



Estimation of Stress Concentration Factor of Elliptical Cutout in the Composite Sheets under Tensile Load

A. Abbasnia¹, A. Rohani^{2*}, M. Jafari¹

¹Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood, Shahrood, Iran

²Department of Agricultural Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Review History:

Received: 2018/10/17

Revised: 2019/02/12

Accepted: 2019/03/11

Available Online: 2019/04/23

Keywords:

Stress concentration factor
elliptical hole
multiple linear regression
angle of rotation of cutout
complex variable method

ABSTRACT: In this paper, we try to use a multiple linear regression method to explicitly describe the explicit relation between the stress concentration coefficient of plates containing elliptic openings in terms of mechanical properties and the angle of rotation of openness. First, the stress concentration coefficient for a lot of composites was calculated by the analytical method based on the mixed variable method and using different values of the mechanical properties of the composites. Using the obtained data, using the regression method multiple linear the explicit relation was used to estimate the stress concentration coefficient in unbounded composite plates containing elliptic openings under tensile load. It is important to note that several factors affect the concentration of tension around openness. Therefore, by correct selection of these parameters, it can be significantly reduced the stress concentration and increased the structural strength. One of these factors is the angle of rotation of openness, which is discussed in this article. In addition to the ease of use, the proposed relationship, by eliminating complex and complex analytical solutions, saves time and allows the designer to obtain the desired parameters to achieve the desired stress. The results showed that the regression model was able to estimate the coefficient of stress concentration with an error of less than 1 percent.

1- Introduction

Nowadays, the importance of using composites and the use of these materials in various industries is not overlooked. In many cases, the designer is bound to create a cutout in the plan for an optimal design. The existence of these geometric discontinuities in the body creates a phenomenon called stress concentration factor.

Muskhelishvili [1] was able to present a complex variable method for isotropic elastic materials. He limited the determination of stress concentration factor in a plate containing cutout, with the calculation of two holomorphic analytic functions. Savin [2] examined stress concentration in infinite plates for isotropic and anisotropic materials. In identical materials, he presented stress distribution surrounding the cutout with various forms, and in anisotropic materials, he analyzed only the circular and elliptical cutouts. In his researches, he used the Muskhelishvili's complex variable method. Lekhnitskii [3] by developing Muskhelishvili's complex variable method, was able to provide a solution for different cutouts in an anisotropic infinite plate. Abbasnia et al. [4] presented a new equation for estimating the coefficient of stress concentration of circular cutout in the orthotropic plate. They showed that their model was able to predict the stress concentration factor with a maximum error of 1%.

2- Methodology

Composite plates studied in this paper, plates containing elliptical cutout are considered under axial loading and unlimited plates. The cutout is located at the center of the plate (Fig. 1).

According to the Lekhnitskii elasticity theory in anisotropic bodies, the stress function calculation is depended on the calculation of unknown coefficients. These coefficients are calculated according to the boundary conditions around cutouts. The stress function is presented in infinite anisotropic infinite plates under inplane loading containing circular and elliptical cutouts by Savin [2] and Lekhnitskii [3].

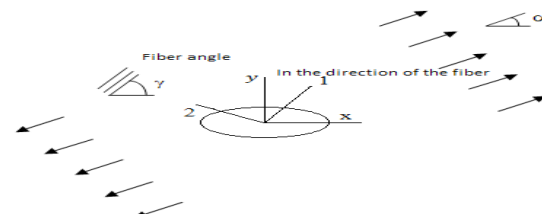


Fig. 1. Schematic diagram of an infinite plate with elliptical cutout under uniaxial tension.

If $F(x, y)$ is the stress function of the present problem; by substituting it in the equilibrium equations, the fourth order differential equation is obtained:

*Corresponding author's email: Alii.abbasnia@gmail.com



$$R_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2R_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

In fact, the Eq. (1) is the equilibrium equation for an anisotropic material, where the stress function $F(x, y)$ and R_{ij} are the coefficient of the reduced compliance matrix. Based on roots of the characteristic equation, the general expression of the F stress function is as the Eq. (2):

$$F(x, y) = 2 \operatorname{Re}[f_1(z_1) + f_2(z_2)] \quad (2)$$

where f_1 and f_2 are arbitrary functions of the complex variable $z_k = x + \mu_k y$ for $k = 1, 2$. By employing this approach, the problem is reduced to finding two complex functions f_1 and f_2 such that the boundary conditions satisfy the edge of the cutout. Therefore, stresses are determined by the Eq. (3).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}[f_1''(z_1) + f_2''(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 f_1''(z_1) + \mu_2 f_2''(z_2)] \end{aligned} \quad (3)$$

According to the cutout border, it is better to provide mentioned stresses in the polar coordinate system. Because in this device, the shear and radial stresses ($\tau_{r\theta} = \sigma_r = 0$) will be zero at the cutout boundary and the only remaining stress is circumferential stress (σ_θ).

As mentioned, the stress concentration factor ($\frac{\sigma_{\theta \max}}{\sigma_0}$) in

plates with geometric defects is a function of five variables $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ and β . The applied stress in the boundary of the σ_0 plate was considered equal to 1Pa. The stress concentration factor is a dimensionless variable, therefore, for dimension Lessing variables, were used different ratios of E_1, E_2, G_{12} .

Regression analysis was used to obtain mathematical relation. A quadratic model was used in accordance with Eq. (4). In this regard, the dependent variable (y) is equivalent to the stress concentration factor.

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^l \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 + \varepsilon \quad (4)$$

Where β_0 is the constant coefficient or the intercept, β_i is the linear factor of the model or simple effects, β_{ij} is the factors of interactions of independent variables, β_{ii} is second power factors of independent variables and ε is the model error.

Different regression models were used to predict the stress concentration coefficient. These models are linear model, two-factor interaction model, quadratic model, reduce quadratic model. These models can be expanded depending on the number of independent variables.

3- Results and Discussion

By choosing the variables $\frac{E_2}{E_1}, \frac{E_1}{G_{12}}$ and ν_{12} the lowest root mean

square error and Mean Absolute Percentage Error (MAPE) can be obtained in estimating the stress concentration coefficient [4]. Therefore, in this research, the variables mentioned along with the angle of rotation of the cutout variable β are used to obtain the equation that calculates the stress concentration coefficient in plates containing elliptical cutouts. Model form, model defect, model variance analysis, survey evaluation, stability and generalizability of the regression model are discussed after the selection of variables.

The results of this study are compared with the finite element solving for graphite/epoxy material with mechanical properties of $E_1 = 181, E_2 = 10.3, G_{12} = 17.7$ and $\nu_{12} = 0.28$ at angles of rotation of cutout, the results of which are reported in the form of Table 1.

Table 1. Comparison of the calculated stress values in the present study and the solving finite element at different angles of rotation for the graphite/epoxy graphite containing elliptical cutout

β	Present Study	Finite Element	Difference %
25	5.4694	5.4363	0.62
85	12.4110	12.4359	0.20
90	12.4901	12.5010	0.08
155	5.4696	4.4350	0.64

Therefore, the results showed that the extracted model based on the regression method could be used to estimate the stress concentration coefficient of ellipticity cutout according to the mechanical properties of the material and the angle of rotation of cutout (Eq. (5)).

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}\right) &= 0/01 - 0/70\left(\frac{E_2}{E_1}\right) + 0/01\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right) + 0/15\nu_{12} \\ &+ 0/72 \sin \beta + 0/28\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 - 0/0001\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)^2 - 0/21\nu_{12}^2 \\ &- 0/01 \sin \beta^2 + 0/01\left(\frac{E_2}{G_{12}}\right) + 0/31\left(\frac{E_2}{E_1}\right)(\nu_{12}) \\ &+ 0/16\left(\frac{E_2}{E_1}\right)(\sin \beta) + 0/004\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)(\nu_{12}) \\ &- 0/002\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)(\sin \beta) + 0/08(\nu_{12})(\sin \beta) \end{aligned} \quad (5)$$

4- Conclusions

In this research, using an analytical solution method based on the complex variable method, stress concentration for a large number of orthotropic plates under axial stress was calculated with elliptic cutouts; then, using multiple linear regression, an explicit relationship between the coefficient of stress concentration and mechanical properties for elliptical cutouts with orthotropic plate.

The evaluations proved the accuracy of the presented mathematical model. This relation is proposed for infinite plates that are under axial stress, which provides an explicit

relation between the stress concentration coefficient and the mechanical properties of matter and the rotation angle of the cutout. In addition, the equality of the correlation coefficient between two actual and predicted data sets in the calibration stages of the model and test (equal to 0.98) proves the proposed solution to be reliable.

5- References

- [1] N.I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Second edition, Noordhoff, (1962).
- [2] G.N. Savin, Stress concentration around holes, Pergamon Press, (1961).
- [3] S.G. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh, (1968).
- [4] A. Abbasnia, M. Jafari, A. Rohani, Estimation of stress concentration factor of circular hole in orthotropic plate using a new model based on regression method, Modares Mechanical Engineering, 18(5) (2018) 24-30.



ارائه مدل ریاضی جدید بر پایه روش رگرسیونی جهت تخمین تمرکز تنش اطراف بریدگی بیضی شکل در صفحات کامپوزیتی تحت بار کششی

علی عباس نیا^{۱*}، عباس روحانی^۲، محمد جعفری^۱

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۲ دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۷-۲۵
بازنگری: ۱۳۹۷-۱۱-۲۳
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۲-۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۰۳

کلمات کلیدی:

ضریب تمرکز تنش
بریدگی بیضی
رگرسیون خطی چندگانه
زاویه چرخش گشودگی
روش متغیر مختلط

خلاصه: در این مقاله سعی می‌شود تا به کمک روش رگرسیون خطی چندگانه، رابطه‌ی صریحی جهت تخمین ضریب تمرکز تنش صفحات حاوی بریدگی بیضی، بر حسب خواص مکانیکی و زاویه‌ی چرخش گشودگی ارائه گردد. ابتدا ضریب تمرکز تنش برای تعداد بیشماری از کامپوزیت‌ها به کمک روش حل تحلیلی بر پایه‌ی روش متغیر مختلط و با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها محاسبه شد. به کمک داده‌های به دست آمده و با استفاده از روش رگرسیون خطی چندگانه رابطه‌ی صریحی برای تخمین ضریب تمرکز تنش در صفحات نامحدود کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی تحت بار کششی ارائه گردید. توجه به اینکه عوامل متعددی بر تمرکز تنش اطراف گشودگی اثر گذار می‌باشد؛ حائز اهمیت است. از این رو با انتخاب صحیح این پارامترها می‌توان به میزان قابل توجهی تمرکز تنش را کاهش داد و باعث افزایش استحکام سازه شد. از جمله این عوامل می‌توان به زاویه‌ی چرخش گشودگی اشاره کرد که در این مقاله بررسی می‌گردد. رابطه‌ی ارائه شده علاوه بر سهولت استفاده، با حذف محاسبات سخت و پیچیده‌ی حل تحلیلی، در زمان صرفه جویی کرده و این امکان را برای طراح فراهم می‌آورد تا بتواند پارامترهای مدنظر جهت دست‌یابی به تنش مطلوب را به دست آورد. نتایج نشان داد که مدل رگرسیونی قادر به تخمین ضریب تمرکز تنش با خطای کمتر از یک درصد است.

۱- مقدمه

امروزه اهمیت استفاده از کامپوزیت‌ها و کاربرد این مواد در صنایع گوناگون بر کسی پوشیده نیست. در بسیاری از موارد طراح برای ارائه‌ی یک طرح بهینه ناگزیر به ایجاد گشودگی در طرح است. وجود این ناپیوستگی‌های هندسی باعث ایجاد یک تنش موضعی شدید (تمرکز تنش) در سازه می‌گردند. هرچند وجود این بریدگی‌ها وزن سازه را کاهش می‌دهد اما تمرکز تنش ناشی از آن‌ها همواره باعث نگرانی طراح می‌گردد. تجربه نشان داده که در صفحات حاوی گشودگی، تنش واقعی شکست اساساً کمتر از استحکام کشش نهایی همان ماده بدون بریدگی است. برای رفع این نگرانی طراح بایستی توزیع تنش اطراف بریدگی را به درستی محاسبه کند. برای دستیابی به این هدف، او بایستی پارامترهای حاکم بر طراحی را به خوبی بشناسد و نحوه‌ی اثر گذاری آن‌ها را برای دستیابی به طراحی بهینه به درستی تحلیل کند.

با وجود تحقیقات فراوان در زمینه‌ی تمرکز تنش توسط روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی که خود اهمیت موضوع را آشکار می‌سازد؛ به دلیل کاربرد مسأله و ارائه راهکارهای ساده‌تر، پژوهش در این زمینه همچنان ادامه دارد. در این تحلیل از یک صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی بریدگی مرکزی تحت کشش استفاده شده است.

۱-۱- مرور کارهای انجام شده

موشخیلشویلی [۱] با ارائه‌ی روش متغیر مختلط، فصل جدیدی برای حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته‌ی دو بعدی برای مواد الاستیک همسانگرد بوجود آورد. به‌طوری که محققان بسیاری با بسط و توسعه‌ی روش متغیر مختلط تحلیل‌های متعددی در این زمینه انجام دادند. افرادی همچون ساوین [۲]، اشترو [۳]، لخنیتسکی [۴] و گلدول [۵] با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی مطالعاتی را انجام دادند. ساوین توزیع تنش در صفحات نامحدود

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: alii.abbasnia@gmail.com



همسانگرد (حاوی بریدگی‌های مختلف) و غیر همسانگرد (فقط بریدگی‌های دایره‌ای و بیضوی) تحت کشش را تحلیل کرد. اشترو روش موشخیلشویلی را به مسائل الاستیسیته‌ی دو بعدی مواد غیر همسانگرد توسعه داد. لخنیتسکی نیز توزیع تنش را برای صفحات نامحدود ناهمسانگرد حاوی بریدگی دایره‌ای و بیضوی محاسبه کرد. انتگرال‌های متفاوتی جهت محاسبه‌ی توابع تنش نیاز است؛ گلدول با بسط روش متغیر مختلط موشخیلشویلی توانست این انتگرال‌ها را بررسی کند.

توزیع تنش اطراف بریدگی مربعی در یک صفحه‌ی ناهمسانگرد تحت کشش توسط قاضی اسمر و تونی جابور [۶] بررسی شد. آن‌ها به کمک روش لخنیتسکی تأثیر شعاع انحنای گوشه‌ی بریدگی و زاویه بار را بر روی تمرکز تنش بررسی کردند. رضایی پژند و جعفری [۷] یک روش تحلیلی ساده برای تجزیه و تحلیل تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی بریدگی‌های غیر دایره‌ای ارائه کردند. آن‌ها نتایج خود را با اجزای محدود مقایسه کردند. تمرکز تنش صفحات حاوی بریدگی مستطیلی نیز توسط یانگ و همکاران [۸] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها صفحه را تحت بارگذاری دو محوری قرار دادند.

رضایی پژند و جعفری [۹] با استفاده از حل لخنیتسکی توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی بریدگی شبه مربعی تحت کشش یکنواخت را تحلیل کردند. آن‌ها نشان دادند در صفحات کامپوزیتی حاوی بریدگی شبه مربعی می‌توان توزیع تنش را با انتخاب مناسب پارامترهای زاویه‌ی الیاف، زاویه‌ی بارگذاری، خواص مواد به شکل قابل توجهی کاهش داد. هافنباخ و همکاران [۱۰] میدان تنش و جابه‌جایی حول گشودگی بیضوی را در صفحه‌ی ناهمسانگرد محاسبه کردند. آن‌ها نتایج خود را با اجزای محدود مقایسه کردند. ایشان در پژوهش خود میزان تمرکز تنش را برای زوایای الیاف و زوایای بار متفاوت ارائه کردند.

جعفری و رضایی پژند [۱۱] با بسط حل تحلیلی لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش حول بریدگی در صفحات ناهمسانگرد تحت کشش را بررسی کردند. آن‌ها پارامترهای بهینه جهت دستیابی به کمترین ضریب تمرکز تنش را معرفی کرده و نشان دادند با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان به تمرکز تنشی کمتر از بریدگی دایره‌ای دست یافت. آن‌ها در مقاله‌ی دیگری توزیع تنش صفحات ناهمسانگرد با بریدگی مثلثی را بررسی کردند [۱۲]. آن‌ها

پارامترهای مختلف مؤثر بر شدت تنش شامل زاویه بار، زاویه الیاف، زاویه چرخش بریدگی و اثر انحنای گوشه بریدگی را بررسی کردند. بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشه‌ی بریدگی در تحلیل تنش صفحات با بریدگی مرکزی و تحت کشش توسط جعفری و رضایی پژند [۱۳] صورت پذیرفت. آن‌ها با استفاده از بسط روش حل تحلیلی لخنیتسکی حل خود را ارائه دادند و در نهایت برای بررسی درستی نتایج خود از اجزای محدود استفاده کردند.

جعفری و مشیری اول [۱۴] توزیع تنش حول بریدگی شبه مستطیلی در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای را تحلیل کردند. آن‌ها با بررسی حل تحلیلی لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلفی همچون نسبت طول به عرض بریدگی، زاویه چرخش بریدگی، شعاع انحنای گوشه بریدگی، نوع چیدمان لایه‌ها و زاویه اعمال بار را بررسی کردند. ایشان نشان دادند که با نرم‌تر شدن گوشه‌های بریدگی و همچنین با انتخاب زاویه چرخش بریدگی مناسب می‌توان تمرکز تنش را کاهش داد. جعفری و قندی ورنوسفادرانی [۱۵] حلی شبه تحلیلی برای ضریب تمرکز تنش در صفحات همسانگرد حاوی دو بریدگی شبه مستطیلی ارائه دادند. آن‌ها با بسط توابع تنش موشخیلشویلی و روش تکرار شونده‌ی شوارتز، توزیع تنش در صفحه‌ی حاوی دو بریدگی شبه مستطیلی را بررسی کردند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلفی همچون محل قرارگیری دو بریدگی نسبت به هم، شعاع انحنای گوشه‌های دو بریدگی و نسبت ابعاد بریدگی‌ها بر ضریب تمرکز تنش را مطالعه کردند. منصوری و شیبانی [۱۶] پارامترهای بهینه به منظور کاهش ضریب تمرکز تنش حول بریدگی در صفحات کامپوزیتی تحت کشش ارائه دادند.

بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشه بریدگی بر تمرکز تنش ناشی از شار حرارتی توسط جعفری و نظری [۱۱] صورت پذیرفت. آن‌ها بر پایه‌ی تئوری ترموالاستیسیته دوبعدی حالت پایدار میدان تنش را در اطراف بریدگی‌های مختلف در یک صفحه‌ی نامحدود همسانگرد مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه صفحه در بینهایت تحت جریان حرارتی یکنواخت است و مرز بریدگی مرکزی عایق است. مشیری اول و جعفری [۱۷] با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش چندلایه‌های متقارن حاوی بریدگی مثلثی را بررسی کردند. آن‌ها نتایج را با نتایج اجزای محدود مقایسه کردند. عباس‌نیا و همکاران [۱۸] یک معادله‌ی جدید جهت

برای تحلیل رگرسیونی مجموعه‌ای از داده‌ها مورد نیاز است. این مجموعه داده بایستی جامع و کافی باشد. عباس‌نیا و همکاران [۱۸] نشان دادند که با استفاده از خصوصیات مکانیکی ۱۰۳ ماده مختلف با خواص مکانیکی متفاوت می‌توان تخمین دقیقی برای ضریب تمرکز تنش در صفحات حاوی گشودگی دایره‌ای به دست آورد. آن‌ها به دلیل نیاز به داده‌های بیشتر جهت دستیابی به تقریب مناسب، از روابط محاسبه خواص مکانیکی ماده مرکب به کمک درصدهای حجمی مختلف الیاف و ماتریس و خواص مکانیکی آن‌ها با به کارگیری قانون اختلاط استفاده کردند. از این‌رو در این پژوهش نیز از همین مواد استفاده می‌گردد که برخی از خواص مکانیکی آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده است [۱۸ و ۱۹].

۲-۲-۲-۲- حل تحلیلی

با توجه به تئوری الاستیسیته لخنیتسکی در اجسام ناهمسانگرد، می‌توان محاسبه‌ی تابع تنش را محدود به محاسبه‌ی ضرایب نامشخصی دانست. این ضرایب نامعلوم با توجه به شرایط مرزی حول بریدگی محاسبه می‌شوند. افرادی همانند ساوین [۲] و لخنیتسکی [۴] تابع تنش در صفحات نامحدود ناهمسانگرد دارای بریدگی بیضی و دایره‌ای را محاسبه کرده‌اند. در روابط ارائه شده برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش، زاویه‌ی چرخش بریدگی به عنوان پارامتر مؤثر بر تمرکز تنش به چشم نمی‌خورد. لذا در این مقاله علاوه بر شکل ساده (رابطه‌ی چند جمله‌ای) نسبت به سایر روابط موجود، ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی و زاویه‌ی چرخش بریدگی ارائه می‌گردد. در ادامه به روند محاسبه تنش پرداخته می‌شود [۱۸]. از تنش‌های به دست آمده جهت تحلیل رگرسیونی استفاده می‌گردد.

تخمین ضریب تمرکز تنش بریدگی دایره‌ای در ورق ارتوتروپیک را ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از روش رگرسیون موفق به ارائه‌ی رابطه‌ی صریح جهت محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش حول بریدگی دایره‌ای در صفحات ارتوتروپیک تحت کشش شدند. آن‌ها نشان دادند که مدل پیشنهادیشان قادر به پیش بینی ضریب تمرکز تنش با حداکثر خطای ۱ درصد است.

اگرچه پژوهش‌های فراوانی در زمینه توزیع تنش حول بریدگی در مواد مختلف صورت گرفته است اما در هیچ یک از مقالات مشابه رابطه صریحی برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی، شعاع انحنای گوشه بریدگی و زاویه چرخش بریدگی در صفحات کامپوزیتی نامحدود تحت بار کششی ارائه نشده است. با توجه به سادگی رابطه ارائه شده در این مقاله (معادله‌ی چند جمله‌ای) به جای انجام پروسه سخت و پیچیده‌ی حل تحلیلی، به سادگی می‌توان مقادیر تنش در صفحات حاوی بریدگی بیضی را با استفاده از خواص مکانیکی ماده در زاویه چرخش بریدگی دلخواه به دست آورد.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱-۱-۲- مشخصات مواد

صفحات کامپوزیتی مورد مطالعه در این مقاله، صفحات حاوی گشودگی بیضی شکل، تحت بارگذاری محوری و نامحدود در نظر گرفته شده‌اند. گشودگی در مرکز صفحه واقع است (شکل ۱). همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود مختصات محلی و عمومی مورد استفاده در این مقاله به تصویر کشیده شده است. تحلیل مسأله با فرض تنش صفحه‌ای صورت گرفته و رفتار صفحات در ناحیه الاستیک خطی بررسی شده است.

جدول ۱: خواص مکانیکی مواد [18 و 19]

Table 1. Mechanical properties of materials [18, 19]

نام ماده	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
ای-شیشه/اپوکسی	۳۹/۰	۸/۶	۳/۸	۰/۲۸
اس-شیشه/اپوکسی	۴۳/۰	۸/۹	۴/۵	۰/۲۷
شیشه با الیاف بافته شده/اپوکسی	۲۹/۷	۲۹/۷	۵/۳	۰/۱۷
کولار/اپوکسی	۸۷/۰	۵/۵	۲/۲	۰/۳۴
کربن/اپوکسی	۱۴۲/۰	۱۰/۳	۷/۲	۰/۲۷
کربن/پیک	۱۳۱/۰	۸/۷	۵/۰	۰/۲۸

نشان داده شده است.

$$R_{ij} = S_{ij} \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (5)$$

که در این روابط R_{ij} اعضاء ماتریس نرمی هستند در حالت دو بعدی رابطه سازگاری بصورت رابطه‌ی (۶) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

رابطه تنش و کرنش برای ماتریس نرمی کاهش یافته بصورت معادله‌ی (۷) است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= R_{11}\sigma_x + R_{12}\sigma_y + R_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= R_{12}\sigma_x + R_{22}\sigma_y + R_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= R_{16}\sigma_x + R_{26}\sigma_y + R_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

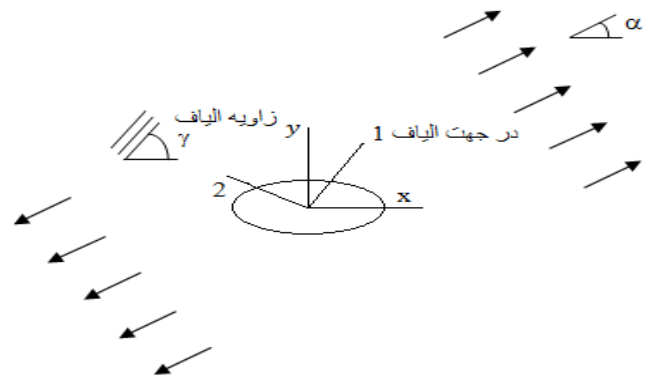
از طرفی برای ارضا شدن معادلات تعادل بایستی تابع تنش $F(x, y)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۸) در معادله‌ی سازگاری، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم بر حسب تابع تنش F به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} R_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2R_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

در واقع معادله‌ی (۹)، معادله‌ی سازگاری برای ماده‌ی غیرهمسان‌گرد می‌باشد که $F(x, y)$ تابع تنش و R_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته صفحه است که براساس فرض کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای بصورت تابعی از S_{ij} مطابق روابط (۴) و



شکل ۱: شماتیک ورق نامحدود دارای گشودگی بیضوی تحت کشش یک طرفه
Fig. 1. Schematic diagram of infinite plate with elliptical cutout under uniaxial tension

مطابق تعمیم قانون هوک در حالت سه بعدی می‌توان هر مؤلفه تنش را به تمام مؤلفه‌های تغییر شکل نسبی و هر مؤلفه تغییر شکل نسبی را به تمام مؤلفه‌های تنش مربوط ساخت (روابط (۱) و (۲)):

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (1)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (2)$$

$[C]$ و $[S]$ به ترتیب تانسورهای نرمی یا انعطاف پذیری و سفتی ماده هستند؛ که ارتباط بین این دو پارامتر در رابطه‌ی (۳) مشاهده می‌شود:

$$[C] = [S]^{-1} \quad (3)$$

در ادامه کار دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم. برای حالت کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته R_{ij} بصورت رابطه‌ی (۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_{11} &= (S_{11}S_{33} - S_{13}^2) / S_{33} \\ R_{12} &= (S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) / S_{33} \\ R_{16} &= (S_{16}S_{33} - S_{13}S_{36}) / S_{33} \\ R_{22} &= (S_{22}S_{33} - S_{23}^2) / S_{33} \\ R_{26} &= (S_{26}S_{33} - S_{23}S_{36}) / S_{33} \\ R_{66} &= (S_{66}S_{33} - S_{36}^2) / S_{33} \end{aligned} \quad (4)$$

و برای حالت تنش صفحه‌ای ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) در رابطه‌ی (۵)

۲-۳-۳-۲- تحلیل رگرسیونی و استخراج مدل

در قسمت قبل بیان شد که تنش‌ها در دستگاه مختصات قطبی محاسبه شدند. بنابراین تنها تنش محیطی باقی می‌ماند. در صورتی که اگر از دستگاه مختصات دکارتی استفاده شود؛ هر سه تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} در مرز گشودگی وجود خواهند داشت که در این صورت باید از تنش معادل فون میسز استفاده کرد. نتیجه هر دو روش به یک جواب منتهی می‌شود اما به دلیل سهولت از دستگاه مختصات قطبی استفاده شده است. از اینرو ضریب تمرکز تنش به صورت بیشترین تنش محیطی اطراف گشودگی ($\sigma_{\theta \max}$) به تنش اعمالی (σ_0) تعریف می‌شود. میزان تنش اعمالی در مرز ورق Pa ۱ می‌باشد. با علم به اینکه ضریب تمرکز تنش در صفحات حاوی گشودگی بیضوی تابعی از خواص مکانیکی (E_1 ، E_2 ، ν_{12} و G_{12}) و زاویه‌ی چرخش بریدگی (β) می‌باشد؛ جهت بی‌بعد سازی متغیرها نیز از ترکیبات مختلف E_1 ، E_2 و G_{12} استفاده شده است که در نهایت شش گزینه به عنوان متغیرهای مستقل مدل رگرسیونی خطی چندگانه^۱ استفاده شد.

به کمک این طرح آماری کلیه ضرایب مدل رگرسیون و اثرات متقابل فاکتورها قابل برآورد هستند [۱۸]. بنابراین مدل‌های رگرسیونی (رابطه‌ی (۱۵)) که برای تخمین ضریب تمرکز تنش مورد استفاده قرار گرفتند به ترتیب عبارتند از: مدل خطی^۲ (رابطه‌ی (۱۶))، مدل با اثرات متقابل^۳ (رابطه‌ی (۱۷))، مدل درجه دوم^۴ (رابطه‌ی (۱۸)) و مدل درجه دوم کاهش یافته^۵ (رابطه‌ی (۱۹)).

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^l \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 + \varepsilon \quad (15)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \varepsilon \quad (16)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 + \varepsilon \quad (17)$$

(۵) قابل محاسبه می‌باشند. لخنیتسکی نشان داده است که معادله‌ی (۹) به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه‌ی اول D_k به صورت رابطه‌ی (۱۰) ساده می‌شود:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, k = 1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

μ_a ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی معادله‌ی (۱۱) می‌باشد.

$$R_{11}\mu^4 - 2R_{16}\mu^3 + (2R_{12} + R_{66})\mu^2 + 2R_{26}\mu + R_{22} = 0 \quad (11)$$

معادله‌ی (۱۱) در حالت کلی چهار ریشه‌ی موهومی دارد. لخنیتسکی اثبات کرد که این معادله‌ی مشخصه دارای ریشه‌های دو به دو مزدوج به صورت رابطه‌ی (۱۲) می‌باشند:

$$\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i \beta_1$$

$$\mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i \beta_2 \quad (12)$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه، بیان کلی تابع تنش F به صورت رابطه‌ی (۱۳) خواهد بود:

$$F(x, y) = 2 \operatorname{Re}[f_1(z_1) + f_2(z_2)] \quad (13)$$

و $f_k z_k = x + \mu_k y$ متغیر مختلط $k=1, 2$ می‌باشند. با به کارگیری این رویکرد، مسأله به تعیین دو تابع f_1 و f_2 به گونه‌ای که شرایط مرزی لبه‌ی بریدگی را ارضا کند؛ محدود می‌شود. بنابراین تنش‌ها از رابطه‌ی (۱۴) تعیین می‌شوند.

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)]$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)] \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re}[\mu_1 f_1''(z_1) + \mu_2 f_2''(z_2)]$$

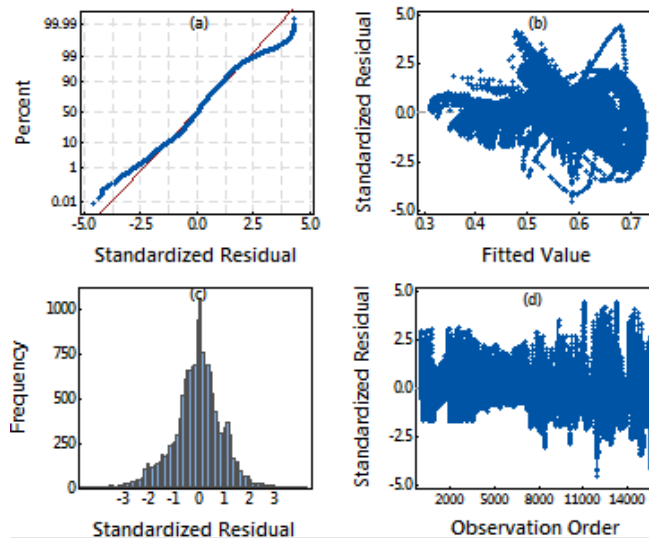
با توجه به مرز گشودگی بهتر است تا تنش‌های فوق در دستگاه مختصات قطبی ارائه شوند. چون در این دستگاه در مرز گشودگی تنش‌های برشی و شعاعی ($\tau_{r\theta} = \sigma_r = 0$) صفر خواهند بود و تنها تنش باقیمانده تنش محیطی (σ_θ) است.

- 1 Multiple Linear Regression
- 2 Linear
- 3 Two Factor Interaction (2FI)
- 4 Quadratic
- 5 Reduce Quadratic

جدول ۲: تجزیه واریانس مدل رگرسیونی

Table 2. Analysis of variance table for the regression model

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعات	متوسط مربعات
رگرسیون	$p - 1$	$SS_R = \sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$MS_R = SS_R / p - 1$
باقی مانده	$n - p$	$SS_E = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$	$MS_E = SS_E / n - p$
کل	$n - 1$	$SS_T = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$	-



شکل ۲: نتایج ارزیابی اعتبار مدل رگرسیون خطی چندگانه

Fig. 2. The results of validation of the MLR regression model

رگرسیون^۱ و مجموع مربعات خطا^۲ تقسیم شده است.

۲-۴-۲- معیارهای ارزیابی عملکرد مدل

به منظور ارزیابی بهتر عملکرد مدل رگرسیون خطی چندگانه، داده‌ها به طور تصادفی به دو بخش کالیبراسیون و تست تقسیم شدند. با اختصاص ۸۰ درصد داده‌ها برای کالیبراسیون، ۲۰ درصد باقیمانده داده‌ها نیز برای تست در نظر گرفته شد. سپس برای داده‌های کالیبراسیون و تست معیارهایی همچون میانگین مربعات خطای مدل^۳، انحراف معیار خطای مدل^۴ و بازده مدل^۵ مورد ارزیابی قرار گرفتند. پس از آن برای دستیابی به مدل رگرسیونی جهت تخمین بهتر ضریب تمرکز تنش، انواع تبدیلات نظیر لگاریتم، رادیکال، معکوس و ... اعمال گردیدند و مدل مناسب استخراج شده است. لازم به ذکر است که

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + \varepsilon \quad (18)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + \varepsilon \quad (19)$$

که در آن‌ها، Y تنش محیطی σ_θ ، x_1 همان $\frac{E_2}{E_1}$ ، x_2 برابر $\frac{E_1}{G_{12}}$ ، x_3 نسبت پواسون ν_{12} و x_4 زاویه چرخش بریدگی β و همچنین b_0 ، ضریب ثابت، b_i اثر خطی، b_{ii} اثرات درجه دوم، b_{ij} اثرات متقابل و ε خطای مدل می‌باشند.

در جدول ۲ تجزیه واریانس مدل رگرسیون خطی چندگانه گزارش شده است. واریانس کل مدل به دو عامل اصلی شامل مجموع مربعات

- 1 sum of squared regression (SS_R)
- 2 sum of squared errors (SS_E)
- 3 Root Mean Square Error (RMSE)
- 4 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)
- 5 Efficiency (EF)

تمرکز تنش دست یافت. ازینرو در این پژوهش نیز از متغیرهای ذکر شده به همراه متغیر زاویه چرخش β جهت دستیابی به معادله‌ای که ضریب تمرکز تنش را در صفحات حاوی بریدگی بیضوی محاسبه کند؛ استفاده شده است. همچنین ایشان [۱۸] نشان دادند که بهترین شکل مدل رگرسیون، درجه دوم می‌باشد. در ادامه به عیب شناسی مدل رگرسیون، تجزیه واریانس مدل، ارزیابی آماری مدل و قابلیت تعمیم پذیری مدل پرداخته می‌شود.

۳-۱-۱-۳- عیب شناسی مدل رگرسیون

عیب شناسی مدل رگرسیون درجه دوم انتخاب شده برای تخمین ضریب تمرکز تنش در مرحله‌ی کالیبراسیون در شکل ۲ نشان داده شده است. با توجه به نرمال بودن توزیع آماری خطاهای مدل رگرسیون (شکل ۲ a و c))، توزیع یکنواخت و مستقل خطاها (شکل ۲ b)) و همچنین عدم وجود خود همبستگی بین خطاهای مدل رگرسیونی (شکل ۲ d)) مدل رگرسیونی اعتبار

انتخاب مدل مناسب با توجه به نمودار پراکندگی مقادیر پیش‌بینی شده در مقابل مقادیر واقعی حول نیمساز ربع اول انجام شده است [۱۸]. جهت تحلیل در پژوهش حاضر از نرم افزار متلب استفاده شده است. در ابتدا محاسبات جهت تحلیل تنش‌های مورد نیاز برای رگرسیون خطی چندگانه، با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی و به کمک حلی تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط با کد نویسی در نرم افزار متلب انجام شد. سپس تفکیک و تحلیل داده‌ها، استخراج مدل‌های رگرسیونی و همچنین ارزیابی مدل‌ها با استفاده از کد نویسی در نرم افزار متلب صورت پذیرفت تا در نهایت رابطه‌ای صریح برای ضریب تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی و زاویه‌ی چرخش بریدگی ارائه گردید.

۳- نتایج و بحث

عباس‌نیا و همکاران [۱۸] در پژوهش خود نشان دادند که با انتخاب متغیرهای $\frac{E_1}{E_2}$ ، $\frac{E_1}{G_{12}}$ و V_{12} می‌توان به کمترین مقدار میانگین و انحراف معیار خطای مدل در تخمین ضریب

جدول ۳: نتیجه تجزیه واریانس مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه
Table 3. The result of the variance analysis of the quadratic MLR models

<i>p-value</i>	<i>F-value</i>	<i>MS</i>	<i>SS</i>	<i>DF</i>	
۰/۰۰	۳۴۸۱۱/۰	۱۰/۳۶	۱۴۴/۵۵	۱۴	مدل
۰/۰۰	۵۰۰۹۶/۵	۱۵/۰۳	۱۵/۰۳	۱	$x_1(\frac{E_1}{E_2})$
۰/۰۰	۵۵۰۱۶/۶	۱۶/۵۰	۱۶/۵۰	۱	$x_2(\frac{E_1}{G_{12}})$
۰/۰۵	۱۸۷/۴	۰/۰۶	۰/۰۶	۱	$x_3(V_{12})$
۰/۰۰	۱۲۰۳۹۷/۱	۳۶/۱۱	۳۶/۱۱	۱	$x_4(\sin(\beta))$
۰/۰۰	۴۴۹/۶	۰/۱۳	۰/۱۳	۱	x_1x_2
۰/۰۰	۲۰۸/۴	۰/۰۶	۰/۰۶	۱	x_1x_3
۰/۰۰	۳۷۴۶۱/۵	۱۱/۲۴	۱۱/۲۴	۱	x_1x_4
۰/۰۰	۳/۸	۰/۰۰	۰/۰۰	۱	x_2x_3
۰/۰۰	۷۷۲/۱	۰/۲۳	۰/۲۳	۱	x_2x_4
۰/۰۸	۱/۶	۰/۰۰	۰/۰۰	۱	x_3x_4
۰/۰۰	۴۴۷۳/۳	۱/۳۴	۱/۳۴	۱	x_1^2
۰/۰۰	۸۳۲/۲	۰/۲۵	۰/۲۵	۱	x_2^2
۰/۰۰	۱۸۱/۸	۰/۰۵	۰/۰۵	۱	x_3^2
۰/۰۰	۲۱۱۸۴۸/۶	۶۳/۵۴	۶۳/۵۴	۱	x_4^2
		۰/۰۰	۴/۶۷	۱۵۵۶۹	خطا
		۰/۰۱	۱۴۹/۲۲		کل

Fig. 3. Validation of the values of the realistic and predicted stress concentration coefficient by the MLR model (a) Calibration step (b) Test step

۳-۲-۲- تجزیه واریانس مدل رگرسیون

۳-۳-۳-۳- ارزیابی آماری مدل رگرسیون

همانطور که در شکل ۳ نیز دیده می‌شود، در هر دو مرحله کالبراسیون مدل و تست، مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه

۳-۴-۳- ارزیابی پایداری و قابلیت تعمیم پذیری مدل رگرسیون

نتایج مطالعه‌ی حاضر با حل اجزای محدود برای ماده گرافیت/اپوکسی با خصوصیات مکانیکی $E_1 = 181$ ، $E_2 = 10/3$ ، $E_3 = 7/17$ و $G_{12} = 0/28$ در زوایای چرخش گشودگی مقایسه شده که نتایج آن در قالب جدول ۵ گزارش شده است. علاوه بر آن برای تمامی زوایای چرخش گشودگی نیز مقایسه‌ی نتایج در شکل ۴ آورده شده است. اختلاف ناچیز مطالعه‌ی حاضر با حل اجزای محدود تأکیدی بر صحت رابطه‌ی ارائه شده در مقاله موجود می‌باشد. برای گشودگی بیضوی منحنی تنش بی‌بعد-زاویه‌ی چرخش گشودگی دارای دوره‌ی تناوب ۱۸۰ درجه می‌باشد. در یک تناوب، در زوایای صفر و ۱۸۰

جدول ۴: ارزیابی قابلیت تعمیم پذیری مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه
Table 4. Evaluation of the MLR quadratic model's generalizability

کل			تست			کالیبراسیون			
EF	MAPE	RMSE	EF	MAPE	RMSE	EF	MAPE	RMSE	
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	-	-	-	-	-	-	۱۰۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۲	۰/۹۸	۳/۷۸	۰/۲۳	۰/۹۸	۳/۵۹	۰/۲۲	۹۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۲	۰/۹۸	۳/۶۶	۰/۲۳	۰/۹۸	۳/۶۰	۰/۲۲	۸۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۵۹	۰/۱۹	۰/۹۸	۳/۶۲	۰/۲۰	۷۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۶۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۵۰

جدول ۵: مقایسه‌ی مقادیر تنش محاسبه شده در مطالعه‌ی حاضر و حل اجزای محدود در زوایای چرخش مختلف برای صفحه گرافیت/اپوکسی حاوی گشودگی بیضوی

Table 5. Comparison of the calculated stress values in the present study and the solving finite element at different angles of rotation for the graphite/epoxy graphite containing elliptical cutout

درصد خطا	حل اجزای محدود	مطالعه‌ی حاضر	β
۰/۶۲	۵/۴۳۶۳	۵/۴۶۹۴	۲۵
۰/۹۸	۱۱/۹۲۷۱	۱۱/۸۱۰۹	۷۵
۰/۲۰	۱۲/۴۳۵۹	۱۲/۴۱۱۰	۸۵
۰/۰۸	۱۲/۵۰۱۰	۱۲/۴۹۰۱	۹۰
۰/۴۸	۱۲/۲۳۹۳	۱۲/۱۸۰۹	۱۰۰
۰/۶۴	۴/۴۳۵۰	۵/۴۶۹۶	۱۵۵

شد. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه سعی شد تا رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی برای صفحه‌ی ارتوتروپیک دارای گشودگی بیضوی ارائه گردد.

ارزیابی‌های صورت گرفته دقت مدل ریاضی ارائه شده را به اثبات رساند. این رابطه، برای صفحات نامحدود تحت کشش یک طرفه به دست آمده است که رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش با خواص مکانیکی ماده و زاویه چرخش بریدگی را ارائه داده است. علاوه بر آن برابری مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش بینی شده در مراحل کالیبراسیون مدل و تست (برابر با ۰/۹۸) حل پیشنهادی ارائه شده را قابل اعتماد می‌سازد.

در گشودگی بیضوی در زوایای چرخش صفر و ۱۸۰ درجه تنش مطلوب رخ می‌دهد و در زاویه ۹۰ درجه نیز تنش نامطلوب. طراح برای دستیابی به طرح بهینه بایستی از تنش نامطلوب اجتناب کند. به کمک رابطه ارائه شده در این مقاله طراح می‌تواند با در نظر گرفتن محدودیت‌های طراحی تنش

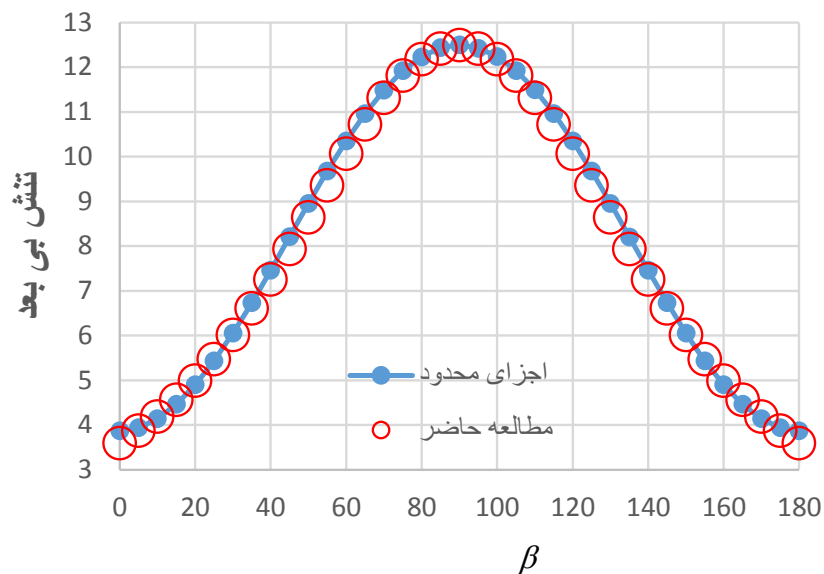
درجه کمترین مقدار تنش بی‌بعد که در واقع همان تنش مطلوب می‌باشد اتفاق می‌افتد و در زاویه ۹۰ درجه، بیشترین مقدار تنش بی‌بعد یا تنش نامطلوب رخ می‌دهد.

بنابراین نتایج نشان داد که می‌توان به مدل استخراج شده بر پایه روش رگرسیونی جهت تخمین ضریب تمرکز تنش گشودگی بیضوی بر حسب خواص مکانیکی ماده و زاویه چرخش گشودگی، اطمینان کرد (رابطه‌ی (۲۰)). در جدول ۶ ضرایب مدل نهایی جهت برآورد ضریب تمرکز تنش، ارائه شده است.

$$\ln\left(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0}\right) = f(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^4 \beta_{ii} x_i^2 \quad (20)$$

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، با استفاده از یک روش حل تحلیلی بر پایه روش متغیر مختلط، توزیع تنش برای تعداد زیادی از صفحات ارتوتروپیک تحت تنش محوری، دارای گشودگی بیضوی محاسبه



شکل ۴: مقایسه‌ی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر تمرکز تنش مطالعه‌ی حاضر و حل اجزای محدود در ماده گرافیت/اپوکسی حاوی گشودگی بیضوی

Fig. 4. Comparison of the effect of the cutout angle of rotation on the stress concentration of the present study and solving finite element in the graphite/epoxy material containing elliptical cutout

جدول ۶: ضرایب مدل نهایی رگرسیون

Table 6. Regression model final coefficients

مقدار	ضرایب	عامل
۰/۰۱۳۵۲	β_0	عرض از مبدأ
-۰/۷۰۸۸۷	β_1	$x_1(\frac{E_2}{E_1})$
۰/۰۱۱۱۳	β_2	$x_2(\frac{E_1}{G_{12}})$
۰/۱۵۱۴۰	β_3	$x_3(\nu_{12})$
۰/۷۲۰۸۹	β_4	$x_4(\sin(\beta))$
۰/۲۸۵۲۳	β_{11}	x_1^2
-۰/۰۰۰۰۵	β_{22}	x_2^2
-۰/۲۱۰۸۰	β_{33}	x_3^2
-۰/۰۱۳۲۰	β_{44}	x_4^2
۰/۰۱۵۳۵	β_{12}	x_1x_2
۰/۳۱۷۱۰	β_{13}	x_1x_3
۰/۱۵۹۳۴	β_{14}	x_1x_4
۰/۰۰۴۴۱	β_{23}	x_2x_3
-۰/۰۰۲۶۳	β_{24}	x_2x_4
۰/۰۸۰۸۳	β_{34}	x_3x_4

- Pergamon Press, (1961).
- [3] A. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, Philosophical magazine, 3(30) (1958) 625-646.
- [4] S.G. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh, (1968).
- [5] G.M. Gladwell, Contact problems in the classical theory of elasticity, Springer Science & Business Media, (1980).
- [6] G.H. Asmar, T.G. Jabbour, Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes, International journal of mechanics and solids, 2(1) (2007) 59-84.
- [7] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with non-circular cutout, Key Engineering Materials, Trans Tech Publ, 385 (2008), 365-368.
- [8] Y. Yang, J. Liu, C. Cai, Analytical solutions to stress concentration problem in plates containing rectangular hole under biaxial tensions, Acta Mechanica Solida Sinica, 21(5) (2008) 411-419.
- [9] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with a quasi-square cutout subjected to uniaxial tension, Journal of Reinforced plastics and composites, 29(13) (2010) 2015-2026.
- [10] W. Hufenbach, B. Grüber, M. Lepper, R. Gottwald, B. Zhou, An analytical method for the determination of stress and strain concentrations in textile-reinforced GF/PP composites with elliptical cutout and a finite outer boundary and its numerical verification, Archive of Applied Mechanics, 83(1) (2013) 125-135.
- [11] M. Jafari, J. Rezaeepazhand, Investigation of the Effect of Different Parameters on Stress Distribution of Non-Axial Plate with Central and Traction Shear, 17th Annual (International) Conference on Mechanical Engineering, Iran, (2009). (in Persian)
- [12] M. Jafari, J. Rezaeepazhand, Effect of Different Parameters on Stress Distribution in Anisotropic Plates with Triangular Cutout, AmirKabir Journal of Mechanical Engineering 42(1) (2010) 19-28. (in Persian)

مطلوب در مواد ارتوتروپیک دارای گشودگی بیضوی، را محاسبه و نیاز خود را مرتفع سازد.

فهرست علائم

b	ضریب ثابت
b_{ij}	اثرات درجه دوم
b_i	اثرات متقابل
$E_{\parallel}$	مدول الاستیک طولی (Nm^{-2})
$E_{\perp}$	مدول الاستیک عرضی (Nm^{-2})
$G_{\parallel}$	مدول برشی (Nm^{-2})
F	تابع تنش (Nm^{-2})
n	تعداد داده ها
p	پارامترهای مدل
R_{ij}	ماتریس نرمی
x_i	متغیر مستقل
y	ضریب تمرکز تنش محاسبه شده از روش تحلیلی (Nm^{-2})
$\hat{y}$	ضریب تمرکز تنش محاسبه شده توسط مدل (Nm^{-2})
$\bar{y}$	میانگین ضریب تمرکز تنش (Nm^{-2})
$\nu_{\parallel}$	نسبت پواسون
σ_0	تنش اعمالی (Nm^{-2})
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	اجزای تنش در مختصات کارتزین (Nm^{-2})
$\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$	اجزای تنش در مختصات قطبی (Nm^{-2})
ε	خطای مدل
β	زاویه ی چرخش گشودگی

مراجع

- [1] N.I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Second edition, Noordhoff, (1962).
- [2] G.N. Savin, Stress concentration around holes,

- concentration around the cutaway in composite sheets under tensile load, in: 16th International Conference of Aerospace of Iranian Associations, Iran, (2016) 3-5. (in Persian)
- [17] B. Moshiri Aval, M. Jafari, A study of the effect of various parameters on the stress distribution in symmetri laminates with a triangular hole, Aerospace Mechanics Journal, 13(1) (2017) 61-71. (in Persian)
- [18] A. Abbasnia, M. Jafari, A. Rohani, Estimation of stress concentration factor of circular hole in orthotropic plate using a new model based on regression method, Modares Mechanical Engineering, 18(5) (2018) 24-30. (in Persian)
- [19] I.M. Daniel, O. Ishai, I.M. Daniel, Engineering mechanics of composite materials, Oxford university press New York, (1994) 34-35.
- [13] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Study of the effect of cutout bluntness on stress analysis of perforated plates subjected to uniaxial tensile laod, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 1(2) (2011) 27-35. (in Persian)
- [14] M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, Modares Mechanical Engineering, 14(15) (2014) 395-404. (in Persian)
- [15] M. Jafari, I. Ghandi Varnosefaderani, A semi-analytical solution of stress concentration factor in the isotropic plates containing two quasi-rectangular cut outs, Modares Mechanical Engineering, 15(8) (2015) 341-350. (in Persian)
- [16] H. Mansouri, M. Sheibani, Analytical solution and use of optimal design parameters to reduce the stress