



Vibration Analysis of Cable-Driven Parallel Robots to Define Critical Speeds

M. Aminpur, S. Farhadi*

Department of Mechanical Engineering, Kurdistan University, Sanandaj, Iran.

Review History:

Received: 2018/10/09
Revised: 2019/02/04
Accepted: 2019/03/11
Available Online: 2019/03/28

Keywords:

Cable driven parallel robot
Finite element method
Stability analysis

ABSTRACT: Cable-driven manipulators are a generation of parallel cinematic chain robots which provide important features including wide workspace and cost-effective high speed operations. However, due to wideness of the workspace and the flexibility of the cables, they are susceptible to unwanted vibrations which reduce their precision. Therefore, determination of velocity limits in the operation workspace is of high importance. In this study, stability analysis and critical velocities of a four cable plane robot are considered. Governing equations of the system are extracted by use of finite element method and employing variable length element. The characteristic coefficients of the extracted equations are nonlinear and velocity dependent ones. To provide a stability analysis, the equations are linearized assuming that the end-effector experiences quasi-static movements and the system is subjected to low amplitude vibrations. Afterward, the corresponding eigenvalue problem is analyzed and critical speeds of the robot in whole workspace domain are calculated. Furthermore, vibration frequencies corresponding to the unstable eigenvalues are determined. It is observed that system critical speed reduces as the end-effector moves to the boundaries of the workspace. In contrast to this, the frequency of the corresponding unstable modes increases as the end-effector moves to the borders of the workspace.

1- Introduction

Cable-Driven robots have a long history of industrial applications. Despite this, lots of their fundamental theoretical problems including kinematics, kinetics, and vibrations have been investigated in recent years. Due to longitudinal and bending flexibility of the cables, these robots are susceptible to unwanted vibrations in applications where large workspace, high velocity or considerable stiffness is demanded. The stiffness problem of cable robots has been investigated in many research works [1,2]. In this paper, the stability analysis of planar robot cables is studied to obtain the maximum allowable speeds. The governing equations of the system are obtained using variable length cable element. These equations are linearized considering the end-effector position, velocity, movement direction and the tensions of the stiffening cables. Then, the corresponding eigenvalue problem is solved to define natural frequencies and the critical velocity of the robot. According to our survey in the literature, the subject of the paper and the presented solution are novel.

2- Methodology

Fig. 1 shows a cable robot working in a vertical plane. The end effector is supported by four cables and its position and velocity are controlled through cables' tension control. The

end effector is considered as a point mass and the variable length cable element and finite element method presented by Du et al. [3] is employed to extract the corresponding dynamic equations. In this method, each cable is divided into a specific number of variable length similar elements. The main advantage of this method is that facilitates the employment of conventional finite element method and matrix assembling technics. Fig. 2 illustrates a variable length element of cross-sectional area A , non-extended length $l(t)$, modulus of elasticity E and mass per unit length μ . Force vectors $\mathbf{f}_1 = [f_{x_1}, f_{y_1}]^T$ and $\mathbf{f}_2 = [f_{x_2}, f_{y_2}]^T$ stand for element nodal forces and positions of the end nodes are presented by position vectors $\mathbf{r}_1 = [x_1, y_1]^T$ and $\mathbf{r}_2 = [x_2, y_2]^T$. Moreover, global and local coordinates of a generic point P on the element are presented by $\mathbf{r} = [x, y]^T$ and s , respectively. Assuming that each element stays as a straight line during time, position vector of the generic point P is expressed in terms of end-node position vectors and matrix of shape functions, as follows:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{N} \mathbf{r}_j \quad (1)$$

where $\mathbf{r}_j = [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T]^T$ and $\mathbf{N} = [n_1 \mathbf{I}, n_2 \mathbf{I}]$ represent the vector of nodal positions and a matrix of shape functions, respectively. Here, $\mathbf{I}$ denotes identity matrix and shape functions are set to $n_1 = 1 - s/l(t)$ and $n_2 = s/l(t)$.

*Corresponding author's email: s.farhadi@uok.ac.ir



Using the presented parameter definitions, the kinetic energy of the element, its potential energy (including strain gravitational parts) and virtual work of applied forces are determined, respectively, as follows:

$$T = \int_0^1 \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} ds \quad (2)$$

$$U = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - \mu g \mathbf{r}^T \mathbf{e}_3 \right) ds \quad (3)$$

$$\delta H = \delta \mathbf{r}_j^T \mathbf{f}_j + \mu \dot{\mathbf{r}}_1^T \delta \mathbf{r}_1 v_1 + \mu \dot{\mathbf{r}}_2^T \delta \mathbf{r}_2 v_2 \quad (4)$$

where g is gravity constant, $\mathbf{e}_3$ indicates the vertical unity vector and ε represents the element's longitudinal strain which is equal to:

$$\varepsilon = \sqrt{\partial_s \mathbf{r}^T \partial_s \mathbf{r}} - 1 \approx \frac{1}{2} (\partial_s \mathbf{r}^T \partial_s \mathbf{r} - 1) \quad (5)$$

In addition, v_1 and v_2 are lengths added to the element in its two ends and $\mathbf{f}_j = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T]^T$ is a vector of element nodal forces. Using Eqs. (2) to (5), the dynamic equations of the element are derived using Hamilton method [3]:

$$\mathbf{m}_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{c}_j \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{k}_j \mathbf{r}_j = \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^g \quad (6)$$

where $\mathbf{m}_j$, $\mathbf{c}_j$ and $\mathbf{k}_j$ are mass, energy transfer, and stiffness matrices, respectively, and $\mathbf{f}_j^g$ represents element's weight and they are functions of element length or length change rates. Using the conventional matrix assembling method and adding up the mass and the weight of the end effector to the corresponding node, the governing equation of the system is obtained:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{K} \mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^g \quad (7)$$

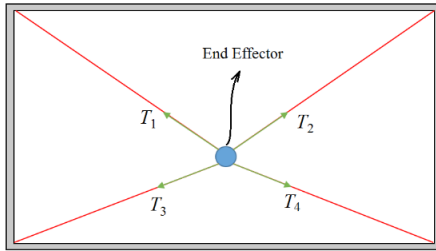


Fig. 1. The position and the velocity of the robot's end-effector controlled via cables' tension control

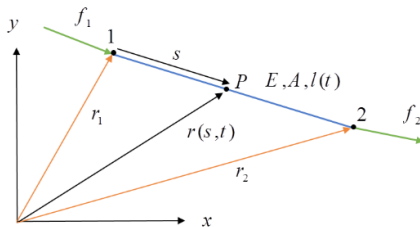


Fig. 2. Cable element

In the above equation, the stiffness matrix is a function of nodal positions vector and therefore, it's a nonlinear equation of nodal positions. We recall that mass, energy transfer and stiffness matrices are all functions of length change rates and

therefore depend upon the end-effector velocity. Moreover, the end-effector is over-constrained. To solve this equation, we assume that the end-effector position is known and it moves with a specific constant velocity. In addition, the magnitude of cable tensions corresponding to cables no. 3 and 4 are predefined. Now, we follow the below steps:

1. Assuming that the system is in static equilibrium, Eq. (7) is reduced to a nonlinear static equation:

$$\mathbf{K} \mathbf{R}_{t,s} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^g \quad (8)$$

where $\mathbf{R}_{t,s}$ defines the nodal positions at time t . This equation determines the position of cables intermediate nodes and the lengths of cable elements (l_t).

2. Afterward, we assume that the end-effector moves to its next position quasi-statically while the cables experience no vibrations. The same calculations are performed to determine the nodal positions and element lengths corresponding to the new position. These results along with movement time dt obtain nodal velocities and rates of element length changes:

$$\dot{\mathbf{R}}_{qs} = (\mathbf{R}_{t+dt,s} - \mathbf{R}_{t,s}) / dt \quad (9)$$

$$\dot{l} = (l_{t+dt} - l_t) / dt \quad (10)$$

where, $\mathbf{R}_{qs} = \mathbf{R}_{t,s}$.

3. To determine the acceleration of nodal displacements, the second order time derivative of element lengths and the cable tensions, again we refer to Eq. (7):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{R}}_{qs} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{R}}_{qs} + \mathbf{K} \mathbf{R}_{qs} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^g \quad (11)$$

4. Now, we assume that the system undergoes a small-amplitude vibrational displacement in addition to its quasi-static movement:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{qs} + \mathbf{R}_d \quad (12)$$

Then, Using Eqs. (7) and (11), we get

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{R}}_d + \mathbf{C} \dot{\mathbf{R}}_d + \mathbf{K}' \mathbf{R}_d = \mathbf{0} \quad (13)$$

where $\mathbf{K}'$ is determined using the below equation:

$$\mathbf{K}' \mathbf{R}_d = \mathbf{K} \big|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_{qs}+\mathbf{R}_d} (\mathbf{R}_{qs} + \mathbf{R}_d) - \mathbf{K} \big|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_{qs}} \mathbf{R}_{qs} \quad (14)$$

In general, $\mathbf{K}'$ is a nonlinear function of $\mathbf{R}_d$. However, with the assumption of small amplitude vibrations and neglecting higher-order terms, it reduces to a constant matrix. This way, the linearization process is completed. More details and discussions about linearization and solution of Eq. (14) for a similar problem, are presented in Ref. [4]. Here, assuming that element elongations in lateral vibrations are negligible, we simplify Eq. (14), as follows:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \big|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_{qs}} \quad (15)$$

5. Finally, a proportional damping is added to the energy transfer matrix and characteristic equation is solved to determine system's eigenvalues. The system is stable whenever all the real parts of the eigenvalues are negative. Otherwise, it becomes unstable.

3- Results and Discussion

A robot cable with a rectangular workspace of 20m length and 10m width is considered. The center of the coordinates is set to the center of the rectangle. The end effector mass is 2kg and cable parameters are set to $E = 125\text{MPa}$, $A = 0.5\text{cm}^2$ and $\mu = 0.4\text{kg/m}$. The end-effector solely displaces horizontally and its velocity is increased in steps of 0.1 m/s until it crosses the stability border for the first time. Since not all arbitrary values of cable tensions provide quasi-static movement conditions, we use the following equations to adjust the tensions of cables no. 3 and 4:

$$T_3 = \sqrt{100(5 + x_c / 2)^2 + 45^2}$$

$$T_4 = \sqrt{100(5 - x_c / 2)^2 + 45^2}$$

In the presented results, each cable is divided into 10 elements which guaranty the convergence of the numerical calculations. To assess the validity of the presented results and the precision of numerical calculations, the critical velocity of a horizontally moving single cable is calculated and compared to that presented by Dehadrai et al. [5]. According to their numerical calculations, for all values of cable tensions, the critical velocity of a horizontally moving cable is equal to its wave speed ($V_{Inst.} = \sqrt{T / \rho A}$). The instability velocity calculated here is $1.055\sqrt{T / \rho A}$ which is close to the mentioned value.

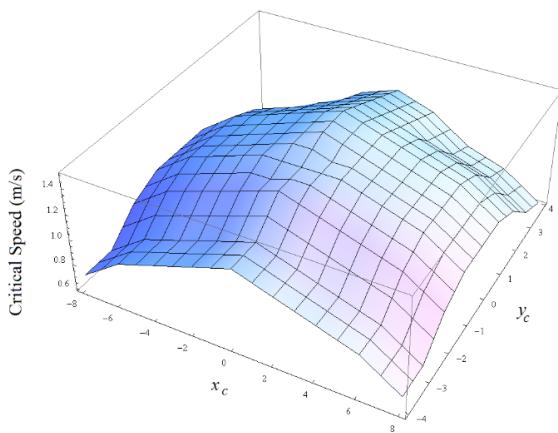


Fig. 3. Variations of critical speed versus end-effector's position

Fig. 3 presents a critical velocity of the cable robot versus its end-effector position. It shows critical velocity is maximum when the end-effector is positioned in its workspace center and reduces as it moves to the borders. This is because some of the cable lengths increase as the end effector moves toward the borders and corresponding stiffness reduces considerably. These cables are more susceptible to unwanted vibrations and reduce system's stability. Despite instability velocities, the value of instability frequencies increases as the end-effector moves to the borders of its workspace.

4- Conclusion

Stability analysis of planar robot cables is considered. The nonlinear governing equations of the system are extracted using variable length cable element method. These equations are linearized by separating the movement parameters into quasi-static and small amplitude vibrational components. Using the quasi-static movements, the cables nodal positions, element lengths and the time derivatives of element lengths are estimated. Then, adding up the small amplitude vibrational movements to the quasi-static ones, the linearized dynamic equations of the system are derived and the instability velocities and frequencies are calculated. Numerical calculations show that system instability velocity reduces as the end effector approaches to its workspace borders. In contrast, instability frequency increases as the end effector move toward the borders and the corners of the workspace.

5- References

- [1] C. Gosselin, D. Zhang, Stiffness analysis of parallel mechanisms using a lumped model, *International Journal of Robotics and Automation*, 17(1) (2002) 17-27.
- [2] N.G. Dagalak, J.S. Albus, B.-L. Wang, J. Unger, J.D. Lee, Stiffness Study of a Parallel Link Robot Crane for Shipbuilding Applications, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 111(3) (1989) 183-193.
- [3] J. Du, C. Cui, H. Bao, Y. Qiu, Dynamic Analysis of Cable-Driven Parallel Manipulators Using a Variable Length Finite Element, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10(1) (2015) 1-7.
- [4] S.H. Hashemi, S. Farhadi, S. Carra, Free vibration analysis of rotating thick plates, *Journal of Sound and Vibration*, 323 (2009) 366-384.
- [5] A.R. Dehadrai, I. Sharma, S.S. Gupta, Stability of traveling, pre-tensioned, heavy cables, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 13(8) (2018) 1-9.



آنالیز ارتعاشی ربات کابلی به منظور تعیین سرعت‌های بحرانی

مظهر امین‌پور، سیروان فراهادی*

دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۷-۱۷
بازنگری: ۱۳۹۷-۱۱-۱۵
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۲-۲۰
ارائه آنالین: ۱۳۹۸-۰۱-۰۸

کلمات کلیدی:

ربات کابلی موازی
روش اجزای محدود
تحلیل پایداری

خلاصه: ربات‌های کابلی یکی از انواع ربات‌هایی هستند که زنجیره‌ی سینماتیکی آن‌ها موازی می‌باشد. ربات‌های کابلی موازی به دلیل استفاده از محرک کابلی به جای بازوهای صلب، دارای ویژگی‌های مهمی همچون فضای کاری گسترده، سرعت و شتاب بالاتر و صرفه اقتصادی مطلوب می‌باشند. از سوی دیگر به دلیل فضای کاری گسترده و خاصیت ذاتی کابل در معرض ارتعاشات ناخواسته قرار دارند به همین دلیل بررسی مدل دینامیکی و ارتعاشی آن‌ها یک ضرورت است. در این تحقیق با تکیه بر روش اجزای محدود و با بهره‌گیری از المان کابل طول متغیر، روابط دینامیکی حاکم بر یک ربات کابلی صفحه‌ای استخراج می‌شود. ربات مورد تحقیق، یک ربات چهارکابله است که یک فضای مستطیلی را پوشش می‌دهد. معادلات به دست آمده غیرخطی و دارای ضرایب متغیری می‌باشند که تابع سرعت حرکت المان هستند. در این تحقیق، روابط دینامیکی حاکم بر سیستم با فرض حرکت سرعت ثابت عملگر نهایی و با فرض کوچک بودن دامنه ارتعاشات خطی سازی شده‌اند. سپس با حل مسئله مقدار ویژه متناظر، پایداری سیستم در سرعت‌ها و موقعیت‌های مختلف عملگر نهایی بررسی شده و سرعت بحرانی و فرکانس ناپایداری سیستم در موقعیت‌های مختلف تعیین شده است. نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهد که سرعت بحرانی در نقاط گوشه‌ی فضای کاری کمتر است و با حرکت به سمت قسمت‌های میانی فضا افزایش می‌یابد. در مورد فرکانس‌های ناپایداری روند معکوسی را شاهد هستیم، به این صورت که فرکانس پایه در نقاط گوشه بالاتر است و با حرکت به سمت قسمت‌های میانی فضای کاری کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر با گسترش کاربرد ربات‌ها، محققان با نگاهی تازه به طبیعت به ساختارهای زنجیره‌ی سینماتیکی بسته با ویژگی‌هایی نظیر دقت بالا، شتاب زیاد و قابلیت حمل بار دست یافتند. همان‌گونه که انسان برای حمل اشیای سنگین از هر دو دست استفاده می‌کند و یا برای انجام کارهایی مثل نوشتن یا گرفتن اجسام چند انگشت خود را به کار می‌برد، استفاده از زنجیره‌های بسته‌ی سینماتیکی راهکار مناسبی برای رفع مشکلات بازوهای سری است [۱]. با توجه به این بینش، به کارگیری زنجیره‌های سینماتیکی بسته رو به افزایش بوده و جهت‌گیری تحقیقات و توسعه‌ی فناوری در زمینه‌ی ربات‌های موازی گسترش یافته است.

از حدود سه دهه‌ی گذشته و برای غلبه برضعف‌های هر دو مکانیزم سری و موازی نگرش جدیدی در طراحی ربات‌های موازی

مطرح گردید. این نگرش مبتنی بر به کارگیری بازوهای کابلی به جای بازوهای صلب است و با طراحی یک بازوی ماهر که تنها از نیروی کششی کابل استفاده کند، به کار گرفته می‌شود. با استفاده از این رویکرد جدید می‌توان ربات‌های موازی طراحی کرد که از نظر وزن به مراتب سبک‌تر از مکانیزم‌هایی با بازوی صلب می‌باشند [۲]. به این ترتیب جرم متحرک ربات بسیار کاهش می‌یابد و در نتیجه با نیروی یکسان، سرعت و شتاب بیشتری را می‌توان در عملگر نهایی به دست آورد و بار بیشتری را نیز حمل کرد.

با وجود اینکه ربات‌های کابلی تاریخچه بلندی در کاربردهای صنعتی دارند، بسیاری از مسائل اساسی و بنیادی آن از قبیل سینماتیک، دینامیک و کنترل، در سال‌های اخیر توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به دلیل خاصیت خمشی و کشسانی ذاتی کابل‌ها، ارتعاشات ربات‌های کابلی در کاربردهای مخصوصی که نیاز به

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: s.farahadi@uok.ac.ir



فضای کاری گسترده، سرعت بالا و سختی بالای سیستم دارند، دارای اهمیت می‌شود [۳]. ویژگی‌های ارتعاشی ربات، رابطه‌ی نزدیکی با سختی ربات دارند. مسئله‌ی سختی ربات‌های موازی با لینک‌های صلب توسط تعدادی از محققان بررسی شده است. برای مثال جاسلین و ژانگ [۴]، مسئله‌ی سختی مکانیزم‌های موازی را بر اساس روش و مدل پارامتر فشرده بررسی کرده‌اند و چگونگی به دست آوردن سختی کلی در مکانیزم‌های موازی فضایی را ارائه داده‌اند. نوین وگوتفارد، نگاشت سختی کارترین را در ربات‌های موازی با فرض نبود نیروهای داخلی در لینک‌ها بررسی کرده‌اند. این نیروهای داخلی پیش‌بار یا پیش‌کشش نیز گفته می‌شوند [۵].

سهم نیروهای داخلی در سختی مجموع ربات‌های کابلی می‌تواند بسیار قابل ملاحظه باشد. مسئله سختی ربات‌های کابلی، همچنین توسط تعداد دیگری از محققان بررسی شده است. برای مثال داگالاکیس [۶] سختی ربوچرثیل‌ها را بررسی کرد و بیان نمود که سختی مجری نهایی، تابعی از هردو عامل سختی‌های کابل‌ها و جرم حمل شده توسط مجری نهایی است.

فرهوفن [۷] مدل ریاضی پلاتفرم استوارت با محرک کابلی را توسعه داد و نتیجه گرفت که سختی پلاتفرم، به سختی کابل‌ها و آرایش هندسی کابل‌ها بستگی دارد. نیروهای داخلی کابل‌ها، سختی پلاتفرم را تنها به مقدار اندکی تغییر می‌دهند. بنابراین تأثیر نیروهای داخلی روی سختی پلاتفرم می‌تواند نادیده گرفته شود. بهزادی‌پور و خواجه‌پور [۸] تأثیرکشش کابل‌ها را روی سختی و پایداری ربات کابلی بررسی کردند و ماتریس سختی کلی ربات کابلی را استخراج کردند. آن‌ها همچنین نتیجه گرفتند که سختی ربات کابلی، می‌تواند به وسیله افزایش نیروهای مخالف و رقابتی در کابل‌ها بهبود یابد.

یوان و همکاران [۹]، تحلیل سختی ربات کابلی سه درجه آزادی با چهار کابل را انجام دادند. آن‌ها برای چیره شدن بر مسئله ارتعاشات، نوع جدیدی از ربات‌های کابلی را پیشنهاد دادند که حرکت آن به صورت مکانیکی مقید شده است. کاوامورا و همکاران [۱۰] نشان دادند که نیروی داخلی کابل‌ها می‌تواند به طرز موثری در سیستم محرک کابلی یک درجه آزادی، ارتعاشات را کاهش دهد. آن‌ها همچنین دریافتند که سختی ربات در جهت محور کابل بزرگتر از سختی آن در جهت عرضی یا همان شعاع کابل است.

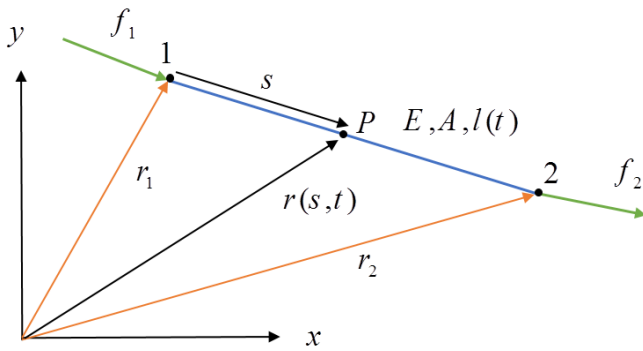
برای بررسی کردن ارتعاشات ربات‌های کابلی، بسیاری از محققان

کابل‌ها را به مانند فنرهای خطی مدل کردند و بعضی از آنها، کابل‌ها را با فنرهای غیرخطی مدل نمودند. اما همه‌ی آنها فرض کردند که کابل تنها تغییر شکل محوری دارد و برای مثال از خمش کابل در جهت عرضی یا شعاعی صرف‌نظر کردند. لیو و همکاران [۱۱] نشان دادند که انحراف و خمش عرضی کابل‌ها می‌تواند در آزمایش‌ها مشاهده شود، مخصوصاً زمانی که ربات در حال حرکت با سرعت بالا و یا شتاب بالا باشد. ولی این نکته که انعطاف و خمش عرضی کابل‌ها تا چه حدی در ارتعاشات کلی ربات سهم دارند را بررسی نکردند.

دوو و همکاران [۱۲] رفتار دینامیکی ربات‌های کابلی را با استفاده از یک مدل المان محدود طول متغیر مورد بررسی قرار دادند تا بتوانند رفتار دینامیکی کابل و تأثیر آن را بر عملکرد ربات بررسی نمایند. در این روش هر کابل به تعداد مشخصی المان تقسیم می‌شود که دارای طول و جرم متغیر هستند. مزیت اصلی این روش در آن است که می‌توان با استفاده از روش کلاسیک المان محدود و با برهم نهی ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی المان‌ها، ماتریس‌های متناظر را برای کل مجموعه استخراج کرد.

کاریکاتو و مرلت [۱۳] پایداری ربات‌های فضایی را که کاملاً مقید نیستند (دارای کمتر از ۶ کابل هستند)، مورد بررسی قرار دادند. در این تحلیل آن‌ها از روابط تعادل استاتیکی استفاده نمودند. خسروی و تقی‌راد [۱۴] تحلیل پایداری و کنترل مقاوم ربات‌های کابلی کشسان را بررسی کردند. در این تحلیل آن‌ها هر کابل را با یک فنر خطی جایگزین نمودند. هئو و همکاران [۱۵] تحلیل پایداری و فضای کاری ربات‌های کابلی فضایی با شش کابل را با روش قیدهای متغیر فرکانسی و به صورت تحلیلی و تجربی مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند با کمک این روش می‌توان سختی و پایداری کابل‌ها و عملکرد نهایی را به صورت چشمگیری افزایش داد.

در تحقیق حاضر ربات‌های کابلی صفحه‌ای که در سرعت‌های کاری زیاد عمل می‌کنند، مورد توجه قرار گرفته‌اند. کارکردهای زیادی برای چنین ربات‌های متصور است. برای مثال، این روبات‌ها می‌توانند به عنوان چاپگرهایی که بر روی دیوارهای ساختمانی بسیار بزرگ کار می‌کنند، مورد استفاده قرار بگیرند. در سرعت‌های کاری بالا، ممکن است انعطاف پذیری کابل‌ها باعث ناپایداری سیستم گردد و ارتعاشات کابل‌ها و عملکرد نهایی به سرعت افزایش یابد. به این منظور لازم است بر اساس کشش کابل‌ها، موقعیت عملکرد، سرعت



شکل ۲: المان کابل و مختصات مطلق گره‌ها
Fig. 2. Cable element

چگالی طولی (جرم بر واحد طول) μ است. طول المان در حالتی که تحت اثر تنش نیست با $l(t)$ تعریف می‌شود. موقعیت گره‌های دو سر المان با بردارهای $\mathbf{r}_1 = [x_1, y_1]^T$ و $\mathbf{r}_2 = [x_2, y_2]^T$ نشان داده می‌شوند و نیروهای وارد بر گره‌ها نیز برابر هستند با $\mathbf{f}_1 = [f_{x_1}, f_{y_1}]^T$ و $\mathbf{f}_2 = [f_{x_2}, f_{y_2}]^T$. شتاب جاذبه در خلاف جهت y است. هر نقطه دلخواه P بر روی المان دارای بردار موقعیت $\mathbf{r} = [x, y]^T$ و موقعیت محلی s است.

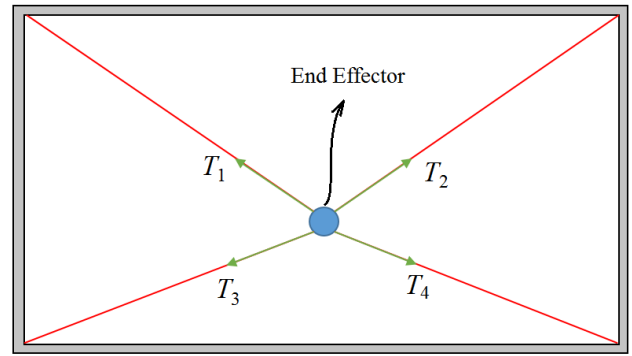
با فرض آنکه هر المان کابل در طول زمان به صورت یک خط راست باقی بماند، بردار موقعیت نقطه‌ی دلخواه P متناظر با مختصات محلی s را می‌توان بر حسب بردارهای موقعیت گره‌های دو سر المان و ماتریس توابع شکل نشان داد:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{N} \mathbf{r}_j \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{r}_j = [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T]^T$ بردار موقعیت گره‌ها و $\mathbf{N} = [n_1 \mathbf{I}, n_2 \mathbf{I}]$ ماتریس توابع شکل است. ماتریس $\mathbf{I}$ ماتریس واحد است و توابع شکل n_1 و n_2 به فرم زیر هستند:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1[s, l(t)] = 1 - s/l(t), \\ n_2 &= n_2[s, l(t)] = s/l(t) \end{aligned} \quad (2)$$

توابع شکل شامل یک سری کامل از مودهای صلب جسم هستند که می‌توانند حرکت انتقالی دلخواه جسم صلب را توصیف کنند. در اینجا موقعیت P تابع مختصات محلی s و زمان t است و $\partial/\partial s$ نسبت به s تعیین می‌شود. سرعت نقطه P با مشتق گیری از رابطه‌ی



شکل ۱: ربات کابلی و کنترل موقعیت و سرعت حرکت عملگر با کنترل کشش کابل‌ها

Fig. 1. The position and velocity of the robot's end-effector controlled via cables' tension control

عملگر و جهت حرکت آن، پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد تا حداکثر سرعت مجاز برای حرکت عملگر تعیین گردد. در این راستا در مقاله‌ی حاضر در ابتدا با استفاده از المان کابل طول متغیر، معادلات دینامیکی غیرخطی مربوط به یک ربات کابلی صفحه‌ای استخراج می‌شوند. سپس روابط به دست آمده برای موقعیت‌های کاری مختلف و سرعت‌های متفاوت عملگر نهایی خطی‌سازی می‌گردند. در نهایت با حل مسئله مقدار ویژه‌ی متناظر، فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی ربات کابلی در موقعیت‌های مختلف عملگر نهایی محاسبه می‌شوند. موضوع، روش بررسی و نتایج ارائه شده در این مقاله در نوع خود جدید بوده و جستجوی نویسندگان در منابع در دسترس نشان می‌دهد که تاکنون کار مشابهی در این زمینه ارائه نشده است.

۲- استخراج معادله‌های حاکم

شکل ۱ یک ربات کابلی صفحه‌ای را نشان می‌دهد که در صفحه‌ای موازی صفحه قائم قرار دارد. در این ربات عملگر نهایی توسط چهار کابل نگه داشته شده است و موقعیت و سرعت حرکت آن توسط نیروی کشش این چهار کابل کنترل می‌گردد.

از آنجایی که در ربات‌های کابلی طول کابل‌ها تابع زمان است، بهتر است برای استخراج معادلات دینامیکی مربوطه به روش المان محدود، از المان کابل طول متغیر استفاده شود. برای این منظور از روش المان محدود معرفی شده توسط دوو و همکاران [۱۲] استفاده می‌شود. برای تشریح این روش، مطابق شکل ۲ یک المان کابل را در نظر بگیرید که دارای ضریب الاستیسیته E ، سطح مقطع A و

(۱) نسبت به زمان تعیین می‌شود:

$$\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{N}' \mathbf{r}_j \quad (۸)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(s, t) = \dot{\mathbf{N}} \mathbf{r}_j + \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_j \quad (۳)$$

که در آن

که در آن

$$n'_2 = \frac{1}{l} \quad n'_1 = -\frac{1}{l}, \quad \mathbf{N}' = [n'_1 \mathbf{I}, n'_2 \mathbf{I}],$$

$$\dot{\mathbf{N}} = [\dot{n}_1 \mathbf{I}, \dot{n}_2 \mathbf{I}], \quad \dot{n}_1 = s \dot{l} / l^2, \quad \dot{n}_2 = -s \dot{l} / l^2$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۸) در رابطه‌ی (۷)، کرنش المان به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_j^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{r}_j - 1) \quad (۹)$$

کار مجازی انجام شده بر روی یک المان جرم متغیر نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \mathbf{r}_j^T \mathbf{f}_j + \mu \dot{\mathbf{r}}_1^T \delta \mathbf{r}_1 + \mu \dot{\mathbf{r}}_2^T \delta \mathbf{r}_2 \\ &= \delta \mathbf{r}_j^T \mathbf{f}_j + \mu \mathbf{r}_j^T \mathbf{D}_3 \delta \mathbf{r}_j \end{aligned} \quad (۱۰)$$

که در اینجا $\mathbf{f}_j = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T]^T$ بردار نیروهای وارد شده به دو سر المان، و v_1 و v_2 تغییر طول ایجاد شده در المان در نقاط ۱ و ۲ و در واحد زمان هستند و

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} v_1 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & v_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

در نهایت با به کارگیری اصل همپلتون و با استفاده از رابطه‌های (۴)، (۶) و (۱۰)، روابط دینامیکی حرکت کابل به شکل زیر استخراج می‌شوند [۱۲]:

$$\mathbf{m}_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{c}_j \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{k}_j \mathbf{r}_j = \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^g \quad (۱۱)$$

که در آن:

$$\mathbf{m}_j = \mu \mathbf{A}_1 \quad (۱۲-۱)$$

$$\mathbf{c}_j = \mu (\mathbf{A}_2^T - \mathbf{A}_2) + \mu \dot{\mathbf{A}}_1 - \mu \mathbf{D}_3 \quad (۱۲-۲)$$

$$\mathbf{f}_j^g = \mu g \mathbf{D}_2^T \mathbf{e}_3 \quad (۱۲-۳)$$

$$\mathbf{k}_j = EA \varepsilon \mathbf{D}_1 - \mu \mathbf{A}_3 + \mu \dot{\mathbf{A}}_2^T \quad (۱۲-۴)$$

در رابطه‌های بالا

$$\mathbf{D}_2 = \int_0^l \mathbf{N} ds = \frac{l}{2} [\mathbf{I}, \mathbf{I}]$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} ds \\ &= \frac{1}{2} \mu \int_0^l (\dot{\mathbf{N}} \mathbf{r}_j + \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_j)^T (\dot{\mathbf{N}} \mathbf{r}_j + \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_j) ds \\ &= \frac{1}{2} \mu (\dot{\mathbf{r}}_j^T \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{r}}_j + 2 \mathbf{r}_j^T \mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{r}_j^T \mathbf{A}_3 \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \int_0^l \dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{N} ds = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \int_0^l \dot{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{N}} ds = \frac{l^2}{3l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۵)$$

انرژی پتانسیل الاستیک و گرانشی المان کابل نیز برابر است با:

$$U = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - \mu g \mathbf{r}^T \mathbf{e}_3 \right) ds \quad (۶)$$

که در آن g شتاب گرانش، $\mathbf{e}_3$ بردار یکه واحد در راستای y و ε کرنش طولی المان است. کرنش المان برابر است با:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} - 1 \approx \frac{1}{2} (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1) \quad (۷)$$

این رابطه، به رابطه کرنش-جابجایی غیرخطی گرین معروف می‌باشد و برای کرنش‌های کوچک به صورت فوق ساده می‌شود [۱۶]. مشتق جزئی نسبت به مختصات محلی را s را می‌توان به صورت زیر نوشت:

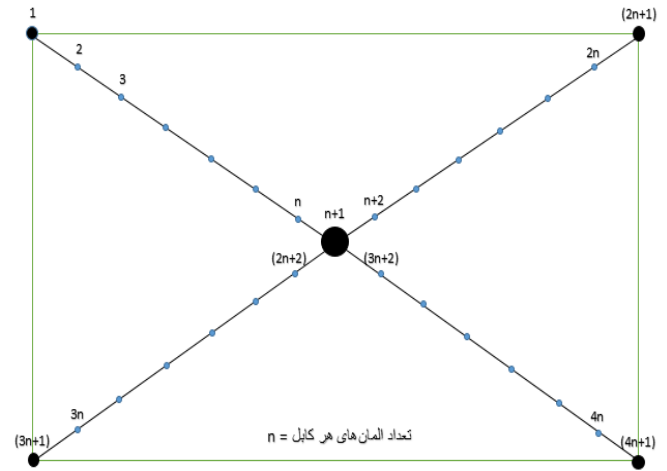
در این تحقیق جهت سادگی برای تمامی کابل‌ها تعداد المان مساوی استفاده شده است. در اینجا n تعداد المان‌های کابلی است. برای هر کابل، گره اول در انتهای ثابت و گره انتهایی متصل به عملگر می‌باشد. شکل ۳ روش گره بندی انجام شده در این مطالعه را نمایش می‌دهد. جرم و وزن عملگر به گره مشترک $n+1$ و به ترتیب به ماتریس جرم و بردار نیروی وزن افزوده می‌شوند.

در زمان حل رابطه‌ی (۱۳) باید نکات مختلفی را در نظر داشت. با توجه به رابطه (۴-۱۲) ملاحظه می‌شود که ماتریس سختی تابع مقدار تنش در المان‌ها است. از طرفی با توجه به رابطه‌ی (۹) مقدار تنش در هر المان تابع موقعیت گره‌ها است. در نتیجه رابطه‌ی (۱۳) یک رابطه‌ی غیرخطی از بردار موقعیت گره‌ها است. از طرف دیگر ملاحظه می‌شود ماتریس‌های جرم، سختی و انتقال انرژی همگی تابعی از سرعت تغییر طول المان‌ها و در نتیجه سرعت حرکت عملگر نهایی هستند. از طرف دیگر ربات کابلی مورد نظر یک ربات دو درجه آزادی است که تحت نیروی وزن قرار دارد. قاعداً با تنظیم کشش در کابل‌های اول و دوم (دو کابل بالایی) می‌توان موقعیت عملگر نهایی را تعیین کرد. در اینجا حضور کابل‌های سوم و چهارم باعث افزوده شدن دو درجه نامعینی به سیستم می‌گردد. بنابراین فرایند حل این مسئله باید تمام این موارد را در بر بگیرد.

۳- فرایند حل و خطی سازی مسئله

برای حل معادله دینامیکی (۱۳) لازم است نخست ماتریس‌های جرم، سختی و انتقال انرژی محاسبه شوند. به این منظور ابتدا فرض می‌کنیم که عملگر نهایی در یک موقعیت خاص قرار دارد و با سرعت مشخصی در جهت مورد نظر حرکت می‌نماید. همچنین برای حذف درجات نامعینی سیستم، فرض می‌شود مقدار کشش در دو سر کابل‌های سوم و چهارم (کابل‌های پایینی) مشخص باشد. در ادامه، مراحل زیر را به ترتیب برای محاسبه‌ی ماتریس‌های ذکر شده طی می‌کنیم:

۱- در ابتدا برای به دست آوردن هندسه‌ی سیستم و شکل کابل‌ها پس از اعمال نیروی وزن، فرض می‌کنیم که عملگر در موقعیت مورد نظر ثابت و دارای تعادل استاتیکی باشد ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_{t,s}$). در این صورت رابطه‌ی (۱۳) تبدیل به یک رابطه‌ی استاتیکی غیرخطی می‌شود که با استفاده از آن موقعیت گره‌ها و طول اولیه المان‌ها و همچنین نیروی



شکل ۳: تقسیم کردن کابل‌ها به تعداد المان‌های مساوی

Fig. 3. Discretization of the cables into equal element numbers

$$\mathbf{D}_1 = \int_0^l \mathbf{N}^T ds = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

در رابطه‌ی (۱۲) $\mathbf{m}_j$ ماتریس جرم مرسوم است و ماتریس $\mathbf{c}_j$ معرف انتقال انرژی از المان کابل ناشی از تغییرات طول است که در آن $\mu(\mathbf{A}_p^T - \mathbf{A}_p)$ ترم پاد متقارن و $\mu\dot{\mathbf{A}}_p$ ترم متقارن هستند. ترم $-\mu\mathbf{D}_p$ نیز معرف انتقال اندازه حرکت در گره‌های المان به دلیل تغییر جرم المان است. ماتریس سختی $\mathbf{k}_j$ از سه بخش تشکیل شده است که بخش اول آن تغییر شکل محوری المان را نشان می‌دهد و بخش دوم و سوم آن ناشی از مشتقات اول و دوم تغییر طول المان نسبت به زمان است. $\mathbf{f}_j$ و $\mathbf{f}_j^g$ به ترتیب نیروی گره‌ها بر روی کابل (در المان‌های داخلی معمولاً صفر است) و نیروی معادل گره ناشی از وزن المان هستند.

در این مطالعه، جرم عملگر نهایی متصل به کابل‌ها به صورت یک جرم متمرکز در نظر گرفته می‌شود. در نهایت با اسمبل کردن (برهم نهی) ماتریس‌های جرم و سختی و انتقال انرژی المان‌ها به روش مرسوم و با افزودن جرم عملگر نهایی به گره‌ی مربوطه، معادله‌ی کلی حاکم بر سیستم برابر است با:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{K}\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^g \quad (13)$$

که در آن

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{m}_j, \quad \mathbf{C} = \sum \mathbf{c}_j, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{k}_j$$

$\sum$ اپراتور اسمبل کننده‌ی روش المان محدود است.

کشش کابل‌ها از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\mathbf{K}\mathbf{R}_{t,s} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^g \quad (14)$$

در رابطه بالا بردار $\mathbf{R}_{t,s}$ موقعیت گره‌ها را در وضعیت تعادل استاتیکی در زمان t مشخص می‌کند. در حل معادله فوق باید در نظر داشت که ماتریس سختی خود تابع طول المان‌ها است و طول المان‌ها نیز تابع موقعیت گره‌ها است. بنابراین ماتریس سختی تابعی از موقعیت گره‌ها است. حل معادله غیرخطی فوق منجر به تعیین موقعیت گره‌های میانی کابل‌ها و تعیین طول المان در زمان مورد نظر (t) خواهد شد. خاطر نشان می‌سازد گره‌های انتهایی کابل‌ها دارای موقعیت معلومی می‌باشند و طول تمام المان‌ها در هر کابل یکسان فرض شده است.

۲- در ادامه فرض می‌شود که عملگر بدون ارتعاش و به صورت شبه‌استاتیکی در جهت مورد نظر و با سرعت تعیین شده حرکت نماید. پس از مدت زمان کوتاه dt عملگر در موقعیت جدیدی قرار خواهد گرفت و می‌توان محاسبات گام قبل را برای تعیین موقعیت گره‌ها و همچنین طول المان‌ها l_{t+dt} در موقعیت جدید $\mathbf{R}_{t+dt,s}$ تکرار نمود. حال با مقایسه موقعیت گره‌ها و طول المان‌ها در موقعیت جدید و قبلی، می‌توان سرعت حرکت گره‌ها و سرعت تغییر طول المان‌ها را محاسبه کرد:

$$\dot{\mathbf{R}}_{qs} = (\mathbf{R}_{t+dt,s} - \mathbf{R}_{t,s}) / dt \quad (15)$$

$$\dot{l} = (l_{t+dt} - l_t) / dt \quad (16)$$

در رابطه‌ی بالا $\mathbf{R}_{qs}$ بردار موقعیت گره‌ها در حرکت شبه‌استاتیکی است که مقدار آن در زمان t با $\mathbf{R}_{t,s}$ یکسان است ($\mathbf{R}_{qs} = \mathbf{R}_{t,s}$).

۳- با تعیین شدن موقعیت و سرعت گره‌ها و همچنین طول و سرعت تغییر طول المان‌ها، و با فرض آنکه حرکت عملگر و کابل‌ها همچنان بدون ارتعاش صورت گیرد $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{qs}$ ، رابطه‌ی دینامیکی (۱۳) را می‌توان برای تعیین شتاب گره‌ها، شتاب تغییر طول کابل‌ها و نیروی کشش کابل‌ها مورد استفاده قرار داد.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{R}}_{qs} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{R}}_{qs} + \mathbf{K}\mathbf{R}_{qs} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^g \quad (17)$$

۳- پس از تعیین موارد فوق، اکنون فرض می‌شود که سیستم علاوه بر حرکت شبه‌استاتیکی، دارای یک حرکت ارتعاشی با دامنه‌ی کوچک ($\mathbf{R}_d$) باشد:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{qs} + \mathbf{R}_d \quad (18)$$

با تقسیم کردن بردار جابجایی به دو بخش حرکت شبه‌استاتیکی و حرکت ارتعاشی کوچک و با بهره‌گیری از رابطه (۱۷)، معادله‌ی (۱۳) برای ارتعاشات کوچک به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{R}}_d + \mathbf{C}\dot{\mathbf{R}}_d + \mathbf{K}'\mathbf{R}_d = \mathbf{0} \quad (19)$$

که در آن ماتریس $\mathbf{K}'$ از رابطه‌ی جبری زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{K}'\mathbf{R}_d = \mathbf{K}|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_{qs}+\mathbf{R}_d}(\mathbf{R}_{qs} + \mathbf{R}_d) - \mathbf{K}|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_{qs}}\mathbf{R}_{qs} \quad (20)$$

باید توجه داشت ماتریس $\mathbf{K}'$ خود تابعی غیر خطی از بردار جابجایی دینامیکی $\mathbf{R}_d$ است که با فرض کوچک بودن $\mathbf{R}_d$ می‌توان آن را به شکل یک ماتریس با مقادیر ثابت ساده‌سازی نمود. این کار منجر به خطی شدن رابطه‌ی (۱۹) می‌شود. برای این کار می‌توان از تکنیک‌های برنامه‌نویسی استفاده نمود. در مرجع [۱۷] که توسط هاشمی و همکاران منتشر شده است، روش بسط و خطی‌سازی رابطه (۲۰) برای مسئله‌ای مشابه، با جزئیات مورد بحث قرار گرفته است. استفاده از روش ارائه شده در مرجع مذکور می‌تواند باعث کاهش حجم محاسبات و در نتیجه افزایش سرعت محاسبات گردد. در اینجا با فرض آنکه تغییرات طول المان‌ها در ارتعاشات جانبی ناچیز است، می‌توان گفت ارتعاشات جانبی تأثیر چندانی بر ماتریس سختی ندارد و در نتیجه رابطه‌ی (۲۰) را به شکل زیر ساده نمود:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_{qs}} \quad (21)$$

۵- پس از آن برای نزدیک کردن مسئله به شرایط واقعی، یک ماتریس میرایی تناسبی به معادله خطی سازی شده سیستم اضافه می‌شود ($\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} + \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}'$).

۶- در گام بعد با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات سیستم ($\mathbf{R}_d = \bar{\mathbf{R}}_d e^{st}$, $s = \sigma + i\omega$)، مسئله تعادل دینامیکی سیستم به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل می‌شود.

۷- با حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی به دست آمده، مقادیر ویژه‌ی سیستم تعیین می‌شوند. بخش حقیقی این مقادیر نشان دهنده‌ی سرعت میرایی مودهای ارتعاشی سیستم و بخش موهومی این مقادیر، فرکانس‌های طبیعی سیستم را نشان می‌دهند. زمانی که تمام مقادیر ویژه‌ی سیستم دارای بخش حقیقی منفی باشند، سیستم پایدار

جدول ۱: مشخصات هندسی و فیزیکی کابل مورد استفاده

Table 1. Material and geometric properties of the cables

سطح مقطع (m^2)	چگالی طولی (kg/m)	مدول الاستیسیته (MPa)
۰/۰۰۰۰۵	۰/۴	۱۲۵

گرفتن این موضوع و رعایت تقارن در سمت چپ و راست فضای کاری و نیز جهت توانایی در مقایسه‌ی نتایج از رابطه‌ی زیر جهت تعیین نیروهای کششی کابل‌های پایینی استفاده شده است:

$$T_3 = \sqrt{\left(\left(5 + \frac{x_c}{2} \right) \times 10 \right)^2 + (9 \times 5)^2}$$

$$T_4 = \sqrt{\left(\left(5 - \frac{x_c}{2} \right) \times 10 \right)^2 + (9 \times 5)^2}$$

برای مثال در نقطه سمت بالای سمت چپ فضای کاری ($x_c = -8$ و $y_c = 4$) کشش کابل‌های پایینی برابر $T_3 = 46/1$ N و $T_4 = 10/62$ N قرار داده شده‌اند، در حالی که در مرکز فضای کاری از مقادیر $67/268$ N برای هر دو کابل استفاده شده است. جدول ۲ نرخ میرایی شکل مودهای ارتعاشی سیستم (قسمت حقیقی مقادیر ویژه) را به ازای سرعت‌های افقی مختلف نشان می‌دهد. سرعت‌های ذکر شده تنها سرعت‌های بررسی شده در این تحقیق نیستند. فرکانس‌های ارتعاشی متناظر با سرعت‌های مختلف در جدول ۳ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود در سرعت $1/5$ m/s نرخ میرایی شکل مود ارتعاشی سیستم مثبت می‌گردد. بنابراین، سرعت بحرانی برای نقطه‌ی مرکزی فضا دارای مقدار $1/5$ m/s است و فرکانس ناپایدار متناظر برابر با $6/81$ Hz می‌باشد. با دقت به جدول ۳ ملاحظه می‌شود، بعضاً فرکانس‌های طبیعی به دست آمده بسیار به همدیگر نزدیک هستند. دلیل این موضوع آن است که با قرار گرفتن عملگر نهایی در مرکز فضای کاری، گونه‌ای از تقارن شکل می‌گیرد و طول کابل‌ها با هم برابر می‌شود. همچنین به دلیل حرکت شبه‌استاتیکی عملگر، نیروی کشش دو کابل بالایی با هم مساوی می‌شود. به همین ترتیب نیروی کشش در دو کابل پایینی نیز برابر می‌گردد. این موضوع باعث می‌شود که در صورت عدم وجود عامل دیگری که موجب عدم تقارن گردد، فرکانس‌های تکراری در تحلیل ارتعاشی سیستم ظاهر گردند. در این مسئله، حرکت عملگر نهایی بر روی کابل‌های سمت

و در غیر این صورت ناپایدار است. اکنون می‌توان با تغییر سرعت حرکت عملگر نهایی و تعیین مقادیر ویژه‌ی سیستم در سرعت‌ها و موقعیت‌های مختلف عملگر، سرعت پایداری سیستم را بر حسب موقعیت آن تعیین نمود.

۴- نتایج عددی

برای انجام محاسبات و گرفتن نتایج عددی، یک ربات کابلی با فضای کاری مستطیلی به طول 20 m و عرض 10 m در نظر گرفته شد. مبدأ مختصات در مرکز فضای کاری در نظر گرفته شده است. فرض شده است جرم عملگر نهایی برابر 2 kg باشد. مشخصات کابل مورد استفاده که مشخصات یک کابل برنجی می‌باشد، در جدول ۱ آمده است.

جهت مقایسه‌ی نتایج و سنجش توانایی ربات در نقاط مختلف، فضای کاری ربات را در نقاط $1/0$ طول اضلاع شبکه بندی نموده‌ایم. با حذف نقاط واقع شده بر روی نواحی مرزی فضای کاری، برای ۸۱ نقطه باقیمانده، معادله‌ی تعادل دینامیکی سیستم به ازای سرعت‌های مختلف حل شده است تا سرعت بحرانی سیستم در هر نقطه از فضای کاری تعیین گردد. در نتایج عددی ارائه شده، فرض شده است حرکت عملگر نهایی صرفاً در جهت افقی باشد. مثبت شدن نرخ میرایی (قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه) در حین افزایش سرعت، نشان دهنده‌ی ناپایداری سیستم است و سرعتی که برای نخستین بار در آن ناپایداری رخ می‌دهد، سرعت بحرانی سیستم است. در ادامه به عنوان نمونه، داده‌ها و نتایج حاصل در نقطه‌ی میانی فضای کاری ($x_c = 0$ و $y_c = 0$) نشان داده می‌شود. برای تهیه این نتایج، هر کابل به 10 المان تقسیم گردیده است و سرعت افقی عملگر با گام $0/1$ m/s تغییر داده شده است. این کار تا زمانی که برای نخستین بار ناپایداری رخ می‌دهد، ادامه یافته است.

باید در نظر داشت در گوشه‌های فضای کاری محدودیت در اعمال نیروی کشش کابل‌ها وجود دارد و معادلات حالت استاتیک با هر نیروی کشش دلخواه در کابل‌های پایینی قابل حل نمی‌باشند. در حالی که این محدودیت به این صورت در نقاط مرکزی فضای کاری وجود ندارد. بنابراین می‌بایست در ابتدا از حل مسئله و معادلات استاتیک در نقاط گوشه اطمینان حاصل شود، سپس الگوی موردنظر در اعمال نیروهای کشش، به نقاط مرکزی تعمیم داده شود. با در نظر

تعداد ۹ المان برای هر کابل، محاسبات با دقت کافی همگرا شده‌اند. مطالعه این موضوع در نقاط دیگر فضای کاری نیز همین موضوع را تأیید می‌نماید. در اینجا برای حفظ اختصار، نتایج همگرایی دیگر نقاط فضای کاری ذکر نشده است. در ادامه با انتخاب ۱۰ المان برای هر کابل، محاسبات مربوط به تعیین سرعت و فرکانس ناپایداری در نقاط مختلف فضای کاری صورت گرفته است.

برای سنجش دقت روابط و همچنین صحت کدهای نرم افزاری تهیه شده، نتایج سرعت بحرانی محاسبه شده برای یک کابل متحرک افقی با نتایج ارائه شده توسط مرجع [۱۸] مقایسه شده است. برای انجام این مقایسه، در این کار کابل‌های شماره‌ی ۳ و ۴ ربات حذف شده‌اند و جرم عملگر نهایی برابر صفر قرار داده شده است. بنابر نتایج ارائه شده در این مرجع (شکل ۸ از مرجع [۱۸]) سرعت بحرانی بی‌بعد برای تمامی مقادیر کشش کابل برابر ۱ است ($\bar{V}_{Inst.} = V / \sqrt{T / \rho A}$). به عبارت دیگر سرعت بحرانی کابل برابر سرعت حرکت موج است ($V_{Inst.} = \sqrt{T / \rho A}$) که این نتیجه از معادلات تئوریک نیز قابل استخراج است. سرعت بحرانی بی‌بعد محاسبه شده در کار حاضر ۱/۰۵۵ است که با دقت مناسبی قابل مقایسه با نتایج تئوریک و نتایج مرجع [۱۸] است.

جدول ۳: تغییرات فرکانس‌های طبیعی سیستم برحسب هرتز (قسمت موهومی مقادیر ویژه) به ازای تغییر سرعت (عملگر نهایی در مرکز فضای کاری قرار داده شده است و تعداد المان‌های هر کابل برابر ۱۰ المان است)

Table 3. System natural frequencies (imaginary part of eigenvalues) in different velocities (the end-effector is positioned in the workspace center and each cable is discretized into 10 elements)

شماره مقدار ویژه	V_x (m/s)			
	۰	۱	۱/۴	۱/۵
۱	۶/۷۸۰۹	۶/۸۱۲۰	۶/۸۰۰۳	۶/۸۰۰۶
۲	۶/۸۲۸۱	۶/۷۹۸۲	۶/۸۱۱۲	۶/۸۱۱۳
۳	۷/۴۷۶۷	۷/۴۷۵۸	۷/۴۷۴۸	۷/۴۷۴۵
۴	۱۰/۴۹۶۳	۱۰/۴۹۶۰	۱۰/۴۹۵۶	۱۰/۴۹۵۴
۵	۲۱/۷۹۵۳	۲۱/۷۹۹	۲۱/۸۰۴۳	۲۱/۸۰۵۷
۶	۲۲/۱۰۲۲	۲۲/۰۹۷۷	۲۲/۰۹۲۴	۲۲/۰۹۲۱
۷	۲۳/۱۹۴۲	۲۳/۱۹۳۲	۲۳/۱۹۲۱	۲۳/۱۹۱۸
۸	۲۴/۷۲۳۴	۲۴/۷۲۱۹	۲۴/۷۲۰۳	۲۴/۷۱۹۸
۹	۳۹/۲۵۵۳	۳۹/۲۵۹۶	۳۹/۲۶۴۱	۳۹/۲۶۵۷
۱۰	۴۲/۰۴۱۴	۴۲/۰۵۵۳	۴۲/۰۷۱۷	۴۲/۰۷۷۷

چپ و راست اثر متقارنی ندارد و موجب افزایش طول کابل‌های یک سمت و کاهش طول کابل‌های سمت مقابل می‌شود و این امر باعث می‌گردد مقداری اختلاف در فرکانس‌های طبیعی به وجود آید. افزایش هرچه بیشتر سرعت عملگر می‌تواند موجب افزایش بیشتر این اختلاف‌ها گردد.

برای ارزیابی همگرایی نتایج عددی، ابتدا سرعت بحرانی و فرکانس ناپایداری متناظر با آن به ازای تعداد المان‌های یک کابل به دست آمده‌اند. جدول ۴ سرعت ناپایداری ($V_{Inst.}$) و فرکانس ناپایداری متناظر ($f_{Inst.}$) با آن را در مرکز فضای کاری ($x_c = 0$ و $y_c = 0$) و همچنین در مختصات ($x_c = -4$ و $y_c = -1$) بر حسب تعداد المان یک کابل نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد المان‌ها، سرعت ناپایداری ثابت می‌ماند، ولی فرکانس کاری از سمت پایین به سمت یک مقدار ثابت همگرا می‌شود. در توجیه این موارد باید در نظر داشت که در این مطالعه سرعت حرکت عملگر نهایی با گام‌های ۰/۱ تغییر داده شده است و در صورت انتخاب گام‌های کوچک‌تر، ممکن است مقدار سرعت بحرانی نیز اندکی تغییر کند. همچنین از آنجایی که سیستم مورد بررسی یک سیستم پایستار نیست، نباید انتظار داشت فرکانس‌های طبیعی از سمت بالا به سمت مقادیر نهایی خود همگرا شوند. جدول ۴ نشان می‌دهد که به ازای

جدول ۲: تغییرات نرخ‌های میرایی سیستم (قسمت حقیقی مقادیر ویژه) به ازای تغییر سرعت (عملگر نهایی در مرکز فضای کاری قرار داده شده است و تعداد المان‌های هر کابل برابر ۱۰ المان است)

Table 2. Damping rate of system's eigenvalues in different velocities (the end-effector is positioned in the workspace center and each cable is discretized into 10 elements)

شماره مقدار ویژه	V_x (m/s)			
	۰	۱	۱/۴	۱/۵
۱	-۰/۰۵۶۴	-۰/۰۲۴۵	-۰/۰۶۸۶	-۰/۰۷۰۶۵
۲	-۰/۰۵۴۷	-۰/۰۵۸۷	-۰/۰۰۴۱	+۰/۰۰۶
۳	-۰/۰۵۵۶	-۰/۰۲۲۸	-۰/۰۰۹۷	-۰/۰۰۶۴
۴	-۰/۰۶۱۰	-۰/۰۳۶۸	-۰/۰۲۷۱	-۰/۰۲۶۴
۵	-۰/۰۹۷۵	-۰/۰۹۷۴	-۰/۰۹۷۶	-۰/۰۹۷۶
۶	-۰/۰۹۸۶	-۰/۰۸۷۱	-۰/۰۸۲۱	-۰/۰۸۰۸
۷	-۰/۱۰۳۸	-۰/۰۴۴۸	-۰/۰۲۱۲	-۰/۰۱۵۴
۸	-۰/۱۱۱۱	-۰/۰۶۵۳	-۰/۰۴۶۹	-۰/۰۴۲۳
۹	-۰/۲۰۴۱	-۰/۲۰۴۲	-۰/۲۰۴۳	-۰/۲۰۴۳
۱۰	-۰/۲۲۶۸	-۰/۱۲۰۶	-۰/۰۷۸۴	-۰/۰۶۷۹

جدول ۴: همگرایی سرعت بحرانی و فرکانس ناپایداری متناظر با آن در دو موقعیت مختلف از فضای کاری

Table 4. Convergence of critical speed and corresponding instability frequency in two different end-effector positions

تعداد المان (n)	$(x_c, y_c) = (0, 0)$	$(x_c, y_c) = (-1, -4)$		
	$V_{Inst.} \text{ (m/s)}$	$f_{Inst.} \text{ (Hz)}$	$V_{Inst.} \text{ (m/s)}$	$f_{Inst.} \text{ (Hz)}$
۳	۱/۵	۶/۳۸۱۱۴	۱/۳	۱۱/۳۵۹۰
۶	۱/۵	۶/۹۶۳۳	۱/۳	۱۱/۶۲۸۸
۹	۱/۵	۷/۱۲۶۴	۱/۳	۱۱/۷۵۸۷
۱۲	۱/۵	۷/۱۶۹۵	۱/۳	۱۱/۷۷۸۵

اندازه‌ی فرکانس ناپایداری کاهش می‌یابد. بازه‌ی تغییرات فرکانس ناپایداری بین ۲۵/۵۱ Hz تا ۶/۸۱ Hz است.

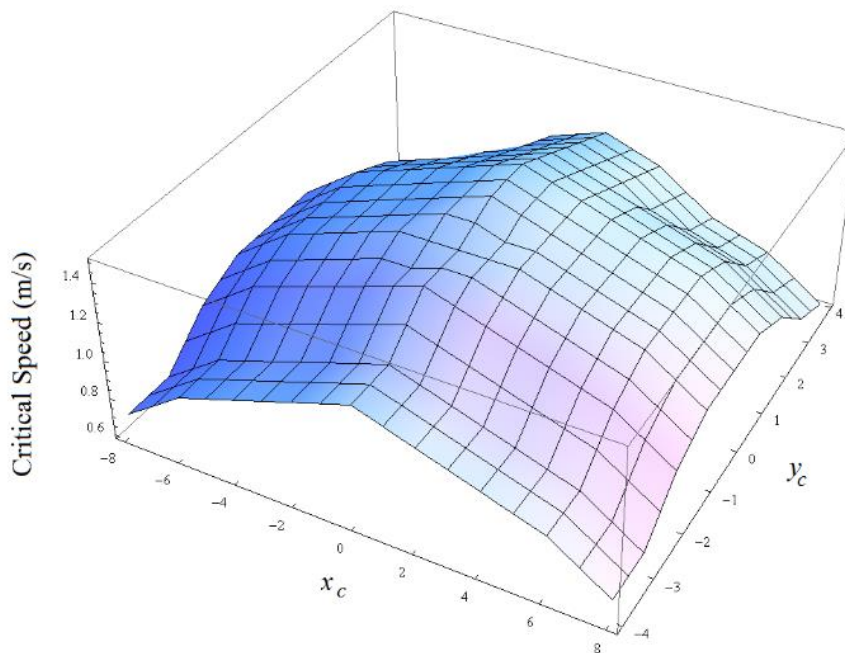
۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

این تحقیق نحوه‌ی استخراج مدل دینامیکی ربات کابلی موازی و شرایط پایداری آن را به دست می‌دهد. ربات‌های کابلی موازی به دلیل صرفه‌ی اقتصادی، فضای کاری گسترده و محدودیت کم در انتخاب طول کابل‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. از طرفی کابل‌های مورد استفاده در فضاهای کاری گسترده‌تر در معرض ارتعاشات ناخواسته، ناپایداری و پایین آمدن دقت مکان‌یابی هستند. بنابراین ضرورت تحقیق بر روی مدل دینامیکی و وضعیت ارتعاشی آنها به وضوح قابل درک می‌باشد.

در این پژوهش ابتدا، با تکیه بر روش اجزای محدود و با بهره‌گیری از المان کابل طول متغیر، معادله دینامیکی حرکت سیستم به دست می‌آید. در معادله‌ی دینامیکی به دست آمده، ماتریس سختی خود تابعی از موقعیت المان‌ها و سرعت تغییر طول آنها می‌باشد، بنابراین معادله در حالت غیرخطی قرار می‌گیرد. علاوه بر آن سرعت تغییر طول و شتاب تغییر طول المان‌های کابل، نقش تعیین کننده‌ای در مقدار عددی ماتریس‌های جرم، سختی و انتقال انرژی سیستم دارند. برای حل این مشکل از روش خاص خطی سازی استفاده شده است. به این صورت که معادله ابتدا در حالت بدون ارتعاش و برای حرکت شبه استاتیکی سیستم حل شده و موقعیت، سرعت تغییر طول و شتاب تغییر طول المان‌ها به دست می‌آید. در مرحله‌ی بعد با فرض افزودن جابجایی‌های کوچک ناشی از ارتعاش هارمونیک سیستم به جابجایی‌های شبه‌استاتیکی آن و حذف عبارت‌های مرتبه بالای

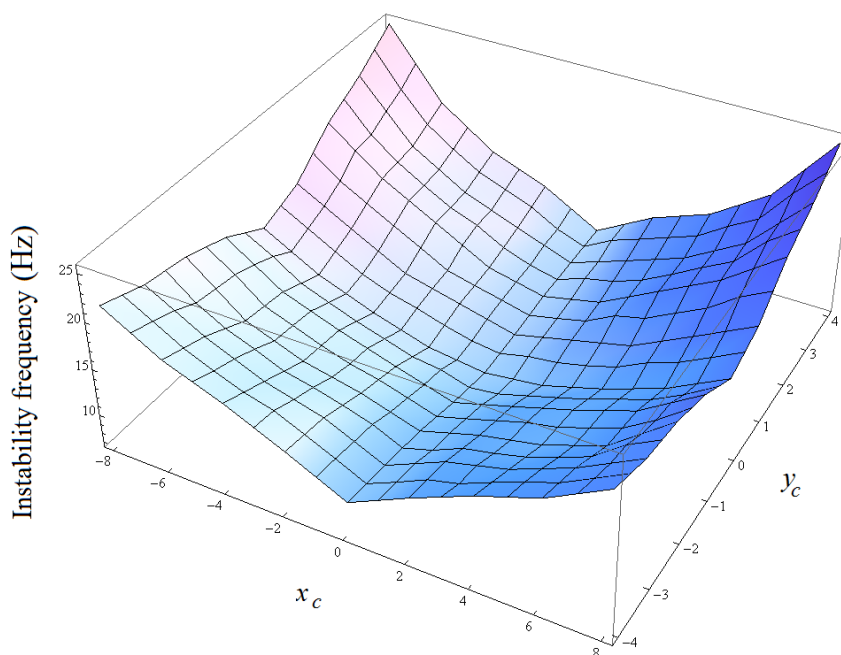
در نهایت سرعت بحرانی و فرکانس ناپایداری در نقاط مختلف فضای کاری محاسبه شده‌اند. در شکل ۴ تغییرات سرعت بحرانی در هر دو راستای طولی و عرضی و به عبارتی در کل فضای کاری ربات به صورت سه بعدی نمایش داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، اندازه‌ی سرعت بحرانی در نقاط گوشه کمتر و در نقاط میانی بالاتر است. با حرکت از نقاط گوشه‌ی فضای کاری به سمت قسمت‌های میانی، اندازه‌ی سرعت بحرانی افزایش می‌یابد. به این معنی که عملگر می‌تواند با سرعت بالاتری قبل از ناپایداری، حرکت کند. این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که با قرارگیری عملگر نهایی در وسط فضای کاری، تمام کابل‌ها دارای طول کوچکی می‌شوند و در نتیجه کابل‌ها سخت‌تر ارتعاش می‌نمایند. در حالی که با قرارگیری عملگر در گوشه‌های فضای کاری، به ناچار بعضی از کابل‌ها بلندتر می‌شوند و طبیعتاً راحت‌تر می‌توانند به ارتعاش در آیند. باید توجه داشت با تغییر موقعیت عملگر شماره مقدار ویژه‌ای که نخستین بار دچار ناپایداری می‌شود، عوض می‌گردد. به عبارت دیگر شکل مود ارتعاشی که نخستین بار با افزایش سرعت ناپایدار می‌شود، در موقعیت‌های مختلف عملگر یکسان نیست. به عنوان مثال زمانی که عملگر در گوشه بالایی و سمت چپ (یا راست) فضای کاری قرار می‌گیرد، شکل مود شماره هشتم سیستم پیش از بقیه مودها دچار ارتعاشات ناپایدار می‌شود.

در شکل ۵، تغییرات فرکانس ناپایداری سیستم در هر دو راستای طولی و عرضی و به عبارتی در کل فضای کاری ربات به صورت سه بعدی نمایش داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، فرکانس ناپایداری در نقاط گوشه بالاتر و در نقاط میانی کمتر است. با حرکت از نقاط گوشه‌ی فضای کاری به سمت قسمت‌های میانی،



شکل ۴: تغییرات سرعت بحرانی بر حسب موقعیت عملگر نهایی در حرکت افقی

Fig. 4. Variations of critical speed versus end-effector's position in horizontal movement



شکل ۵: تغییرات فرکانس ناپایداری بر حسب موقعیت عملگر نهایی در حرکت افقی

Fig. 5. Frequency of the unstable vibration mode versus end-effector's position in horizontal movement

قرار می‌گیرند. مقادیر سرعت بحرانی و فرکانس ناپایداری برای تمامی فضای کاری یک ربات کابلی صفحه‌ای محاسبه شده‌اند. بر طبق نتایج ثبت شده، اندازه‌ی سرعت بحرانی در گوشه‌های فضای کاری کمتر و با حرکت به سمت قسمت‌های میانی، بالاتر می‌رود. در مورد

آن و همچنین حذف عبارت‌های مربوط به حرکت شبه‌استاتیکی که همدیگر را بالانس می‌نمایند، معادله دینامیکی خطی حاکم بر ارتعاشات سیستم استخراج می‌شود. در نهایت با تحلیل مسئله مقدار ویژه‌ی متناظر با این معادله، سرعت‌های بحرانی سیستم مورد بررسی

فرکانس‌های ناپایداری روند معکوسی مشاهده می‌شود، به این صورت که اندازه‌ی فرکانس ناپایداری در گوشه‌ها بالاتر است و با حرکت به سمت قسمت‌های میانی، اندازه‌ی فرکانس کاهش می‌یابد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت، m^2
c	ماتریس انتقال انرژی المان
C	ماتریس انتقال انرژی کل
E	مدول الاستیسیته، N/m^2
f	نیروی وارد بر یک گره، N
f	بردار نیروی وارد بر المان
F	بردار نیروی کل
f_{Inst}	فرکانس ناپایداری، Hz
g	ثابت گرانش، m/s^2
I	ماتریس واحد
k	ماتریس سختی المان
K	ماتریس سختی کل
l	طول المان کابل، m
m	ماتریس جرم المان
M	ماتریس جرم کل
n	تابع شکل
N	ماتریس توابع شکل
r	بردار موقعیت گره‌های یک المان
R	بردار موقعیت کلی سیستم
R_{qs}	بردار موقعیت کلی سیستم در جابجایی شبه استاتیکی (بدون ارتعاش)
R_d	بردار جابجایی‌های دینامیکی (ارتعاشی) سیستم
s	مختصات محلی بر روی المان کابل، m
t	زمان، s
T	انرژی جنبشی، J
T_i	کشش در گره i ام، N
V_{Inst}	سرعت ناپایداری، m/s
x_c	مختصات افقی عملگر نهایی، m
y_c	مختصات عمودی عملگر نهایی، m

علائم یونانی

α	ضریب ماتریس جرم در ماتریس میرایی تناسبی
β	ضریب ماتریس سختی در ماتریس میرایی تناسبی
μ	چگالی طولی، kg/m
ϵ	کرنش
ν	تغییر اضافه شده به المان در واحد زمان در یک گره، m/s

مراجع

- [1] Z-F. Shao, X. Tang, X. Chen, L-P. Wang. Research on the inertia matching of the Stewart parallel manipulator. *Robotics and Computer- Integrated Manufacturing*, 28(6) (2012) 649-659.
- [2] A. Alikhani, S. Behzadipour, A. Alasty, S. A. S. Vanini, Design of a large-scale cable-driven robot with translational motion, *Robotics and Computer- Integrated Manufacturing*. 27(2) (2011) 357-366.
- [3] T. Bruckman, A. Pott, cable-driven parallel robot, *springer*, (2013).
- [4] C. Gosselin, D. Zhang, Stiffness analysis of parallel mechanisms using a lumped model, *Int. J. Robot autom*, 17(1) (2002) 17-27.
- [5] D. Nguyen, M. Gouttefarde, O. Company F. Pierrot, On the Simplifications of Cable Model in Static Analysis of Large-Dimension Cable-Driven Parallel Robots, 26th IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Tokyo, (2013) 928-934.
- [6] N. G. Dagalakakis, J. S. Albus, B.-L. Wang, J. Unger, J.D. Lee, Stiffness study of a parallel link robot crane for shipbuilding applications, *J. Offshore mech*, 111(3) (1989) 183–193.
- [7] R. Verhoeven, M. Hiller, S. Tadokoro, Workspace stiffness singularities and classification of tendon driven Stewart Platforms, *Symposium on Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*, (1998) 105–114.
- [8] S. Behzadipour, A. Khajepour, Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to stability analysis, *J. Mech. Des*, 128(1) (2006) 303–310.
- [9] H. Yuan, E. Courteille, Static and dynamic stiffness

- and Robust PID Control of Cable-Driven Robots Considering Elasticity in Cables, *AIJ - Electrical & Electronics Engineering*, 48(2) (2016) 113-125.
- [15] J. Heo, B. Park, J. Park, Ch. Kim, J. Jung, K. Park, Workspace and stability analysis of a 6-DOF cable-driven parallel robot using frequency-based variable constraints, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 32(3) (2018) 1345-1356.
- [16] S.P. Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second ed., McGraw-Hill, NewYork, (1991).
- [17] S.H. Hashemi, S. Farhadi, S. Carra, Free vibration analysis of rotating thick plates, *Journal of Sound and Vibration*, 323 (2009) 366–384.
- [18] A. R. Dehadrai, I. Sharma, S. S. Gupta, Stability of traveling, pre-tensioned, heavy cables, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 13(8) (2018) 1-9.
- analyses of cable parallel robots with non-negligible cable mass and elasticity, *Mechanism and Machine Theory*, 85 (2015) 64–81.
- [10] S. Kawamura, H. Kino, C. Won, High-speed manipulation by using a parallel wire-driven robots, *Robotica*, 18(1) (2000) 13–21.
- [11] Liu, J. Ning, K. Zhao, Model of a new type wire driven parallel robot system, *J. Northeast. Univ.*, 23(10) (2002) 988–991.
- [12] J. Du, C. Cui, H. Bao, Y. Qiu, Dynamic Analysis of Cable-Driven Parallel Manipulators Using a Variable Length Finite Element, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10(1) (2015) 011013(1-7).
- [13] M. Carricato and J. P. Merlet, Stability Analysis of Underconstrained Cable-Driven Parallel Robots, *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, 29(1) (2013) 288-296.
- [14] M. A. Khosravi, H. D. Taghir, Stability Analysis