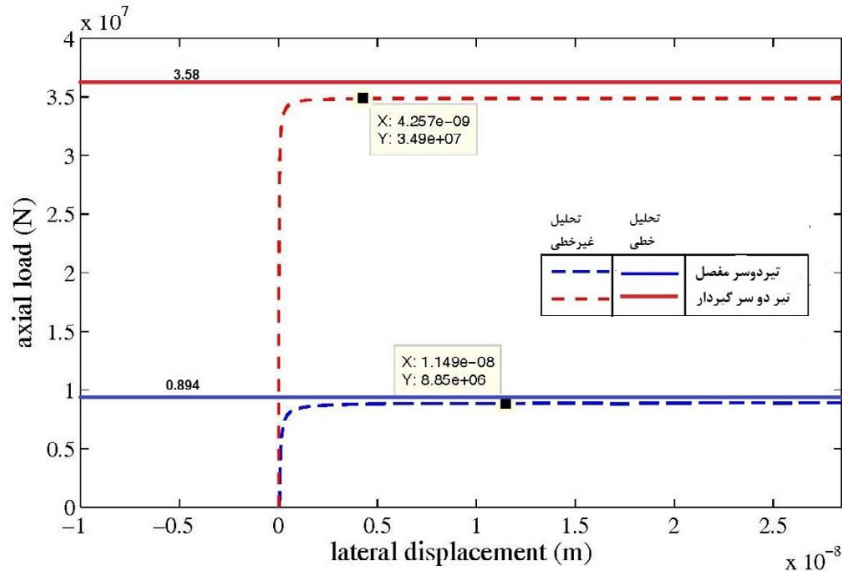
Fig. 6. Pinned-rolled beam with rectangular cross section excited by a concentrated dynamic axial load (figure was taken from Sapountzakis & Dourakopoulos 2009)

بدیهی ناپایداری، دترمینان زیر باید برابر صفر باشد.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ e^{i\alpha_1} & e^{i\alpha_2} & e^{i\alpha_3} & e^{i\alpha_4} \\ \alpha_1^2 e^{i\alpha_1} & \alpha_2^2 e^{i\alpha_2} & \alpha_3^2 e^{i\alpha_3} & \alpha_4^2 e^{i\alpha_4} \end{vmatrix} = 0$$

۲-۵- الگو های ناپایداری دینامیکی

معادله حرکت یک بعدی به صورت یک معادله دیفرانسیل جزئی



شکل ۷. نمودار نیرو-جابجایی جانبی در وسط تیر متیو با استفاده از برنامه تحلیل غیرخطی

Fig. 7. Load versus lateral displacement in the middle of the Mathieu beam to find buckling load by load increments using the prepared nonlinear beam solver.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{ij}^{11} &= EA_p \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\psi_i^a}{dx} \frac{d\psi_j^a}{dx} dx \\
 \mathbf{K}_{ij}^{12} &= \frac{EA_p}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d\psi_i^a}{dx} \frac{d\psi_j^b}{dx} dx \\
 \mathbf{K}_{ij}^{21} &= EA_p \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d\psi_i^b}{dx} \frac{d\psi_j^a}{dx} dx \\
 \mathbf{K}_{ij}^{22} &= EI_p \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d^2\psi_i^b}{dx^2} \frac{d^2\psi_j^b}{dx^2} dx \\
 &+ \frac{EA_p}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{d\psi_i^b}{dx} \frac{d\psi_j^b}{dx} dx
 \end{aligned}$$

(۲۶)

ماتریسهای بالا به وسیله روش باقیمانده های وزنی گالرکین محاسبه می شوند. در این روش برای مدل کردن نیروهای گسترده وارد بر المان در گره ها از توابع شکل استفاده می شود که اساس گسسته سازی روش عددی حاضر است. در اینجا  $\psi^a$  نشاندهنده توابع شکل لاگرانژی درجه ۱ برای نیروی محوری و  $\psi^b$  توابع شکل هرمیتی درجه ۳ برای نیروی جانبی می باشد. همانطور که می بینیم جابجایی جانبی  $w$  فقط در ماتریس سختی وارد شده تا اثر تغییر شکل های زیاد در معادلات وارد شود. این تمهید برای در نظر گرفتن رفتار غیر خطی هندسی دیواره لوله بوده و دستگاه معادلات حاصله غیر خطی خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{4 \times 4} & \mathbf{M}^{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{A}}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{A}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^1 \\ \mathbf{O}_{4 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

مختصات نشان دهنده ناپایداری دینامیکی یا اصطلاحاً حرکت کمانشی است [۱۰].

### ۳- روش عددی

معادلات گسسته سازی شده ارتعاش محوری و خمشی غیرخطی معادلات غیر خطی (۶) و (۸) به وسیله روش اجزا محدود حل می شوند. از حل آنها معادلات ماتریسی (۲۳) برای هر المان بدست می آیند.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{ij}^{11} \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_{ij}^{11} \mathbf{u}_j + \mathbf{K}_{ij}^{12} \Delta_j - \mathbf{F}_i^1 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{M}_{ij}^{22} \ddot{\Delta}_j + \mathbf{K}_{ij}^{21} \mathbf{u}_j + \mathbf{K}_{ij}^{22} \Delta_j - \mathbf{F}_i^2 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (23)$$

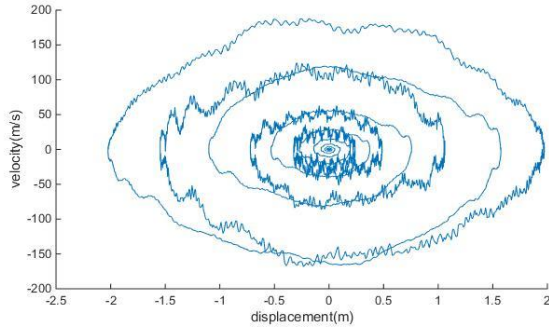
در اینجا  $i, j = 1, 2, I, J = 1, 2, 3, 4$  است. همچنین  $\Delta_j^T = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2\}$  که نشاندهنده جابجایی جانبی و چرخش در طرفین المانها که گره ها هستند می باشد. ماتریس های جرم، نیرو و سختی به ترتیب در ادامه آمده اند.

$$\mathbf{M}_{ij}^{11} = \rho_p A_p \int_{x_1}^{x_2} \psi_i^a \psi_j^a dx \quad (24)$$

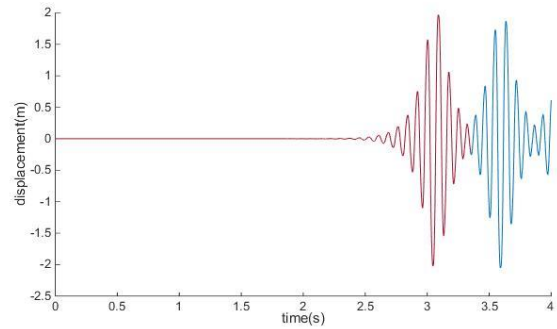
$$\mathbf{M}_{ij}^{22} = \rho_p A_p \int_{x_1}^{x_2} \psi_i^b \psi_j^b dx$$

$$\mathbf{F}_i^1 = \int_{x_1}^{x_2} f \psi_i^a dx, \quad (25)$$





شکل ۹. نمودار جابجایی جانبی- سرعت (فازپلان) در وسط تیر متیو  
**Fig. 9. Lateral displacement versus velocity Diagram (Phase-plane trajectories) in the middle of the Mathieu beam to find buckling load by load increments using the prepared nonlinear beam solver.**



شکل ۸. نمودار جابجایی جانبی-زمان در وسط تیر متیو  
**Fig. 8. Lateral displacement versus time in the middle of the Mathieu beam to find buckling load by load increments using the prepared nonlinear beam solver.**

در این مرحله جواب به فرم نمایی ۳۲ را امتحان می کنیم.

$$Y(\xi) = Ae^{i\alpha\xi} \quad (32)$$

در اینجا  $A$  عددی ثابت است. از جایگذاری رابطه ۳۲ در رابطه ۳۱ به معادله مشخصه زیر می رسیم [۴]

$$\alpha^4 - u^2\alpha^2 - 2\beta^{1/2}u\omega\alpha - \omega^2 = 0 \quad (33)$$

از آنجاکه معادله ۳۳ از درجه چهارم است جواب کامل رابطه ۱۹ به فرم کلی رابطه ۳۴ خواهد بود.

$$\eta(\xi, \tau) = \Re \left[ \sum_{j=1}^4 A_j e^{i\alpha_j \xi} e^{i\omega \tau} \right] \quad (34)$$

در اینجا چهار ثابت  $A_j$  باید از چهار شرط مرزی تعیین شوند. شرایط مرزی تیر دو سر گیردار عبارتند از:

$$\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0, \text{ at } (\xi = 0, \xi = 1) \quad (35)$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی ناپایداری، دترمینان زیر باید برابر صفر باشد.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ e^{i\alpha_1} & e^{i\alpha_2} & e^{i\alpha_3} & e^{i\alpha_4} \\ \alpha_1 e^{i\alpha_1} & \alpha_2 e^{i\alpha_2} & \alpha_3 e^{i\alpha_3} & \alpha_4 e^{i\alpha_4} \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

در اینجا  $O$  ماتریس صفر است که بعلت عدم وجود نیروی جانبی قابل ملاحظه به دستگاه معادلات ماتریسی افزوده شده است. پس از سرهم سازی ماتریس های المان، ماتریس های سیستم بدست می آیند. با اعمال شرایط تکیه گاهی معادله ماتریسی به فرم زیر خواهد بود.

$$M\ddot{D}^T + K(D^{T-1})D^T = F(t) \quad (28)$$

دستگاه معادلات فوق شامل تعداد  $r$  معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم است. در هر مرحله ماتریس سختی از مقادیر محاسبه شده در مرحله قبل بدست می آید. برای حل دستگاه معادلات فوق از الگوریتم نیومارک استفاده می کنیم.

حل حوزه فرکانس

برای حل معادله دیفرانسیل ۱۹ جواب به فرم رابطه ۲۹ را در معادله جایگذاری می کنیم.

$$\eta(\xi, \tau) = \Re [Y(\xi) e^{i\omega \tau}] \quad (29)$$

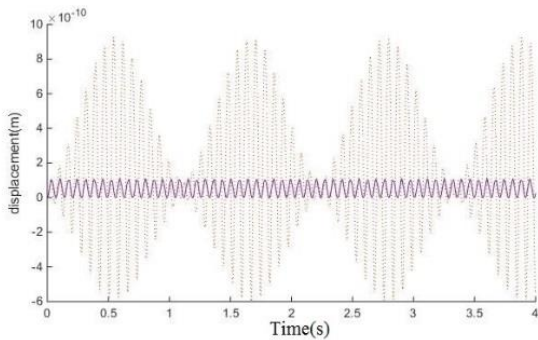
در اینجا  $\omega$  فرکانس زاویه ای بدون بعد و  $\Omega$  فرکانس طبیعی سیستم لوله-سیال است.

$$\omega = \left( \frac{M+m}{EI} \right)^{1/2} \Omega L^2 \quad (30)$$

از جایگذاری رابطه ۲۹ در رابطه ۱۹ به معادله ۳۱ می رسیم [۴]

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} + u^2 \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + 2\beta^{1/2} u \omega i \frac{dY}{d\xi} - \omega^2 Y = 0 \quad (31)$$

$\Omega=40.44$  (نمودار خط چین)  
 $\Omega=161.76$  (نمودار خط پر)



شکل ۱۱. نمودار جابجایی-زمان در وسط تیر متیو  
**Fig. 11. Lateral displacement versus time in the middle of the Mathieu beam to find buckling load by load increments using the prepared nonlinear beam solver.**

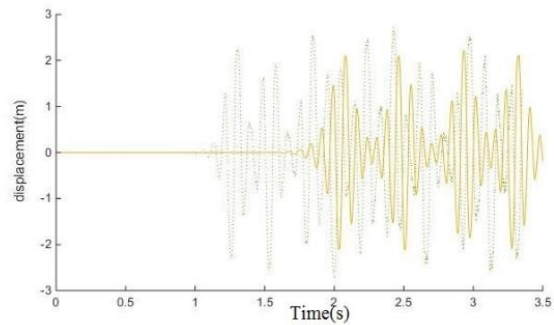
مقایسه با حالت خطی برای ما ممکن می کند.

#### ۲-۴-مساله متیو (Mathew)

انتظار می رود در صورتیکه بار وارده بر تیر به اندازه کافی بزرگ باشد بتواند سیستم را وارد مرحله دوم تشدید نوسان کرده و در آن مرحله حفظ کند. به بیان دیگر در صورتی که بار وارده کوچک باشد ارتعاش سیستم در دایره محدود کننده اول تا ابد ادامه یافته و یاری خروج از آن نیست. اما اگر بار وارده به اندازه کافی بزرگ باشد سیستم پس از مدتی ارتعاش در دایره محدود کننده اول، از آن خارج می شود و در دایره محدود کننده دوم گرفتار می شود. در حد فاصل این دو دایره گویی نیرویی سیستم را به بیرون هل می دهد. این پدیده همان میرایی منفی یا تشدید فزاینده نوسان (flutter) نام دارد که یکی از الگوهای ناپایداری دینامیکی است.

برای صحت سنجی برنامه کامپیوتری کافیسیت جابجایی جانبی وسط تیر متیو تحت بارگذاری استاتیکی پله ای مناسب در برنامه محاسبه گر غیرخطی کنترل شود. انتظار داریم در نزدیکی بار بحرانی کماتش خطی دترمینان ماتریس سختی بعلت افزایش زیاد جابجایی جانبی صفر شود. برای این منظور از بار صفر نیوتن آغاز می شود و هر پله ۱۰۰۰ نیوتن بر آن افزوده می شود. از طرفی از رابطه (۱۵) بار بحرانی کماتش خطی برای تکیه گاه مفصلی برابر  $8.94 * 10^6$  نیوتن و برای تکیه گاه گیردار  $3.58 * 10^7$  نیوتن بدست می آید. نتایج بدست آمده در شکل ۷ نشانگر صحت محاسبات برنامه می باشد.

۹۹ درصد بار کماتش (خط چین)  
 ۶۵ درصد بار کماتش (خط پر)



شکل ۱۰. نمودار جابجایی-زمان در وسط تیر متیو  
**Fig. 10. Lateral displacement versus time in the middle of the Mathieu beam to find buckling load by load increments using the prepared nonlinear beam solver.**

جدول ۱. مشخصات تیر مساله متیو

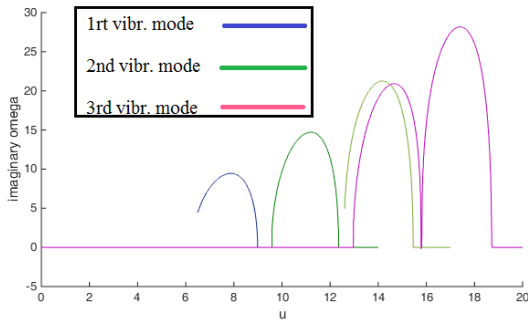
**Table 1. Specifications of Mathieu problem solved herein.**

کمیت	مقدار
Length (m)	6
Section height (m)	$h = 0.3$
Section width (m)	$b = 0.5$
Pipe density (kg/m <sup>3</sup> )	2500
Poisson ratio	0.2
Angular frequency (rad/s)	$\Omega = 80.88$
End boundary supports	pinned-rolled
Number of sections in simulation	40
Young's modulus (Pa)	29 GPa

#### ۴- صحت سنجی مدل عددی

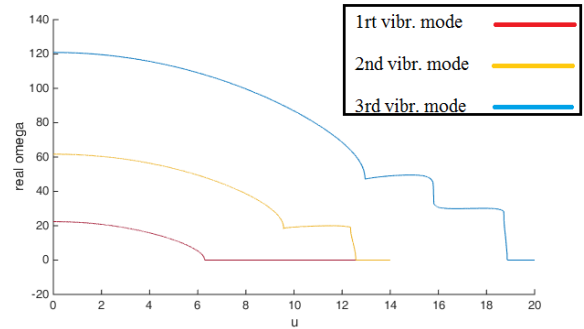
##### ۱-۴-مقدمه

جهت اطمینان از کارکرد صحیح مدل عددی غیر خطی و الگوریتمهای حل، مقایسه‌های بین نتایج مدل خطی و نتایج مدل غیر خطی انجام شده است. در این مرحله با استفاده از یک مثال نمودارهای جابجایی-زمان و جابجایی-سرعت رسم می شود تا بتوان الگوهای ناپایداری را تشخیص داد. مساله متیو بستر مناسبی برای این منظور است. این مسئله صحت سنجی کد برنامه غیر خطی را در



شکل ۱۳. نمودار بخش موهومی فرکانس طبیعی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار در حالت برابر ۰٫۷۵ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۲۰

Fig. 13. Dimensionless imaginary natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta = 0.75$  clamped-clamped pipeline



شکل ۱۲. نمودار بخش حقیقی فرکانس طبیعی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار در حالت برابر ۰٫۷۵ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۲۰

Fig. 12. Dimensionless real natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta = 0.75$  clamped-clamped pipeline.

جدول ۲. داده های مساله هیدرولیکی الف دانشگاه دلف

Table 2. The properties of the pipeline according to the case study in [12].

Length (m)	20
Diameter (mm)	797
Thickness (mm)	8
Pipe density (kg/m <sup>3</sup> )	7900
Poisson ratio	0.3
Darcy-Weisbach coefficient	0
*Reservoir head (m)	0
*Steady state velocity (m/s)	1
*Young's modulus (Pa)	2.1E11
*Wave speed (m/s)	1049.24
*Valve closure duration (s)	0

مشاهده نمی شود (شکل ۱۰). در کلیه طیف باری که توانایی وارد کردن سیستم به فاز دوم ارتعاش را دارند، دامنه ارتعاش مشابه و نزدیک ۲ متر است که در شکل ۸ مشاهده می شود.

اثر بسامد تحریک بر ناپایداری مورد بررسی قرار گرفت. به نحوی که در نصف بسامد تحریک مساله یعنی  $\Omega = 40/44$  شاهد ناپایداری دینامیکی تشدید فزاینده نوسان نبودیم. همچنین در دو برابر بسامد تحریک مساله یعنی  $\Omega = 161/76$  نیز شاهد ناپایداری دینامیکی تشدید فزاینده نوسان نبودیم. این امر در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

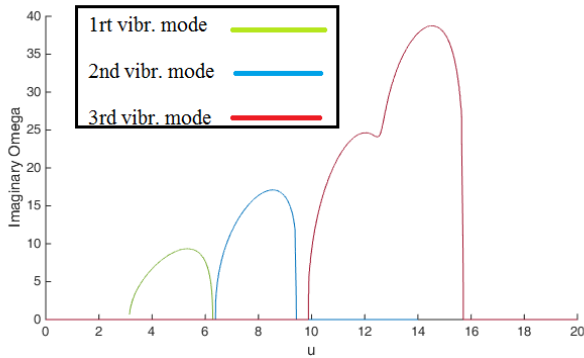
## ۵- حل مثالها و بحث

### ۵-۱- حل دینامیکی مساله متیو در حوزه زمان

نمودارهای شکل ۸ و شکل ۹ برای نیروی  $N = 0.5P_{cr} \cos(2\Omega t)$  رسم شده اند. دایره محدود کننده اول همچون نقطه ای در وسط شکل ۹ قرار دارد. پس از آن یک فضای خالی است که سیستم فقط یکبار از آن عبور می کند و محدوده دفع کننده نام دارد. پس از آن نوسان سیستم در دایره محدود کننده دوم ادامه می یابد. در شکل ۸ نیز پس از اولین اوج هنگامی که نوسان میرا می شود مجدداً توسط محدوده دفع کننده دفع می شود و سیکل دوم اوجگیری را آغاز می کند. نمودار شکل ۹ برای زمان ۳.۳۵ ثانیه رسم شده تا فقط یک سیکل اوجگیری دیده شود و نمودار بی جهت شلوغ نباشد. هرچه زمان جلوتر می رود نوسان نمودار بیشتر شده است. مدل برای  $N = 0.5P_{cr} \cos(2\Omega t)$  نیز بررسی شد که نوسان در دایره محدود کننده اول در جریان بود. چنین رفتاری در کتاب پایدوسیس نیز از روشهای تحلیلی پیش بینی شده است.

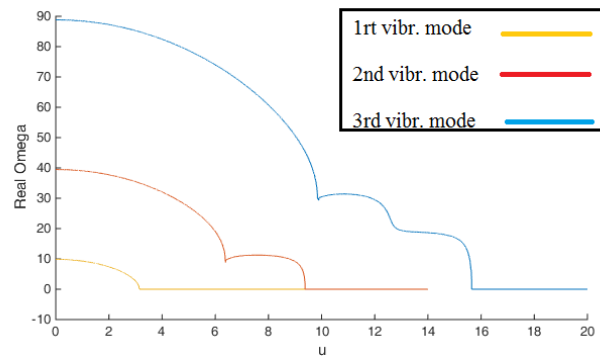
در حالیکه با ۴۰ درصد بار بحرانی کماتش سیستم پس از کمتر از ۵ ثانیه دچار ناپایداری دینامیکی شد اما در ۳۰ درصد بار بحرانی کماتش حتی پس از ۲۰ ثانیه هم پایدار باقی ماند.

مشاهده شد که تا حدود ۶۵ درصد بار بحرانی کماتش الگوهای ناپایداری مشابه، و تفاوت در زمان رسیدن سریعتر به فاز دوم بود. در حدود ۱۰۰ درصد بار بحرانی سیستم پس از مدت کوتاهی وارد فاز دوم می شود و مستمراً ارتعاش دارد بنحوی که الگوی خاصی



شکل ۱۵. مودار بخش موهومی فرکانس طبیعی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل در حالت برابر ۰٫۷۵ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۲۰

Fig. 15. Dimensionless imaginary natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta = 0.75$  pinned-pinned pipeline



شکل ۱۴. نمودار بخش حقیقی فرکانس طبیعی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل در حالت برابر ۰٫۷۵ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۲۰

Fig. 14. Dimensionless real natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta = 0.75$  pinned-pinned pipeline.

جدول ۳. نتایج تحلیل در حوزه فرکانس برای مساله هیدرولیکی الف دانشگاه دلف

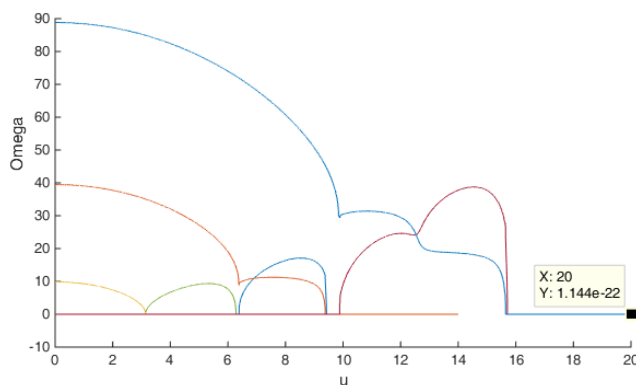
Table 3. Frequency Domain Analysis results of the pipeline according to the case study in [12].

	$V_0 = 1\text{m/s}$ $E = 210\text{GPa}$	$V_0 = 5\text{m/s}$ $E = 21\text{GPa}$	$V_0 = 10\text{m/s}$ $E = 21\text{GPa}$	$V_0 = 100\text{m/s}$ $E = 210\text{GPa}$
$\Omega_{WH}$ (rad/s)	82.4	35.9	35.9	82.4
$\Omega_{Op}$ (rad/s)	404.9	128	128	404.9
$H_{cr}$ (m)	1702	170.2	170.2	1702
$V_{cr}$ (m/s)	15.9	3.65	3.65	15.9
$c_f$ (m/s)	1049.5	456.8	456.8	1049.5
$c_t$ (m/s)	5155.8	1630.4	1630.4	5155.8
$H_{Jo}$ (m)	107	232.9	465.8	10702
$u$	0.024	0.384	0.769	2.43
$\omega_1$	9.869	9.788	9.528	5.698
$\Omega_1$ (rad/s)	17.62	5.53	5.38	10.17
$\omega_2$	39.48	39.42	39.22	36.87
$\Omega_2$ (rad/s)	70.49	22.26	22.14	65.83
$\omega_3$	88.83	88.77	88.59	86.5
$\Omega_3$ (rad/s)	158.6	50.12	50.02	154.4

برای محاسبه فرکانس های طبیعی سیستم لوله-سیال در سرعت های مختلف کافیت با تبدیل سرعت به سرعت بدون بعد به کمک رابطه ۲۰ فرکانس های بدون بعد معادل آنرا در نمودار بیابیم. با تبدیل این فرکانس های بدون بعد به فرکانس طبیعی دارای بعد رادیان بر ثانیه به کمک رابطه ۳۰ می توانیم آنرا با فرکانس تحریک ضربه قوچ از رابطه ۱۳ مقایسه کنیم. با توجه به اینکه در کدام منطقه

۲-۵-مساله هیدرولیکی الف دانشگاه دلف

در این بخش به بررسی فرکانس های طبیعی و فرکانس تحریک ضربه قوچ در یک مساله استاندارد تحت عنوان مساله هیدرولیکی الف دانشگاه دلف می پردازیم. با توجه به وزن سیال و لوله مشخص می شود که نمودار های فرکانس طبیعی بدون بعد باید برای حالت  $\beta = 0.75$  رسم شوند.



شکل ۱۶. ترکیب دو نمودار بخش حقیقی و موهومی فرکانس طبیعی بدون بعد برای شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل در حالت برابر ۰٫۷۵ برای سرعت بدون بعد ۰ تا ۲۰

Fig. 16. Combination of both real and imaginary dimensionless natural frequency versus dimensionless fluid velocity for  $\beta = 0.75$  pinned-pinned pipeline

جدول ۴. سرعت‌های اولیه مورد بررسی و سرعت بدون بعد معادل آنها  $u$  در بخش اول حل مسئله الف دانشگاه دلف

Table 4. The fluid velocity arrangement studied for the pipeline according to the case study in [12] (part one)

$V0$ (m/s)	40	50	85
$Hcr$ (m)	170.24	170.24	170.24
$Hjo$ (m)	4281.05	5351.32	9097.24
$u$	3.08	3.84	6.54

جانبی لوله در مود اول است. در مود های بالاتر این کاهش به نسبت کمتر رخ می دهد. در حالیکه فرکانس طبیعی مود اول حدود ۴۰ درصد کاهش یافته (از ۱۷٫۶۲ به ۱۰٫۱۷) این کاهش در مود دوم حدود ۷ درصد و در مود سوم حدود ۲ درصد است. همچنین تاثیر سرعت سیال بر فرکانس های طبیعی ارتعاش محوری لوله ناچیز است. از آنجاییکه فرکانس محرک ضربه قوچ بصورت محوری بر لوله وارد می شود رخداد پدیده تشدید ناشی از کاهش فرکانس طبیعی ارتعاش محوری لوله در اثر سرعت جریان سیال درون لوله بعید به نظر می رسد. چراکه همانطور که در جدول آمده سرعت انتشار موج تنش بسیار بیشتر از سرعت انتشار موج فشار ضربه قوچ است. از مجموع مطالب گفته شده دانسته می شود که تمرکز بر مقدار نیروی بحرانی ضربه قوچ اهمیت بیشتری نسبت به فرکانس این نیرو دارد. به بیان دیگر تحلیل در حوزه زمان برای ارتعاش هارمونیک با فرکانس تحریک ضربه قوچ و فرکانس طبیعی لوله پاسخ های قابل قبولی خواهد داشت. همچنین موج فشار ضربه قوچ یک موج مستطیلی است که آنرا به کمک یک موج سینوسی با دامنه نیروی ناشی از فشار جوکوفسکی از رابطه (۱۱) در سطح مقطع لوله و فرکانس ضربه قوچ از رابطه (۱۳)

از نمودار قرار داشته باشیم تفسیر ما از امکان و نوع ناپایداری متفاوت است. برای مثال نزدیک بودن فرکانس تحریک ضربه قوچ به فرکانس طبیعی سیستم می تواند سبب بروز پدیده تشدید شود. اما کوچک بودن فرکانس تحریک نسبت به فرکانس طبیعی سیستم شانس بروز ناپایداری را کاهش می دهد.

نکته قابل توجه اینست که نقاط ناپایداری مستقل از  $\beta$  هستند. این نقاط برای شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار ریشه های معادله مشخصه زیر هستند [۴].

$$2(1 - \cos u) - u \sin u = 0 \quad (37)$$

برای حالت دو سر مفصل معادله مشخصه فرم ساده تری دارد.

$$\sin u = 0 \quad (38)$$

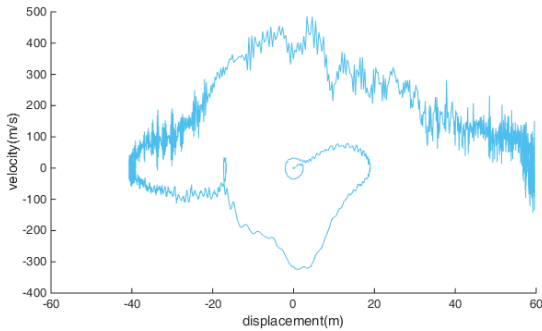
ریشه های معادله (۳۸) برابر  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  می باشند. ترکیب دو

نمودار در شکل ۱۶ آمده است.

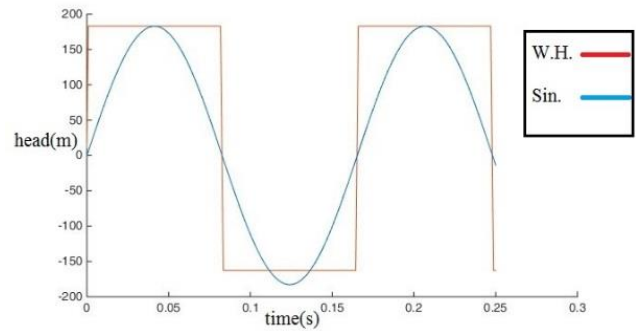
برخی نتایج عددی در جدول ۳ آورده شده است.

با توجه به اعداد جدول مشاهده می شود که بیشترین تاثیر

افزایش سرعت سیال درون لوله بر کاهش فرکانس طبیعی ارتعاش



شکل ۱۹. نمودار جابجایی-سرعت (فاز پلان) برای سرعت ۸ متر بر ثانیه  
 Fig. 19. Displacement versus velocity Diagram (Phase-plane trajectories) for  $V=8\text{m/s}$

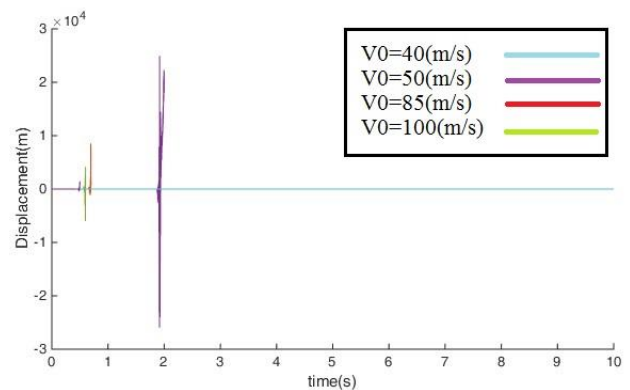


شکل ۱۷. مدل کردن موج مستطیلی ضربه قوچ با موج سینوسی  
 Fig. 17. Water hammer rectangular wave modeled as sinusoidal wave

جدول ۵. مشخصات مورد استفاده برای سیستم در بخش اول حل مسئله الف دانشگاه دلف

Table 5. The properties of the pipeline according to the case study in [12] (part one)

$E$ (pa)	2.1E+10
$\Omega_{WH}$ (rad/s)	35.9
$\Omega_{op}$ (rad/s)	128
$c_f$ (m/s)	1049.5
$c_t$ (m/s)	5155.8
$mf$ (kg/m)	479
$Af$ (m <sup>2</sup> )	0.479
$I$ (m <sup>4</sup> )	0.00154321
$L$ (m)	20



شکل ۱۸. جابجایی جانبی در وسط لوله برای بخش اول حل مسئله الف دانشگاه دلف

Fig. 18. Lateral displacement versus time in the middle of pipeline according to the case study in [12].

۲۰۰ متر بدون تکیه گاه جانبی و فقط دارای تکیه گاه ثقلی مورد بررسی قرار گرفت.

نمودار جابجایی جانبی در وسط لوله برای سرعت های جدول ۷ رسم شد.

مشاهده شد که سیستم برای سرعت های بالا کمانش می کند (شکل ۲۰). لذا معیار نیروی کمانش اولر بر سیستم حاکم است. آنچه تفاوت این دو مثال را بارز می کند زمان اندک رسیدن به ناپایداری در حالت عبور سیستم از نقاط ناپایداری حوزه فرکانس است.

همچنین با رسم نمودار فاز-پلان (شکل ۱۹) برای سرعت ۸ متر بر ثانیه وجود دو دایره جذب کننده در دو سطح پایداری و منطقه دفع کننده بین آنها مشابه شکل ۵ قابل تشخیص است.

فاز پلان هر دو سرعت برای مقایسه در شکل ۲۱ آمده است.

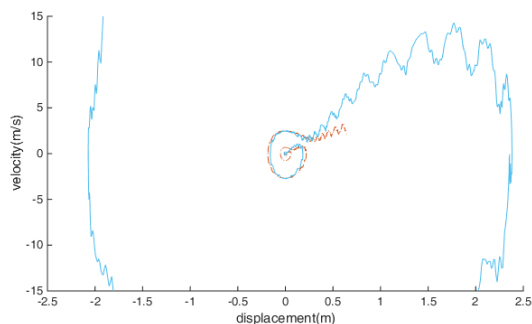
در محل شیر مدل می کنیم.

جابجایی جانبی در وسط لوله از تحلیل در حوزه زمان برای سرعت های جدول ۴ رسم شد (شکل ۱۸).

دیگر مشخصات سیستم عبارتند از:

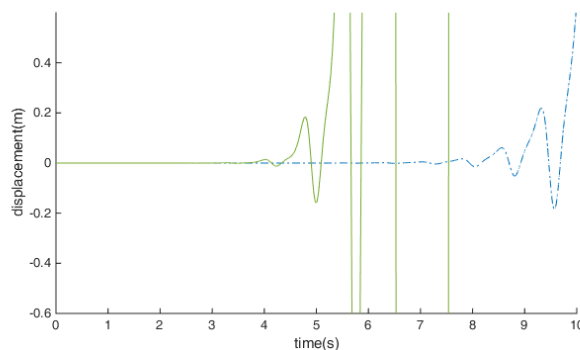
در شکل ۱۸ مشاهده می شود که در سرعت های بیش از سرعت بدون بعد  $u = \pi = 3.14$  ناپایداری به سرعت رخ می دهد. در حالیکه در سرعت ۴۰ که معادل سرعت بدون بعد ۳،۰۸ است حتی پس از ۱۰ ثانیه ناپایداری دیده نشد. این در حالی است که نیروی ضربه قوچ از رابطه جوکوفسکی بسیار بیشتر از نیروی کمانش اولر است. لذا معیار تحلیل در حوزه فرکانس بر مدل حاکم است و معیار نیروی کمانش اولر رفتار مدل را پیش بینی نمی کند.

$\Omega_{op}$  (rad/s) برای تحقیق این موضوع مدل برای طول لوله



شکل ۲۱. نمودار جابجایی-سرعت (فاز پلان) نمایش محل دواير جذب کننده و دفع کننده دامنه نوسان برای سرعت ۸ متر بر ثانیه (خط پر) و سرعت ۵ متر بر ثانیه (خط چین)

Fig. 21. Displacement versus velocity Diagram (Phase-plane trajectories) for  $V=5\text{m/s}$  (dash-dotted line) and for  $V=8\text{m/s}$  (full line)



شکل ۲۰. جابجایی جانبی در وسط لوله برای سرعت ۵ متر بر ثانیه (خط چین) و سرعت ۸ متر بر ثانیه (خط پر)

Fig. 20. Lateral displacement versus time in the middle of the pipeline for  $V=5\text{m/s}$  (dash-dotted line) and for  $V=8\text{m/s}$  (full line)

تشدید فزاینده نوسان خواهد شد. دامنه این جابجایی جانبی تا یک سوم طول لوله می رسد. همچنین در تحلیل هندسه غیرخطی، نمودار پاسخ دینامیکی پس از عبور از نقطه ناپایداری از یک الگوی تکرار شونده پیروی می کند. این الگوی تکرار شونده به علت صرف نظر کردن از اصطکاک غیر ماندگار است. در این حالت استهلاک طبیعی ارتعاش وجود ندارد و سیستم پایدار است.

نتیجه بالا در صورتی صادق است که فرکانس محرک ضربه قوچ نزدیک به فرکانس طبیعی لوله باشد. در مثال دوم امکان وقوع این پدیده را در یک حالت نزدیک به واقعیت بررسی می کنیم. با کاهش و افزایش دو برابری فرکانس محرک هیچگونه ناپایداری مشاهده نشد. از تحلیل مسئله الف دانشگاه دلف در حوزه فرکانس مشاهده می شود که در پدیده ضربه قوچ با عنایت به کوچک بودن فرکانس تحریک در برابر فرکانس طبیعی سیستم بروز پدیده تشدید جایگاهی ندارد. کاهش فرکانس طبیعی خط لوله به علت سرعت سیال در سرعت های متعارف چشمگیر نیست. به ویژه که این کاهش در فرکانس ارتعاش جانبی به مراتب موثرتر از ارتعاش محوری است. این در حالیست که نیروی ضربه قوچ به صورت محوری بر خط لوله اثر می کند.

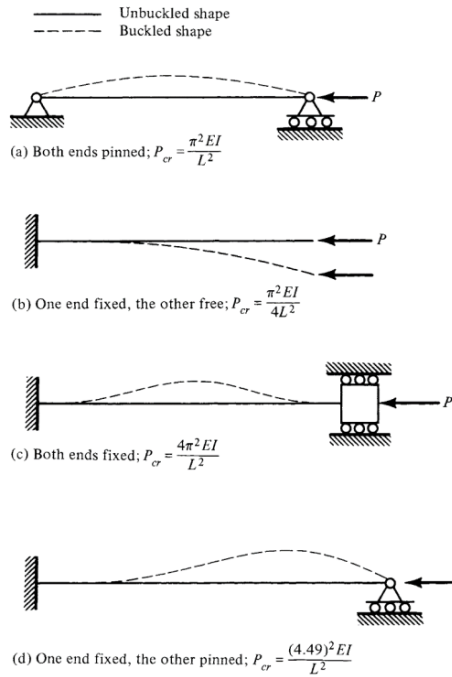
لذا در سرعت های متعارف باید معیار نیروی بحرانی اولر مد نظر باشد. در سرعت های متعارف در صورتیکه فشار ضربه قوچ از فشار بحرانی کمانش بیشتر باشد، خط لوله دچار ناپایداری می شود. این امر به وسیله نمودار های پاسخ دینامیکی جابجایی جانبی در وسط لوله نشان داده شد. گیرداری جانبی تکیه گاه های خط لوله صفر فرض

## ۶- نتیجه گیری

یک مدل غیر خطی جدید برای تحلیل ارتعاش یک خط لوله حاوی جریان سیال با تکیه گاه ثابت در طرفین ارائه شد. با استفاده از تئوری تیر اولر-برنولی و کرنش عمومی لاگرانژ معادلات غیر خطی هندسی حرکت برای جابجایی های محوری و خمشی به دست آمد به نحوی که در این معادلات جابجایی های محوری و خمشی بر هم اثر دارند (کوپله هستند). بررسی پایداری دینامیکی یک خط لوله با در نظر گرفتن جابجایی های جانبی زیاد از طریق معادلات دیفرانسیل غیر خطی حاکم بر ارتعاش و حل عددی بوسیله روش اجزاء محدود غیرخطی انجام شد. الگوهای ناپایداری دینامیکی که پیشتر از طریق تحلیلی پیش بینی شده بود با برنامه کامپیوتری مورد تحقیق قرار گرفت. نتایج حاصل از دو روش همخوانی خوبی داشتند.

با توجه به کوچک بودن فرکانس تحریک ضربه قوچ نسبت به فرکانس طبیعی خط لوله از یک سو و کاهش اندک فرکانس طبیعی سیستم لوله-سیال در سرعت های متعارف، برای مدل کردن نیروی ضربه قوچ از یک نیروی سینوسی با دامنه فشار جوکوفسکی و فرکانس ضربه قوچ در محل شیر استفاده شد. این روش مدلسازی نتایج قابل قبول و نزدیک به واقعیت ارائه می کند. زمان بسته شدن شیر صفر در نظر گرفته شد.

از تحلیل نمودار های حاصله در مثال تیر متیو بنظر می رسد که قراگرفتن یک خط لوله دو سر مفصل در معرض بار تناوبی بیش از یک سوم بار بحرانی کمانش بسیار خطرناک و منجر به ناپایداری دینامیکی



شکل ۲۲. شرایط تکیه گاهی (شکل از، Simitses, G.J., Hodges, D.H., ۲۰۰۶)  
**Fig. 22. Ideal columns with various boundary conditions; the figure was taken from Simitses, G.J., Hodges, D.H., 2006**

همزمان و به یک میزان می باشند. به نحوی که نمودار این دو مود بر هم منطبق است. از اینجا تفاوت میان میرایی منفی (فلاتر) و تشدید (رزنانس) آشکار می شود. چراکه تشدید از همسانی فرکانس محرک با فرکانس طبیعی سیستم رخ می دهد. در حالیکه فلاتر در محدوده ای خاص که فرکانس طبیعی سیستم دارای هر دو بخش حقیقی و موهومی می باشد رخ می دهد.

#### ۷- ضمایم

پیوست الف : ضریب  $k$  مربوط به شرایط تکیه گاهی

مقدار ضریب تاثیر تکیه گاهی  $k$  در واقع مقدار طولی از عضو می باشد که بین دو نقطه عطف قرار گرفته است. برای مثال در حالت دو سر مفصل کل طول عضو بصورت خط چین در شکل نشان داده شده و این مقدار یک است. اما در حالت دو سر گیردار نصف طول عضو بصورت خط چین نمایش داده شده و مقدار  $k = 1/2$  است. در حالت یک سر گیردار و یک سر آزاد با ادامه دادن خط چین بصورت فرضی نمودار در دو برابر طول عضو بسته می شود و مقدار  $k = 2$  است.

جدول ۶. مشخصات مورد استفاده برای سیستم در بخش دوم حل مسئله  
 الف دانشگاه دلف

**Table 6. The properties of the pipeline according to the case study in [12] (part two)**

$E$ (pa)	2.1E+11
$\Omega_{WH}$ (rad/s)	8.24
$\Omega_{0p}$ (rad/s)	40.49
$c_f$ (m/s)	1049.24
$c_t$ (m/s)	5155.8
$mf$ (kg/m)	479
$Af$ (m <sup>2</sup> )	0.479
$I$ (m <sup>4</sup> )	0.00154321
$L$ (m)	200

شد که در اغلب خطوط لوله در طولهای زیاد نزدیک به صفر است. لذا سختی جانبی خط لوله کم و لاغری آن بالاست. نوع مصالح لوله فولاد فرض شد. گرچه برخی نتایج با مصالح ده برابر ضعیفتر از فولاد نیز ارائه شده است. این امر بعلت استفاده روز افزون لوله های پلیمری که سختی خمشی کمتری نسبت به فولاد دارند، مناسب است.

در صورتیکه سیستم از هر دو معیار فشار بحرانی و نقطه ناپایداری فرکانس عبور کرده باشد زمان رسیدن به ناپایداری بسیار کوتاه خواهد بود. گرچه این حالت در سرعت های بسیار بالا رخ می دهد و در شرایط متعارف جایگاهی ندارد.

از تحلیل حوزه فرکانس مشاهده شد که عبور سیستم از نقطه اول ناپایداری سبب کمانش در لوله می شود. در این منطقه از نمودار فرکانس بدون بعد ارتعاش خمشی برای مود اول در بخش حقیقی آن صفر شده و بخش موهومی آن پدیدار گشته است. در حالیکه عبور سیستم از نقطه دوم ناپایداری سبب بروز میرایی منفی یا همان فلاتر می شود. در این منطقه از نمودار مود اول و دوم ارتعاشی دارای فرکانس بدون بعد ارتعاش خمشی از نوع حقیقی و موهومی به صورت



اندیس زمان است.)

$$\hat{S}D_{n+1} = \hat{F}_{n+1} \quad (40)$$

$$\hat{S} = \hat{S} = S + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M \quad (41)$$

$$\hat{F}_{n+1} = F_{n+1} + M(c_0 D_n + c_2 \dot{D}_n + c_3 \ddot{D}_n) \quad (42)$$

با استفاده از معادله شبه استاتیکی ارائه شده در (۴۰)، بردار مجهولات در هر گام زمانی محاسبه می شود. در این صورت برای به دست آوردن شتاب ها و سرعتها از روابط (۴۳) و (۴۴) به شکل زیر می توان استفاده کرد.

$$\ddot{D}_{n+1} = \ddot{D}_n + \Delta \ddot{D}_n = c_0 \Delta D_n - c_2 \dot{D}_n - c_3 \ddot{D}_n \quad (43)$$

$$\dot{D}_{n+1} = \dot{D}_n + \Delta \dot{D}_n = \dot{D}_n + c_6 \ddot{D}_n + c_7 \dot{D}_{n+1} \quad (44)$$

بدیهی است برای شروع روش، باید مقادیر  $\dot{D}_1, \ddot{D}_1, D_1$  معلوم باشند، که اینها، از تحلیل استاتیکی سازه به دست می آیند.

در روابط فوق  $n+1$  نشاندهنده گام زمانی مجهول و  $n$  نشاندهنده گام زمانی فعلی می باشد بنابراین مقادیر  $\ddot{D}_n, \dot{D}_n, D_n$  معلوم می باشند. در رابطه شبه استاتیکی حاصله ماتریس  $\hat{S}$  تابع جابجایی ها که مجهولات مساله هستند می باشد. ساده ترین روش برای حل این رابطه استفاده از روش تکرار مستقیم می باشد در این روش معادله مذکور به صورت

$$\hat{S}(D_n^{r-1}) \Delta D_n^r = \Delta \hat{F}_n^r \quad (45)$$

نوشته می شود که در آن اندیس  $r$  نشان دهنده تعداد تکرار می باشد. پس از به دست آوردن جواب دستگاه فوق  $(\Delta D_n^r)$  باید جابجایی های محوری و خمشی در دستگاه محلی برای هر المان به دست آورده شوند و با استفاده از آنها ماتریس های سختی هر المان که تابع  $\partial w / \partial x$  (در حالت ماتریس نامتقارن برای هر المان) و یا تابع  $\partial w / \partial x, \partial w / \partial x$  (در حالت ماتریس سختی متقارن شده برای هر المان) می باشند محاسبه شوند سپس عملیات سرهمسازی و اعمال شرایط مرزی و حل معادله فوق دوباره تکرار می شود این فرآیند تا زمان همگرایی جواب ها ادامه می یابد. پس از به دست آوردن جواب همگرا شده، بردارهای  $\Delta \dot{D}_n, \Delta \ddot{D}_n$  که از آنها برای محاسبه  $\dot{D}_{n+1}, \ddot{D}_{n+1}$  استفاده می شود به صورت زیر محاسبه می شود.

جدول ۷. سرعتهای اولیه مورد بررسی و سرعت بدون بعد معادل آنها  $u$  در بخش دوم حل مسئله الف دانشگاه دلف

Table 7. The fluid velocity arrangement studied for the pipeline according to the case study in [12] (part two)

$V0$ (m/s)	8	5
$Hcr(m)$	17.02	17.02
$Hjo(m)$	856.21	535.13
$u$	1.95	1.22

پیوست ب: الگوریتم نیومارک  $\beta$

به طور کلی دو روش حل برای تحلیل مسایل دینامیکی وجود دارد: ۱- روش انتگرال گیری مستقیم (تحلیل حوزه زمان) ۲- روش آنالیز مودال (تحلیل حوزه فرکانس). یکی از روش های انتگرال گیری مستقیم روش نیومارک  $\beta$  است. الگوریتم روش نیومارک  $\beta$  به صورت زیر می باشد. ابتدا ثابت های  $c_0$  تا  $c_7$  به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2}, & c_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \\ c_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t}, & c_3 &= \frac{1}{2\beta \Delta t} - 1 \\ c_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1, & c_5 &= 0.5\Delta t \left( \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right), \\ c_6 &= \Delta t (1 - \gamma), & c_7 &= \Delta t \gamma \end{aligned} \quad (39)$$

پارامتر  $\gamma$  ایجاد میرایی عددی یا میرایی روشی در محدوده گام زمانی  $\Delta t$  می کند. اگر  $\gamma$  کمتر از  $1/2$  در نظر گرفته شود، میرایی مجازی منفی حاصل می گردد. اگر  $\gamma$  بزرگتر از  $1/2$  باشد، میرایی مجازی مثبت خواهد بود. برای جلوگیری از ایجاد این نوع میرایی، مقدار  $\gamma$  مساوی  $1/2$  در نظر گرفته می شود. پارامتر  $\beta$  مقدار شتاب را در محدوده گام زمانی  $\Delta t$  کنترل می کند. به این دلیل این روش به روش شتاب کلی نیومارک (یا نیومارک  $\beta$ ) معروف است. به عنوان مثال اگر  $\beta$  صفر در نظر گرفته شود، به عنوان روش شتاب ثابت شناخته می شود. چنانچه  $\beta = 1/4$  در نظر گرفته شود، همان روش شتاب متوسط می باشد. چنانچه  $\beta = 1/6$  در نظر گرفته شود، همان روش شتاب خطی می باشد.

معادله شبه استاتیکی در این حالت به صورت زیر می باشد. ( $n$ )

در رابطه فوق بردار  $\Delta \mathbf{d}_j^e$  تغییر جابجایی نظیر گام زمانی  $n + 1$  باشد در روش فوق جواب نهایی روش نیوتن-رافسون در تکرار  $r$  به صورت زیر می باشد.

$$\Delta \mathbf{D}_n^r = \Delta \mathbf{D}_n^{(r-1)} + \delta \Delta \mathbf{D}_n \quad (51)$$

قابل توجه است که گرچه ماتریس سختی المان  $\mathbf{K}^e$  غیرمتقارن می باشد می توان نشان داد که ماتریس سختی مماسی همواره متقارن می باشد همچنین می توان نشان داد که ماتریس سختی مماسی برای هر دو فرم معادلات با ماتریس سختی نامتقارن و متقارن شده یکسان خواهد بود [۶].

برای محاسبه درایه های ماتریس سختی مماسی  $\mathbf{T}^e$  و بردار  $\mathbf{R}^e$  برای هر المان، از توجه به روابط ۴۹ و ۵۰ می توان نوشت: (دقت کنید در اینجا  $\mathbf{d}^e = \{\xi_1 \quad \xi_2 \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4\}^T$  است.)

$$\mathbf{T}_{ij}^{\alpha\beta} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i^\alpha}{\partial \Delta \mathbf{d}_j^\beta} \right)^{(r-1)} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i^\alpha}{\partial \mathbf{d}_j^\beta} \right)^{(r-1)} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^\alpha &= \hat{\mathbf{S}} \Delta \mathbf{d} - \Delta \hat{\mathbf{F}} \\ &= \left( \mathbf{S}^e + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \right) \Delta \mathbf{d} - \Delta \hat{\mathbf{F}} \\ &= (\mathbf{S}^e + c1) \Delta \mathbf{d} - c2 = \\ & \left( \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^m (K_{ip}^{\alpha\gamma} + c1_{ip}^{\alpha\gamma}) \right) \Delta \mathbf{d} - c2 \quad , \\ c1_{ip}^{\alpha\gamma} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad , \quad c2 = \Delta \hat{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (53)$$

$c1, c2$  ثابت هایی هستند که چون وابسته به تغییر مکان ها نیستند دیفرانسیلشان نسبت به  $\mathbf{d}^e$  صفر خواهد بود. اکنون برای محاسبه تک تک درایه های ماتریس  $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$  به صورت زیر عمل می کنیم. (دقت شود که در روابط فوق اندیس های  $\alpha, \beta = 1, 2$  نشان دهنده زیر ماتریسی که با توجه به روابط زیر ارائه می شوند، می باشد و  $i, j = 1, 2$  نشان دهنده درایه های هر کدام از این ماتریس ها می باشد.)

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{D}}_n &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t_n} \Delta \mathbf{D}_n - \hat{\mathbf{R}}_n \quad , \\ \Delta \ddot{\mathbf{D}}_n &= \frac{1}{\beta \Delta t_n^2} \Delta \mathbf{D}_n - \hat{\mathbf{Q}}_n \end{aligned} \quad (46)$$

چنانچه از روش تکرار مستقیم استفاده شود معمولاً پس از حدود ۸ تکرار (چنانچه از تعداد المان های مناسب با درجه تقریب مناسب استفاده شود.) جواب همگرا شده حاصل می شود. بجای استفاده از روش تکرار مستقیم می توان از روش نیوتن-رافسون که در آن معمولاً پس از ۳ تکرار جواب همگرا شده حاصل می شود (البته در مسایل غیر خطی سازه ای) استفاده کرد. در این روش فرم خطی شده ای برای معادله شبه استاتیکی به صورت زیر ارائه می شود:

$$\mathbf{T}^{(r-1)} \delta \Delta \mathbf{D}_n = -\mathbf{R}_n^{(r-1)} = \Delta \hat{\mathbf{F}}_n - \mathbf{S}^{(r-1)} \Delta \mathbf{D}_n^{(r-1)} \quad (47)$$

که در آن ماتریس  $\mathbf{T}$  که معمولاً ماتریس سختی مماسی خوانده می شود به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta \mathbf{D}} \right)^{(r-1)} \Leftrightarrow \mathbf{T}_y = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \Delta \mathbf{D}_{n,j}} \right)^{(r-1)} \quad , \\ \Delta \mathbf{D}_n &= \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n \Rightarrow \mathbf{D}_{n+1} = \Delta \mathbf{D}_n + \mathbf{D}_n \\ \mathbf{T}_y &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \Delta \mathbf{D}_{n,j}} \right)^{(r-1)} = \left( \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{D}_{n+1,j}} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{D}_{n+1,j}}{\partial \Delta \mathbf{D}_{n,j}} \right) \right)^{(r-1)} \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{D}_{n+1,j}} \right)^{(r-1)} \end{aligned} \quad (48)$$

در برنامه نویسی روش نیوتن-رافسون بهتر است که تمام محاسبات مربوط به رابطه ۴۷ ابتدا برای هر المان انجام شود و در نهایت عملیات انتقال به دستگاه مختصات سراسری و سرهمسازی بر روی ماتریس های  $\mathbf{T}^e$  و بردار  $\mathbf{R}^e$  انجام گیرد در این صورت رابطه ۴۷ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{e,(r-1)} \delta \Delta \mathbf{d}^e &= -\mathbf{R}^{e,(r-1)} \\ &= \Delta \hat{\mathbf{F}}^e - \hat{\mathbf{S}}^{e,(r-1)} \Delta \mathbf{d}^{e,(r-1)} \end{aligned} \quad (49)$$

در این صورت ماتریس سختی مماسی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{e,(r-1)} &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}^e}{\partial \Delta \mathbf{d}^e} \right)^{(r-1)} \Leftrightarrow \\ \mathbf{T}_{ij}^{e,(r-1)} &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i^e}{\partial \Delta \mathbf{d}_j^e} \right)^{(r-1)} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i^e}{\partial \mathbf{d}_j^e} \right)^{(r-1)} \end{aligned} \quad (50)$$

$n + 1$  از رابطه ۴۸ که مربوط به روش نیومارک بود محاسبه می شود. همانطور که مشاهده شد در هر گام زمانی با استفاده از یک روش تکرار بردار جابجایی ها به دست می آید.

در حل مسائل غیر خطی علاوه توجه به مورد قبل، بار اعمال شده بر سازه نیز باید به صورت مرحله به مرحله افزوده شود. در روش آنالیز غیرخطی نیروی محوری با رابطه زیر محاسبه می شود.

$$N_{xx} = EA \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (56)$$

جمله دوم در رابطه فوق جمله ایست که در حالت آنالیز غیرخطی نسبت به جمله اول که در آنالیز خطی استفاده می شود، اضافه شده است. این جمله نشان می دهد که با زیاد شدن تغییر مکان های عرضی میزان نیروی محوری به طور قابل توجهی افزایش می یابد. این امر در ضمن حل عددی می تواند باعث ایجاد تغییرات بسیار زیاد در سیستم و عدم همگرایی، یا همگرایی پس از تکرارهای بسیار زیاد شود. گذشته از این امکان دارد در ضمن تحلیل یکی از عضوهای قاب دچار کماتش شود به این معنی که عضو مذکور بدون هیچگونه افزایش باری تغییر شکل بسیار زیاد داشته و ناپایدار شود در این حالت تعیین میزان دقیق بار بحرانی مذکور که به ازای آن دترمینال ماتریس سختی صفر خواهد شد از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است.

برای تأمین دو هدف فوق در آنالیز غیرخطی از بارگذاری تدریجی استفاده می شود در این روش کل بار مورد نظر  $F$  به قطعات کوچکتر  $\delta F_1, \delta F_2, \dots, \delta F_N$  تقسیم می شود به طوری که داریم:

$$F = \sum_{i=1}^N \delta F_i \quad (57)$$

در اولین گام نیرو، مساله با اعمال بار  $F_1 = \delta F_1$  حل می شود؛ بدیهی است که چنانچه در اولین گام همگرایی به خوبی حاصل نشد می توان بار را به قطعات کوچکتری تقسیم نمود. پس از اینکه جواب برای اولین گام نیرویی حاصل شد. از آن به عنوان حدس اولیه در حل سازه تحت گام نیرویی بعد  $F_2 = \delta F_1 + \delta F_2$  استفاده می شود این مراحل تا زمانی که کل بار بر سازه اعمال شود تکرار می شود.

راه دیگری که برای شتاب دادن به روند همگرایی در مسائل غیرخطی معمولاً استفاده می شود از یک میانگین وزنی از جواب

$$\begin{aligned} T_{ij}^{\alpha\beta} &= \left( \frac{\partial R_i^\alpha}{\partial \Delta d_j^\beta} \right)^{(r-1)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \Delta d_j^\beta} \left( \left( \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^m (K_{ip}^{\alpha\gamma} + c1_{ip}^{\alpha\gamma}) \right) \Delta d_p^\gamma - c2 \right) \\ &= \left( \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^m (K_{ip}^{\alpha\gamma} + c1_{ip}^{\alpha\gamma}) \right) \left( \frac{\partial \Delta d_p^\gamma}{\partial \Delta d_j^\beta} \right) + \\ &= \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{p=1}^m \frac{\partial K_{ip}^{\alpha\gamma}}{\partial \Delta d_j^\beta} \Delta d_p^\gamma = \\ &= K_{ij}^{\alpha\beta} + c1_{ij}^{\alpha\beta} + \sum_{p=1}^2 \frac{\partial K_{ip}^{\alpha 1}}{\partial \Delta d_j^\beta} \xi_p + \sum_{p=1}^4 \frac{\partial K_{ip}^{\alpha 2}}{\partial \Delta d_j^\beta} \Delta_p \end{aligned} \quad (54)$$

با توجه به رابطه فوق درایه های ماتریس های  $T^{\alpha\beta}$  برحسب ماتریس های  $K, M$  پس از ساده شدن به صورت زیر قابل ارائه می باشند [۶].

$$\begin{aligned} T^{11} &= K^{11} + c1^{11} = K^{11} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M^{11} \\ T^{21} &= K^{21} + c1^{21} = K^{21} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M^{21} \\ T_{ij}^{12} &= K_{ij}^{12} + c1_{ij}^{12} + \\ &= \int_{x_a}^{x_b} \frac{EA}{2} \frac{dN_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \left( \sum_{p=1}^4 \frac{d\varphi_p}{dx} \Delta_p \right) dx = T_{ji}^{21} \\ T_{ij}^{22} &= K_{ij}^{22} + c1_{ij}^{22} + \\ &= \sum_{p=1}^2 \frac{\partial K_{ip}^{22}}{\partial \Delta_j} \xi_p + \sum_{p=1}^4 \frac{\partial K_{ip}^{22}}{\partial \Delta_j} \Delta_p \\ &= K_{ij}^{22} + c1_{ij}^{22} + \\ &= \frac{EA}{2} \int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{d\xi}{dx} + \left( \frac{d\Delta}{dx} \right)^2 \right) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx \end{aligned} \quad (55)$$

پس از محاسبه ماتریس  $T^e$  و بردار  $R^e$ ، این ماتریسها و بردارها باید با استفاده از ماتریس تبدیل به دستگاه مختصات سراسری منتقل شده و سپس عملیات سرهمسازی جهت تشکیل ماتریس  $T$  و بردار  $R$  سیستم انجام شود. رابطه حاصله رابطه ای به صورت ۴۷ می باشد که در پایان هر تکرار نیوتن-رافسون بردار  $\ddot{A}D$  مربوط به گام زمانی  $n$  از رابطه ۵۱ محاسبه می شود. بردار جابجایی ها در گام زمانی

1: Slender Structures and Axial Flow. San Diego, CA: Academic Press Inc.

- [5] Lee, Soo Il, and J. Chung. "New non-linear modelling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid." *Journal of sound and vibration* -313 : (2002) 254.2 325.
- [6] Reddy, J.N., 2004, "An Introduction to Nonlinear Finite Elements Analysis", Oxford University Press, UK, ISBN -852529-19-0X, 5-852529-19-0-978.
- [7] Chung J., N.-C. Kang and J. M. Lee 1996 *KSME International Journal* 145-138 ,10. A study on free vibration of a spinning disk.
- [8] Thurman A. L. and C. D. Mote 1969 *Journal of Engineering for Industry* 1155-1147 ,91. Non-linear oscillation of a cylinder containing flowing fluid.
- [9] Wylie, E.B. and Streeter, V. L., 1993, *Fluid Transients in Systems*, Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.
- [10] Simitses, G.J., Hodges, D.H., 2006, "Fundamentals of Structural Stability". Elsevier Inc. ISBN: -7506-0-978 9-7875.
- [11] Keramat, A., Ahmadi, A., 2012, "Axial vibration of viscoelastic bars using the finite-element method", *Journal of Engineering Mathematics*, 117-105 ,77.
- [12] Tijsseling, A.S., 2003, "Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration" *Journal of Fluids and Structures*, Vol 18, Issue 2, September pp. 179-196.

های حاصله از دو تکرار قبل جهت محاسبه ماتریس سختی در تکرار فعلی می باشد.

$$\mathbf{D}^{*(r-1)} = \psi \mathbf{D}^{(r-2)} + (1-\psi) \mathbf{D}^{(r-1)} \quad (58)$$

,  $0 \leq \psi \leq 1$

در این روش  $\psi$  ضریب تشدید خوانده می شود و چنانچه حل مساله از نظر همگرایی به سختی پیش برود در نظر گرفته می شود در غیر این صورت این مقدار صفر خواهد بود.

جهت محاسبه انتگرالهای روابط قبل می توان از روش انتگرال گیری گوس استفاده کرد. استفاده از انتگرال گیری کاهشی جهت محاسبه انتگرال های شامل جملات غیرخطی جواب های بهتری خواهد داد [۶].

### مراجع

- [1] Bazant, Z.P., Cedolin, L., 1991, "Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories", Oxford University Press.
- [2] Clough, Ray W., and Joseph Penzien. *Dynamics of structures*. Computers & Structures, Inc, 2003.
- [3] Joukowski, N.E., *Mem. Imperial Academy Soc. Of St. Petersburg*, Vol. 9, no.1900 ,1898 ,5 (in Russian, translated by O. simin, *proc. Amer. Water works Assoc.*, Vol. ,24 1904, pp. 424-341).
- [4] Paigdoussis M. P. 1998 *Fluid-Structure Interactions*, Vol.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M.A. Mashak, A.R. Keramat, *Fluid-structure interaction due to water-hammer in a pressurized pipeline considering geometrical non-linear behavior of the pipe wall*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(7) (2020) 1651-1670.

DOI: [10.22060/ceej.2019.15464.5962](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.15464.5962)

