نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۸، سال ۱۳۹۹، صفحات ۲۱۶۱ تا ۲۱۷۶
DOI: 10.22060/mej.2019.15181.6060

مدل‌سازی میرایی در میکرومحرک‌های پیچشی دو محوره با درنظر گرفتن خمش تیرهای نگهدارنده

مژده خادم‌باشی[۱]، حمید معین‌فرد[۲]*

[۱] دانشکده مهندسی مکانیک ، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
[۲] قطب علمی رایانش نرم وپردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

خلاصه: میکرومحرک‌های پیچشی در کاربردهای متعددی از جمله سوئیچ‌های نوری، تصویربرداری زیست پزشکی و نورشناسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. میرایی لایه هوای فشرده یکی از مکانیزم‌های اتلاف انرژی در این میکرومحرک‌ها می‌باشد. این میرایی، یک عامل کلیدی در تعیین عملکرد دینامیکی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌باشد که به طور گسترده مورد توجه محققان قرار گرفته است. هدف از این مقاله نیز، مدل‌سازی میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌های پیچشی دو محوره با درنظر گرفتن اثر خمشی تیرهای نگهدارنده می‌باشد. بدین منظور ابتدا معادله رینولدز حاکم بر رفتار هوا حبس شده در زیر میکرومحرک نوشته و سپس با توجه به شرایط مسئله و صرف‌نظر از اثرات اینرسی هوا در مقایسه با اثرات لزجت، معادله رینولدز، ساده‌سازی شده است. معادله حاصل پس از بی‌بعدسازی، با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، حل شده و توزیع فشار هوای فشرده به دست آمده است. از توزیع فشار حاصله به منظور محاسبه نیرو و گشتاور میرایی لایه هوای فشرده استفاده شده است. در ادامه، تأثیر پارامترهای طراحی میکرومحرک دو محوره روی گشتاورهای میرایی بررسی شد و برای تحلیل دقیق‌تر اثر این پارامترها برروی گشتاورها و نیروی بابعد نیز مورد مطالعه قرار گرفت. از نتایج این مقاله می‌توان به خوبی برای مدل‌سازی دقیق دینامیک و کنترل میکرومحرک‌های پیچشی استفاده کرد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۰۷-۰۸-۱۳۹۷
بازنگری: ۰۴-۱۲-۱۳۹۷
پذیرش: ۲۰-۱۲-۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۰۵-۰۱-۱۳۹۸

کلمات کلیدی:
میکرومحرک پیچشی
میرایی لایه فشرده
خمش تیرهای نگهدارنده
روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ

۱- مقدمه

میکرومحرک‌های پیچشی برپایه تکنولوژی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی نوری[۱] در محدوده وسیعی نظیر ارتباطات نوری، تصویربرداری زیست‌پزشکی و نورشناسی [۱] به کار گرفته می‌شوند. میکرومحرک‌ها معمولاً بر اساس نحوه تحریک آن‌ها به چند دسته تقسیم‌بندی می‌شوند. رایج‌ترین روش‌های تحریک شامل تحریک الکترواستاتیکی، تحریک الکترومکانیکی، تحریک الکترومغناطیسی و تحریک پیزوالکتریک است. روش تحریک الکترواستاتیکی به دلیل مصرف کم انرژی، پاسخ‌دهی سریع و راحتی در راه‌اندازی آن بیشتر از دیگر روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین منظور برای بهبود در دقت تشخیص و عملکرد تحریک میکرومحرک‌ها، فاصله بین صفحات خازنی مینیمم و مساحت الکترودها ماکزیمم اختیار می‌شود.

در نتیجه فاصله کمی بین دو صفحه ایجاد می‌شود که حرکت هوای عمود بر سطح را محدود می‌کند. این شرایط باعث می‌شود مکانیزم انرژی از دست دهد که در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، به عنوان میرایی لایه هوای فشرده شناخته شده است.

میرایی لایه هوای فشرده، به علت جابجایی حجم عظیمی از مولکول‌های هوای محبوس، به بیرون از فضای بین الکترودها می‌باشد که مخالف با سرعت هوا حرکت می‌کنند. زمانی‌که با حرکت صفحات، فاصله بین آن‌ها کمتر می‌شود، هوا از لبه‌ی آن‌ها خارج می‌شود. مسیر باریک موجود، جریان را آهسته می‌کند و درنتیجه فشار هوا افزایش می‌یابد. این افزایش فشار باعث کاهش سرعت حرکت صفحات می‌شود. توزیع فشار زیر صفحات می‌تواند شبیه به یک نیروی میرایی و یا فنر عمل کند که باعث از دست دادن انرژی می‌شود [۲].

در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، از خازن‌هایی با صفحات موازی استفاده می‌شود که یکی از صفحات به صورت الکترواستاتیکی

1 Micro Opto Electro Mechanical Systems (MOEMS)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_moeenfard@um.ac.ir

تحریک شده و اندازه حرکت صفحه به کمک تغییر ظرفیت خازن، تشخیص داده می‌شود. در حالت کلی، نیروهای حجمی مانند نیروی جاذبه و اینرسی که بر روی یک سیستم کار انجام می‌دهند با توان سوم طول رابطه مستقیم دارند، در حالی که نیروهای سطحی مانند نیروی لزجت، با مجذور طول رابطه مستقیم دارند. به همین دلیل نیروهای سطحی‌ای که در یک سیستم با ابعاد معمولی، می‌توان از تأثیرشان صرف‌نظر کرد، نقش بسیار مهمی در سیستم‌هایی با ابعاد میکرو و نانو، بازی می‌کنند و با کاهش بیشتر ابعاد،تأثیرشان پررنگ‌تر می‌شود [۳]. در چنین شرایطی میرایی لایه فشرده هوا بین صفحات به مهم‌ترین عامل میراسازی در سیستم تبدیل می‌شود. حرکت انبوه هوای به دام افتاده در بین صفحات می‌خواهد به فضای خارج برود ولی لزجت هوا از این حرکت ممانعت می‌کند. توزیع فشار ایجاد شده در هوا، تحت تأثیر این مکانیزم به نحویست که نتیجه آن می‌تواند یک نیروی میرایی، یک نیروی فنری و یا ترکیبی از آن دو باشد [۴].

با پیشرفت سریع در تکنولوژی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در دهه‌های اخیر، نیاز به فهم بهتر قانون میرایی لایه هوای فشرده و تأثیر آن بر روی حرکت میکروسازه‌ها امری ضروری شده است. بدین منظور پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه بررسی رفتار میکروسازه‌ها تحت تأثیر میرایی لایه هوای فشرده وجود دارد. به عنوان مثال، دیاب و لاکیس [۵] با استفاده از یک شبیه‌ساز عددی به بررسی رفتار لایه هوا در میکروتیرها پرداختند. در این پژوهش برخلاف دیگر مقالات، میکروتیر تحت یک جابجایی هارمونیک با دامنه‌ی بالا، بین نقطه تعادل و صفحه زیرین ثابت، قرار دارد. آن‌ها رفتار فشار هوای فشرده شده در میکروتیر را، تحت شرایط متفاوت شبیه‌سازی، مورد بررسی قرار دادند. یعقوبی‌زاده و یونس [۶] به بررسی رفتار غیرخطی و تأثیر آن روی میرایی لایه هوای فشرده و پاسخ میکروتیر دو سر گیردار، تحت شوک مکانیکی پرداختند. آن‌ها پاسخ میکروتیر را تحت فشارهای مختلف هوای محیط، فاصله‌ی میان صفحات گوناگون و دامنه‌های متفاوت شوک، بررسی کردند. نتایج نشان داد که برای سیستم‌هایی که با هوا کار می‌کنند، میرایی فیلم فشرده می‌تواند به منظور کمینه کردن جابجایی میکروسازه‌ی قرار گرفته‌شده تحت شوک و ضربه، مورد استفاده قرار گیرد.

علاوه بر بررسی رفتار میرایی لایه هوای فشرده در میکروتیرها، محققان به بررسی این رفتار در میکروصفحات نیز پرداخته‌اند. یونس و نایفه [۷] یک روش جدید برای شبیه‌سازی میرایی لایه فشرده هوا، در میکروصفحات تحت بار الکترواستاتیک زیاد، ارائه دادند. این روش توانایی تخمین ضریب کیفیت میکروصفحه را تا ناپایداری کششی، تحت محدوده ای از فشار هوا و بار الکترواستاتیک، دارا می‌باشد. نتایج نشان از تأثیر فشار و نیروی الکترواستاتیک روی شکل مودهای سازه، فرکانس طبیعی و ضریب کیفیت را دارد. نویل [۸] مشاهده کرد اثر میرایی هوای اطراف سیستم هنگامی که یک صفحه در نزدیکی صفحه‌ی دیگری نوسان می‌کند، افزایش پیدا می‌کند و این امر به دلیل نقشی است که لایه‌ی هوای حبس شده‌ی بین صفحات بازی می‌کند. هم‌چنین نتیجه گرفت، اگر ضخامت لایه‌ی هوای حبس شده بین دو صفحه از یک سوم عرض صفحات کمتر باشد، میرایی لایه‌ی هوای حبس شده از میرایی نیروی درگ نیز بیشتر می‌شود.

میکرومحرک‌ها برپایه مود کاری آن‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند، میکرومحرک‌های پیستونی و میکرومحرک‌های پیچشی. میکرومحرک‌های پیستونی درست مانند یک پیستون در جهت عمود بر آینه به سمت بالا و پایین حرکت می‌کنند و میکروآینه‌های پیچشی حول یک محور دوران می‌کنند. فینی و ریسمی [۹] به بررسی رفتار میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌های پیستونی پرداختند. هم‌چنین در این مقاله تأثیر الگوی سوراخ بر روی میرایی لایه هوای فشرده مورد بررسی قرار گرفت.

فینی و ریسمی [۲] به مطالعه میرایی لایه فشرده هوا در ساختار میکرومحرک‌ها پرداختند. تحلیل میرایی برای ترکیب مواد متفاوت که دارای کمترین ضریب میرایی و بهینه‌ترین ضریب کیفیت می‌باشند، انجام شده است. هم‌چنین تأثیر میرایی روی فشار محیط مورد بررسی قرار گرفته است. معین‌فرد و همکاران [۴] از روش کانترویچ گسترش یافته به منظور حل مسئله میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌های پیچشی بهره بردند. آن‌ها نشان دادند زمانی که زاویه میکرومحرک کوچک است، میرایی نیز رفتار لزج خطی دارد. فامیله و همکاران [۱۰] به تحلیل تولید آنتروپی در میکرومحرک‌های پیچشی پرداختند. آن‌ها گزارشی از تأثیر ویژگی‌های هندسی و دینامیکی میکرومحرک و میرایی لایه هوا فشرده بر تولید آنتروپی و توزیع پارامترهای هیدرودینامیک میکرومحرک، ارائه دادند.

ضریب میرایی لایه فشرده هوا، تابعی از لزجت و فشار هوا است و یک معادله‌ی غیرخطی بر آن حاکم می‌باشد. ملیحی و همکاران [۱۱]

به بررسی تأثیر شرایط اولیه غیرصفر و تأثیر ضرایب غیرخطی میرایی لایه هوای فشرده در پایداری میکرومحرکهای پیچشی پرداختند. هم‌چنین معین‌فرد و همکاران [۱۲] با درنظر گرفتن تأثیر خمش در میکروتیرهای پیچشی، یک مدل تحلیلی برای مسئله میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌ها ارائه دادند. نتایج نشان داد که در مورد زاویه‌های کوچک، میرایی لایه هوای فشرده را می‌توان با یک میرایی لزج خطی در هر دو جهت پیچشی و محوری مدل کرد. هم‌چنین زمانی که زاویه کوچک است، با افزایش طول میکرومحرک، نیروی میرایی و گشتاور میرایی افزایش می‌یابد. اما در رابطه با زاویه‌های محدود، مشاهده شد که گشتاور میرایی شدیداً وابسته به زاویه میکرومحرک و نسبت سرعت زاویه‌ای و انتقالی است، پس نمی‌توان از تأثیر سرعت انتقالی بر نیرو و گشتاور میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک صرف نظر کرد.

در تمام مقالاتی که میرایی میکرومحرک‌های پیچشی را مورد بررسی قرار داده‌اند، از خاصیت خمش تیرهای نگهدارنده میکرومحرک‌های پیچشی صرف نظر شده که این عامل باعث ایجاد خطا در پیش‌بینی پاسخ سیستم خواهد شد. تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند، تنها مرجعی که خمش میکروتیرهای پیچشی نگهدارنده را در مدل‌سازی میرایی لایه‌ی فشرده‌ی سیال لحاظ کرده بود، مرجع [۱۲] است. اما تاکنون مسئله میرایی لایه فشرده هوا در میکرومحرک‌های پیچشی دو محوره، مورد بررسی قرار نگرفته است.

با توجه به توضیحات داده شده، در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، میرایی لایه فشرده‌ی هوا یک مسئله مهم محسوب می‌شود که باید به آن بیش‌تر پرداخت و مدلی برای پیش‌بینی آن به دست آورد. در این مقاله به مدل‌سازی میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک پیچشی دو محوره، پرداخته شده است. ابتدا معادله رینولدز حاکم بر رفتار هوای حبس شده در زیر میکرومحرک نوشته شده و سپس با توجه به شرایط مسئله و صرف‌نظر از اثرات اینرسی هوا در مقایسه با اثرات لزجت، معادله ساده‌سازی شده است. در ادامه معادله‌ی حاصل را بی‌بعد کرده و با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ ، معادله حل شده و توزیع فشار هوای فشرده به دست آمده است. از توزیع فشار حاصله به منظور محاسبه نیرو و گشتاورهای میرایی لایه هوای فشرده استفاده شده است. در انتها تأثیر پارامترهای طراحی میکرومحرک دو محوره روی نیرو و گشتاورهای میرایی مورد بررسی قرار گرفته است.

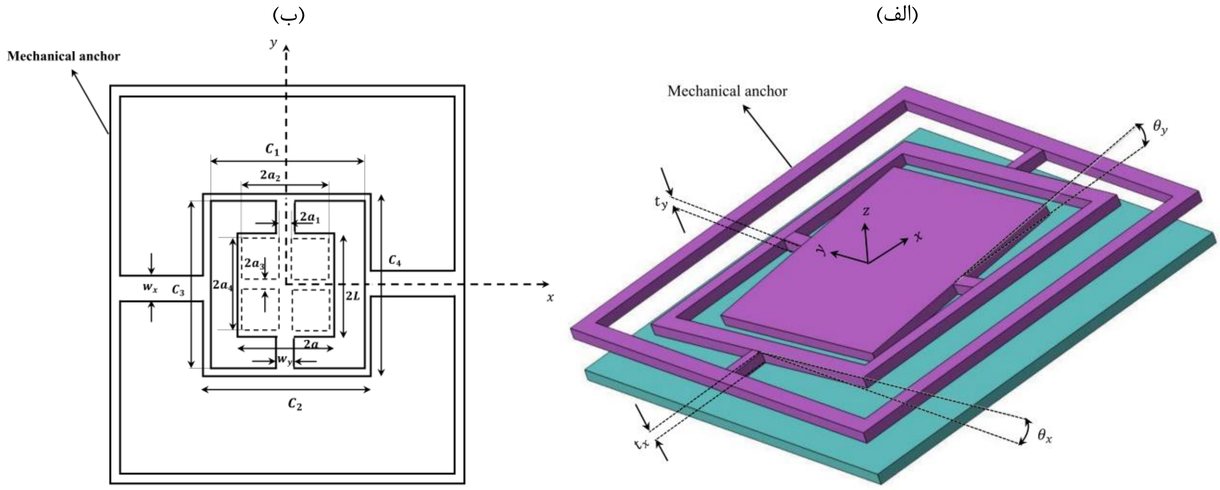
۲- مدل‌سازی ریاضی

مشاهدات تجربی نشان داده‌اند که در مقیاس‌های بسیارکوچک در ابعاد میکرو و نانو، رفتار مکانیکی مواد، وابسته به اندازه است. تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط پیوسته، این وابستگی را به خوبی پوشش نمی‌دهند. به همین دلیل، امروزه استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک به منظور تحلیل رفتارهای مکانیکی میکرو سازه‌ها، به صورت گسترده مورد توجه محققین قرار گرفته است. به عنوان مثال تئوری الاستیسیته سه بعدی گرادیان کرنش، یکی از تئوری‌های دقیق و توسعه یافته در این زمینه است [۱۳]. اما این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی سیستم نپرداخته است. در مقاله حاضر، صرفاً میرایی لایه فشرده سیال مدل‌سازی شده است که در این معادلات اثر اندازه وارد نمی‌شود. رفتار لایه‌ی فشرده‌ی هوای بین دو صفحه، به طور کلی تحت تأثیر لزجت و اینرسی هوا است. کلی‌ترین شکل معادله رینولدز برای هوای فشرده‌ی بین دو صفحه، در قالب یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی به صورت معادله‌ی (۱) قابل بیان است [۳].

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\rho\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\rho\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \bar{y}}\right)= 6\left\{2\frac{\partial(h\rho)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\rho h\left(u_1+u_2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\rho h\left(v_1+v_2\right)\right]\right\} \quad (۱)$$

که p، ρ، μ و h به ترتیب فشار مطلق، ضریب لزجت، چگالی و ضخامت لایه هوا و هم‌چنین u_1 و u_2 سرعت صفحات بالا و پایین در جهت محور $\bar{x}$، v_1 و v_2 سرعت صفحات بالا و پایین در جهت محور $\bar{y}$ و t زمان می‌باشند.

شکل ۱ نمای شماتیک دو بعدی و سه بعدی یک میکرومحرک پیچشی دو محوره را نشان می‌دهد. در میکرومحرک‌های الکترواستاتیک پیچشی، زاویه چرخش میکرومحرک معمولاً بسیار کوچک (کمتر از پنج درجه [۱۴]) است، در نتیجه با تقریب خوبی، ضخامت لایه هوا ثابت فرض می‌شود. در چنین شرایطی معادله حاکم بر میرایی لایه فشرده هوا در میکرومحرک، به صورت تخمینی، معادله تراکم‌پذیری رینولدز فرض می‌شود. همان‌طور که گفته شد در هندسه‌های کوچک،



شکل ۱: نمای شماتیک (الف) سه بعدی، (ب) دو بعدی یک میکرومحرک پیچشی دو محوره [۱۵]

Fig. 1. Schematic (a) three and (b) two dimensional view of the torsional micro actuator

مانند سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، از اثر اینرسی هوا در مقابل اثر لزجت، می‌توان صرف‌نظر کرد. بدین ترتیب معادله‌ی رینولدز به صورت رابطه (۲) کاهش می‌یابد [۳].

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=12\frac{\partial(h\rho)}{\partial t} \tag{۲}$$

فرآیند فرار هوا از فضای زیر میکرومحرک، یک فرآیند هم‌دماست. در فرآیندهای هم‌دما، چگالی به صورت خطی و همگن با فشار متناسب است [۳].

$$\rho = Kp \tag{۳}$$

که در این رابطه K یک عدد ثابت است.

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) و باز کردن مشتق‌ها، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\left(\frac{h^3}{\mu}\right)+p\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\left(\frac{h^3}{\mu}\right)+p\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=12h\frac{\partial p}{\partial t}+12p\frac{dh}{dt} \tag{۴}$$

باید توجه داشت که فشار مطلق p از دو مقدار فشار محیط p_a و فشار انحرافی $\overline{p}$، ناشی از حرکت محرک پیچشی تشکیل شده است.

$$p = p_a + \overline{p} \tag{۵}$$

در جابجایی‌های کم محرک اطراف نقطه تعادلش، می‌توان معادله (۴) را حول $p = p_a$ ساده‌سازی کرد.

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^2}-\frac{12\mu}{p_a h^2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial t}=\frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt} \tag{۶}$$

هنگامی که $\left(\frac{12\mu}{p_a h^2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial t} / \frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt} << 1\right)$، h) ضخامت لایه فشرده هوا در نقطه $(0,\overline{y})$ است) و یا به عبارت ساده‌تر $(\Delta p / p_a << \Delta h / h)$، هوا به مقدار قابل توجهی فشرده نمی‌شود [۱۶]. شرایط ذکر شده، به شرایط هوا تراکم‌ناپذیر[۱] مشهور است. در این شرایط معادله‌ی (۶) را می‌توان به صورت رابطه (۷) بازنویسی کرد [۱۷-۱۹].

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^2}=\frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt} \tag{۷}$$

در میکرومحرک‌های پیچشی، ضخامت لایه هوا بین صفحات، به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$h = h_0 - \delta_x - \delta_y + \overline{y}\theta_x - \overline{x}\theta_y \tag{۸}$$

در معادله‌ی (۸)، δ_x و δ_y به ترتیب خیز تیرهای نگهدارنده در جهت محورهای x و y و θ_x و θ_y به ترتیب زاویه‌های دوران حول محورهای x و y هستند و h_0 فاصله اولیه بین میکرومحرک و الکترودهای زیرین آن قبل از اعمال هرگونه اختلاف پتانسیل الکتریکی است. همچنین در این معادله، $\tan\theta_x = \theta_x$ و $\tan\theta_y = \theta_y$ فرض

1 Incompressible gas condition

شده است که این فرض در صورتی معتبر است که زاویه‌های دوران میکرومحرک کوچک باشد. در غیر این‌صورت حتی فرض استفاده از معادله‌ی رینولدز (به جای استفاده از معادله‌ی ناویر-استوکس) دقت کافی را ندارد.

شرایط مرزی فشار برای حل معادله‌ی (۷) به صورت رابطه (۹) است.

$$\overline{p}\left(\pm a,\overline{y},t\right)=\overline{p}\left(\overline{x},\pm L,t\right)=0 \quad (۹)$$

در رابطه (۹)، پارامترهای a و L به ترتیب نصف طول و عرض میکرومحرک می‌باشند که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

در مرحله بعد، معادله (۸) برحسب پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود.

$$h=h_0-h_0\Delta_x-h_0\Delta_y+yL\theta_x^{\max}\Theta_x-xa\theta_y^{\max}\Theta_y \quad (۱۰)$$

پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه‌های (۱۱) تا (۱۶)، تعریف می‌شوند.

$$\Delta_x=\frac{\delta_x}{h_0} \quad (۱۱)$$

$$\Delta_y=\frac{\delta_y}{h_0} \quad (۱۲)$$

$$\Theta_x=\frac{\theta_x}{\theta_x^{\max}} \quad (۱۳)$$

$$\Theta_y=\frac{\theta_y}{\theta_y^{\max}} \quad (۱۴)$$

$$x=\frac{\overline{x}}{a} \quad (۱۵)$$

$$y=\frac{\overline{y}}{L} \quad (۱۶)$$

که $\theta_x^{\max}$ و $\theta_y^{\max}$ به صورت رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) تعریف می‌شوند.

$$\theta_x^{\max}=\tan^{-1}\left(\frac{h_0}{L}\right)\approx\frac{h_0}{L} \quad (۱۷)$$

$$\theta_y^{\max}=\tan^{-1}\left(\frac{h_0}{a}\right)\approx\frac{h_0}{a} \quad (۱۸)$$

پس می‌توان با جایگذاری معادله‌های (۱۷) و (۱۸) در معادله‌های (۱۳) و (۱۴)، آن‌ها را به صورت رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) بازنویسی کرد.

$$\Theta_x\approx\frac{L}{h_0}\theta_x \quad (۱۹)$$

$$\Theta_y\approx\frac{a}{h_0}\theta_y \quad (۲۰)$$

با جایگذاری معادله‌های (۱۰) تا (۱۲)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۹) و (۲۰)، معادله‌ی (۷) به صورت رابطه (۲۱) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x^2}+\frac{a^2}{L^2}\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial y^2}=\\&\frac{12a^2\mu x}{h_0^2\left(\Theta_y x-\Theta_x y+\Delta_x+\Delta_y-1\right)^3}\frac{d\Theta_y}{dt}-\\&\frac{12a^2\mu y}{h_0^2\left(\Theta_y x-\Theta_x y+\Delta_x+\Delta_y-1\right)^3}\frac{d\Theta_x}{dt}+\\&\frac{12a^2\mu}{h_0^2\left(\Theta_y x-\Theta_x y+\Delta_x+\Delta_y-1\right)^3}\frac{d\Delta_x}{dt}+\\&\frac{12a^2\mu}{h_0^2\left(\Theta_y x-\Theta_x y+\Delta_x+\Delta_y-1\right)^3}\frac{d\Delta_y}{dt}\end{aligned} \quad (۲۱)$$

با توجه به اینکه مقادیر زوایای پیچشی و خیز تیرها در میکرومحرک پیچشی بسیار کوچک است، می‌توان $\Theta_y x-\Theta_x y+\Delta_x+\Delta_y-1$ ظاهر شده در معادله (۲۱) را به صورت تقریبی با ۱- برابر دانست. بنابراین معادله (۲۱) را می‌توان به شکل رابطه (۲۲) بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x^2}+\Gamma^2\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial y^2}=-x\eta_1+y\eta_2-\eta_3 \quad (۲۲)$$

که در آن:

$$\Gamma=\frac{a}{L} \quad (۲۳)$$

$$\eta_1=\frac{12a^2\mu}{h_0^2}\frac{d\Theta_y}{dt} \quad (۲۴)$$

$$\eta_2=\frac{12a^2\mu}{h_0^2}\frac{d\Theta_x}{dt} \quad (۲۵)$$

$$\eta_3 = \frac{12a^2\mu}{h_0^2}\left(\frac{d\Delta_x}{dt}+\frac{d\Delta_y}{dt}\right) \tag{۲۶}$$

در مرحله بعد فشار بر حسب η_2، به صورت رابطه (۲۷) بی‌بعد می‌شود.

$$P = \frac{\overline{p}}{\eta_2} \tag{۲۷}$$

با جای‌گذاری فشار بی‌بعد در معادله‌ی (۲۲)، معادله‌ی فشار به صورت رابطه (۲۸) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\Gamma^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{x\eta_1}{\eta_2}+y-\frac{\eta_3}{\eta_2} \tag{۲۸}$$

۳- حل مسئله میرایی با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ

برای حل معادله‌ی (۲۸) فرض می‌شود که رابطه (۲۹) برقرار است.

$$P(x,y,t) = \frac{\eta_1}{\eta_2}P_1(x,y,t)+ \frac{\eta_3}{\eta_2}P_2(x,y,t)+P_3(x,y,t) \tag{۲۹}$$

فشارهای $P_1(x,y,t)$، $P_2(x,y,t)$ و $P_3(x,y,t)$ باید طوری تعیین شوند که به ترتیب معادله‌های (۳۰) تا (۳۲) را ارضا کرده و شرایط مرزی‌ای که در رابطه‌ی (۳۳) ارائه شده، در آن‌ها صدق کند.

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}+\Gamma^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = -x \tag{۳۰}$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}+\Gamma^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} = -1 \tag{۳۱}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2}+\Gamma^2\frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} = y \tag{۳۲}$$

$$\begin{cases} P_i(\pm1,y,t)=0 \\ P_i(x,\pm1,t)=0 \end{cases}, i=1,2,3 \tag{۳۳}$$

در ادامه برای حل معادلات (۳۰) تا (۳۲) از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ استفاده می‌شود. بدین منظور برای حل معادله (۳۰) برای تعیین توزیع فشار در زیر میکرومحرک در لحظه‌ی $t=t_0$، در اولین قدم از یک تقریب مرتبه اول گالرکین استفاده می‌شود.

$$\iint_s\left(\frac{\partial^2 P_1(x,y,t_0)}{\partial x^2}+\Gamma^2\frac{\partial^2 P_1(x,y,t_0)}{\partial y^2}+x\right)\delta p_1(x,y,t_0)dxdy=0 \tag{۳۴}$$

در معادله (۳۴)، s سطح بی‌بعد شده‌ی میکرومحرک و δ اپراتور تغییرات است.

حال طبق روش کانتروویچ، فرض می‌شود که توزیع فشار بی‌بعد P_1 را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو تابع $f_1(x)$ و $g_1(y)$ نوشت.

$$P_1(x,y,t_0) = f_1(x)g_1(y) \tag{۳۵}$$

شرایط مرزی P_1 که در معادله‌ی (۳۳) ارائه شده، برای تابع‌های $f_1(x)$ و $g_1(y)$ به صورت معادله‌های (۳۶) و (۳۷)، قابل بازنویسی است.

$$f_1(\pm1)=0 \tag{۳۶}$$

$$g_1(\pm1)=0 \tag{۳۷}$$

در صورتی که تابع $f_1(x)$ یک تابع از پیش تعیین شده باشد، کلیه تغییرات در تابع فشار ناشی از تغییرات تابع $g_1(y)$ می‌باشد. به عبارتی دیگر

$$\delta p_1(x,y,t_0) = f_1(x)\delta g_1(y) \tag{۳۸}$$

اگر معادله‌های (۳۵) و (۳۸)، در معادله‌ی (۳۴) جایگذاری شود، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\iint_s\left(g_1(y)\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}+\Gamma^2 f_1(x)\frac{d^2 g_1(y)}{dy^2}+x\right)f_1(x)\delta g_1(y)dxdy=0 \tag{۳۹}$$

با انتخاب ترتیب انتگرال‌گیری به نحوی که ابتدا انتگرال نسبت به متغیر مستقلی که تابع مربوط به آن مشخص است (یعنی متغیر x)، گرفته شود، معادله (۴۰) به دست می‌آید.

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\int_{-1}^{1}f_1(x)\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}dx\right)g_1(y)+\Gamma^2\left(\int_{-1}^{1}f_1^2(x)dx\right)\frac{d^2 g_1(y)}{dy^2}+\left(\int_{-1}^{1}xf_1(x)dx\right)\right]\delta g_1(y)dy=0 \tag{۴۰}$$

با توجه به این‌که $\delta g_1(y)$ به جز در نقاط مرزی مقدار دلخواهی دارد، معادله (۴۰) فقط و فقط در صورتی ارضا می‌شود که ضریب $\delta g_1(y)$ برابر با صفر باشد. بنابراین:

$$\Gamma^2\left(\int_{-1}^{1} f_1^{\,2}(x)dx\right)\frac{d^2 g_1(y)}{dy^2}+\left(\int_{-1}^{1} f_1(x)\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}dx\right)g_1(y)+\left(\int_{-1}^{1} x f_1(x)dx\right)=0 \tag{۴۱}$$

برای راحتی کار می‌توان انتگرال دوم در معادله (۴۱) را با انتگرال‌گیری جزء به جزء، به صورت معادله (۴۲) نوشت.

$$\int_{-1}^{1}\left(f_1(x)\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}\right)dx=-\int_{-1}^{1}\left(\frac{df_1(x)}{dx}\right)^2 dx \tag{۴۲}$$

حال می‌توان معادله (۴۱) را به صورت ساده شده بیان نمود.

$$\Gamma^2 I_{11}\frac{d^2 g_1(y)}{dy^2}-I_{12}g_1(y)=-I_{13} \tag{۴۳}$$

که

$$I_{11}=\int_{-1}^{1} f_1^2(x)dx \tag{۴۴}$$

$$I_{12}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{df_1(x)}{dx}\right)^2 dx \tag{۴۵}$$

$$I_{13}=\int_{-1}^{1} x f_1(x)dx \tag{۴۶}$$

حل معادله (۴۳) تحت شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۳۷)، به صورت معادله (۴۷) می‌باشد.

$$g_1(y)=\frac{I_{13}}{I_{12}}\left(1-\frac{\cosh(\lambda_1 y)}{\cosh\lambda_1}\right) \tag{۴۷}$$

که λ_1 به صورت رابطه (۴۸) تعریف می‌شود.

$$\lambda_1=\frac{1}{\Gamma}\sqrt{\frac{I_{12}}{I_{11}}} \tag{۴۸}$$

اگر در روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، تابع $g_1(y)$ به جای تابع $f_1(x)$ یک تابع معلوم فرض شود، با طی پروسه‌ای مشابه، معادله دیفرانسیلی مشابه‌ای برای تابع $f_1(x)$ به دست می‌آید.

$$J_{11}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}-\Gamma^2 J_{12} f_1(x)=-J_{13}x \tag{۴۹}$$

ضرایب موجود در معادله (۴۹)، به صورت معادلات (۵۰) تا (۵۲) تعریف می‌شوند.

$$J_{11}=\int_{-1}^{1} g_1^2(y)dy \tag{۵۰}$$

$$J_{12}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{dg_1(y)}{dy}\right)^2 dy \tag{۵۱}$$

$$J_{13}=\int_{-1}^{1} g_1(y)dy \tag{۵۲}$$

حل معادله (۴۹) تحت شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۳۶)، به صورت معادله (۵۳) می‌باشد.

$$f_1(x)=\frac{J_{13}}{\Gamma^2 J_{12}}\left(x-\frac{\sinh(\nu_1 x)}{\sinh\nu_1}\right) \tag{۵۳}$$

که

$$\nu_1=\Gamma\sqrt{\frac{J_{12}}{J_{11}}} \tag{۵۴}$$

با درنظر گرفتن یک حدس اولیه برای تابع $f_1(x)$ و سپس حل پی در پی معادله‌های (۴۷) و (۵۳)، تابع‌های $f_1(x)$ و $g_1(y)$ جدید به دست می‌آیند. در نهایت با پیدا شدن تابع‌های $f_1(x)$ و $g_1(y)$، تابع P_1 به صورت معادله (۵۵) خواهد بود.

$$P_1(x,y,t_0)=f_1^{\infty}(x)g_1^{\infty}(y)=\frac{J_{13}^{\infty}I_{13}^{\infty}}{\Gamma^2 J_{12}^{\infty}I_{12}^{\infty}}\left(x-\frac{\sinh(\nu_1^{\infty}x)}{\sinh\nu_1^{\infty}}\right)\left(1-\frac{\cosh(\lambda_1^{\infty}y)}{\cosh\lambda_1^{\infty}}\right) \tag{۵۵}$$

از آن‌جایی که در مراحل حل، هیچ محدودیتی برای زمان t. اعمال نشد، می‌توان از حل ارائه شده برای به دست آوردن تابع P_1 برای تمام زمان‌ها استفاده نمود.

به طور مشابه، برای حل معادله (۳۱) طبق روش کانتروویچ، فرض می‌شود که توزیع فشار بی‌بعد P_2 را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو تابع $f_2(x)$ و $g_2(y)$ نوشت.

$$P_2(x,y,t_0)=f_2(x)g_2(y)$$ (۵۶)

با روندی مشابه، توابع $f_2(x)$ و $g_2(y)$ به صورت معادله‌های (۵۷) و (۵۸) به دست می‌آیند.

$$f_2(x)=\frac{J_{23}}{\Gamma^2 J_{22}}\left(1-\frac{\cosh(\nu_2 x)}{\cosh\nu_2}\right)$$ (۵۷)

$$g_2(y)=\frac{I_{23}}{I_{22}}\left(1-\frac{\cosh(\lambda_2 y)}{\cosh\lambda_2}\right)$$ (۵۸)

که

$$I_{21}=\int_{-1}^{1}f_2^2(x)dx$$ (۵۹)

$$I_{22}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{df_2(x)}{dx}\right)^2dx$$ (۶۰)

$$I_{23}=\int_{-1}^{1}f_2(x)dx$$ (۶۱)

$$J_{21}=\int_{-1}^{1}g_2^2(y)dy$$ (۶۲)

$$J_{22}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{dg_2(y)}{dy}\right)^2dy$$ (۶۳)

$$J_{23}=\int_{-1}^{1}g_2(y)dy$$ (۶۴)

$$\lambda_2=\frac{1}{\Gamma}\sqrt{\frac{I_{22}}{I_{21}}}$$ (۶۵)

$$\nu_2=\Gamma\sqrt{\frac{J_{22}}{J_{21}}}$$ (۶۶)

در نتیجه با حل متوالی معادله‌های (۵۷) و (۶۲)، تابع P_2 به صورت معادله (۶۷) به دست می‌آید.

$$P_2(x,y,t_0)=f_2^\infty(x)g_2^\infty(y)=\frac{J_{23}^\infty I_{23}^\infty}{\Gamma^2 J_{22}^\infty I_{22}^\infty}\left(1-\frac{\cosh(\nu_2^\infty x)}{\cosh\nu_2^\infty}\right)\left(1-\frac{\cosh(\lambda_2^\infty y)}{\cosh\lambda_2^\infty}\right)$$ (۶۷)

هم‌چنین برای حل معادله (۳۲) به روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، با فرض $P_3(x,y,t_0)=f_3(x)g_3(y)$، توابع $f_3(x)$ و $g_3(y)$ به صورت معادله‌های (۶۸) و (۶۹) استخراج می‌شوند.

$$f_3(x)=\frac{J_{33}}{\Gamma^2 J_{32}}\left(-1+\frac{\cosh(\nu_3 x)}{\cosh\nu_3}\right)$$ (۶۸)

$$g_3(y)=\frac{I_{33}}{I_{32}}\left(-y+\frac{\sinh(\lambda_3 y)}{\sinh\lambda_3}\right)$$ (۶۹)

ضرایب موجود در معادلات (۶۸) و (۶۹) در معادلات (۷۰) تا (۷۷) ارائه شده‌اند.

$$I_{31}=\int_{-1}^{1}f_3^2(x)dx$$ (۷۰)

$$I_{32}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{df_3(x)}{dx}\right)^2dx$$ (۷۱)

$$I_{33}=\int_{-1}^{1}f_3(x)dx$$ (۷۲)

$$J_{31}=\int_{-1}^{1}g_3^2(y)dy$$ (۷۳)

$$J_{32}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{dg_3(y)}{dy}\right)^2dy$$ (۷۴)

$$J_{33}=\int_{-1}^{1}yg_3(y)dy$$ (۷۵)

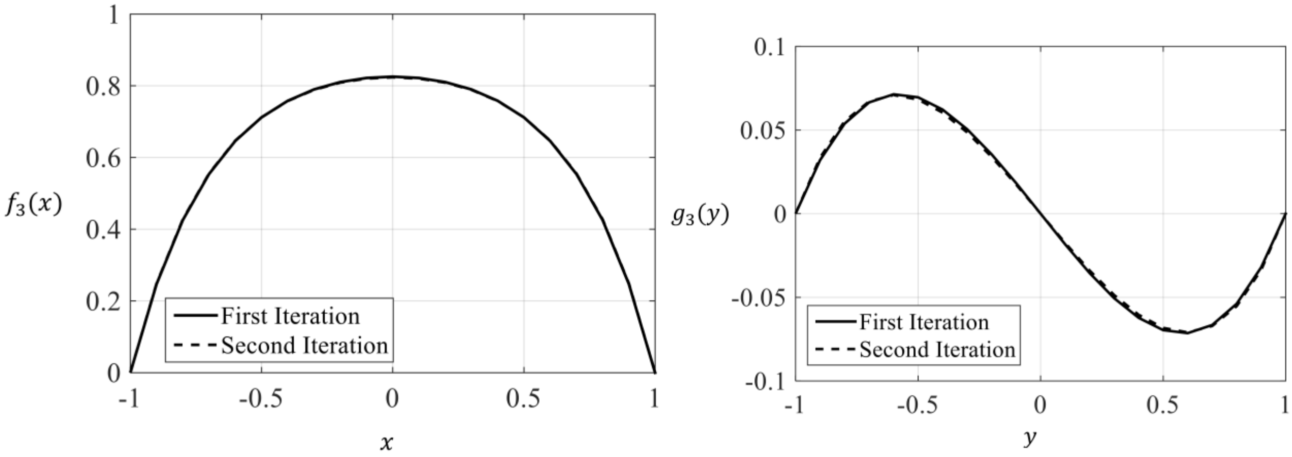
$$\lambda_3=\frac{1}{\Gamma}\sqrt{\frac{I_{32}}{I_{31}}}$$ (۷۶)

$$\nu_3=\Gamma\sqrt{\frac{J_{32}}{J_{31}}}$$ (۷۷)

در این صورت تابع P_3 به صورت معادله (۷۸) محاسبه می‌شود.

$$P_3(x,y,t_0)=f_3^\infty(x)g_3^\infty(y)=\frac{J_{33}^\infty I_{33}^\infty}{\Gamma^2 J_{32}^\infty I_{32}^\infty}\left(-1+\frac{\cosh(\nu_3^\infty x)}{\cosh\nu_3^\infty}\right)\left(-y+\frac{\sinh(\lambda_3^\infty y)}{\sinh\lambda_3^\infty}\right)$$ (۷۸)

بنابراین با جایگذاری معادلات (۵۵)، (۶۷) و (۷۸) در معادله (۲۹)، رابطه توزیع فشار بی‌بعد در لایه فشرده هوا بین صفحات به دست می‌آید. همگرایی این روش به قدری بالاست که معمولاً پاسخ‌های به دست آمده بعد از دو تکرار دارای دقت کافی و قابل قبول هستند. به منظور



(ب) (الف)

شکل ۲: (الف) تابع $f_3(x)$ و (ب) تابع $g_3(y)$ در تکرارهای مختلف به ازای $\Gamma=1$

Fig. 2. Different iteration of (a) $f_3(x)$ and (b) $g_3(x)$ where $\Gamma=1$

بررسی صحت، دقت و همگرایی روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، به عنوان نمونه، تابع‌های $f_3(x)$ و $g_3(y)$ در شکل ۲ رسم شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، شدت همگرایی به گونه‌ای است که تشخیص نمودارهای مختلف از یک‌دیگر غیرممکن است.

هم‌چنین برای صحت سنجی معادلات به‌دست آمده با روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، از جعبه ابزار PDE[1] نرم افزار متلب استفاده شد که برای حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات پاره‌ای، به کمک روش المان محدود است. معادله تعریف شده در این تولباکس از نوع بیضوی انتخاب گردید و تعداد المان‌های مثلثی ۳۱۲ عدد در نظر گرفته شد. در این جعبه ابزار برای حل در نقاط دلخواه که بر روی گره‌های تعریف شده قرار ندارد، از میانیابی استفاده می‌شود. مقایسه دو روش ذکر شده، در شکل ۳، آورده شده است. نمودارهای رسم شده در شکل ۳، به‌ترتیب فشارهای به دست‌آمده از دو روش ذکر شده را برای توابع $P_1(x,y,t_.)$، $P_2(x,y,t_.)$ و $P_3(x,y,t_.)$، در $x=0/5$ و برای دامنه $y\in(-1,1)$، مقایسه می‌کنند. همان طور که مشاهده می‌شود، حل ارائه شده از دقت زیادی برخوردار است.

در شکل ۴ نحوه محاسبه نیرو و گشتاورهای میرایی با داشتن توزیع فشار، آمده است. با توجه به شکل ۴، می‌توان روابط (۷۹) تا (۸۱) را برای محاسبه نیرو و گشتاور میرایی نوشت.

$$\bar{F}_d(t)=\iint_R \bar{p}\left(\bar{x},\bar{y},t\right)d\bar{x}\,d\bar{y} \tag{۷۹}$$

1 Partial Differential Equation Toolbox

$$\bar{M}_{dx}(t)=\iint_R \overline{yp}\left(\bar{x},\bar{y},t\right)d\bar{x}\,d\bar{y} \tag{۸۰}$$

$$\bar{M}_{dy}(t)=\iint_R -\bar{x}\,\bar{p}\left(\bar{x},\bar{y},t\right)d\bar{x}\,d\bar{y} \tag{۸۱}$$

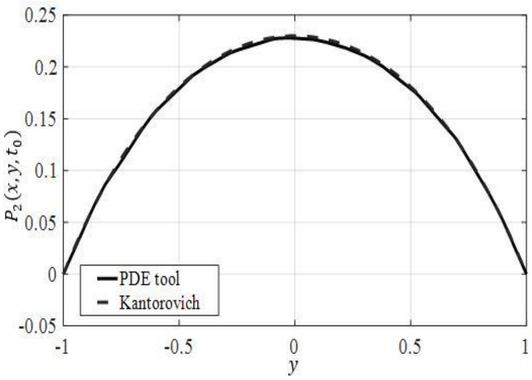
که $\bar{F}_d$ نیروی میرایی در جهت محور $\bar{z}$، $\bar{M}_{dx}$ و $\bar{M}_{dy}$ گشتاورهای میرایی حول محورهای x و y هستند و R سطح میکرومحرک است. $\bar{F}_d$، $\bar{M}_{dx}$ و $\bar{M}_{dy}$ می‌توانند به شکل بی‌بعد خود به‌صورت رابطه‌های (۸۲) تا (۸۴) نوشته شوند.

$$F_d(t)=\frac{\bar{F}_d(t)}{aL\eta_3}=\frac{\eta_2}{\eta_3}\iint_R P\left(x,y,t\right)dx\,dy\ ,\quad R=[-1,1]\times[-1,1] \tag{۸۲}$$

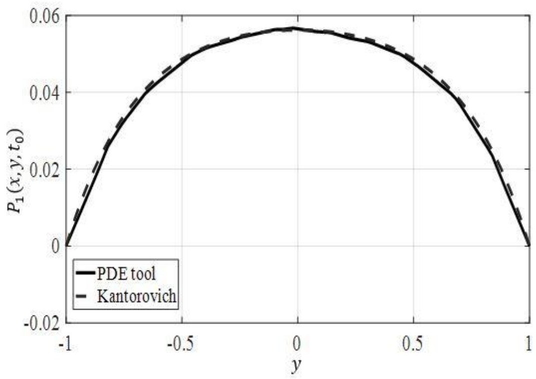
$$M_{dx}(t)=\frac{\bar{M}_{dx}(t)}{aL^2\eta_2}=\iint_R y\,P\left(x,y,t\right)dx\,dy,\quad R=[-1,1]\times[-1,1] \tag{۸۳}$$

$$M_{dy}(t)=\frac{\bar{M}_{dy}(t)}{La^2\eta_1}=\frac{\eta_2}{\eta_1}\iint_R -x\,P\left(x,y,t\right)dx\,dy\ ,R=[-1,1]\times[-1,1] \tag{۸۴}$$

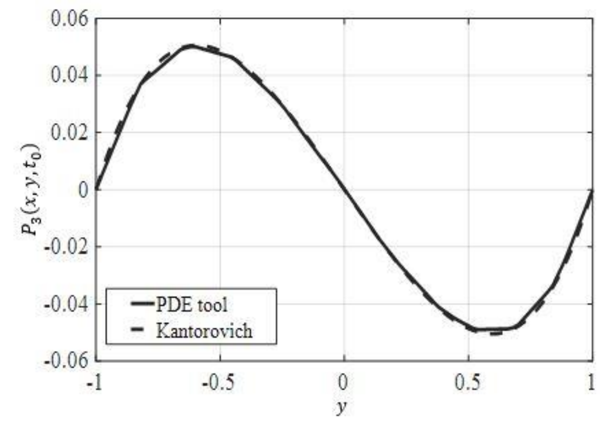
بنابراین با گرفتن انتگرال‌های موجود در معادله‌های (۸۲)-(۸۴)، مقادیر بی‌بعد F_d، M_{dx} و M_{dy}، محاسبه می‌شوند.



(ب)



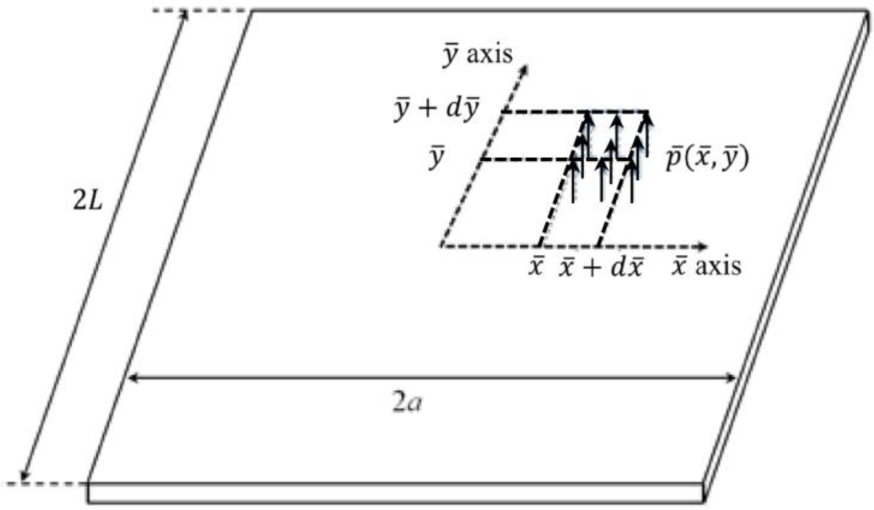
(الف)



(ج)

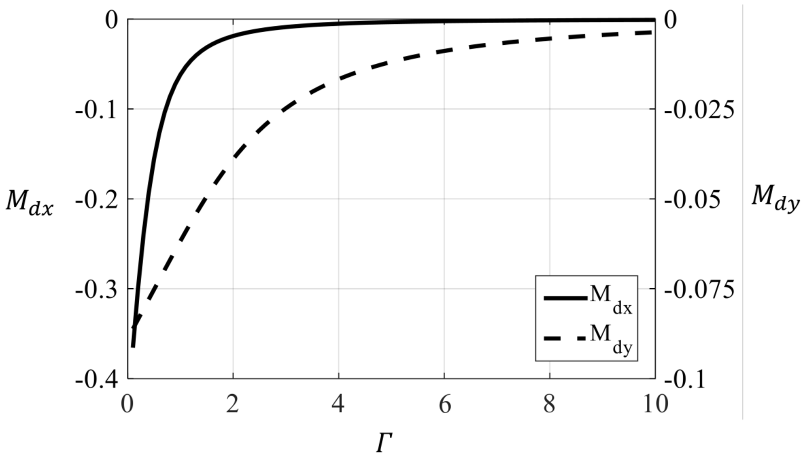
شکل ۳: (الف) تابع $P_1(x,y,t_0)$، (ب) تابع $P_2(x,y,t_0)$ و (ج) تابع $P_3(x,y,t_0)$، در $x=0/5$ و برای دامنه $y\in(-1,1)$

Fig. 3. (a) $P_1(x,y,t_0)$, (b) $P_2(x,y,t_0)$ and (c) $P_3(x,y,t_0)$, where $x=0.5$ and $y\in(-1,1)$



شکل ۴: فشار هوایی که بر روی جزئی از سطح میکرومحرک اعمال می‌شود و باعث ایجاد نیروی جزئی در جهت محور $\bar{z}$ و گشتاورهای جزئی حول محورهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ می‌شود [۱۵]

Fig. 4. Gas pressure acting on a differential surface element, causes differential damping force in $\bar{z}$ direction and damping torques in $\bar{x}$ and $\bar{y}$ directions [15]



شکل ۵: گشتاور بی‌بعد میرایی لایه هوای فشرده، M_{dx} و M_{dy} بر حسب Γ

Fig. 5. Normalized squeeze film damping torques M_{dx} and M_{dy} vs. Γ

۴- تحلیل و بررسی نتایج

برای مشاهده و بررسی تأثیر تغییر اندازه‌ی میکروموحرک در راستای محور x بر روی گشتاورهای بی‌بعد شده‌ی M_{dx} و M_{dy} از انتگرال‌های طرف دوم معادله‌های (۸۳) و (۸۴) استفاده می‌شود. با افزایش مقدار a و ثابت نگه‌داشتن مقدار L، مقدار Γ افزایش می‌یابد. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که با افزایش Γ، مقدار M_{dx} با شیب بیشتری نسبت به M_{dy} افزایش می‌یابد. همین‌طور با افزایش اندازه L و ثابت نگه‌داشتن مقدار a، اندازه Γ کاهش می‌یابد که منجر به کاهش مقدار M_{dx} و M_{dy} می‌شود.

هرچند بررسی و مشاهده رفتار M_{dx} و M_{dy} مفید است، اما طراح، نتایج و اطلاعات دقیق‌تری را با بررسی ارتباط گشتاورهای بابعد $\bar{M}_{dx}$ و $\bar{M}_{dy}$ با ابعاد میکروموحرک، به دست می‌آورد. زیرا رفتار گشتاور بابعد، می‌تواند با رفتار گشتاور بی‌بعد شده، یکسان نباشد. بدین منظور، ابتدا رابطه بین نیرو و گشتاورهای بی‌بعد F_d، M_{dx} و M_{dy}، با نیرو و گشتاورهای با بعد $\bar{F}_d$، $\bar{M}_{dx}$ و $\bar{M}_{dy}$، بررسی می‌شود. رابطه‌های (۸۵) تا (۸۷) این ارتباط را نشان می‌دهد.

$$\bar{F}_d = \frac{12\mu L^4}{h_0^3}\left(\frac{d\delta_x}{dt}+\frac{d\delta_y}{dt}\right)\Gamma^3 F_d \quad (۸۵)$$

$$\bar{M}_{dx} = \frac{12\mu L^6}{h_0^3}\frac{d\theta_x}{dt}\Gamma^3 M_{dx} \quad (۸۶)$$

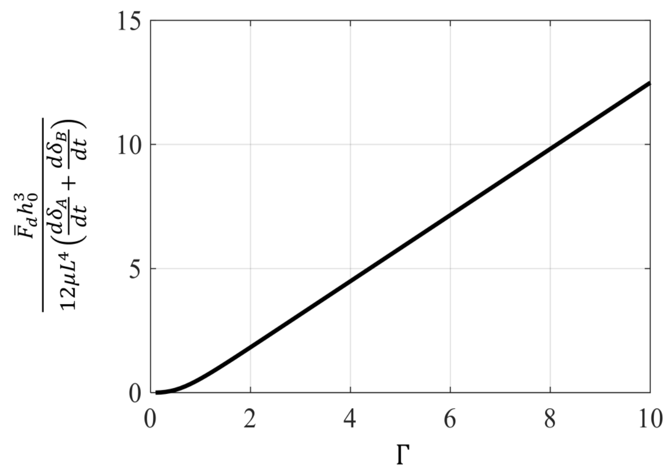
$$\bar{M}_{dy} = \frac{12\mu L^6}{h_0^3}\frac{d\theta_y}{dt}\Gamma^5 M_{dy} \quad (۸۷)$$

همان‌طور که در معادله‌های (۸۵) تا (۸۷) مشاهده می‌شود، با توجه به ثابت بودن پارامترهای F_d، M_{dx} و M_{dy} نسبت به زمان، نیرو و گشتاورهای میرایی $\bar{F}_d$، $\bar{M}_{dx}$ و $\bar{M}_{dy}$، به صورت خطی با سرعت انتقالی $\left(d\delta_x/dt+d\delta_y/dt\right)$ و سرعت‌های زاویه‌ای $\dot{\theta}_x$ و $\dot{\theta}_y$ رابطه دارند. این بدین معنی است که نیرو و گشتاورهای میرایی در یک میکروموحرک دو محوره پیچشی، می‌تواند نقش میراگرهای لزج خطی را بازی کند.

همان طور که در مقدمه مقاله ذکر شد، در اکثر مطالعاتی که تا کنون بر روی میرایی میکروموحرک‌های پیچشی انجام شده است، از خاصیت خمش تیرهای نگهدارنده میکروموحرک‌های پیچشی صرف‌نظر شده و فقط اثر پیچشی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. درواقع در معادله‌های حاکم، تأثیر پیچش بسیار بیش‌تر از اثر خمش است. در عین حال، در این مقاله برای رسیدن به یک مدل دقیق‌تر، هردو اثر خمش و پیچش لحاظ گردید، اما به راحتی می‌توان نشان داد اگر فرایند مدل‌سازی با لحاظ کردن اثر پیچشی تیرها و چشم‌پوشی از اثر خمش آن‌ها انجام می‌شد، ضخامت لایه هوا بین صفحات، به صورت رابطه (۸۸) در می‌آمد.

$$h = h_0 + \bar{y}\theta_x - \bar{x}\theta_y \quad (۸۸)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۸۸) در معادله (۷) و انجام



شکل ۶: نمودار $\left(\bar{F}_d h_0^3\right)/\left(12\mu L^4\left(\dot{\delta}_x+\dot{\delta}_y\right)\right)$ **بر حسب** Γ

Fig. 6. $\left(\bar{F}_d h_0^3\right)/\left(12\mu L^4\left(\dot{\delta}_x+\dot{\delta}_y\right)\right)$ **vs.** Γ

بی‌بعدسازی‌ها و فرضیاتی که قبلاً ذکر شد، تابع فشار $P(x,y,t)$ از معادله (۸۹) قابل محاسبه می‌بود.

$$P(x,y,t)=\frac{\eta_1}{\eta_2}P_1(x,y,t)+P_3(x,y,t) \quad (۸۹)$$

که η_1 و η_2، در معادله‌های (۲۳) و (۲۴) تعریف شده‌اند و توابع فشار $P_1(x,y,t)$ و $P_3(x,y,t)$ با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ و شروط ذکر شده در معادله‌های (۳۰)، (۳۲) و (۳۳)، طبق معادله‌های (۵۵) و (۶۷)، به‌دست می‌آیند. با حذف تأثیر خمش و در نتیجه‌ی آن، به دست‌آمدن معادله (۸۹) برای تابع فشار هوای بین صفحات و جایگذاری آن در معادله‌های (۸۰) و (۸۱)،گشتاور میرایی حول محورهای x و y، بدون تغییر باقی می‌مانند، زیرا در حاصل انتگرال‌های ذکر شده، تغییری ایجاد نمی‌شود. اما نیروي میرايي در راستاي قائم، با جایگذاری معادله (۸۹) در معادله (۷۹) و به‌دست آوردن حاصل انتگرال، صفر می‌شود. این موضوع نشان دهنده‌ی اهمیت در نظر گرفتن درجات آزادی خمشی در مدل‌سازی میرایی لایه‌ی فشرده‌ی سیال می‌باشد.

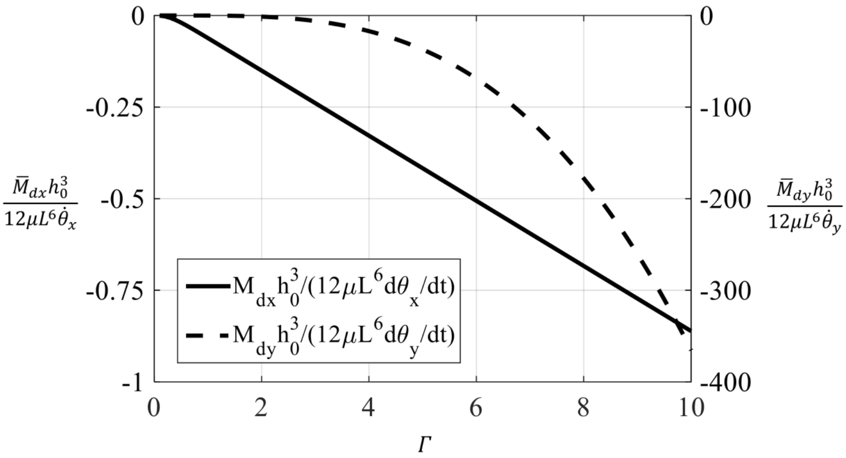
با توجه با معادله‌های (۸۵) تا (۸۷)، می‌توان مشاهده کرد که اندازه نیرو و گشتاورهای میرایی واقعی، با مکعب فاصله میان میکرومحرک و الکترودها (h_0^3)، رابطه عکس دارند و با افزایش این فاصله، نیرو و گشتاورهای میرایی کاهش پیدا می‌کنند و هم‌چنین با افزایش لزجت هوا بین دو صفحه، مقدار نیرو و گشتاورهای میرایی، افزایش پیدا می‌کنند.

عبارت گفته شده در بالا توجیه قابل درک فیزیکی دارد. به عبارت دیگر با افزایش فاصله‌ی بین صفحه میکرومحرک و الکترودها، هوای به دام افتاده بین این دو صفحه، راحت‌تر امکان بیرون رفتن از بین دو صفحه را دارد و به نوعی نیرو و گشتاورهای میرایی کاهش پیدا می‌کند. از طرفی با افزایش لزجت هوا، مقاومت بیشتری در برابر حرکت هوای بین صفحات میکرومحرک و الکترودها (به خارج یا داخل) ایجاد می‌شود که مستلزم بیشتر شدن نیرو و گشتاورهای میرایی است.

به منظور مشاهده تأثیر تغییر اندازه میکرومحرک در جهت محورهای x و y بر مقدار نیروی میرایی، نمودار تغییرات مقدار $\left(\bar{F}_d h_0^3\right)/\left(12\mu L^4\left(\dot{\delta}_x+\dot{\delta}_y\right)\right)$ بر حسب Γ. در شکل ۶ رسم شده است. با توجه به معادله (۸۵) با افزایش پارامتر Γ، مقدار نیروی بابعد افزایش می‌یابد که این نتیجه در شکل ۶ نیز قابل مشاهده است.

در شکل ۷ مقدار $\left(\bar{M}_{d\zeta} h_0^3\right)/\left(12\mu L^4\dot{\theta}_\zeta\right)$، $(\zeta\in\{x,y\})$، بر حسب Γ رسم شده است. مشاهده می‌شود که به جز $\bar{M}_{d\zeta}$، سایر پارامترها مستقل از پارامتر a، هستند. در نتیجه با تغییر اندازه a، که به تغییر اندازه Γ، می‌انجامد، کلیه افزایش‌ها و کاهش‌های مشاهده شده در محور y شکل ۷، به دلیل افزایش و کاهش مقدار $\bar{M}_{d\zeta}$ است. در این نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش Γ (از طریق افزایش پارامتر a و ثابت درنظر گرفتن پارامتر L)، $\bar{M}_{dx}$ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد، درحالی که اندازه آن در حال افزایش است. هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که برای مقادیر کم پارامتر Γ، مقدار $\bar{M}_{dy}$ تقریباً ثابت و برابر با صفر می‌باشد و با افزایش Γ، $\bar{M}_{dy}$به شدت کاهش می‌یابد (در صورتی که اندازه آن در حال افزایش است).

به منظور بررسی تأثیر تغییرات پارامتر L بر روی $\bar{M}_{dx}$ و $\bar{M}_{dy}$ نمی‌توان از شکل ۷ استفاده نمود. بنابراین برای مشاهده تغییرات مقدار گشتاور بابعد نسبت به تغییر اندازه پارامتر L، در شکل ۸ نمودار تغییرات پارامتر $\left(\bar{M}_{d\zeta} h_0^3\right)/\left(12\mu a^4\dot{\theta}_\zeta\right)$ ، $(\zeta\in\{x,y\})$، بر حسب $1/\Gamma$ رسم شده است. همان‌طور که قبلاً به آن اشاره شد، تمام پارامترها به جز $\bar{M}_{d\zeta}$، مستقل از پارامتر L، هستند. در نتیجه می‌توان رابطه میان گشتاور بابعد، $\bar{M}_{d\zeta}$، و پارامتر L، را در شکل ۸ مشاهده نمود. با مشاهده شکل ۸ می‌توان نتیجه گرفت که در این نمودار برای مقادیر کم پارامتر $1/\Gamma$، مقدار $\bar{M}_{dx}$ تقریباً ثابت و برابر با صفر



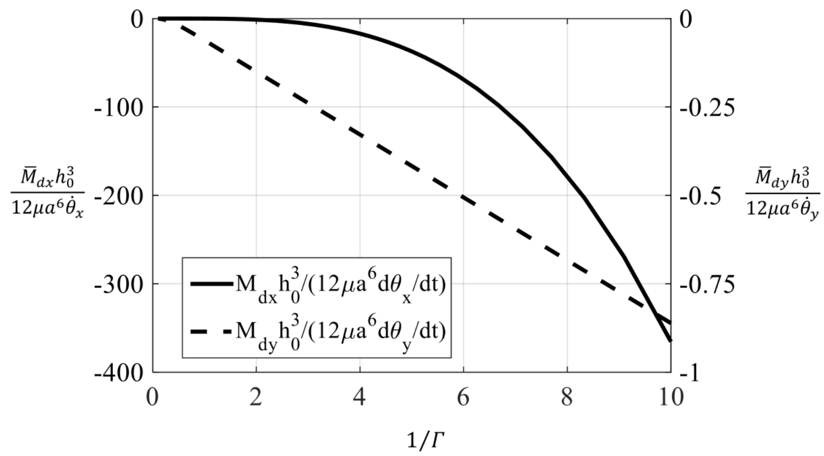
شکل ۷: نمودار $\left(\bar{M}_{d\zeta}h_0^3\right)/\left(12\mu L^6\dot{\theta}_\zeta\right)$**، که** $\zeta\in\{x,y\}$ **بر حسب** Γ

Fig. 7. $\left(\bar{M}_{d\zeta}h_0^3\right)/\left(12\mu L^6\dot{\theta}_\zeta\right)$ **where** $\zeta\in\{x,y\}$ **vs.** Γ

می‌باشد و با افزایش $1/\Gamma$، $\bar{M}_{dx}$به شدت کاهش می‌یابد (در صورتی که اندازه آن در حال افزایش است). در این نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش $1/\Gamma$، $\bar{M}_{dy}$ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد، درحالی که اندازه آن در حال افزایش است.

۵- نتیجه‌گیری

امروزه در کشورهای پیشرفته جهان، توسعه تلفیقی سیستم‌های مکانیکی و الکترونیکی در ابعاد کوچک مدنظر است. لزوم توسعه این فناوری باعث شده تا بسیاری از کشورهای جهان برای گسترش این فناوری و تولید محصول مربوطه اقداماتی صورت داده و در این راستا سرمایه‌گذاری‌هایی انجام دهند. این کوشش‌ها باعث ایجاد نسل جدیدی از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به نام سیستم‌های میکروالکترومکانیکی نوری گردید. به عنوان نمونه‌ای از این سیستم‌ها می‌توان به میکروموحرک‌های پیچشی اشاره کرد. در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از جمله میکرومحرک‌ها، از خازن‌هایی با صفحات موازی استفاده می‌شود که به صورت الکترواستاتیکی تحریک، و حرکت آن با تغییر ظرفیت خازن پایش می‌شود. به منظور بهبود کارایی تحریک، فاصله‌های بین صفحات خازنی کمینه و مساحت الکترودها به صورت بیشینه طراحی می‌شوند. در چنین شرایطی میرایی لایه فشرده هوا به مهم‌ترین مکانیزم میراسازی حرکت در میکرومحرک‌ها تبدیل می‌شود. خمش تیرهای نگهدارنده میکرومحرک پیچشی دو محوره تأثیر فراوانی بر روی میرایی لایه هوای فشرده، و متعاقباً رفتار دینامیکی این سیستم‌ها، دارد. این واقعیت که تیرهای مورد استفاده در میکرومحرک‌های پیچشی، علاوه بر پیچش، تحت خمش هم قرار می‌گیرند، بررسی مسئله‌ی میرایی لایه فشرده‌ی سیال در این سیستم‌ها را سخت و پیچیده می‌کند. لذا هدف از ارائه این مقاله بررسی و مدل‌سازی میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک پیچشی دو محوره با درنظر گرفتن اثر خمش تیرهای نگهدارنده می‌باشد. ابتدا معادله تراکم‌پذیری رینولدز حاکم بر رفتار هوای فشرده در زیر صفحه‌ی متحرک، با صرف‌نظر از اثرات اینرسی هوا در مقایسه با اثرات لزجت و با فرض هم‌دما بودن پروسه ارتعاش میکرومحرک، خطی‌سازی و بی‌بعدسازی شد. سپس معادله نرمال شده حاصل، با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ حل گردید. به منظور محاسبه نیرو و گشتاورهای میرایی لایه هوای فشرده از توزیع فشار حاصله استفاده شد. نتایج به دست آمده از روش حل حاکی از آن بود که در صورت کوچک بودن زاویه دوران، نیرو و گشتاورهای میرایی نقش یک میرایی لزج خطی را ایفا می‌کنند. در انتها نیز تأثیر پارامترهای طراحی میکرومحرک پیچشی دو محوره روی گشتاورهای میرایی نگهدارنده مورد بررسی قرار گرفت. از نتایج و فرمول‌های به دست آمده برای نیرو و گشتاورهای میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک پیچشی دو محوره در این مقاله، می‌توان برای مدل‌سازی دقیق دینامیک میکرومحرک‌هایی استفاده نمود که اثر خمش تیرهای پیچشی در آن‌ها قابل صرف‌نظر نیست.



شکل ۸: نمودار $(\bar{M}_{d\zeta}h_0^3)/(12\mu a^6\dot{\theta}_\zeta)$، **که** $\zeta \in \{x, y\}$ **بر حسب** $1/\Gamma$

Fig. 8. $(\bar{M}_{d\zeta}h_0^3)/(12\mu a^6\dot{\theta}_\zeta)$ **where** $\zeta \in \{x, y\}$**, vs.** $1/\Gamma$

فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	نصف طول میکرومحرک، m
h	ضخامت لایه حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، m
h_0	فاصله اولیه بین میکرومحرک و الکترودهای زیرین، m
L	نصف عرض میکرومحرک، m
F	نیروی میرایی، N
M	گشتاور میرایی، N.m
P	فشار مطلق هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، Pa
p	فشار انحرافی بی‌بعد هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، Pa
p_a	فشار هوای محیط، Pa
u	سرعت هوا فشرده به دام افتاده در جهت محور x m/s
v	سرعت هوا فشرده به دام افتاده در جهت محور y، m/s

علائم یونانی

ε_0	ثابت گذردهی الکتریکی خلأ، C^2N/m^2
δ	خیز تیرهای خمشی میکرومحرک، m
Δ	خیز بی‌بعد تیرهای خمشی میکرومحرک
θ	زاویه دوران میکرومحرک حول محور تیرهای پیچشی، rad
Φ	زاویه دوران بی‌بعد میکرومحرک حول تیرهای پیچشی
μ	لزجت هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، Pa.s
ρ	چگالی هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، kg/m^3

بالانویس

max	حداکثر زاویه دوران

زیرنویس

d	میرایی
x	در جهت محور x
y	در جهت محور y
1	صفحه بالایی
2	صفحه پایینی

مراجع

[1] O. Solgaard, A.A. Godil, R.T. Howe, L.P. Lee, Y.-A. Peter, H. Zappe, Optical MEMS: From micromirrors to complex systems, Journal of Microelectromechanical systems, 23(3) (2014) 517-538.

[2] S. Finny, R. Resmi, Analysis of squeeze film damping in piston mode micromirrors, in: Inventive Computation Technologies (ICICT), International Conference on, IEEE, 2016, pp. 1-5.

[3] M. Bao, H. Yang, Squeeze film air damping in MEMS, Sensors and Actuators A: Physical, 136(1) (2007) 3-27.

[4] H. Moeenfard, M.T. Ahmadian, A. Farshidianfar, Analytical modeling of squeeze film damping

effect, Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 128(Supplement C) (2017) 156-171.

[12] H. Moeenfard, M.T. Ahmadian, The influence of vertical deflection of the supports in modeling squeeze film damping in torsional micromirrors, Microelectronics Journal, 43(8) (2012) 530-536.

[13] M. Radgolchin, H. Moeenfard, Size-dependent nonlinear vibration analysis of shear deformable microarches using strain gradient theory, Acta Mechanica, 229(7) (2018) 3025-3049.

[14] J.P. Zhao, H.L. Chen, J.M. Huang, A.Q. Liu, A study of dynamic characteristics and simulation of MEMS torsional micromirrors, Sensors and Actuators A: Physical, 120(1) (2005) 199-210.

[15] H. Moeenfard, Analytical modeling of squeeze film damping in dual axis torsion microactuators, Surface Review and Letters, 22(01) (2015) 1550006.

[16] M. Bao, Y. Sun, J. Zhou, Y. Huang, Squeeze-film air damping of a torsion mirror at a finite tilting angle, Journal of Micromechanics and Microengineering, 16(11) (2006) 2330.

[17] M. Bao, Analysis and design principles of MEMS devices, Elsevier, 2005.

[18] J.B. Starr, Squeeze-film damping in solid-state accelerometers, in: Solid-State Sensor and Actuator Workshop, 1990. 4th Technical Digest., IEEE, IEEE, 1990, pp. 44-47.

[19] M.H. Sadd, A.K. Stiffler, Squeeze film dampers: Amplitude effects at low squeeze numbers, Journal of engineering for industry, 97(4) (1975) 1366-1370.

in micromirrors, in: Proceedings of the ASME international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference, 2011, pp. 10016-15990.

[5] N.A. Diab, I.A. Lakkis, Investigation of the Squeeze Film Dynamics Underneath a Microstructure With Large Oscillation Amplitudes and Inertia Effects, Journal of Tribology, 138(3) (2016) 031704.

[6] H. Yagubizade, M.I. Younis, The effect of squeeze-film damping on the shock response of clamped-clamped microbeams, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 134(1) (2012) 011017.

[7] M.I. Younis, A.H. Nayfeh, Simulation of squeeze-film damping of microplates actuated by large electrostatic load, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2(3) (2007) 232-241.

[8] W.E. Newell, Miniaturization of tuning forks, Science, 161(3848) (1968) 1320-1326.

[9] S. Finny, R. Resmi, Material and geometry optimization for squeeze film damping in a micromirror, in: Emerging Technological Trends (ICETT), International Conference on, IEEE, 2016, pp. 1-5.

[10] I.Z. Famileh, J.A. Esfahani, H. Moeenfard, Entropy generation analysis of squeeze film air damping in torsional micromirrors, Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 126(1) (2015) 28-37.

[11] S. Malihi, Y.T. Beni, H. Golestanian, Dynamic pull-in stability of torsional nano/micromirrors with size-dependency, squeeze film damping and van der Waals