

Investigation of Power-Law Fluid Flow through a Two-Dimensional Microchannel Based on a Couple Stress Theory-Calculation of Characteristic Length

F. Karami, A. Ahmadi Nadooshan*, Y. Tadi beni

Department of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

ABSTRACT: The present paper aims to investigate the developed flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in a two-dimensional microchannel based on the completely consistent couple stress theory and the characteristic length of the fluids. First, the velocity and volumetric flow rate profiles of Newtonian and power-law non-Newtonian fluids in the microchannel were obtained via analytical methods. After that, the characteristic material lengths of water as a Newtonian fluid and blood as a non-Newtonian fluid were obtained and then the results were compared with the experimental data of other papers. Comparing the characteristic lengths of water and blood indicated the dependence of characteristic material length scale on the fluid material. Calculating the characteristic length produced the blood velocity profile of the couple stress theory in microchannel which was in turn compared to the results of classical Navier-Stokes theory. According to the results, increasing the volumetric flow rate of the fluid also increases the difference between the results of couple stress theory and classical theory, indicating the increased influence of length on microchannel flow properties. Further, the velocity profile of water in the microchannel was compared with the experimental results, revealing a good consistency between them and the couple stress theory.

Review History:

Received: 04/11/2018

Revised: 16/12/2018

Accepted: 11/03/2019

Available Online: 25/03/2019

Keywords:

Couple stress

Power-law fluid

Characteristic material length

Volumetric flow rate

Microchannel

1. INTRODUCTION

Microchannels are a type of microfluidic device used in different applications such as cellular biology, medical screening, chemical microreactors, and micro fuel cells. Many microfluidic devices are utilized in medical analysis, particularly blood analysis. Blood separation is one of the chief medical applications of microchannels [1]. Therefore, scholars are interested to study blood flow in microchannels. This study presents the first investigation of microchannel blood flow based on the completely consistent couple stress theory. The characteristic length was calculated using flow rate equations and laboratory data. Moreover, the accurate solution of developed Newtonian and non-Newtonian flows in the two-dimensional (2D) microchannel was obtained via the extended equations presented by Karami et al. [2] for studying power-law fluids.

2. METHODOLOGY

As shown in Fig. 1, there is a laminar, developed flow of a power-law, incompressible fluid between two flat, parallel planes. Based on the consistent couple stress theory and excluding gravity effects, continuity, momentum, and boundary condition equations are:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2)$$

*Corresponding author's email: ahmadi@eng.sku.ac.ir



Fig. 1. Two-dimensional geometry of the microchannel

$$u = 0, M_x = 0, \text{ at } y = h, -h, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \text{ at } y = 0. \quad (4)$$

where, $\mathbf{V}$, ρ , u and M_i are velocity vector, density, velocity in the x -direction and couple stress vector, respectively. $\mathbf{A}$ is stress tensor and given by [5]:

$$A_{ji} = -P\delta_{ij} + k(v_{j,i} + v_{i,j})^{n-1}(v_{j,i} + v_{i,j}) + l^2 k \left[\begin{aligned} & (n-1)(v_{i,j} + v_{j,i})^{n-2}(v_{i,jj} + v_{j,ii}) \\ & (v_{k,ki} - v_{i,kk}) + (v_{i,j} + v_{j,i})^{n-1} \\ & + l^2 k (v_{k,kij} - v_{i,kkj}) - (n-1)(v_{i,j} + v_{j,i})^{n-2} \\ & (v_{j,ii} + v_{i,ji})(v_{k,kj} - v_{j,kk}) \\ & - (v_{i,j} + v_{j,i})^{n-1}(v_{k,kji} - v_{j,kki}) \end{aligned} \right] \quad (5)$$

where n is the power-law index. Therefore, considering the developmental conditions and the dimensionless parameters below we have:

$$\bar{y} = \frac{y}{h}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{u} = \frac{u}{U}, L^* = \frac{l}{h}, \bar{P} = \frac{h^2 P}{L \mu_0 U}, \quad (6)$$

$$\mu_0 = \frac{k U^{n-1}}{h^{n-1}}.$$

Eqs. (1) and (2) are simplified as:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = 0, \bar{v} = 0, \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{d}{d\bar{y}} \left\{ - \left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^n \right\} - L^{*2} \frac{d}{d\bar{y}} \left\{ - (n-1) \left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^{n-2} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^{n-1} \frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{y}^3} \right\} = 0 \quad (8)$$

$$\bar{u} = 0, M_x = \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} = 0, \text{ at } \bar{y} = 1, -1, \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} = 0, \text{ at } \bar{y} = 0. \quad (10)$$

By selecting an appropriate variable change, the $\bar{u}$ value is obtained analytically using Maple 2018:

$$\bar{u} = \left(-\frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right)^{1/n} \left\{ - \int_0^{\bar{y}} \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) \right\}^{1/n} d\bar{y} \right. \\ \left. + \int_0^1 \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) \right\}^{1/n} d\bar{y} \right\} \quad (11)$$

The volumetric flow rate is obtained using Eq. (11):

$$Q = \frac{2h^{1/n+2} w}{k^{1/n}} \left(-\frac{dP}{dx} \right)^{1/n} \\ \times \int_0^1 \left\{ - \int_0^{\bar{y}} \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) \right\}^{1/n} d\bar{y} \right. \\ \left. + \int_0^1 \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) \right\}^{1/n} d\bar{y} \right\} d\bar{y} \quad (12)$$

In Eqs. (11) and (12) for $L^*=0$, the velocity profile and volumetric flow rate are obtained using the classical theory.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Substituting the experimental data obtained by Sampaio et al. [3] in Eq. (12) and trial and error, the dimensionless characteristic length for three values of volumetric flow rate (10, 20, and 30 ml/min) and for $n=1$ in C_1 microchannel are calculated (Table 1). The viscosity and density of water at 25°C are respectively assumed 0.000889 Pa. s and 997 kg/m³. According to Table 2, the characteristic length of water as a Newtonian fluid in the microchannel with the defined geometry and boundary conditions is not very dependent on the flow rate and pressure gradient.

Table 3 shows the dimensionless characteristic length of a dog's blood in the C_2 microchannel for three different values of pressure gradient and volumetric flow rates of 10, 20, and 30 μl/min. these values were obtained via trial and error using Eq. (12).

The Q_0 volumetric flow rate was obtained based on the classic theory and Eq. (12) for three different values of the pressure gradient in the microchannel (Table 3). Comparing this data with the results in Table 2 indicates the dependence of characteristic length for the non-Newtonian fluid of blood on the fluid material, showing a slight decrease with the increased in the flow rate.

Fig. 2 compares the velocity profile of the water Newtonian fluid in a rectangular microchannel (height × width = 222 × 694 μm) with the experimental and numerical data of Qu et al. [4]. The velocity profile obtained from Eq. (11) is based on the completely consistent couple stress theory for Newtonian fluids and for a flow rate of 46431.6 μl/min, the Reynolds number 1895, and pressure gradient -1473.843 kPa/m. The dimensionless characteristic length is 0.372 (Eq. (12)). The difference between theoretical results and experimental data is due to simplification presumptions such as the 2D

Table 1. Geometrical dimensions of the microchannel

microchannel	height (μm)	width (μm)
C_1	38	160
C_2	222	694

Table 2. The dimensionless characteristic material length scale of water for three different flow rate values

Volumetric flow rate (μl/min)	L^*
10	0.29
20	0.288
25	0.29

Table 3. The dimensionless characteristic material length scale of dog blood for three different flow rate values

dP/dx (kPa/m) [3]	Experimental flow rate (μl/min) [3]	L^*	Q_0 (μl/min)
796.563	10	0.273	8.16
1138.06	15	0.26	12.42
1495.04	20	0.230	17.16

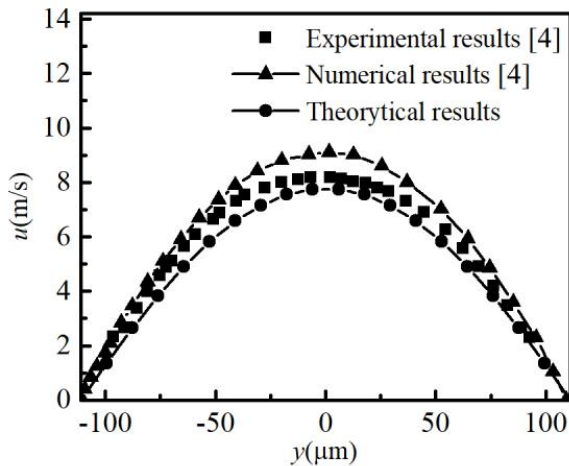


Fig. 2. Comparison of the theoretical water velocity profile $L^*=0.372$ in microchannel C_2 and experimental results of Qu et al. [4]

shape of the microchannel; while in the numerical analysis, microchannel geometry is modeled in three-dimensional (3D). Nevertheless, the minimum and maximum differences between the numerical and experimental results are 1.20 and 11.48 percent, respectively. As a result, it can be said that the analytical results of couple stress theory are acceptable when compared to laboratory results.

4. CONCLUSION

The velocity profiles for the power-law Newtonian and non-Newtonian fluids in a 2D microchannel were obtained

using the completely consistent couple theory (Eq. (12)). The volumetric flow rate was obtained using the analytical velocity relations. This study indicates the dependence of characteristic length on the fluid material. Further, the characteristic material length of water as a Newtonian fluid is not dependent on the volumetric flow rate and pressure gradient of the flow. However, the characteristic length of dog blood slightly increases with the increase in volumetric flow rate. The comparison of the velocity profile of water with the experimental and numerical data presented by Qu et al. [4]; which indicates the accuracy of completely consistent couple stress theory.

REFERENCES

- [1] C. Lissandrello, R. Dubay, K.T. Kotz, J. Fiering, Purification of Lymphocytes by Acoustic Separation in Plastic Microchannels, *SLAS Technology*, 23(4) (2018) 352-363.
- [2] F. Karami, A. Ahmadi Nadooshan, Y. Tadi Beni, Development of the Couple Stress Relationships for the Power Law Fluid and the Solution of Flow in Ceramic Tape Casting Process *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 11(5) (2018) 1239-1246.
- [3] D. Sampaio, D. Lopes, V. Semiao, Horse and dog blood flows in PDMS rectangular microchannels: Experimental characterization of the plasma layer under different flow conditions, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 68 (2015) 205-215.
- [4] W. Qu, I. Mudawar, S.-Y. Lee, S.T. Wereley, Experimental and Computational Investigation of Flow Development and Pressure Drop in a Rectangular Micro-channel, *Journal of Electronic Packaging*, 128(1) (2005) 1-9.



بررسی جریان سیال توانی درون یک میکروکانال دوبعدی براساس تئوری تنش کوپل - محاسبه طول مشخصه

فاطمه کرمی، افشین احمدی ندوشن*، یعقوب طادی بنی

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۸-۱۳
بازنگری: ۱۳۹۷-۰۹-۲۵
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۲-۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۱-۰۵

کلمات کلیدی:

تنش کوپل
سیال توانی
طول مشخصه مادی
دبی حجمی جریان
میکروکانال

خلاصه: هدف از این مقاله بررسی جریان توسعه یافته سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در یک میکروکانال دوبعدی بر اساس تئوری کاملاً سازگار تنش کوپل و محاسبه طول مشخصه مادی این سیالات است. در این مطالعه، ابتدا پروفیل سرعت و دبی حجمی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی قانون توانی در میکروکانال به روش تحلیلی بدست آمده و سپس طول مشخصه مادی سیالات نیوتنی آب و غیرنیوتنی خون با استفاده از روابط بدست آمده و داده‌های آزمایشگاهی سایر مقالات محاسبه شده است. مقایسه میان مقادیر طول مشخصه مادی آب و خون نشانگر وابسته بودن پارامتر طول مشخصه به جنس سیال است. با محاسبه طول مشخصه مادی، پروفیل سرعت خون حاصل از تئوری تنش کوپل درون میکروکانال محاسبه و با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک نویر استوکس مقایسه شده است. نتایج نشان داده است با افزایش دبی حجمی جریان، اختلاف مقادیر بدست آمده از تئوری های تنش کوپل و کلاسیک افزایش می‌یابد. این افزایش اختلاف به معنی افزایش تأثیر پارامتر طول بر خصوصیات جریان درون میکروکانال است. همچنین پروفیل سرعت آب درون میکروکانال با نتایج آزمایشگاهی مشابه مقایسه شده و تطابق خوبی میان نتایج بدست آمده از تئوری تنش کوپل و نتایج آزمایشگاهی دیده می‌شود.

۱- مقدمه

میکروکانال‌ها یکی از انواع وسایل میکروسیالاتی هستند که در زمینه‌های مختلف همچون زیست شناسی سلولی، غربالگری دارو، میکروراکتورهای شیمیایی و یا میکروسلول‌های سوختی کاربرد دارند. بسیاری از وسایل میکروسیالاتی برای آنالیز پزشکی به خصوص آنالیز خون ساخته و مورد استفاده قرار می‌گیرند. پالایش خون یکی از مهم ترین کاربردهای میکروکانال‌ها در زمینه پزشکی است [۱-۴]. از این رو مطالعه جریان خون درون میکروکانال‌ها مورد توجه محققان قرار گرفته است. محاسبه پارامترهای جریان همچون سرعت، فشار و ضخامت لایه پلازما از جمله اهداف اصلی بسیاری از مطالعات آزمایشگاهی و عددی جریان درون میکروکانال‌ها بوده است. به عنوان مثال، سمپو و همکاران [۵] افت فشار و لایه پلاسمای جریان خون اسب و سگ را در شرایط مختلف جریان درون میکروکانال‌های مستطیلی مستقیم به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند.

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ahmadi@eng.ska.ac.ir

بررسی آن‌ها نشان می‌دهد که ضخامت لایه پلازما به صورت غیرخطی با افزایش نرخ جریان افزایش می‌یابد و همچنین افت فشار به صورت خطی با نرخ جریان خون تغییر می‌کند. کو و همکاران [۶] سرعت و افت فشار جریان آب درون یک میکروکانال مستطیلی را به صورت آزمایشگاهی و عددی مطالعه و پروفیل سرعت جریان را در رینولدزهای مختلف محاسبه کردند. در این مطالعه نتایج مدل عددی که بر اساس تئوری کلاسیک نویر استوکس انجام گرفته، در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی قابل قبول بوده است.

خون سوسپانسیونی از پلاکت‌ها، سلول‌های قرمز و سفید خون می‌باشد و رفتار غیرهمگن و غیرنیوتنی آن در رگ‌هایی با قطر کوچک (در حدود ۲۰-۵۰ میکرومتر) مدتهاست که به اثبات رسیده است [۷]. از این رو برخی از بررسی‌کنندگان از مدل‌های دوفازی برای بررسی جریان خون درون میکروکانال‌ها استفاده کرده‌اند. وو و همکاران [۸] از یک مدل دوسیالی برای بررسی خواص چند جزئی و غیرنیوتنی خون در میکروکانال‌ها استفاده کردند. در این مطالعه، پلازما به صورت یک



شامل یک ویسکوزیته دوم است که وابسته به مقیاس طول بوده و در تئوری کلاسیک دیده نمی‌شود.

در این مطالعه، برای اولین بار، جریان خون درون میکروکانال‌ها براساس تئوری کاملاً سازگار تنش کوپل بررسی و طول مشخصه مادی با استفاده از روابط دبی جریان و داده‌های آزمایشگاهی محاسبه می‌شود. همچنین، حل دقیق جریان توسعه یافته سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی درون میکروکانال دوبعدی بدست آمده و با توجه به خاصیت غیرنیوتنی خون، از روابط گسترش یافته توسط کرمی و همکاران [۱۴] برای بررسی سیالات توانی استفاده خواهد شد.

۲- حل جریان درون میکروکانال دوبعدی

۲-۱- هندسه و شرایط مرزی

جریان آرام و توسعه یافته یک سیال توانی و تراکم‌ناپذیر در میان دو صفحه تخت و موازی مطابق شکل ۱ برقرار است. معادلات پیوستگی، ممنوم و شرایط مرزی حاکم بر مسئله بر اساس تئوری سازگار تنش کوپل و با صرف نظر از تاثیرات نیروی گرانش به صورت روابط (۱) تا (۴) می‌باشند:

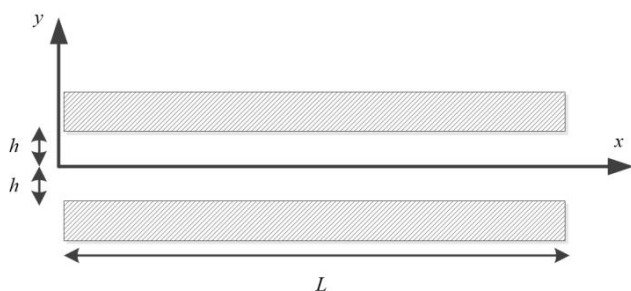
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2)$$

$$u = 0, M_x = 0, \text{ at } y = h, -h, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \text{ at } y = 0. \quad (4)$$

در اینجا، $\mathbf{V}$ ، ρ ، u به ترتیب بردار سرعت، چگالی، مولفه سرعت در جهت محور x و M_i بردار تنش کوپل است که برای یک سیال



شکل ۱: هندسه دوبعدی میکروکانال

Fig. 1. Two-dimensional geometry of the microchannel

سیال نیوتنی و سلول‌های قرمز خون به صورت سیال نازک شونده در برش در نظر گرفته شده‌اند. نتایج این شبیه‌سازی عددی که در نرم‌افزار اوپن فوم انجام گرفته است توزیع نسبت حجمی سلول‌های قرمز را در خون نشان می‌دهد و در پیش‌بینی مدل ترمبوز در دستگاه‌های خونی کاربرد دارد. کیم و همکاران [۹] از تئوری مخلوط [۱۰] برای مطالعه پروفیل سرعت خون و درصد حجمی سلول‌های قرمز خون درون میکروکانال استفاده کرده‌اند. بر اساس این تئوری خون به صورت یک سیال ویسکوز با ذرات شبه جامد در نظر گرفته شده است. پروفیل‌های سرعت بدست آمده در این حلگر دوفازی با داده‌های آزمایشگاهی تطابق خوبی داشته‌اند. چانگ و همکاران [۱۱] مدل ساده‌ای از قانون توانی جریان خون درون میکروکانال‌های مستقیم و میکروکانال‌هایی با خم ۹۰ درجه و انقباض ناگهانی رو مورد بررسی قرار دادند. مقادیر آزمایشگاهی فشار و نرخ جریان با مقادیر محاسبه شده توسط شبیه سازی‌های دینامیک سیال محاسباتی مقایسه شده است. مقاومت هیدرولیکی محاسبه شده در میکروکانال و رابطه نسبتاً خطی فشار و نرخ جریان در هر سه هندسه میکروکانال توسط نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی تایید شده است. کیاست‌فر و پورمحمود [۱۲] انتقال حرارت و جریان آرام کاملاً توسعه یافته سیالات غیرنیوتنی توانی درون یک میکروکانال مربعی را در حضور میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه، معادلات جریان و انرژی به روش اختلاف محدود حل شده و تأثیر اعداد هاتمن و ریکمن بر روی پروفیل‌های سرعت، دما و عدد ناسلت بررسی شده است.

به دلیل کوچک بودن ابعاد میکروکانال‌ها علاوه بر رفتار غیرنیوتنی خون در این هندسه‌ها، تأثیر مقیاس طول در خصوصیات جریان نیز غیرقابل انکار خواهد بود. بنابراین به نظر می‌رسد تئوری‌های جدید همچون تئوری کاملاً سازگار تنش کوپل که شامل پارامتر طول مشخصه مادی هستند نتایج بهتری را نسبت به تئوری‌های کلاسیک ارائه دهند. تئوری کاملاً سازگاری که توسط حاج‌اسفندیاری و همکاران [۱۳] معرفی شده بسیاری از ناسازگاری‌های موجود در سایر تئوری‌های تنش کوپل همچون تعداد زیاد مجهولات موجود در تئوری تنش کوپل استوکس را برطرف نموده است. حاج‌اسفندیاری و همکاران [۱۳] با تشخیص وابستگی نیروها و کوپل‌های حجمی و خاصیت پادمتقارن بودن تانسور تنش کوپل، تعداد اجزای تانسور تنش کوپل و مجهولات معادلات را کاهش دادند. علاوه بر این، این تئوری

$$\bar{y} = \frac{y}{h}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{u} = \frac{u}{U}, L^* = \frac{l}{h} \quad (13)$$

$$\bar{P} = \frac{h^2 P}{L \mu_0 U}, \mu_0 = \frac{k U^{n-1}}{h^{n-1}}$$

معادلات (۱) و (۲) به صورت روابط (۱۴) تا (۱۸) ساده می‌شوند:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = 0, \bar{v} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (15)$$

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{dS_{yx}}{d\bar{y}} = 0 \quad (16)$$

$$\bar{u} = 0, M_x = \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} = 0, at \bar{y} = 1, -1, \quad (17)$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} = 0, at \bar{y} = 0. \quad (18)$$

با توجه به هندسه مسئله، نرخ برش، تنش برشی و تنش کوپل منفی هستند، بنابراین مولفه تانسور تنش برشی S_{yx} از رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$S_{xy} = -\left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)^n - L^{*2} \left\{ \begin{aligned} &-(n-1) \left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)^{n-2} \\ &\left(\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2}\right)^2 + \left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)^{n-1} \frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{y}^3} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

در صورتی که $n=1$ باشد معادله (۱۶) به شکل معادله ممنوم برای یک سیال نیوتنی تبدیل می‌شود:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} - L^{*2} \frac{d^4 \bar{u}}{d\bar{y}^4} = 0 \quad (20)$$

و در صورتی که $L^* = 0$ معادله (۲۰) به معادله کلاسیک نویراستوکس تبدیل می‌شود.

۲-۲- حل معادله ممنوم و محاسبه دبی جریان

با انتخاب متغیر جدید $f = (-d\bar{u}/d\bar{y})^n$ معادله (۱۶) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \frac{L^{*2}}{n} \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} = 0 \quad (21)$$

$$f = \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left\{ C_2 e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - C_1 e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} \right\} - \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \bar{y} + C_3 \quad (22)$$

همگن و تراکم‌ناپذیر با استفاده از رابطه‌های (۵) تا (۷) بدست می‌آید [۱۳]:

$$M_i = -8\eta K_i \quad (5)$$

$$K_i = \frac{1}{4} (v_{k,ki} - v_{i,kk}) \quad (6)$$

$$\frac{\eta}{\mu_{eff}} = l^2 \quad (7)$$

در این روابط، K_i ، η و μ_{eff} به ترتیب بردار نرخ انحناء، ویسکوزیته دوم، ویسکوزیته موثر سیال توانی و طول مشخصه مادی سیال و وابسته به نوع سیال، هندسه و شرایط مرزی مسئله است. روابط (۳) و (۴) به ترتیب بیانگر شرط عدم لغزش و ممان صفر بر روی دیواره کانال و شرط تقارن محوری می‌باشند.

A تانسور تنش نیرویی و از دو بخش متقارن و پادمتقارن تشکیل شده است [۱۳]:

$$A_{ji} = A_{(ji)} + A_{[ji]} \quad (8)$$

$A_{(ji)}$ مولفه بخش متقارن تانسور تنش کوپل است که برای سیال توانی با استفاده از روابط (۹) تا (۱۱) قابل محاسبه است [۱۴]:

$$A_{(ji)} = -P\delta_{ij} + 2\mu_{eff} D_{ij} \quad (9)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}) \quad (10)$$

$$\mu_{eff} = k (v_{j,i} + v_{i,j})^{n-1} \quad (11)$$

k شاخص سازگاری سیال و $A_{[ji]}$ بخش پادمتقارن تانسور تنش نیرویی است که برای سیال توانی از رابطه (۱۲) بدست می‌آید [۱۴]:

$$A_{[ji]} = -M_{[i,j]} = l^2 k \begin{bmatrix} (n-1)(v_{i,j} + v_{j,i})^{n-2} (v_{i,jj} + v_{j,ij}) \\ (v_{k,ki} - v_{i,kk}) + (v_{i,j} + v_{j,i})^{n-1} \\ (v_{k,kij} - v_{i,kkj}) - (n-1)(v_{i,j} + v_{j,i})^{n-2} \\ (v_{j,ii} + v_{i,ji})(v_{k,kj} - v_{j,kk}) \\ -(v_{i,j} + v_{j,i})^{n-1} (v_{k,kji} - v_{j,kki}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

n توان قانون توانی است.

بنابراین، با توجه به شرط توسعه‌یافتگی و با استفاده از پارامترهای بدون بعد رابطه (۱۳):

استوکس به صورت رابطه (۲۸) است:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{d\bar{y}} \left(-\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^n = 0 \quad (28)$$

با حل تحلیلی معادله (۲۸) و به کار بردن شرایط مرزی (معادلات (۱۷) و (۱۸)) پروفیل سرعت به صورت رابطه (۲۹) بدست می‌آید:

$$\bar{u} = \frac{1}{1+1/n} \left(-\frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right)^{1/n} (1 - \bar{y}^{1/n+1}) \quad (29)$$

بنابراین نرخ جریان براساس تئوری کلاسیک به صورت رابطه (۳۰) خواهد بود:

$$Q_0 = \frac{2h^{2+1/n}w}{k^{1/n}(2+1/n)} \left(-\frac{dP}{dx} \right)^{1/n} \quad (30)$$

ویسکوزیته دوم η که وابسته به طول مشخصه مادی l است مشابه ویسکوزیته دینامیکی سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شود. طول مشخصه مادی همان پارامتر اساسی در تئوری‌های تنش کوپل است که در روابط تئوری کلاسیک دیده نمی‌شود. این پارامتر وابسته به نوع سیال، هندسه، شرایط اولیه و شرایط مرزی است و از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی یا نتایج آزمایشگاهی قابل محاسبه است. بنابراین با استفاده از روابط بدست آمده برای دبی حجمی جریان و با داشتن مقادیر تجربی دبی حجمی و گرادیان فشار بدست آمده از نتایج آزمایشگاهی می‌توان طول مشخصه مادی را محاسبه کرد.

۳- نتایج و بحث

در این بخش طول مشخصه مادی برای دو سیال غیرنیوتنی و نیوتنی درون میکروکانال با استفاده از نتایج آزمایشگاهی سمپیو و همکاران [۵] محاسبه خواهد شد. سمپیو و همکاران [۵] با انجام مطالعه آزمایشگاهی بر روی سیال آب و خون سگ درون سه هندسه میکروکانال ویسکوزیته، دبی حجمی جریان، افت فشار و ضخامت لایه پلاسمای خون را محاسبه کرده‌اند. ما از نتایج آزمایشگاهی مرجع [۵] همچون افت فشار و دبی جریان در یک هندسه مشخص میکروکانال استفاده خواهیم کرد و طول مشخصه مادی جریان آب و خون سگ درون یک میکروکانال مشخص را محاسبه خواهیم کرد. در

و در نهایت با به کار بردن شرایط مرزی معادلات (۱۷) و (۱۸) مقدار $\bar{u}$ به روش تحلیلی و با استفاده از نرم‌افزار میپل به صورت رابطه (۲۳) محاسبه شده است:

$$\bar{u} = \left(-\frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right)^{1/n} \left\{ -\int_0^{\bar{y}} \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) + \bar{y} \right\}^{1/n} d\bar{y} + \int_0^{\bar{y}} \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) \right\}^{1/n} d\bar{y} \right\} \quad (23)$$

این در حالی است که پروفیل سرعت سیال نیوتنی که بر اساس تئوری تنش کوپل از حل تحلیلی معادله (۲۰) محاسبه می‌شود به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{u} = \left(-\frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right) \left\{ \frac{L^{*2}}{e^{-1/L^*} + e^{1/L^*}} (e^{-\bar{y}/L^*} + e^{\bar{y}/L^*}) + \frac{1}{2}(1 - \bar{y}^2) - L^{*2} \right\} \quad (24)$$

با دبی جریان درون هندسه میکروکانال (شکل ۱) از رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود:

$$Q = 2 \int_0^h u dy \quad (25)$$

بنابراین با جایگذاری پروفیل سرعت رابطه (۲۳) در معادله (۲۵) دبی جریان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q = \frac{2h^{1/n+2}w}{k^{1/n}} \left(-\frac{dP}{dx} \right)^{1/n} \int_0^1 \left\{ -\int_0^{\bar{y}} \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) + \bar{y} \right\}^{1/n} d\bar{y} + \int_0^{\bar{y}} \left\{ \frac{L^*}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-\sqrt{n}\bar{y}/L^*} - e^{\sqrt{n}\bar{y}/L^*}}{e^{-\sqrt{n}/L^*} + e^{\sqrt{n}/L^*}} \right) \right\}^{1/n} d\bar{y} \right\} d\bar{y} \quad (26)$$

در رابطه (۲۶) چنانچه $n=1$ باشد نرخ جریان برای یک سیال نیوتنی به صورت رابطه (۲۷) محاسبه می‌شود:

$$Q_{new} = \frac{2h^3w}{\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \left\{ L^{*3} \frac{e^{2/L^*} - 1}{e^{2/L^*} + 1} - L^{*2} + 1/3 \right\} \quad (27)$$

در اینجا μ ویسکوزیته سیال نیوتنی است.

۳-۲- محاسبه سرعت سیال توانی بر اساس تئوری کلاسیک

معادله ممنتوم برای سیال توانی بر اساس تئوری کلاسیک نویر

آب در دما 25°C به ترتیب برابر 0.000889 پاسکال ثانیه و 997 کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد طول مشخصه مادی سیال نیوتنی آب در یک میکروکانال با هندسه و شرایط مرزی مشخص چندان وابسته به نرخ جریان و گرادیان فشار نیست.

۳-۲- محاسبه طول مشخصه مادی خون سگ درون میکروکانال

طول مشخصه مادی بدون بعد خون سگ درون میکروکانال C_2 با مشخصات جدول ۱ برای سه مقدار مختلف گرادیان فشار و دبی حجمی 10 ، 20 و 30 میکرولیتر بر دقیقه در جدول ۳ نشان داده شده است. این مقادیر به روش سعی و خطا و از طریق رابطه (۲۶) محاسبه شده‌اند. شاخص سازگاری و توان پاورلو خون سگ در دمای 25°C با توجه به نتایج آزمایشگاهی سمپیو و همکاران [۵] به ترتیب به صورت 0.014 و 0.8489 در نظر گرفته شده است. بیشترین مقدار خطای اندازه‌گیری دبی حجمی در این مطالعه آزمایشگاهی ۲ درصد بوده است.

دبی حجمی Q_0 براساس تئوری کلاسیک و از رابطه (۳۰) برای سه مقدار مختلف گرادیان فشار درون میکروکانال محاسبه و در جدول ۳ نشان داده شده است.

نتیجه‌ی حاصل از محاسبه طول مشخصه مادی خون سگ درون میکروکانال برای سه مقدار مختلف گرادیان فشار و دبی حجمی در جدول ۳ و مقایسه آن با نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که مقدار طول مشخصه مادی برای سیال غیرنیوتنی خون وابسته به جنس سیال بوده و با افزایش دبی جریان کاهش اندکی یافته است. با محاسبه مقدار طول مشخصه مادی پروفیل سرعت و تنش برشی قابل محاسبه خواهد بود.

جدول ۲: طول مشخصه مادی بی‌بعد محاسبه شده جریان آب برای سه مقدار مختلف دبی حجمی

Table 2. The dimensionless characteristic material length scale of water for three different flow rate values

دبی حجمی ($\mu\text{l}/\text{min}$)	طول مشخصه مادی بی بعد
۱۰	۰/۲۹
۲۰	۰/۲۸۸
۲۵	۰/۲۹

این بخش سعی بر آن بوده تا از نتایج آزمایشگاهی استفاده شود که در هندسه‌های مورد مطالعه آن‌ها، نسبت پهنا به ارتفاع میکروکانال بیشتر بوده و تأثیرات هندسه سه‌بعدی مقطع کانال بر روی نتایج به حداقل برسد (جدول ۱).

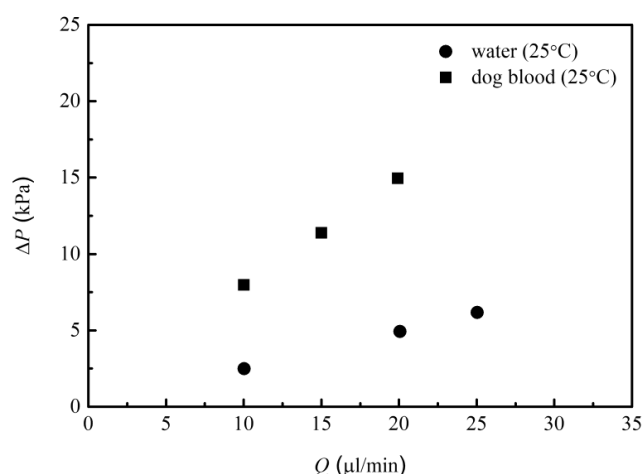
۳-۱- محاسبه طول مشخصه مادی آب درون میکروکانال

تغییرات افت فشار بر اساس دبی حجمی برای دو سیال آب و خون سگ براساس نتایج آزمایشگاهی سمپیو و همکاران [۵] در شکل ۲ آورده شده است. این نتایج برای میکروکانال C_1 با مشخصات جدول ۱ اندازه‌گیری شده است و از یک پمپ سرنگی جهت اندازه‌گیری دبی جریان و از دو تپ فشار به فاصله یک سانتی‌متر برای اندازه‌گیری افت فشار استفاده شده است. با جایگذاری داده‌های آزمایشگاهی در رابطه (۲۷) و انجام سعی و خطا، مقدار طول مشخصه مادی بدون بعد L^* برای سه مقدار مختلف دبی حجمی آب 10 ، 20 و 30 میلی‌لیتر بر دقیقه درون میکروکانال C_1 محاسبه می‌شود. ویسکوزیته و چگالی

جدول ۱: ابعاد هندسی میکروکانال

Table 1. Geometrical dimensions of the microchannel

میکروکانال	ارتفاع (μm)	پهنا (μm)
C_1	۳۸	۱۶۰
C_2	۲۲۲	۶۹۴



شکل ۲: افت فشار اندازه‌گیری شده در کانال C_1 برای دو سیال آب و خون [۵]

Fig. 2. Pressure drop measured for water and blood flow in the microchannel C_1 [5].

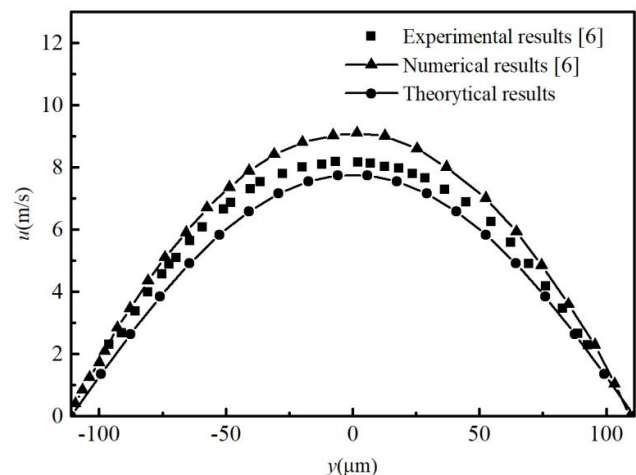
جدول ۳: طول مشخصه مادی محاسبه شده جریان خون سگ برای سه مقدار مختلف دبی حجمی

Table 3. The dimensionless characteristic material length scale of dag blood for three different flow rate values

گرادیان فشار (kPa/m) [۵]	دبی حجمی آزمایشگاهی (μl/min) [۵]	طول مشخصه مادی بی بعد	Q_0 (μl/min)
۷۹۶/۵۶۳	۱۰	۰/۲۷۳	۸/۱۶
۱۱۳۸/۰۶	۱۵	۰/۲۶	۱۲/۴۲
۱۴۹۵/۰۴	۲۰	۰/۲۳	۱۷/۱۶

از رابطه (۲۴) براساس تئوری کاملاً سازگار تنش کوپل برای سیالات نیوتنی و با فرض مقادیر دبی حجمی $۴۶۴۳/۱/۶$ میکرولیتر بر دقیقه، عدد رینولدز ۱۸۹۵ و گرادیان فشار $۱۴۷۳/۸۴۳$ - کیلوپاسکال بر متر بدست آمده است. مقدار طول مشخصه مادی بی بعد جریان سیال برابر $۰/۳۷۲$ و از رابطه (۲۷) محاسبه شده است. کمترین اختلاف میان نتایج تئوری و آزمایشگاهی در شکل ۳ مربوط به مرکز کانال و به مقدار $۴/۷$ درصد و بیشترین مقدار اختلاف $۱۰/۵$ درصد است. اختلاف نتایج تئوری با داده‌های آزمایشگاهی به دلیل فرضیات ساده کننده‌ای همچون دوبعدی بودن میکروکانال است؛ در صورتی که در تحلیل عددی، هندسه میکروکانال به صورت سه بعدی مدل شده است. با این وجود، کمترین مقدار اختلاف میان نتایج عددی و آزمایشگاهی $۱/۲۰$ درصد و بیشترین مقدار $۱۱/۴۸$ درصد است. بنابراین می‌توان گفت روابط تحلیلی حاصل از تئوری تنش کوپل نتایج قابل قبولی را در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی ارائه کرده‌اند.

پروفیل سرعت جریان سیال غیرنیوتنی خون درون میکروکانال C_1 بر اساس تئوری سازگار تنش کوپل با نتایج کلاسیک در شکل ۴ مقایسه شده است. این نتایج برای مقادیر مختلف دبی حجمی و داشتن مقدار طول مشخصه محاسبه شده در جدول ۳ و با توجه به رابطه (۲۳) محاسبه شده‌اند. همانطور که مشخص است میان مقادیر حاصل از تئوری تنش کوپل و تئوری کلاسیک اختلاف قابل ملاحظه‌ای وجود دارد و از آنجاکه مهمترین عامل اختلاف میان دو این تئوری در بررسی جریان (در شرایط و هندسه یکسان)، در نظر گرفتن تأثیر طول مشخصه مادی است، می‌توان نتیجه گرفت با افزایش دبی جریان، تأثیر مقیاس طول و ابعاد هندسی بر خصوصیات جریان افزایش می‌یابد؛ همانگونه که تأثیر پارامتر طول در جریان متلاطم قبلاً به اثبات رسیده است.



شکل ۳ مقایسه پروفیل سرعت تئوری آب ($L^* = ۰/۳۷۲$) درون میکروکانال C_2 با نتایج آزمایشگاهی و عددی کو و همکاران [۶]

Fig. 3: Comparison of the theoretical water velocity profile in microchannel C_2 and experimental results of Qu et al. [6]

مقایسه میان مقادیر دبی حجمی حاصل از تئوری کلاسیک و نتایج آزمایشگاهی در جدول ۳ نشان می‌دهد که بیشترین مقدار اختلاف نسبت به داده‌های آزمایشگاهی $۱۸/۴$ درصد و کمترین مقدار $۱۴/۲$ درصد است این در حالی است که با انتخاب طول مشخصه مناسب که در آخرین ردیف جدول ۳ آورده شده است، مقادیر دبی حجمی حاصل از تئوری تنش کوپل کاملاً منطبق بر نتایج آزمایشگاهی خواهد بود. در شکل ۳ پروفیل سرعت جریان سیال نیوتنی آب درون یک میکروکانال با نتایج آزمایشگاهی و عددی حاصل از مطالعه کو و همکاران [۶] مقایسه شده است. کو و همکاران [۶] پروفیل سرعت و افت فشار آب برای سه مقدار مختلف رینولدز درون یک میکروکانال مستطیلی با ارتفاع ۲۲۲ میکرومتر و پهنای ۶۹۴ میکرومتر به صورت آزمایشگاهی و عددی مورد بررسی قرار دادند. پروفیل سرعت حاصل

جدول ۳ محاسبه شده‌اند. مقایسه این پروفیل‌ها با مقادیر حاصل از تئوری کلاسیک در شکل ۴ نشان می‌دهد که با افزایش دبی حجمی اختلاف میان پروفیل‌های حاصل از تئوری تنش کوپل و کلاسیک افزایش و تأثیر طول مشخصه مادی بر پارامترهای جریان افزایش می‌یابد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	تانسور تنش نیرویی، N/m^2
D_{ij}	بخش متقارن تانسور گرادیان سرعت، s^{-1}
h	نصف ارتفاع کانال، m
k_i	مولفه بردار نرخ انحنای، $s^{-1}m^{-1}$
k	شاخص سازگاری سیال توانی، Pas^n
l	طول مشخصه مادی، m
L	طول کانال، m
M_i	مولفه بردار تنش کوپل، N/m
n	توان پاورلو
P	فشار، Pa
Q	دبی حجمی، m^3/s
Re	عدد رینولدز
u	مولفه محوری سرعت، m/s
U	میانگین سرعت، m/s
V	بردار سرعت، m/s

علائم یونانی

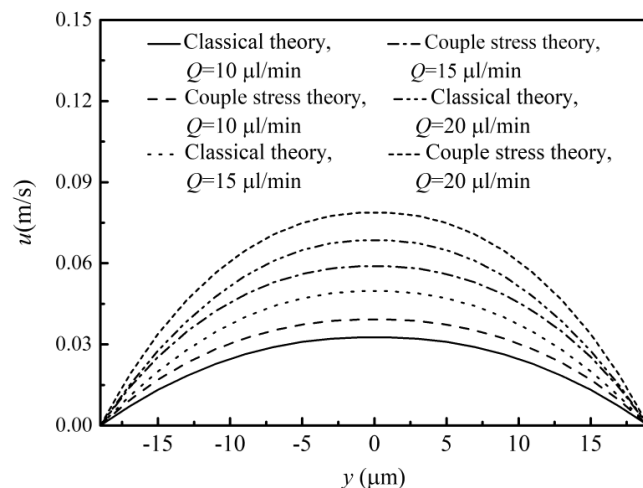
η	ویسکوزیته دوم سیال، kgm/s
μ	لزجت دینامیکی، $kg/(ms)$
ρ	چگالی، kg/m^3

زیرنویس

new نیوتنی

مراجع

- [1] C. Lissandrello, R. Dubay, K.T. Kotz, J. Fiering, Purification of Lymphocytes by Acoustic Separation in Plastic Microchannels, SLAS Technology, 23(4) (2018) 352-363.
- [2] X. Chen, D. Cui, C. Liu, H. Li, J. Chen, Continuous flow microfluidic device for cell separation, cell lysis



شکل ۴: مقایسه پروفیل‌های سرعت جریان توانی خون درون میکروکانال C_1 با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک برای دبی حجمی ۱۰، ۲۰ و ۳۰ میکرولیتر بر دقیقه

Fig. 4. Comparison of the power-law velocity profile of water in microchannel C_1 and results of the classical theory for flow rates of 10, 20 and 30 $\mu l/min$

۴- نتیجه‌گیری

پروفیل‌های سرعت جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی توانی درون یک میکروکانال دوبعدی بر اساس تئوری کاملاً سازگار تنش کوپل محاسبه شده است. با داشتن روابط تحلیلی سرعت دبی حجمی جریان نیز بدست آمده است. جداول ۲ و ۳ طول مشخصه مادی سیال نیوتنی آب و سیال غیرنیوتنی خون سگ درون میکروکانال C_1 (جدول ۱) را که به ترتیب با استفاده از روابط دبی حجمی (۲۶) و (۲۷) محاسبه شده نشان می‌دهند. این مقادیر برای سه مقدار مختلف دبی حجمی ۱۰، ۲۰ و ۳۰ میکرولیتر بر دقیقه و به روش سعی و خطا و براساس داده‌های آزمایشگاهی سمپیو و همکاران [۵] بدست آمده‌اند. تفاوت مقادیر موجود در دو جداول ۲ و ۳ نشان می‌دهد طول مشخصه مادی وابسته به جنس سیال است. علاوه بر این طول مشخصه مادی سیال نیوتنی آب چندان به دبی حجمی و گرادیان فشار جریان وابسته نیست. این در حالی است که طول مشخصه مادی خون سگ با افزایش دبی حجمی به مقدار اندکی کاهش یافته است. در شکل ۳ مقایسه پروفیل سرعت آب حاصل از رابطه (۲۴) با نتایج آزمایشگاهی و عددی کو و همکاران [۶]، دقت تئوری تنش کاملاً سازگار تنش کوپل را نشان می‌دهد. پروفیل‌های سرعت جریان خون سگ درون میکروکانال C_1 برای سه مقدار دبی حجمی ۱۰، ۲۰ و ۳۰ میکرولیتر بر دقیقه با استفاده از مقادیر طول مشخصه مادی

- Journal of Engineering Science, 95 (2015) 49-59.
- [9] J. Kim, J.F. Antaki, M. Massoudi, Computational study of blood flow in microchannels, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292 (2016) 174-187.
- [10] M. Massoudi, J. Kim, J.F. Antaki, Modeling and numerical simulation of blood flow using the theory of interacting continua, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(5) (2012) 506-520.
- [11] W. Chang, D. Tzebotich, L.P. Lee, D. Liepmann, Blood flow in simple microchannels, in: 1st Annual International IEEE-EMBS Special Topic Conference on Microtechnologies in Medicine and Biology. Proceedings (Cat. No.00EX451), 2000, pp. 311-315.
- [12] M. Kiyasatfar, N. Pourmahmoud, Laminar MHD flow and heat transfer of power-law fluids in square microchannels, *International Journal of Thermal Sciences*, 99 (2016) 26-35.
- [13] A.R. Hadjesfandiari, A. Hajesfandiari, G.F. Dargush, Skew-symmetric couple-stress fluid mechanics, *Acta Mechanica*, 226 (2015) 871.
- [14] F. Karami, A. Ahmadi Nadooshan, Y. Tadi Beni, Development of the Couple Stress Relationships for the Power Law Fluid and the Solution of Flow in Ceramic Tape Casting Process *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 11(5) (2018) 1239-1246.
- and DNA purification, *Analytica Chimica Acta*, 584(2) (2007) 237-243.
- [3] S. Yang, A. Ündar, J.D. Zahn, A microfluidic device for continuous, real time blood plasma separation, *Lab on a Chip*, 6(7) (2006) 871-880.
- [4] T.N. Chiesl, W. Shi, A.E. Barron, Poly(acrylamide-co-alkylacrylamides) for Electrophoretic DNA Purification in Microchannels, *Analytical Chemistry*, 77(3) (2005) 772-779.
- [5] D. Sampaio, D. Lopes, V. Semiao, Horse and dog blood flows in PDMS rectangular microchannels: Experimental characterization of the plasma layer under different flow conditions, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 68 (2015) 205-215.
- [6] W. Qu, I. Mudawar, S.-Y. Lee, S.T. Wereley, Experimental and Computational Investigation of Flow Development and Pressure Drop in a Rectangular Micro-channel, *Journal of Electronic Packaging*, 128(1) (2005) 1-9.
- [7] W.S.J. Uijttewaal, E.-J. Nijhof, R.M. Heethaar, Lateral migration of blood cells and microspheres in two-dimensional Poiseuille flow: A laser-Doppler study, *Journal of Biomechanics*, 27(1) (1994) 35-42.
- [8] W.-T. Wu, F. Yang, J.F. Antaki, N. Aubry, M. Massoudi, Study of blood flow in several benchmark microchannels using a two-fluid approach, *International*