Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(5) (2020) 325-328
DOI: 10.22060/mej.2019.14725.5932

# Kinetostatic Performance Comparison of Spherical Parallel Mechanisms Extracted from Type Synthesis with Modeling Clearance in Passive Joints

S. M. Seyed Mousavi[1], M. Tale Masouleh[2*], A. Khoogar[3]

[1]Human and Robot Interaction Laboratory, University of Tehran, Tehran, Iran
[2]School of Electrical and Computer, University of Tehran, Tehran, Iran
[3]Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** A spherical parallel mechanism is used to rotate a body around a fixed point. Different kinematic arrangements can be obtained for the robot with three degrees of rotational freedom. The most commonly used structure for this robot is the 3-RRR kinematic architecture which is an overconstrained parallel mechanism and causes several problems of mounting the mechanism. In this paper two non-overconstrained architectures 3-RRS and 3-RSR are compared with overconstrained one from the accuracy point of view based on the joint clearance. First, a method to obtain a model of moving platform pose (position and orientation) error based on the joint clearance is introduced which leads to a standard convex optimization problem. Then maximum values of six components of the pose error are computed in more than 1000 different configurations within their workspace. It is shown that this displacement is configuration dependent. The obtained results revealed that the 3-RRR spherical parallel mechanism has better position accuracy while in the case of orientation, the 3-RRS SPM has the lowest maximum error between spherical parallel mechanisms under study in the prescribed workspace. It can be concluded that non-overconstrained structures can be used instead of the overconstrained structure. Finally, a comparison was made between the performance indices and the presented method.

**Review History:**

Received: 7/26/2018
Revised: 2/7/2019
Accepted: 3/18/2019
Available Online: 3/18/2019

**Keywords:**

Spherical parallel manipulator
Accuracy analysis
Joint clearance
Kinematic sensitivity

## 1. INTRODUCTION

Spherical Parallel Mechanism (SPM) is one of the parallel mechanisms with limited degrees of freedom which is used to rotate a body around a fixed point. The most common SPM is agile eye [1] with the 3-RRR kinematic arrangement, which is overconstrained structure and needs high precision in manufacturing and its advantages are accuracy and rigidity. On the other hand, non-overconstrained structures have been proposed for spherical motion. The advantage of non-overconstrained structures is that the assembly is always possible even with the geometrical errors. In this paper, 3-RRR SPM is compared with two non-overconstrained structures 3-RRS and 3-RSR from the accuracy point of view. Given that the only difference of the mentioned mechanisms is their joints, the impact of the joint clearance on the accuracy has been studied. So far, much research was conducted on the joint clearance and its impact on the accuracy of parallel mechanisms. In this paper, the method introduced in [2-4] which is based on the screw theory is used to find the error prediction model and find maximum pose error.

To measure mechanism precision, kinetostatic indices have also been introduced. Finally, in order to determine the most suitable indicator, a comparison between these indices and the proposed method has been made.

## 2. METHODOLOGY

### 2.1. Moving platform pose error

The maximum value of each component of the pose error due to joint clearance in each limb can be found by solving the following optimization problem:

$$\max\ \delta\mathbf{E}_{i,k} = \text{maximize}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{I}_k\,\text{adj}\left(\mathbf{T}_{i,j}\right)\delta\mathbf{e}_{i,j}$$

subject to

$$\text{R joints} \Rightarrow \begin{cases}\delta\alpha_{i,j}^2+\delta\beta_{i,j}^2\le\delta\theta_{i,j}^2\\ \delta x_{i,j}^2+\delta y_{i,j}^2\le\delta\rho_{i,j}^2\\ \delta z_{i,j}^2\le\delta\sigma_{i,j}^2\end{cases} \tag{1}$$

$$\text{S joints} \Rightarrow \delta x_{i,j}^2+\delta y_{i,j}^2+\delta z_{i,j}^2\le\delta\varepsilon_{i,j}^2$$

Where $i$ and $j$ represent limbs and joint's number, respectively.

$$\mathbf{1}_{6\times6}=\left[\mathbf{I}_1\ \mathbf{I}_2\ \mathbf{I}_3\ \mathbf{I}_4\ \mathbf{I}_5\ \mathbf{I}_6\right] \tag{2}$$

And the joint error can be represented by small displacement screw as following:

$$\delta\mathbf{e}=[\delta\alpha\ \ \delta\beta\ \ \delta\gamma\ \ \delta x\ \ \delta y\ \ \delta z]^T \tag{3}$$

Eq. (1) is a convex function and using the software package CVX and taking into account the constraints of the equation to be solved as follows:

$$\Delta\theta_{i,j}=0.01\,\text{rad}=0.57^\circ \tag{4}$$

$$\Delta\rho_{i,j}=0.1\,\text{mm} \tag{5}$$

*Corresponding author's email: m.t.masouleh@ut.ac.ir

$$\Delta\sigma_{i,j} = 0.1\,\text{mm} \tag{6}$$

$$\Delta\varepsilon_{i,j} = 0.2\,\text{mm} \tag{7}$$

$$\Delta\omega_{i,j} = 0.01\,\text{rad} = 0.57^{\circ} \tag{8}$$

Eventually, the maximum of each of the error components of the platform is obtained as follows:

$$\max \delta\mathbf{E}_k = \min\left(\max \delta\mathbf{E}_{i,k}\right) \quad i = 1,\ldots,m \qquad k = 1,\ldots,6 \tag{9}$$

## 2.2. Performance Indices

Various indices have been introduced to measure the accuracy of the robots that are all based on manipulator Jacobian [5] which the most well-known are as follows:

Manipulability:

$$\mu \equiv 1/\sqrt{\det\left(\mathbf{K}^T\mathbf{K}\right)} \tag{10}$$

Dexterity:

$$\kappa \equiv \left\|\mathbf{K}\right\|\left\|\mathbf{K}^{-1}\right\| \tag{11}$$

Kinematic sensitivity:

$$\sigma_{r_c,f} \equiv \max_{\rho_c=1} \phi_f \ , \qquad \sigma_{p_c,f} \equiv \max_{\rho_c=1} \mathbf{p}_f \tag{12}$$

One of the important weaknesses of these indices is that in robots which degrees of freedom are rotational and translational, in other words, their Jacobian is not homogeneous, the indices do not provide a significant physical quantity. Also, in robots with the same Jacobin, the situation we are facing in this paper, the indices cannot be used for comparison. Therefore, this paper presents a comparison between the proposed method and the kinematic sensitivity indices to determine the most suitable index for comparing robot precision.

## 3. RESULTS AND DISCUSSION

### 3.1. Under study workspace

In this paper, the Euler angles [$\phi$, $\theta$, $\psi$] is used in order to show the workspace of the manipulator which is defined by

$$\varphi \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right],\ \psi \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right], \text{ and } \theta = 0.$$

### 3.2. Comparison of introduced error model with performance indices

Fig. 1 shows the mentioned indices and maximum rotational error of 3-RRR SPM in the prescribed workspace. More graphs are provided in the full article. As shown in this figure, the kinematic sensitivity index is the most suitable indicator for displaying manipulator accuracy.

## 4. CONCLUSIONS

In this paper, an overconstrained SPM and two non-overconstrained SPMs were compared from the accuracy point of view and the results showed that the latter structures can be used and at the same time had the suitable accuracy.

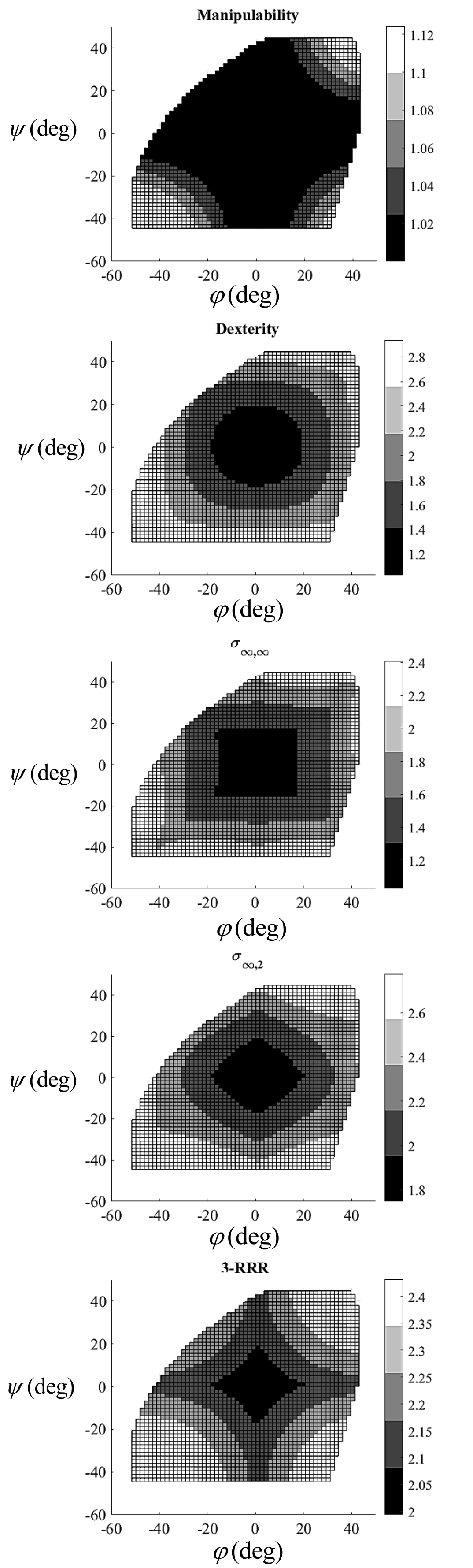



**Fig. 1. Comparison of the introduced error model with performance indices**

Also, a comparison was made between kinematic sensitivity indices and the error model and results revealed that the kinematic sensitivity index is the most appropriate index for expressing the accuracy of parallel manipulators.

## REFERENCES

[1] C.M. Gosselin, J.-F. Hamel, The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device, in: Robotics and Automation, 1994. Proceedings. 1994 IEEE International Conference on, IEEE, 1994, pp. 781-786.

[2] J. Meng, D. Zhang, Z. Li, Accuracy analysis of parallel manipulators with joint clearance, Journal of Mechanical Design, 131(1) (2009) 011013.

[3] N. Binaud, P. Cardou, S.p. Caro, P. Wenger, The kinematic sensitivity of robotic manipulators to joint clearances, in: ASME 2010 International Design engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2010, pp. 1371-1380.

[4] A. Chaker, A. Mlika, M. Laribi, L. Romdhane, S. Zeghloul, Accuracy analysis of non-overconstrained spherical parallel manipulators, European Journal of Mechanics-A/Solids, 47 (2014) 362-372.

[5] J.-P. Merlet, Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots, Journal of Mechanical Design, 128(1) (2006) 199-206.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۵، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۳۰۱ تا ۱۳۱۸
DOI: 10.22060/mej.2019.14725.5932

# مقایسه عملکرد کینتواستاتیکی مکانیزم‌های موازی کروی مستخرج از سنتز نوعی با مدل‌سازی لقی در مفاصل غیر فعال

سید مجتبی سید موسوی [۱]، مهدی طالع ماسوله [۱*]، احمد رضا خوگر [۲]

[۱] دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران،
[۲] مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

**تاریخچه داوری:**
دریافت: ۰۴-۰۵-۱۳۹۷
بازنگری: ۱۸-۱۱-۱۳۹۷
پذیرش: ۲۰-۱۲-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۲۷-۱۲-۱۳۹۷

**کلمات کلیدی:**
ربات موازی کروی
تحلیل دقت
لقی مفصل
حساسیت سینماتیکی

**خلاصه:** از مکانیزم موازی کروی برای دوران جسم حول یک نقطه ثابت استفاده می‌شود. تاکنون آرایش‌های سینماتیکی مختلفی برای این ربات با سه درجه آزادی دورانی بدست آمده است. متداول‌ترین ساختار مورد استفاده برای این ربات، آرایش سینماتیکی ۳-آر.آر.آر است که ساختاری بیشینه‌مقید بوده و موجب دشواری‌هایی در ساخت و مونتاژ این ربات می‌شود. در این مقاله دو ساختار نابیشینه‌مقید ۳-آر.آر.اِس و ۳-آر.اِس.آر مستخرج از سنتز نوعی، از نقطه نظر دقت بر اساس لقی مفاصل با ساختار بیشینه‌مقید مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. بدین‌منظور ابتدا مدلی برای خطای سکوی متحرک بر مبنای لقی مفاصل معرفی شده‌است که به یک مسئله بهینه‌سازی محدب منجر می‌شود. سپس بیشینه شش مؤلفه خطای سکوی متحرک در بیش از ۱۰۰۰ جهت‌گیری مختلف از فضای کاری تعریف‌شده برای هر یک از ربات‌ها محاسبه شده است. نتایج نشان دادند که خطای مجری نهایی به پیکربندی ربات بستگی دارد. همچنین با مقایسه نتایج مشخص شد که ساختار ۳-آر.آر.آر خطای جابجایی نقطه‌ای کمتری نسبت به سایرین دارد، در حالی‌که خطای جهت‌گیری ساختار ۳-آر.آر.اِس کمتر از دو ساختار دیگر است که نشان می‌دهد می‌توان از ساختارهای نابیشینه‌مقید به‌جای ساختار بیشینه‌مقید در طراحی این ربات استفاده نمود. در نهایت نیز مقایسه‌ای بین شاخص‌های عملکردی کینتواستاتیکی با مدل ارائه‌شده صورت گرفته است.

## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر ربات‌های موازی با درجات آزادی محدود (درجه آزادی کمتر از ۶) به دلیل ساختار مکانیکی ساده‌تر، هزینه ساخت کمتر و الگوریتم کنترلی ساده‌تر، مورد توجه بسیاری قرار گرفته‌اند. یکی از انواع این ربات‌ها، ربات‌های موازی کروی[۱] هستند که بیش از ۲۰ سال است که توسط دانشمندان حوزه رباتیک مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. علت اصلی این توجه، کاربردهای فراوانی می‌باشد که در آن‌ها نیاز به دوران یک جسم حول نقطه‌ای ثابت است. این ربات‌ها در مواردی که تنها به درجات آزادی دورانی نیاز است، مانند دستگاه تنظیم جهت‌گیری سریع و پایدارکننده دوربین [۱ و ۲]، تجهیزات پزشکی [۳]، ماشین‌های ابزار [۴] و سیستم‌های هدایت آنتن و صفحات خورشیدی کاربرد دارند.

متداول‌ترین ربات موازی کروی، ربات موازی کروی با آرایش سینماتیکی 3-RRR است که یک مکانیزم موازی بیشینه‌مقید[۲] است. در این ساختار، محور همه مفاصل باید از یک نقطه ثابت مشترک که مرکز دوران نامیده می‌شود، عبور کنند. از این‌رو چنین ساختاری دقت ساخت و مونتاژ بالایی را می‌طلبد و هنگامی‌که خطاهای هندسی رخ دهد، مونتاژ کردن آن بسیار دشوار شده و مکانیزم تحت بارهای داخلی زیادی قرار می‌گیرد. از مزایایی که برای این ساختار برشمرده‌اند، می‌توان به صلبیت بالا و در نتیجه دقت زیاد با توجه به بیشینه مقید بودن ساختار آن اشاره کرد که این امر منجر به نیاز به دقت ساخت بالا و در نتیجه افزایش هزینه ساخت می‌شود. تاکنون تحقیقات گوناگونی روی سنتز ابعادی این ربات صورت گرفته است. هدف مشترک اکثر این تحقیقات، بهینه‌سازی مکانیزم به منظور دستیابی به بیشینه فضای کاری و مهارت[۳] بوده است [۵-۸].

1 Spherical Parallel Manipulator

2 Overconstrained

3 Dexterity

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.t.masouleh@ut.ac.ir

تحقیقات مختلفی نیز روی ساختارهای نابیشینه‌مقیدی[1] که قابلیت ایجاد الگوی حرکتی کروی دارند، صورت گرفته است. در این رابطه ساختارهای متقارن نابیشینه‌مقید مختلفی نظیر 3-RUU[2] [۹]، ۳-آر.سی.سی[3] [۱۰] و ۳-آر.آر.اِس[4] [۱۱ و ۱۲] معرفی شده‌اند. کنگ و گسلاین [۱۳] نیز با روشی بر مبنای تئوری پیچه[5] به سنتز نوعی ربات‌های موازی کروی پرداخته و کلیه ساختارهای بیشینه و نابیشینه مقید را که قابلیت ایجاد الگوی حرکتی کروی را دارند، بدست آورده‌اند. در واقع هدف این تحقیقات، کاهش تعداد شروط هندسی مورد نیاز در ساختارهای بیشینه‌مقید است.

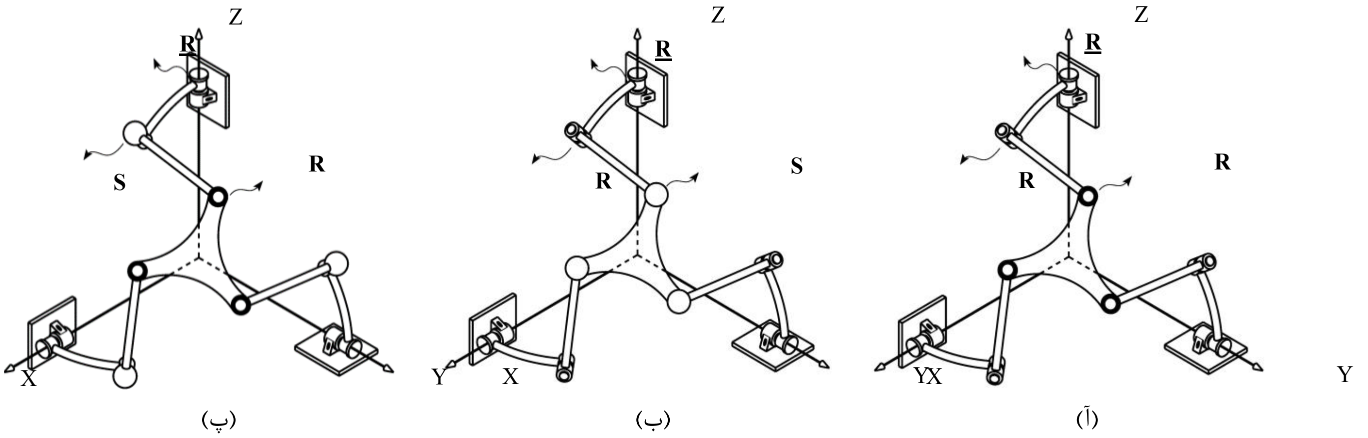
خطاهای ساخت و مونتاژ همواره یکی از دغدغه‌های اساسی پژوهشگران و همچنین طراحان بوده است. مزیت ساختارهای نابیشینه‌مقید این است که در این ساختارها، حتی با وجود خطاهای ساخت، مونتاژ ربات امکان‌پذیر است [۱۴ و ۱۵]. اما از سوی دیگر این مزیت می‌تواند روی دقت ربات تأثیرگذار باشد. از این‌رو در این مقاله دقت ربات موازی کروی با ساختار متداول و بیشینه‌مقید با ساختار 3-RRR با دو ساختار نابیشینه‌مقید ۳-آر.آر.اِس و ۳-آر.اِس.آر[6] مورد مقایسه قرار خواهد گرفت. علت انتخاب این دو ساختار این است که در این ساختارها تنها با جایگزینی یک مفصل کروی که یکی از مفاصل پرکاربرد در رباتیک می‌باشند، به جای یک مفصل لولایی در هر شاخه و با حفظ ابعاد و ساختار سایر اجزای ربات، می‌توان قیدهای اضافی را حذف کرده و ساختار بیشینه‌مقید را به یک ساختار نابیشینه‌مقید تبدیل نمود.

عوامل زیادی وجود دارند که می‌توانند باعث ایجاد خطا در موقعیت و جهت‌گیری و کاهش دقت ربات شوند. تأثیر برخی از این عوامل نظیر خطای ساخت، خطای مونتاژ و خطای محرک‌ها[7] را می‌توان با کالیبراسیون و کنترل مبتنی بر مدل خنثی کرد. اما از سوی دیگر از بین بردن تأثیر خطای ناشی از لقی مفاصل[8] با توجه به ماهیت تصادفی آن بسیار دشوار است [۲۱-۱۶]. لقی در مفاصل، که باعث ایجاد درجات آزادی بیشتری در حرکت نسبی دو عضو متصل به مفصل نسبت به هم می‌شود، یکی از دلایل عمده ایجاد خطا و عملکرد ضعیف در مکانیزم‌هاست که مستقیماً روی خطای موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی تأثیر می‌گذارد. به همین دلیل و همچنین به سبب اینکه تنها تفاوت سه ربات مورد مطالعه، مفاصل استفاده‌شده در ساختار آن‌هاست و شکل و ابعاد لینک‌ها و در نتیجه خطای ساخت آن‌ها یکسان است، در این مقاله به بررسی و مقایسه دقت سه ربات بر اساس لقی مفاصل پرداخته خواهد شد.

مطالعات زیادی روی تأثیر لقی مفاصل بر دقت موقعیت ربات‌های موازی صورت گرفته است. برخی از آن‌ها خطای موقعیت ناشی از لقی مفاصل را با استفاده از روش‌های تصادفی[9] محاسبه کرده‌اند [۲۲]. بسیاری نیز از روش‌های تحلیلی بهره جسته‌اند. اینوچنتی [۲۳] و ونانزی و همکاران [۱۶] با استفاده از روش کار مجازی، تأثیر لقی مفاصل بر روی دقت مجری نهایی را تحت یک بار خارجی محاسبه کرده‌اند. سای و همکاران [۲۴] با استفاده از مفهموم لینک لقی معادل[10]، خطای ربات را محاسبه کرده‌اند. وگلود و همکاران [۲۵] مرزهای خطای ربات را با استفاده از تکنیکی به نام ایجاد فضای کاری[11] مشخص کرده‌اند. لین و چن [۲۶] با استفاده از نوشتار ماتریسی، رابطه بین خطای ربات و لقی مفاصل را در ربات‌های صفحه‌ای بدست آورده‌اند. منگ و همکاران [۱۷] یک مدل خطای پیشبین بر پایه تئوری پیچه به منظور یافتن بیشینه خطای مجری نهایی در فضای کاری ربات را معرفی کرده‌اند. بیناود و همکاران [۱۸] نیز با روشی مشابه مرجع [۱۷] و بر اساس شاخص حساسیت سینماتیکی ارائه‌شده در مرجع [۲۷]، دو شاخص حساسیت سینماتیکی بر اساس لقی مفاصل معرفی کرده‌اند.

علاوه بر روش‌های فوق، برای مقایسه دقت ربات‌ها، از شاخص‌های سینماتیکی- استاتیکی[12] نیز استفاده می‌شود. تاکنون شاخص‌های سینماتیکی- استاتیکی مختلفی برای سنجش و مقایسه دقت و کارایی ربات‌ها معرفی شده‌اند [۳۱-۲۸]. مطالعات نشان داده‌اند که این شاخص‌ها بخصوص در مواردی که ماتریس ژاکوبین ربات همگن نیست، تعبیر فیزیکی واقع‌بینانه‌ای ارائه نمی‌دهند [۲۷، ۲۹، ۳۲ و ۳۳]. همچنین با توجه به اینکه شاخص‌های مذکور مبتنی بر ژاکوبین

1 Non-Overconstrained
2 3-RUU
3 3-RCC
4 3-RRS
5 Screw Theory
6 3-RSR
7 Actuator Error
8 Joint Clearance
9 Stochastic Methods
10 Equivalent Clearance Link
11 Workspace Generation
12 Kinetostatic Indices




**شکل ۱: ساختار سینماتیکی ربات‌های مورد بررسی. (آ) ساختار ربات موازی کروی $\underline{R}$RR-۳. (ب) ساختار ربات موازی کروی $\underline{R}$RS-۳. (پ) ساختار ربات موازی کروی $\underline{R}$SR-۳.**

**Fig. 1: Kinematic architecture of under study manipulators. (a) 3-$\underline{R}$RR SPM. (b) 3-$\underline{R}$RS SPM. (c) 3-$\underline{R}$RR SPM**

ربات هستند، در مواردی که ربات‌ها، ژاکوبین یکسان ولی ساختار سینماتیکی متفاوتی دارند، نمی‌توان از آن‌ها برای مقایسه دقت و کارایی ربات‌ها استفاده نمود. از سوی دیگر این شاخص‌ها تأثیر لقی در مفاصل غیرفعال را در نظر نمی‌گیرند، در حالی‌که لقی این مفاصل می‌تواند تأثیر بسزایی در خطای مجری نهایی داشته باشد. از این‌رو با توجه به اینکه سه ساختار مذکور، ماتریس ژاکوبین یکسانی دارند و تنها در نوع مفاصل غیرفعال[1] و مکان قرارگیری آن‌ها با یکدیگر تفاوت دارند، نمی‌توان از شاخص‌های مذکور برای مقایسه استفاده نمود.

در این پژوهش به منظور مقایسه دقت سه ربات مذکور، مدلی با استفاده از تئوری پیچه برای بدست آوردن بیشینه خطای مجری نهایی بر اساس لقی مفاصل ارائه شده است. در این مدل، جابجایی‌های ناشی از لقی مفاصل به صورت پیچه‌های جابجایی کوچک[2] در نظر گرفته شده و بیشینه خطای موقعیت و جهت‌گیری هر یک از سه ساختار مورد مطالعه در فضای کاری مورد نظر محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین با توجه به اینکه همواره انتخاب یا معرفی مناسب‌ترین شاخص برای بیان دقت مکانیزم یکی از چالش‌های مهم پیش روی محققان محسوب می‌شود، مقایسه‌ای بین شاخص‌های سینماتیکی- استاتیکی متداول و دقت بدست‌آمده با مدل معرفی‌شده در این مقاله صورت گرفته است تا مشخص گردد، کدام شاخص بیشترین مطابقت را با دقت ربات دارد.

ساختار این مقاله بدین گونه است که ابتدا ساختار سینماتیکی ربات‌های مذکور معرفی شده‌اند. پس از آن مدلی برای یافتن خطای سکوی متحرک[3] بر مبنای لقی مفاصل معرفی و بیشینه هر یک از مؤلفه‌های خطای سکوی متحرک ربات‌ها در بیش از ۱۰۰۰ جهت‌گیری مختلف در فضای کاری ربات‌ها محاسبه شده است. سپس بیشینه خطای جهت‌گیری و جابجایی نقطه‌ای سه ربات با یکدیگر مقایسه شده است. سپس متداول‌ترین شاخص‌های عملکردی معرفی و در فضای کاری مورد بررسی محاسبه شده‌اند. در گام بعد نیز مقایسه‌ای بین این شاخص‌ها با دقت محاسبه شده با مدل پیشنهادی در این مقاله صورت گرفته‌است. در بخش آخر نیز نتیجه‌گیری از این پژوهش ارائه شده است.

## ۲- ساختار سینماتیکی ربات‌های مورد بررسی

در سرتاسر این مقاله S ،R و $\underline{R}$ به ترتیب برای نمایش مفاصل لولایی، کروی و مفاصل لولایی فعال به کار رفته‌اند. ساختار ربات موازی کروی $\underline{R}$RR-۳ (۳- آر.آر.آر) در شکل ۱ (آ) نشان داده شده است. سه زنجیره سینماتیکی یکسان، سکوی متحرک ربات را به سکوی ثابت متصل کرده‌اند. هر یک از این زنجیره‌های سینماتیکی از دو رابط[4] و سه مفصل لولایی تشکیل شده است. مفاصل لولایی متصل به سکوی ثابت، فعال و سایر مفاصل غیرفعال هستند. محور هر نه

1 Passive Joints
2 Small Displacement Screw
3 Moving Platform
4 Link

مفصل لولایی باید از یک نقطه مشترک که مرکز دوران است، عبور کند. ساختار سینماتیکی ربات‌های **3**-R̲RS (۳- آر.آر.اِس) و **3**-R̲SR (۳- آر.اِس.آر) نیز در شکل‌های ۱ (ب) و ۱ (پ) نمایش داده شده است. در ربات ۳- آر.آر.اِس مفاصل لولایی متصل به سکوی متحرک با مفاصل کروی جایگزین شده‌اند و در ساختار ۳- آر.اِس.آر، این جایگزینی برای مفاصل میانی انجام گرفته است. همانطورکه پیش‌تر ذکر شد، این دو ساختار نابیشینه مقید هستند و معایب ساختار بیشینه مقید را ندارند.

در ربات‌های موازی کروی هر رابط با زاویه بین محور مفاصل لولایی دو سر آن مشخص می‌شود. این زاویه ثابت است و ابعاد رابط را نشان می‌دهد. همانطورکه در شکل ۱ نشان داده شده است، زاویه $\alpha_1$، زاویه بین دو مفصل ابتدایی است و اندازه رابط ۱ را مشخص می‌کند و زاویه $\alpha_2$ نیز زاویه بین محورهای دو مفصل انتهایی است. به دلیل این‌که تمامی شاخه‌ها یکسان هستند، اندازه این زوایا در هر سه شاخه یکسان است. گسلاین و همکاران [۳۴] به بهینه‌سازی سینماتیکی ربات موازی کروی چشم چابک[1] با ساختار **3**-R̲RR بر اساس فضای کاری و همچنین شاخص مهارت پرداخته‌اند. بر همین اساس مشخصات سینماتیکی مورد استفاده در این مقاله همانند مشخصات سینماتیکی ربات چشم چابک است و زوایای $\alpha_1$ و $\alpha_2$ برابر با $90^\circ$ هستند.

علاوه بر این، محور مفاصل فعال و همچنین محور مفاصل متصل به سکوی متحرک، دو به دو بر یکدیگر عمود می‌باشند. از این‌رو دستگاه مختصات مرجع ثابت OXYZرا می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که محورهای آن در راستای محورهای مفاصل فعال قرار گیرد. همچنین دستگاه مختصات متصل به سکوی متحرک نیز به گونه‌ای انتخاب می‌شود که محورهای آن نیز در راستای محورهای مفاصل متصل به سکوی متحرک قرار گیرند. این انتخاب باعث ساده‌تر شدن روابط سینماتیکی ربات می‌شود.

## ۳- مدل‌سازی خطا

در این بخش، به قواعد و مقررات نوشتاری و ساختاری به تفکیک و به صورت مشروح پرداخته خواهد شد. همچنین فرض شده است که خواننده با گروه اقلیدسی خاص SE(۳) و SO(۳) در جبر لی آشناست

و مقدمه‌ای کوتاه در مورد آن بیان خواهد شد.

SE(**3**) یک گروه از تبدیلات صلب در فضای سه‌بعدی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathrm{SE}(3)=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{p}\\ \mathbf{0}_3^T & 1\end{bmatrix} \mid \mathbf{p}\in\mathbb{R}^3,\ \mathbf{R}\in\mathrm{SO}(3)\right\} \qquad (۱)$$

که در آن SO(**3**) یک گروه خاص دورانی و متعامد از $\mathbb{R}^3$است. با اتصال یک چارچوب کارتزین به یک جسم صلب، می‌توان موقعیت آن‌را نسبت به پیکربندی اولیه با استفاده از $\mathbf{T}\in\mathrm{SE}(3)$ نشان داد. از این‌رو حرکت جسم صلب را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های هندسی گروه SE(**3**) مطالعه نمود.

همچنین جبر لی متناظر با گروه لی G با g نمایش داده می‌شود. برای مثال جبر لی so(**3**) متناظر با گروه لی SO(**3**) شامل تمامی ماتریس‌های پادمتقارن ۳×۳ به صورت زیر است:

$$\mathrm{so}(3)=\left\{S\in\mathbb{R}^{3\times3},\ S^T=-S\right\} \qquad (۲)$$

به عبارت دیگر so(۳) در $\mathbb{R}^3$را می‌توان با نگاشت زیر نمایش داد:

$$\wedge:\mathbb{R}^3\to\mathrm{so}(3):\omega\to\hat{\omega}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

so(**3**) متناظر با یک دوران بسیار کوچک جسم صلب حول یک نقطه ثابت است. جبر لی se(**3**) متناظر با گروه SE(**3**) نیز شامل یک ماتریس ۴×۴ به فرم زیر است:

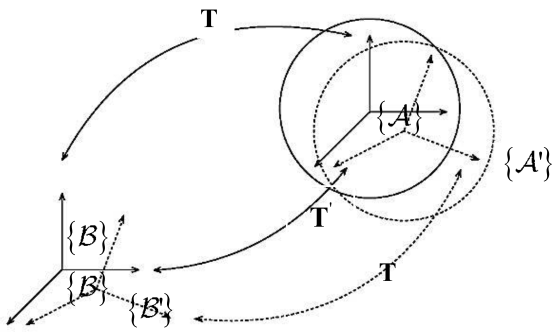
$$\mathrm{se}(3)=\left\{\begin{bmatrix}\hat{\omega} & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix} \middle| \omega,\nu\in\mathbb{R}^3\right\} \qquad (۴)$$

در نهایت با استفاده از روابط فوق می‌توان یک پیچه جابجایی کوچک که دارای شش مؤلفه می‌باشد را به صورت زیر نمایش داد: **e**

$$\wedge:\mathbb{R}^6\to\mathrm{se}(3):\xi=\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}\to\hat{\xi}=\left\{\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{r}} & \mathbf{p}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in\mathrm{se}(3)\right\} \qquad (۵)$$

نگاشت نمایی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

1 Agile Eye




شکل ۲: خطای موقعیت یک لینک

**Fig. 2: Pose error of one link.**

$$\exp : se(3) \rightarrow SE(3) : \hat{\xi} \rightarrow e^{\hat{\xi}} \qquad (۶)$$

از نظر فیزیکی $e^{\hat{\xi}}$، متناظر با حرکت پیچه در راستای محور پیچه است (رجوع شود به مرجع [۱۷]).

## ۳-۱- خطای موقعیت یک لینک

در این بخش با استفاده از روش ارائه‌شده در مرجع [۱۷] مدلی از خطای موقعیت یک لینک به دلیل لقی در مفصل را بدست خواهیم آورد. همانطورکه در شکل ۲ نشان داده شده است، دستگاه مختصات محلی $\{A\}$ را متصل به انتهای لینک در نظر بگیرید. فرض کنید ماتریس انتقال $\mathbf{T}$، موقعیت $\{A\}$ را نسبت به چارچوب مرجع $\{B\}$ نشان می‌دهد. این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \qquad (۷)$$

در این ماتریس، $R \in SO(3)$ماتریس دوران و $p \in \mathbb{R}^3$نیز بردار موقعیت مرکز چارچوب $\{A\}$ نسبت به $\{B\}$ است.

در صورت وجود خطا در موقعیت، چارچوب $\{A\}$ به چارچوب $\{A'\}$انتقال می‌یابد. ماتریس انتقال از $\{A'\}$ به $\{B\}$ با $\mathbf{T'}$ نشان داده می‌شود. همچنین چارچوب $\{B'\}$ را چارچوب حاصل از انتقال $\{A'\}$ با ماتریس $\mathbf{T}$ در نظر بگیرید. واضح است که در صورت عدم وجود خطا، $\{A\}$ بر $\{A'\}$ و $\{B\}$ بر $\{B'\}$ منطبق است. از این‌رو خطای موقعیت را می‌توان با $T^{-1}T'$؛ یعنی انتقال از $\{A'\}$ به $\{A\}$ یا با $T'T^{-1}$ یعنی انتقال از $\{B'\}$ به $\{B\}$ توصیف کرد. به‌طور معمول، خطای موقعیت $T^{-1}T'$ یا $T'T^{-1}$ در یک همسایگی کوچک حول $I_{4*4}$ قرار می‌گیرد. از این‌رو دو بیان بالا برای خطای کوچک چارچوب $\{A\}$ با معادله‌های زیر تعریف می‌شوند (برای اثبات این معادله رجوع شود به مرجع [۱۷]):

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}' - \mathbf{1} = e^{\mathbf{I}_1\delta\alpha^a} e^{\mathbf{I}_2\delta\beta^a} e^{\mathbf{I}_3\delta\gamma^a} e^{\mathbf{I}_4\delta x^a} e^{\mathbf{I}_5\delta y^a} e^{\mathbf{I}_6\delta z^a} - \mathbf{1} \approx \mathbf{I}_1\delta\alpha^a + \cdots + \mathbf{I}_6\delta z^a \qquad (۸)$$

$$\mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{1} = e^{\mathbf{I}_1\delta\alpha^b} e^{\mathbf{I}_2\delta\beta^b} e^{\mathbf{I}_3\delta\gamma^b} e^{\mathbf{I}_4\delta x^b} e^{\mathbf{I}_5\delta y^b} e^{\mathbf{I}_6\delta z^b} - \mathbf{1} \approx \mathbf{I}_1\delta\alpha^b + \cdots + \mathbf{I}_6\delta z^b \qquad (۹)$$

که در آن $\mathbf{I}_k$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{1}_{6\times6} = [\mathbf{I}_1 \ \mathbf{I}_2 \ \mathbf{I}_3 \ \mathbf{I}_4 \ \mathbf{I}_5 \ \mathbf{I}_6] \qquad (۱۰)$$

و شش مؤلفه $\delta\alpha^a,\ldots,\delta x^a$ و( $\delta\alpha^b,\ldots,\delta x^b$ ) نمایش‌دهنده سه خطای دورانی و سه خطای انتقالی جسم صلب حول محورهای x، y و z هستند. اندیس‌های $a$ و $b$ نیز به ترتیب نشان‌دهنده خطا نسبت به چارچوب‌های $\{A\}$ و $\{B\}$ هستند. بنابراین خطای جسم صلب نسبت به چارچوب‌های $\{A\}$ و $\{B\}$ را می‌توان با بردارهای ۶ مؤلفه‌ای به صورت زیر نمایش داد:

$$\delta\mathbf{e}^a = [\delta\alpha^a \ \ \delta\beta^a \ \ \delta\gamma^a \ \ \delta x^a \ \ \delta y^a \ \ \delta z^a]^T \qquad (۱۱)$$

$$\delta\mathbf{e}^b = [\delta\alpha^b \ \ \delta\beta^b \ \ \delta\gamma^b \ \ \delta x^b \ \ \delta y^b \ \ \delta z^b]^T \qquad (۱۲)$$

همانطورکه پیش‌تر ذکر شد، اگر $\mathbf{T}$را ماتریس انتقال از $\{\mathcal{A}\}$ه $\{\mathcal{B}\}$ در نظر بگیریم، با استفاده از نگاشت الحاقی[۱]، خطا در چارچوب محلی $\{\mathcal{A}\}$ا می‌توان در چارچوب مرجع $\{\mathcal{B}\}$ه صورت زیر بدست آورد:

$$\delta\mathbf{e}^b = \mathrm{adj}(\mathbf{T})\delta\mathbf{e}^a \qquad (۱۳)$$

که در آن نگاشت الحاقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

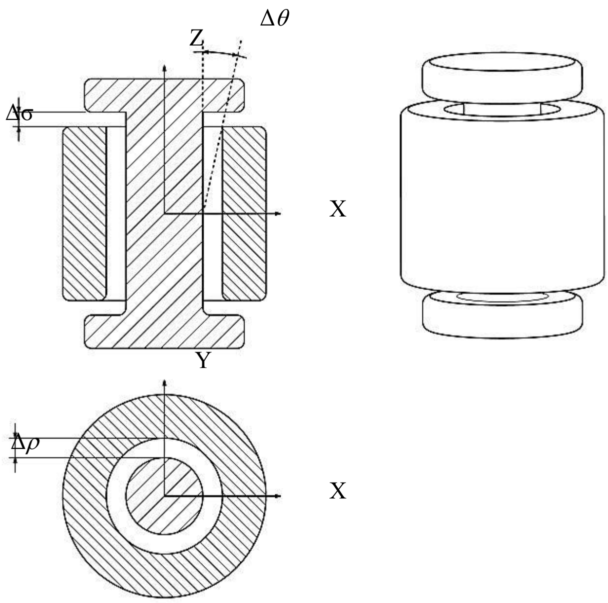
$$\mathrm{adj}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{PR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

در این رابطه $\mathbf{P}$ ماتریس متناظر ضرب خارجی[۲] بردار $\mathbf{p}$ است.

## ۳-۲- مدل خطای لقی مفصل

با در نظر گرفتن لقی در مفاصل، در حقیقت دو لینک متصل به

1 Adjoint Map
2 Cross-Product Matrix




**شکل ۳: مفصل لولایی تحت تأثیر لقی.**

**Fig. 3: Clearance-affected revolute joint.**

مفصل نسبت به یکدیگر دارای ۶ درجه آزادی هستند. با فرض اینکه این جابجایی‌ها بسیار کوچک هستند، می‌توان آن‌ها را با یک پیچه جابجایی کوچک نمایش داد. بنابراین جابجایی نسبی بین دو لینک متصل به یک مفصل نسبت به دستگاه مختصات محلی متصل به مفصل، به صورت زیر است:

$$\delta\mathbf{e}=[\delta\mathrm{r}\quad\delta\mathrm{p}]^T=[\delta\alpha\quad\delta\beta\quad\delta\gamma\quad\delta x\quad\delta y\quad\delta z]^T \qquad (۱۵)$$

که در آن $\delta\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ نشان‌دهنده سه خطای بسیار کوچک دورانی و $\delta\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3$ نیز نمایش‌دهنده سه خطای بسیار کوچک انتقالی است.

بسته به نوع مفاصل، جابجایی‌های محلی و حرکت‌های ایده‌آل مختلفی در آن‌ها وجود دارد. با توجه به نوع مفاصل استفاده شده در ربات‌های مورد بررسی در این مقاله، به دو نوع مفصل لولایی و کروی پرداخته خواهد شد.

### ۱-۲-۳- مفصل لولایی

در حالت ایده‌آل، یک مفصل لولایی، ۵ درجه آزادی را مقید می‌کند و تنها اجازه یک درجه آزادی دورانی را بین دو لینک می‌دهد. اما در صورت وجود لقی در مفصل، این فرض درست نیست و در این درجات آزادی مقید شده جابجایی وجود خواهد داشت. شکل ۳ یک مفصل لولایی که در آن لقی وجود دارد را نشان می‌دهد. همانطورکه در این شکل نشان داده شده است، با قرار دادن یک دستگاه مختصات محلی بر روی این مفصل به گونه‌ای که محور z آن در راستای محور مفصل و مرکز آن در مرکز مفصل قرار گیرد، در این صورت بر اساس مرجع [۱۶]، جابجایی نسبی بین رابط‌های متصل به مفصل نسبت به دستگاه مختصات محلی را می‌توان با یک بردار ۶ مؤلفه‌ای و به صورت زیر نشان داد:

$$\delta\mathbf{e}=[\delta\alpha\quad\delta\beta\quad 0\quad\delta x\quad\delta y\quad\delta z]^T \qquad (۱۶)$$

که در آن $\delta\alpha$ و $\delta\beta$، به‌ترتیب، مؤلفه‌های دورانی خطا حول محورهای x و y هستند و پارامترهای $\delta x$ ، $\delta y$ و $\delta z$ نیز به ترتیب مؤلفه‌های انتقالی پیچه جابجایی کوچک $\delta\mathbf{e}$ در راستای محورهای x، y و z هستند. باید توجه داشت که مؤلفه سوم دوران $\delta\gamma$ که حول محور مفصل می‌باشد، در مفاصل غیرفعال، نباید در نظر گرفته شود، زیرا حرکت در این راستا، حرکت ایده‌آل مفصل می‌باشد ولی در مفاصل فعال به دلیل وجود خطای عملگرها و در نظر گرفتن آن‌ها، در این مقاله، این مؤلفه در نظر گرفته خواهد شد.

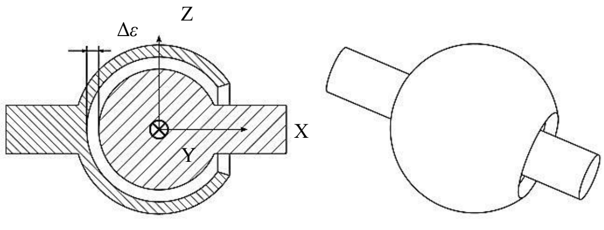
در پژوهش‌های [۱۶] و [۱۷]، از ابعاد هندسی و طراحی‌های خاص و اندازه لقی برای فرمول‌بندی محدوده خطا استفاده کرده‌اند، اما با توجه به اینکه طراحی‌های مختلف، قیدهای متفاوتی ایجاد می‌کند، در این مقاله قیدهای کلی که برای کلیه مفاصل متقارن محوری قابل استفاده‌اند، برای بدست آوردن مرزهای خطا تعریف شده است که به صورت زیر هستند:

$$\delta\alpha^2+\delta\beta^2\le\Delta\theta^2 \qquad (۱۷)$$

$$\delta x^2+\delta y^2\le\Delta\rho^2 \qquad (۱۸)$$

$$\delta z^2\le\Delta\sigma^2 \qquad (۱۹)$$

همانطورکه در شکل ۳ نشان داده شده است، معادلات (۱۷) و (۱۸) قیدهای شعاعی هستند و معادله (۱۹) قید محوری است.




شکل ۴: مفصل کروی تحت تأثیر لقی.

Fig. 4: Clearance-affected spherical joint

### ۲-۲-۳- مفصل کروی

از نظر تئوری، یک مفصل کروی، هر جابجایی انتقالی نسبی بین دو رابط را به طور کامل مقید می‌کند، در حالی‌که اجازه سه درجه آزادی دورانی را می‌دهد. از این‌رو این سه درجه آزادی دورانی، حرکت ایده‌آل مفصل بوده و خطای ناشی از لقی در این مفصل را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\delta\mathbf{e}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \delta x & \delta y & \delta z\end{bmatrix}^T \tag{۲۰}$$

شکل ۴ یک مفصل کروی را نشان می‌دهد. تنها قیدی که حدود خطا را مشخص می‌کند به صورت زیر است:

$$\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2\le\Delta\varepsilon^2 \tag{۲۱}$$

در این رابطه $\Delta\varepsilon$ ندازه لقی است.

### ۳-۳- مدل خطای سکوی متحرک

حال با استفاده از روابط استخراج شده در بخش‌های پیشین، مدلی برای خطای مجری نهایی بر اساس لقی مفاصل ارائه خواهد شد. بدین منظور، ابتدا هر یک از شاخه‌های ربات را به صورت مجزا در نظر گرفته و خطای مجری نهایی در هر شاخه محاسبه می‌شود.

بدین منظور دستگاه مختصات محلی $\{\mathcal{R}_{i,j}\}$ه مفصل jام $(j=1,...,n)$از بازوی iام $(i=1,...,m)$ و دستگاه مختصات مرجع $\{\mathcal{B}\}$سکوی ثابت ربات متصل شده است. موقعیت هر مفصل نسبت به $\{\mathcal{B}\}$یز با ماتریس انتقال $T_{i,j}$شان داده می‌شود. ماتریس انتقال هر مفصل با استفاده از سینماتیک معکوس ربات قابل محاسبه است. به منظور سهولت در مراجعه، نمادهای استفاده شده در این بخش در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند.

خطای موقعیت ناشی از لقی مفصل jام از بازوی iام در چارچوب محلی $\{\mathcal{R}_{i,j}\}$ا با پیچه جابجایی کوچک $\delta e_{i,j}$شان می‌دهیم. با در نظر گفتن $\mathbf{T}_{i,j}$به عنوان ماتریس انتقال از $\{\mathcal{R}_{i,j}\}$به $\{\mathcal{B}\}$ همچنین با توجه به روابط بخش‌های پیشین، این خطا نسبت به چارچوب مرجع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta\mathbf{e}_{i,j}^{b}=\mathrm{adj}\left(\mathbf{T}_{i,j}\right)\delta\mathbf{e}_{i,j} \tag{۲۲}$$

خطای موقعیت ناشی از لقی مفاصل زنجیره سینماتیکی باز iام (بازوی iام) برابر است با مجموع خطاهای همه مفاصل موجود در این زنجیره و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta\mathbf{E}_i=\sum_{j=1}^{n}\delta\mathbf{e}_{i,j}^{b}=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{adj}\left(\mathbf{T}_{i,j}\right)\delta\mathbf{e}_{i,j} \tag{۲۳}$$

### ۳-۳- بیشینه خطای مجری نهایی

در این بخش، هدف، یافتن مقدار بیشینه هر یک از مؤلفه‌های خطای موقعیت سکوی متحرک ربات موازی بر اساس لقی مفاصل آن

جدول۱: فهرست نمادهای به کاربرده‌شده.

**Table 1: List of notations.**

| نماد | تعریف |
|---|---|
| $\{\mathcal{B}\}$ | چارچوب مرجع |
| $\{\mathbf{R}_{i,j}\}$ | چارچوب محلی متصل به مفصل jام از بازوی iام |
| $\delta\mathbf{e}_{i,j}$ | خطای جابجایی در هر مفصل نسبت به چارچوب $\{\mathbf{R}_{i,j}\}$ |
| $\delta\mathbf{e}_{i,j}^{b}$ | خطای جابجایی در هر مفصل نسبت به چارچوب $\{\mathcal{B}\}$ |
| $\mathbf{T}_{i,j}$ | ماتریس انتقال از چارچوب $\{\mathbf{R}_{i,j}\}$ به $\{\mathcal{B}\}$ |
| $\delta\mathbf{E}_i$ | تابع خطای موقعیت بازوی iام |
| $\max\ \delta\mathbf{E}$ | بیشینه خطای موقعیت ربات |

است. برای نیل به این هدف، ابتدا باید هر یک از شاخه‌ها به صورت جداگانه در نظر گرفته شده و بیشینه خطای مجری نهایی در هر یک از آن‌ها محاسبه شود. بر همین اساس، مسئله موجود به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود که به صورت زیر است:

$$\max \delta \mathbf{E}_{i,k} = \text{maximize} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}_k \, \text{adj}\left(\mathbf{T}_{i,j}\right) \delta \mathbf{e}_{i,j}$$

تحت قیود

$$\text{برای مفاصل لولایی} \Rightarrow \begin{cases} \delta\alpha_{i,j}^2 + \delta\beta_{i,j}^2 \le \delta\theta_{i,j}^2 \\ \delta x_{i,j}^2 + \delta y_{i,j}^2 \le \delta\rho_{i,j}^2 \\ \delta z_{i,j}^2 \le \delta\sigma_{i,j}^2 \end{cases} \qquad (۲۴)$$

$$\text{برای مفاصل کروی} \Rightarrow \delta x_{i,j}^2 + \delta y_{i,j}^2 + \delta z_{i,j}^2 \le \delta\varepsilon_{i,j}^2$$

که در آن $\mathbf{I}_k$ در رابطه (۱۰) تعریف شده است و $\delta E_{i,k}$ نیز مؤلفه kام $(k=۱,۲,...,۶)$ خطای موقعیت بازوی iام است. همچنین به منظور در نظر گرفتن خطای عملگرها، باید یک قید دیگر برای مؤلفه سوم دوران مفاصل لولایی فعال به صورت زیر در نظرگرفته شود:

$$\delta\gamma_{i,j}^2 \le \delta\omega_{i,j}^2 \qquad (۲۵)$$

تابع هدف معادله (۲۴) یک تابع خطی است که خطای جابجایی در مفاصل را به خطای موقیت سکوی متحرک نگاشت می‌دهد، از سوی دیگر قیدهایی که برای مؤلفه‌های خطای مفاصل و با توجه به مدل لقی آن‌ها بدست آمده‌اند، همگی نمایانگر سطح داخلی دایره (روابط (۱۷) و (۱۸)) و حجم داخل کره (رابطه (۲۱)) هستند و می‌توان نتیجه گرفت که این قیدها محدب می‌باشند.

مسئله بهینه‌سازی محدب، مسئله‌ای است که تابع هدف و تمامی قیدهای آن محدب باشند. از این‌رو با توجه به خطی بودن تابع هدف و محدب بودن قیدهای مسئله، می‌توان نتیجه گرفت که مسئله پیش رو یک مسئله محدب است و می‌توان از روش بهینه‌سازی

محدب استاندارد[1] برای بدست آوردن مقدار بیشینه مسئله مورد نظر استفاده نمود. از این‌رو بیشینه خطای مجری نهایی در هر شاخه $\max \delta E_i$ را می‌توان با اعمال شش بهینه‌سازی محدب بدست آورد.

در گام بعد باید بیشینه خطای مجری نهایی در ربات موازی را بدست آورد. از آنجاکه مقدار بیشینه هر یک از مؤلفه‌های خطا که هر یک از شاخه‌ها می‌توانند داشته باشند برابر است با $\max \delta E_{i,k}$

1 Standard Convex Optimization

از این‌رو مقدار بیشینه هر یک از مؤلفه‌های خطای سکوی متحرک مجری نهایی برابر است با کوچکترین مقدار هر یک از این مؤلفه‌ها که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\max \delta \mathbf{E}_k = \min\left(\max \delta \mathbf{E}_{i,k}\right) \qquad (۲۶)$$

$$i = 1,\dots,m \qquad k = 1,\dots,6$$

در نهایت بیشینه خطای سکوی متحرک ربات موازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\max \delta \mathbf{E} = \left[\max \delta \mathbf{E}_1 \quad \max \delta \mathbf{E}_2 \quad \dots \quad \max \delta \mathbf{E}_6\right]^T \qquad (۲۷)$$

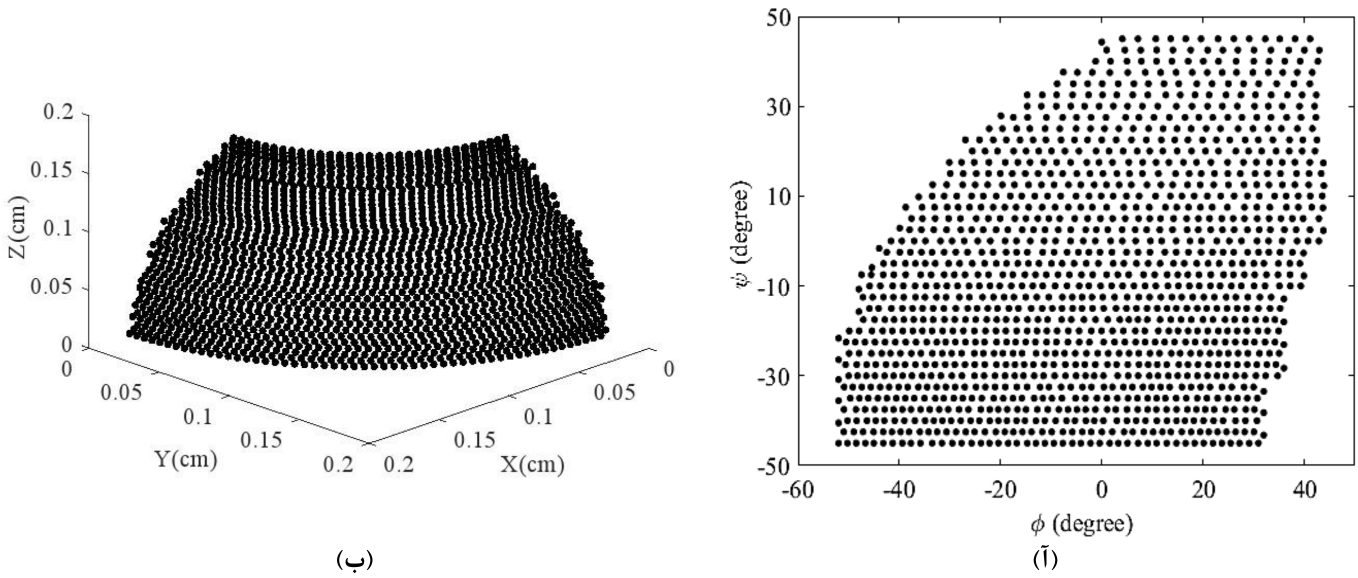
لازم به ذکر است که مدل ارائه‌شده به ربات خاصی محدود نبوده و می‌توان از آن برای بدست آوردن بیشینه خطای سایر ربات‌های سری و موازی استفاده نمود.

## ۴- فضای کاری ربات

همانطورکه در بخش پیش نشان داده شد، مدل بدست آمده برای خطای مجری نهایی، وابسته به موقعیت آن است. از این‌رو باید آن را در موقعیت‌های مختلف در فضای کاری قرار داده و بیشینه خطا را در هر موقعیت محاسبه نمود. در این مقاله برای نمایش فضای کاری ربات از زوایای اویلر $[\varphi,\theta,\psi]$استفاده می‌شود. فضای کاری مورد مطالعه در شکل ۵ نشان داده شده است و به صورت $\varphi \in \left[\frac{-\pi}{۳},\frac{\pi}{۴}\right]$، $\theta=۰$ و $\psi \in \left[\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$تعریف می‌شود. همچنین نمایش دکارتی فضای کاری در شکل ۵ (ب) نشان داده شده است. باید توجه داشت که این فضای کاری برای هر سه ربات یکسان است. برای محاسبه بیشینه خطا در فضای کاری معرفی‌شده، هر یک از ربات‌ها در بیش از ۱۰۰۰ جهت‌گیری مختلف در این فضای کاری قرار داده شده و بیشینه خطای موقعیت آن‌ها محاسبه شده است.

## ۵- مقایسه دقت ربات‌ها

در این بخش، بیشینه خطای موقعیت (جابجایی نقطه‌ای و جهت‌گیری) سکوی متحرک سه ربات موازی کروی معرفی شده در بخش‌های پیشین بر اساس لقی مفاصل محاسبه خواهد شد. به همین منظور ابتدا باید قیدهای موجود در معادله (۲۴) که محدوده خطا را مشخص می‌کنند، تعیین گردند. مقدار این قیدها که در شکل‌های ۳ و ۴ نیز نمایش داده شده‌اند، به صورت زیر فرض شده است:




شکل ۵: فضای کاری ربات‌های موازی کروی با زاویه ثابت $\theta = 0$. (آ) نمایش زاویه‌ای. (ب) نمایش در مختصات دکارتی

**Fig. 5: SPMs workspace with $\theta = 0^{\circ}$. (a) Angular representation. (b) Cartesian representation.**

$$\Delta\theta_{i,j} = 0.01\,\text{rad} = 0.57^{\circ} \tag{۲۸}$$

$$\Delta\rho_{i,j} = 0.1\,\text{mm} \tag{۲۹}$$

$$\Delta\sigma_{i,j} = 0.1\,\text{mm} \tag{۳۰}$$

$$\Delta\varepsilon_{i,j} = 0.2\,\text{mm} \tag{۳۱}$$

همانطورکه پیش‌تر ذکر شد، در مدل استفاده شده در این مقاله می‌توان علاوه بر لقی مفاصل، خطای عملگرها را نیز لحاظ نمود. بدین منظور این خطا به عنوان مؤلفه سوم خطای دورانی در مفاصل فعال در نظر گرفته شده و مقدار بیشینه آن نیز به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\Delta\omega_{i,j} = 0.01\,\text{rad} = 0.57^{\circ} \tag{۳۲}$$

پس از مشخص شدن قیدها، برای یافتن هر یک از مؤلفه‌های خطای سکوی متحرک، معادله (۲۴) باید در هر یک از نقاط مشخص‌شده در فضای کاری ربات که در شکل ۵ نمایش داده شده است، حل شود. در نتیجه برای رسیدن به $\max\,\delta\mathbf{E}$ باید برای هر یک از نقاط، شش مسئله بهینه‌سازی حل گردد.

همانطور که در بخش‌های پیشین اشاره شد، مسئله پیش رو همه شرایط یک مسئله بهینه‌سازی محدب را داراست. به همین دلیل از بسته نرم‌افزاری بهینه سازی سی.وی.ایکس[1] (بسته نرم‌افزاری برای تشخیص و حل مسائل محدب [۳۵ و ۳۶]) برای یافتن پاسخ مسئله استفاده شده است.

جدول‌های ۲ و ۳ مقادیر بیشینه و میانگین شش مؤلفه خطای موقعیت سکوی متحرک در کل فضای کاری سه ربات مورد بررسی را نشان می‌دهند.

همچنین به منظور مقایسه ربات‌ها از نورم ۲ مؤلفه‌های دورانی و مؤلفه‌های انتقالی به‌ترتیب برای نمایش خطای جهت‌گیری و خطای جابجایی نقطه‌ای سکوی متحرک استفاده شده است.

شکل ۶ بیشینه خطای جابجایی نقطه‌ای و خطای جهت‌گیری در فضای کاری مورد نظر برای سه ربات را نشان می‌دهند. همانطورکه در این نمودارها نشان داده شده است، با افزایش زوایا از صفر، میزان خطا نیز افزایش می‌یابد و در مرزهای فضای کاری به بیشترین مقادیر خود می‌رسد.

با توجه به جدول ۲ و شکل ۶ (آ) می‌توان مشاهده نمود که کمترین مقدار بیشینه خطای جابجایی نقطه‌ای متعلق به ربات 3-RRR و برابر است با ۰/۵۷میلی‌متر، در حالی‌که این خطا در دو ساختار دیگر تقریبا برابر است.

در مورد خطای جهت‌گیری نیز ربات ۳-آر.آر.اِس کمترین مقدار بیشینه خطای سکوی متحرک را دارد و برابر است با۶۵/ ۱ درجه.

1 CVX

**جدول۲: مقدار بیشنیه هر یک از مؤلفه‌های خطای موقعیت در کل فضای کاری مورد نظر برای سه ربات موازی کروی**

**Table 2: Maximum values of each component of the moving platform pose error in prescribed workspace for three spms**

| | ۳- آر.اِس.آر | ۳- آر.آر.اِس | ۳- آر.آر.آر |
|---|---|---|---|
| خطای انتقالی در راستای محور $x$ (mm) | ۰/۳۸ | ۰/۳۷ | ۰/۳۴ |
| خطای انتقالی در راستای محور $y$ (mm) | ۰/۳۸ | ۰/۳۷ | ۰/۳۴ |
| خطای انتقالی در راستای محور $z$ (mm) | ۰/۳ | ۰/۳۴ | ۰/۳ |
| خطای دورانی حول محور $x$ (deg) | ۱/۰۲ | ۰/۹۳ | ۱/۳۸ |
| خطای دورانی حول محور $y$ (deg) | ۱/۰۴ | ۱/۰۲ | ۱/۳۸ |
| خطای دورانی حول محور $z$ (deg) | ۰/۹۸ | ۱/۰۴ | ۱/۴۵ |
| خطای جابجایی نقطه‌ای (mm) | ۰/۶۱ | ۰/۶۳ | ۰/۵۷ |
| خطای جهت‌گیری (deg) | ۱/۶۹ | ۱/۶۵ | ۲/۴۳ |

**جدول۳: مقدار میانگین هر یک از مؤلفه‌های خطای موقعیت در کل فضای کاری مورد نظر برای سه ربات موازی کروی**

**Table 3: . Mean values of each component of the moving platform pose error in prescribed workspace for three spms**

| | ۳- آر.اِس.آر | ۳- آر.آر.اِس | ۳- آر.آر.آر |
|---|---|---|---|
| خطای انتقالی در راستای محور $x$ (mm) | ۰/۳۳ | ۰/۳۴ | ۰/۳۲ |
| خطای انتقالی در راستای محور $y$ (mm) | ۰/۳۴ | ۰/۳۵ | ۰/۳۲ |
| خطای انتقالی در راستای محور $z$ (mm) | ۰/۳ | ۰/۳۳ | ۰/۳ |
| خطای دورانی حول محور $x$ (deg) | ۰/۷۸ | ۰/۶۶ | ۱/۲۲ |
| خطای دورانی حول محور $y$ (deg) | ۰/۷۸ | ۰/۷۸ | ۱/۳ |
| خطای دورانی حول محور $z$ (deg) | ۰/۷۸ | ۰/۸ | ۱/۳۱ |
| خطای جابجایی نقطه‌ای (mm) | ۰/۵۶ | ۰/۵۹ | ۰/۵۵ |
| خطای جهت‌گیری (deg) | ۱/۴۱ | ۱/۳ | ۲/۲۱ |

علاوه بر این مقادیر میانگین بیشینه خطای جابجایی نقطه‌ای و جهت‌گیری نیز در جدول ۳ نشان داده شده‌اند. در این مورد نیز کمترین مقدار میانگین خطای جابجایی نقطه‌ای و جهت‌گیری به ترتیب به ربات‌های 3-RRR و ۳-آر.آر.اِس تعلق دارد.

## ۶- مقایسه مدل پیشنهادی با شاخص‌های عملکرد

تاکنون شاخص‌های مختلفی برای اندازه‌گیری میزان کارایی و دقت ربات‌ها معرفی شده‌اند. این شاخص‌ها بر مبنای ژاکوبین ربات هستند. از این رو باید ابتدا ژاکوبین سه ربات مورد بررسی قرار گیرد (نحوه محاسبه ژاکوبین ربات در پیوست ارائه شده است).

رابطه بین سرعت مفاصل فعال، $\dot{\theta}$، و سرعت زاویه‌ای سکوی متحرک، $\omega$، را می‌توان به صورت زیر نشان داد [۱۸]:

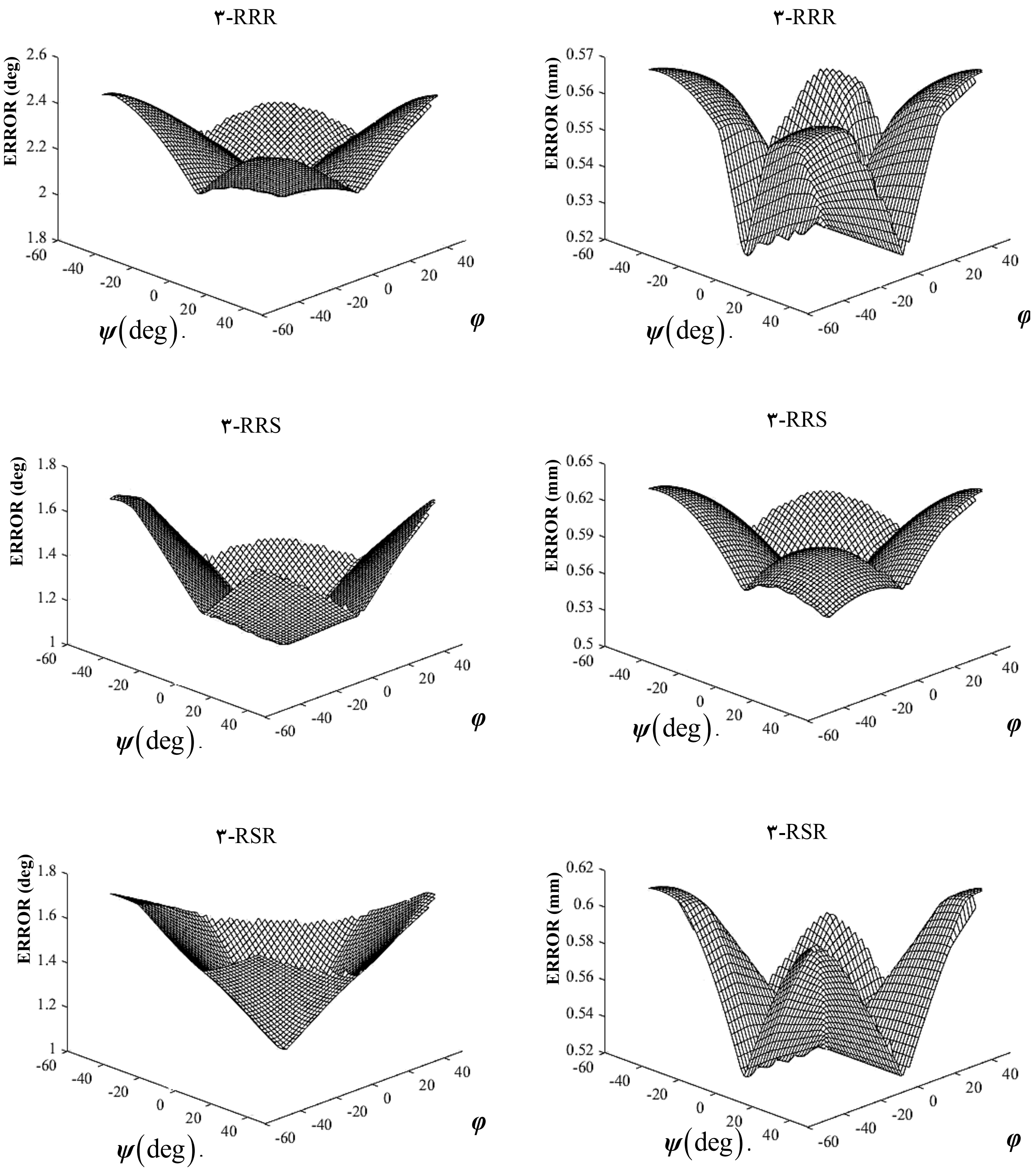
$$\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{۳۳}$$

که در آن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ماتریس ژاکوبین مستقیم و معکوس ربات موازی نامیده شده و با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (w_1 \times v_1)^T \\ (w_2 \times v_2)^T \\ (w_3 \times v_3)^T \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (w_1 \times v_1)^T u_1 & 0 & 0 \\ 0 & (w_2 \times v_2)^T u_2 & 0 \\ 0 & 0 & (w_3 \times v_3)^T u_3 \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

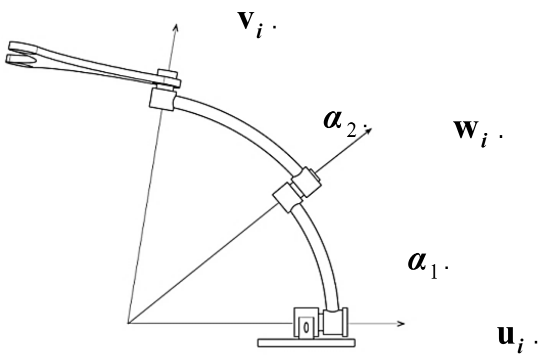
نحوه محاسبه ژاکوبین ربات در پیوست ذکر گردیده است. لازم به ذکر است که فضای کاری معرفی‌شده برای ربات، فضای کاری عاری از تکینگی است و ماتریس‌های ژاکوبین معرفی‌شده در این فضای کاری معکوس‌پذیرند.




(ب) (آ)

**شکل ۶: (آ) بیشینه خطای جابجایی نقطه‌ای سه ربات موازی کروی در فضای کاری تعریف‌شده. (ب) بیشینه خطای جهت‌گیری سه ربات موازی کروی در فضای کاری تعریف‌شده.**

**Fig. 6: (a) Maximum position error of three types of SPMs in defined workspace. (b) Maximum orientation error of three types of SPMs in defined workspace.**




**شکل ۷: پارامترهای هندسی یک بازو**

**Fig. 7: One limb geometric parameters**

همانطورکه در شکل ۷ نشان داده شده است، $u_i$ ،$w_i$ و $v_i$ به ترتیب محورهای مفصل فعال، مفصل میانی و مفصل متصل به سکوی متحرک هر یک از بازوها هستند.

در نهایت ژاکوبین ربات‌های مذکور به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\theta} = \mathbf{K}\omega \tag{۳۶}$$

که در این رابطه $\mathbf{K}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \tag{۳۷}$$

مرلت [۳۳] به صورت جامع به بررسی این شاخص‌ها پرداخته است. در این بخش به صورت خلاصه متداول‌ترین شاخص‌های سینماتیکی- استاتیکی معرفی خواهند شد.

## حرکت‌پذیری

حرکت‌پذیری[1] در ربات‌های موازی با رابطه زیر تعریف می‌شود [۳۷]:

$$\mu \equiv 1/\sqrt{\det\left(\mathbf{K}^T\mathbf{K}\right)} \tag{۳۸}$$

در واقع از نظر هندسی، حرکت‌پذیری شاخصی است که حجم بیضی‌گون در فضای کاری بدست‌آمده با استفاده از نگاشت با ماتریس $\mathbf{K}$ را با حجم کره $n$-بعدی در فضای مفصلی مرتبط می‌سازد. بنابراین این شاخص مقیاسی از میزان حرکت مجری نهایی بر اساس جابجایی در مفاصل فعال را دراختیار می‌گذارد. با این حال این شاخص اطلاعاتی راجع به شکل بیضی‌گون در اختیار نمی‌گذارد.

## مهارت

یک شاخص محلی دیگر مهارت[2] است که در واقع عدد وضعیت[3] ماتریس ژاکوبین بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

1 Manipulability
2 Dexterity
3 Condition Number

$$\kappa \equiv \|\mathbf{K}\|\|\mathbf{K}^{-1}\| \tag{۳۹}$$

عدد وضعیت حد بالای میزان تشدید خطای نسبی را مشخص می‌کند. در رابطه فوق $\|*\|$ نشان‌دهنده نورم ماتریس است. عدد وضعیت همواره در بازه $[1\ \ \infty]$ قرار دارد. از این رو در این مقاله از عکس عدد وضعیت که در بازه $[0\ \ 1]$ است، برای نمایش آن استفاده می‌شود.

## حساسیت سینماتیکی

یکی از نقاط ضعف مهم دو شاخص پیشین این است که در ربات‌هایی که هم درجه آزادی دورانی و هم درجه آزادی انتقالی دارند، به عبارت دیگر ژاکوبین آن‌ها همگن نیست، این دو شاخص کمیت فیزیکی معناداری ارائه نمی‌دهند. از این‌رو شاخص دیگری با نام حساسیت سینماتیکی[4] معرفی شده است. با توجه به مرجع [۲۷]، حساسیت سینماتیکی به صورت بیشینه جابجایی (انتقال یا دوران) مجری نهایی در اثر جابجایی عملگرها با نورم واحد در فضای مفصلی تعریف می‌شود. در حالت کلی دو نوع حساسیت سینماتیکی دورانی و انتقالی وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

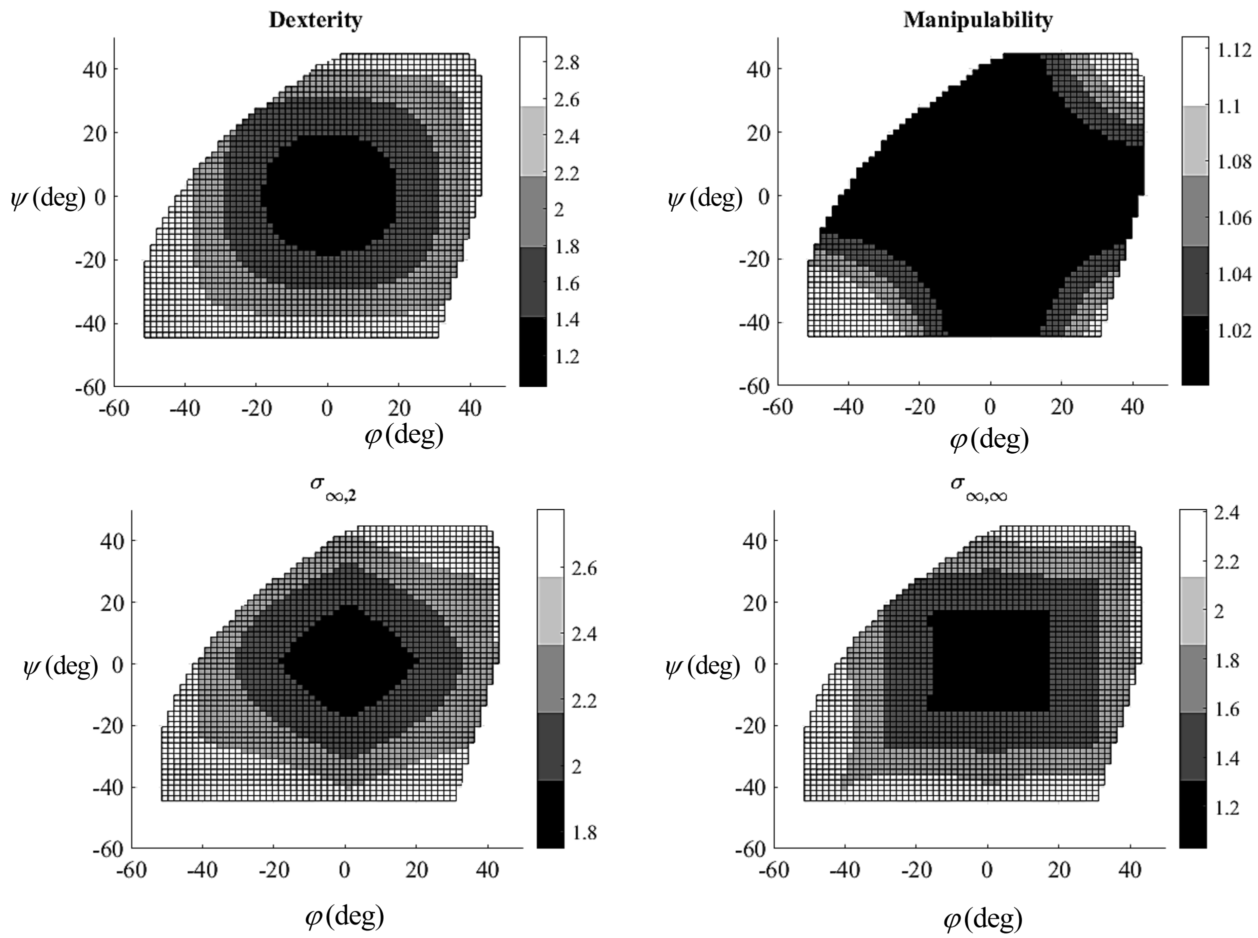
$$\sigma_{r_{c,f}} \equiv \max_{\rho_c=1} \phi_f \quad , \quad \sigma_{p_{c,f}} \equiv \max_{\rho_c=1} \mathbf{p}_f \tag{۴۰}$$

که در آن اندیس‌های $r$ و $p$ به ترتیب برای حساسیت سینماتیکی دورانی و انتقالی به کار می‌روند. همچنین اندیس‌های $c$ و $f$ به ترتیب مرتبه نورم قید و نورم تابع هدف را نشان می‌دهند.

همانطورکه در روابط مربوط به شاخص‌های معرفی‌شده مشاهده می‌شود، نورم انتخابی برای بدست آوردن این شاخص‌ها بسیار مهم می‌باشد. مرلت [۳۳] نشان داد که باید خطای جابجایی مفصلی را مستقل در نظر گرفت، از این رو باید از نورم $\infty$ برای مشخص نمودن عدم قطعیت مفاصل در فضای مفصلی استفاده نمود و در این مقاله نیز از نورم $\infty$ای نمایش خطا در فضای مفصلی استفاده خواهد شد. سعادت‌زی و همکاران [۳۲] نیز از ترکیبات مرتبه‌های نورم ۲ و $\infty$ برای بدست آوردن شاخص‌های حساسیت سینماتیکی استفاده کردند.

با توجه به مطالب ارائه‌شده در این بخش، واضح است که هر یک از شاخص‌های معرفی‌شده مزایا و معایبی دارند و هیچ یک تعریف کاملی از عملکرد ربات ارائه نمی‌دهند. از این‌رو در این بخش از مقاله به

4 Kinematic Sensitivity




**شکل ۸: شاخص‌های عملکرد در فضای کاری تعریف‌شده.**

**Fig. 8: Performance indices in defined workspace.**

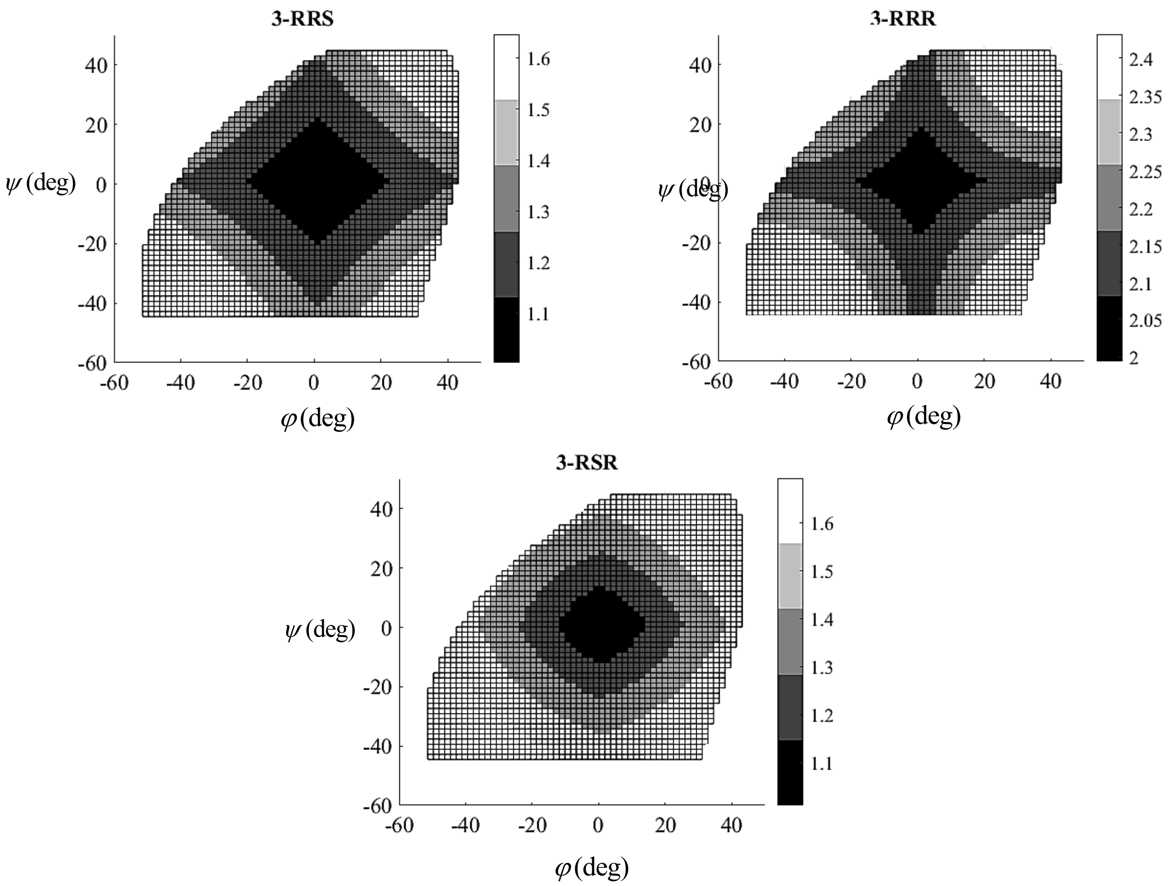
بررسی و مقایسه شاخص‌های فوق با مدل ارائه‌شده خواهیم پرداخت تا مشخص گردد، کدام شاخص با دقت ربات تطابق بیشتری دارد. در این راستا هر یک از شاخص‌های معرفی‌شده، در فضای کاری مشخص‌شده، محاسبه و در شکل ۸ نمایش داده شده‌اند.

همانطورکه پیش‌تر ذکر شد، به دلیل اینکه ژاکوبین هر سه ربات یکسان است، در نتیجه شاخص‌های معمول که مبتنی بر ژاکوبین هستند برای سه ربات یکسان است. از آنجاکه این ربات فقط سه درجه آزادی دورانی دارد، این شاخص‌ها تنها عملکرد دورانی ربات را نشان می‌دهند. در نتیجه برای مقایسه شاخص‌های مذکور با بیشینه خطای سکوی متحرک، تنها می‌توان از بیشینه خطای جهت‌گیری استفاده نمود. شکل ۹ نمای دیگری از بیشینه خطای جهت‌گیری در فضای کاری مورد نظر را برای هر یک از سه ربات نشان می‌دهد. همانطور که در شکل‌های ۸ و ۹ مشخص است، شاخص حرکت‌پذیری نسبت به دقت ربات حساسیت زیادی نداشته و میزان تغییرات آن بسیار اندک است.

همچنین روند افزایش مقدار دو شاخص مهارت و شاخص حساسیت سینماتیکی با نورم قیدی ∞ و نورم تابع هدف ∞ ($\sigma_{\infty,\infty}$) نیز منطبق بر روند افزایش خطا در فضای کاری نمی‌باشد. اما با مقایسه نمودار شاخص حساسیت سینماتیکی با نورم قیدی ∞ نورم تابع هدف ۲ ($\sigma_{\infty,2}$) با نمودار بیشینه خطای سه ربات معرفی‌شده، می‌توان دریافت که روند میزان افزایش این شاخص تطابق خوبی با میزان افزایش خطای مجری نهایی دارد. از این‌رو می‌توان این شاخص را به عنوان مناسب‌ترین شاخص برای بررسی دقت ربات پیشنهاد نمود.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک ربات موازی کروی (3-RRR) با ساختار بیشینه‌مقید و دو ساختار نابیشینه‌مقید (۳-آر.آر.اِس و ۳-آر.اِس.آر) از نقطه نظر دقت مقایسه شدند. بدین منظور مدلی برای یافتن بیشینه خطای مجری نهایی بر اساس لقی در مفاصل ارائه شد که به یک




شکل ۹ : بیشینه خطای جهت‌گیری سه ربات موازی کروی در فضای کاری تعریف‌شده  از نمایی دیگر.

**Fig. 9: Maximum orientation error of three types of SPMs in defined workspace from top view**

مسئله بهینه‌سازی محدب منجر گردید. سپس برای یافتن بیشینه خطای مجری نهایی در فضای کاری مورد مطالعه، بیش از ۱۰۰۰ جهت‌گیری به منظور پوشش این فضای کاری در نظر گرفته شد. پس از آن شش مسئله بهینه‌سازی محدب برای بدست آوردن بیشینه مقدار مؤلفه‌های خطای مجری نهایی در هر یک از این جهت‌گیری‌ها حل گردید. نتایج نشان داد که کمترین مقدار بیشینه خطای جابجایی نقطه‌ای به ربات 3-RRR متعلق است. اما در مورد بیشینه خطای جهت‌گیری ربات‌های با ساختار نابیشینه مقید، خطای کمتری دارند و ربات ۳-آر.آر.اِس با اختلافی اندک، بیشینه خطای کمتری دارد. این نتایج ثابت می‌کنند که می‌توان از ساختارهای نابیشیه مقید در طراحی ربات‌های موازی کروی استفاده نمود و در عین حال از دقت بالا نیز برخوردار بود. از سوی دیگر این ساختارها معایب ساختار بیشینه مقید نظیر دشوار بودن مونتاژ و هزینه ساخت زیاد را ندارند. در گام آخر نیز مقایسه‌ای بین شاخص‌های عملکردی با دقت ربات‌های بررسی شده در این پژوهش، صورت گرفت. در نهایت نتایج نشان دادند که شاخص حساسیت سینماتیکی $\sigma_{\infty,2}$ بیشترین مطابقت را با دقت بدست آمده با مدل ارائه‌شده در این پژوهش داراست.

## منابع

[1] C.M. Gosselin, J.-F. Hamel, The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device, in: Robotics and Automation, 1994. Proceedings., 1994 IEEE International Conference on, IEEE, 1994, pp. 781-786.

[2] A. Safaryazdi, M. Zarei, O. Abolghasemi, M. Tale Masouleh, Experimental study on the model-based control of a 2-degree-of-freedom spherical parallel robot camera stabilizer based on multi-thread programming concept, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 232(10) (2018) 1882-1897.

non-overconstrained spherical parallel manipulator, Journal of Mechanical Design, 126(5) (2004) 850-855.

[13] X. Kong, C.M. Gosselin, Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators, The International Journal of Robotics Research, 23(3) (2004) 237-245.

[14] A. Chaker, A. Mlika, M. Laribi, L. Romdhane, S. Zeghloul, Accuracy analysis of non-overconstrained spherical parallel manipulators, European Journal of Mechanics-A/Solids, 47 (2014) 362-372.

[15] A. Chaker, A. Mlika, M. Laribi, L. Romdhane, S. Zeghloul, Clearance and manufacturing errors' effects on the accuracy of the 3-RCC Spherical Parallel Manipulator, European Journal of Mechanics-A/Solids, 37 (2013) 86-95.

[16] S. Venanzi, V. Parenti-Castelli, A new technique for clearance influence analysis in spatial mechanisms, Journal of Mechanical Design, 127(3) (2005) 446-455.

[17] J. Meng, D. Zhang, Z. Li, Accuracy analysis of parallel manipulators with joint clearance, Journal of Mechanical Design, 131(1) (2009) 011013.

[18] N. Binaud, P. Cardou, S.p. Caro, P. Wenger, The kinematic sensitivity of robotic manipulators to joint clearances, in: ASME 2010 International Design engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2010, pp. 1371-1380.

[19] S. Mojtaba, S. Mousavi, A. Khoogar, M.T. Masouleh, Accuracy Comparison of Spherical Parallel Manipulators Based on Joint Clearance, in: 2017 5th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM), IEEE, 2017, pp. 570-575.

[20] G. Wu, S. Bai, S. Caro, Transmission Quality Evaluation for a Class of Four-limb Parallel Schönflies-motion Generators with Articulated Platforms, in: Computational Kinematics, Springer, 2018, pp. 282-290.

[3] A. Chaker, A. Mlika, M.A. Laribi, L. Romdhane, S. Zeghloul, Synthesis of spherical parallel manipulator for dexterous medical task, Frontiers of Mechanical Engineering, 7(2) (2012) 150-162.

[4] M.T. Masouleh, M.H. Saadatzi, C.m. Gosselin, H.D. Taghirad, A geometric constructive approach for the workspace analysis of symmetrical 5-PRUR parallel mechanisms (3T2R), in: ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2010, pp. 1335-1344.

[5] C. Gosselin, J. Angeles, The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator, Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design, 111(2) (1989) 202-207.

[6] C.M. Gosselin, É. St-Pierre, Development and experimentation of a fast 3-DOF camera-orienting device, The International Journal of Robotics Research, 16(5) (1997) 619-630.

[7] S. Bai, Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace, Mechanism and Machine Theory, 45(2) (2010) 200-211.

[8] M. Daneshmand, M.H. Saadatzi, M.H.F. Kaloorazi, M.T. Masouleh, G. Anbarjafari, Optimal design of a spherical parallel manipulator based on kinetostatic performance using evolutionary techniques, Journal of Mechanical Science and Technology, 30(3) (2016) 1323-1331.

[9] R. Di Gregorio, A new parallel wrist using only revolute pairs: the 3-RUU wrist, Robotica, 19(3) (2001) 305-309.

[10] K. Al-Widyan, X.Q. Ma, J. Angeles, The robust design of parallel spherical robots, Mechanism and Machine Theory, 46(3) (2011) 335-343.

[11] M. Karouia, J.M. Hervé, An orientational 3-dof parallel mechanism, in: Proceedings of the 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, Chemnitz, Germany, April, 2002, pp. 23-25.

[12] R. Di Gregorio, The 3-RRS wrist: a new, simple and

[21] M. Gallant, C. Gosselin, Singularities of a planar 3-RPR parallel manipulator with joint clearance, Robotica, (2018) 1-12.

[22] J. Zhu, K.-L. Ting, Uncertainty analysis of planar and spatial robots with joint clearances, Mechanism and Machine Theory, 35(9) (2000) 1239-1256.

[23] C. Innocenti, Kinematic clearance sensitivity analysis of spatial structures with revolute joints, Journal of mechanical design, 124(1) (2002) 52-57.

[24] M.-J. Tsai, T.-H. Lai, Accuracy analysis of a multi-loop linkage with joint clearances, Mechanism and machine theory, 43(9) (2008) 1141-1157.

[25] P. Voglewede, I. Ebert-Uphoff, Application of workspace generation techniques to determine the unconstrained motion of parallel manipulators, Journal of Mechanical Design, 126(2) (2004) 283-290.

[26] P.D. Lin, J.F. Chen, Accuracy analysis of planar linkages by the matrix method, Mechanism and Machine Theory, 27(5) (1992) 507-516.

[27] P. Cardou, S. Bouchard, C. Gosselin, Kinematic-sensitivity indices for dimensionally nonhomogeneous jacobian matrices, IEEE Transactions on Robotics, 26(1) (2010) 166-173.

[28] M. Daneshmand, M.H. Saadatzi, M.T. Masouleh, Kinematic sensitivity and workspace optimization of planar parallel mechanisms using evolutionary techniques, in: Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013 First RSI/ISM International Conference on, IEEE, 2013, pp. 384-389.

[29] M. Saadatzi, M.T. Masouleh, H. Taghirad, C. Gosselin, M. Teshnehlab, Multi-objective Scale Independent Optimization of 3-RPR Parallel Mechanisms, Proceedings of the IFToMM, (2011).

[30] A.G. Hoevenaars, C. Gosselin, P. Lambert, J.L. Herder, Experimental validation of Jacobian-based stiffness analysis method for parallel manipulators with nonredundant legs, Journal of Mechanisms and Robotics, 8(4) (2016) 041002.

[31] A. Hoevenaars, C. Gosselin, P. Lambert, J. Herder, Consistent modeling resolves asymmetry in stiffness matrices, Mechanism and Machine Theory, 105 (2016) 80-90.

[32] M.H. Saadatzi, M.T. Masouleh, H.D. Taghirad, C. Gosselin, P. Cardou, Geometric analysis of the kinematic sensitivity of planar parallel mechanisms, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 35(4) (2011) 477-490.

[33] J.-P. Merlet, Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots, Journal of Mechanical Design, 128(1) (2006) 199-206.

[34] C.M. Gosselin, E.S. Pierre, M. Gagne, On the development of the agile eye, IEEE Robotics & Automation Magazine, 3(4) (1996) 29-37.

[35] M.C. Grant, S.P. Boyd, Graph implementations for nonsmooth convex programs, in: Recent advances in learning and control, Springer, 2008, pp. 95-110.

[36] M. Grant, S. Boyd, Y. Ye, CVX: Matlab software for disciplined convex programming, in, 2008.

[37] T. Yoshikawa, Analysis and control of robot manipulators with redundancy, in: Robotics research: the first international symposium, MIT press Cambridge, MA, USA, 1984, pp. 735-747.

## پیوست

### نحوه محاسبه ژاکوبین

در این بخش با استفاده از تئوری پیچه و تویست مربوط به مفاصل، نحوه محاسبه ژاکوبین ربات با توجه به [۶] شرح داده می‌شود. سه پیچه واحد مربوط به مفاصل هر شاخه که در شکل ۷ نمایش داده شده است، به صورت زیر هستند:

$$\hat{\$}_{ui} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\$}_{wi} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\$}_{vi} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (۴۱)$$

همچنین سرعت زاویه‌ای متناظر با مفصل فعال هر شاخه با $\dot{\theta}_i$، مفصل میانی با $\dot{\varphi}_i$ و مفصل متصل به سکوی متحرک با $\dot{\sigma}_i$ نمایش داده می‌شود. با در نظر گرفتن هر شاخه به عنوان یک زنجیره سینماتیکی باز و نمایش تویست سکوی متحرک با $\$_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_e^T & \mathbf{v}_o^T \end{bmatrix}$، می‌توان آن را به صورت جمع تویست‌های مفاصل هر شاخه و به صورت زیر نوشت:

$$\$_e = \dot{\theta}_i \, \hat{\$}_{ui} + \dot{\varphi}_i \, \hat{\$}_{wi} + \dot{\sigma}_i \, \hat{\$}_{vi} \qquad (۴۲)$$

برای بدست آوردن ماتریس ژاکوبین ورودی- خروجی، باید معادله فوق را در رنچی که فقط با پیچه مفاصل غیرفعال متقابل است، ضرب نماییم. از این رو رنچ متقابل پیچه مفاصل غیرفعال ( $\hat{\$}_{wi}$و $\hat{\$}_{vi}$)، رنچی است که به صفحه متشکل از بردارهای $\hat{\mathbf{w}}_i$ و $\hat{\mathbf{v}}_i$ عمود بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times1} \\ \hat{\mathbf{w}}_i \times \hat{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix} \qquad (۴۳)$$

حال با ضرب متقابل دو طرف معادله (۴۲) در رنچ فوق و با توجه به صفر بودن سرعت خطی مجری نهایی، ماتریس ژاکوبین این ربات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۴۴)$$

که در آن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ژاکوبین مستقیم و معکوس نامیده شده و به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_1)^T \\ (\hat{\mathbf{w}}_2 \times \hat{\mathbf{v}}_2)^T \\ (\hat{\mathbf{w}}_3 \times \hat{\mathbf{v}}_3)^T \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_1)^T \mathbf{u}_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{\mathbf{w}}_2 \times \hat{\mathbf{v}}_2)^T \mathbf{u}_2 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{\mathbf{w}}_3 \times \hat{\mathbf{v}}_3)^T \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

در نهایت ژاکوبین کامل ربات که رابطه بین سرعت مفاصل فعال و سرعت مجری نهایی را نشان می‌دهد، با J نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}_e \qquad (۴۷)$$

این صفحه عمداً خالی است