

A new simple finite element method for free vibration and buckling analysis of symmetrically laminated beams

M. Karkon^{1*}, S. Ghouhestani², S.M. Saberizadeh³, M. Yaghoobi⁴

¹Civil Engineering Department, Larestan Branch, Islamic Azad University, Larestan, Iran

²Department of Civil Engineering, Fasa University, Fasa, Iran

³Department of Civil Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran

⁴Civil Engineering and Architecture Department, University of Torbat Heydarieh, Iran

ABSTRACT: In this paper, a new 2-node element is proposed for free vibration and buckling analysis of symmetrically laminated beams. The element's formulation is based on first order shear deformation theory (FSDT). For this aim, the deflection and rotation field of the element is selected from third and second order functions, respectively. Moreover, the shear strain is assumed to be constant along with the element. By establishing the total strain energy in the element and stationary with respect to shear strain, the explicit form of the shape functions of deflection and rotation fields of the proposed element, are obtained. It should be mentioned, by decreasing the element's thickness, these shape functions approach to the Euler-Bernoulli shape's functions and the shear locking problem does not occurred in the element. By utilizing the obtained shape functions, the explicit form of the stiffness matrix are calculated for the element. On the other hand, by using the governing equation of the free vibration and buckling of the beam, the explicit form of the translation and rotary mass matrices, and geometric stiffness matrix of the element are obtained. Finally, several numerical tests fulfill to assess the robustness of the developed element. For this purpose, free vibration and buckling analysis of symmetrically laminated beams with different boundary conditions and aspect ratios, are performed. The results of the numerical tests demonstrate high accuracy and efficiency of the proposed element for free vibration and buckling analysis of laminated beams.

Review History:

Received: 2019-04-10

Revised: 2019-04-19

Accepted: 2019-04-21

Available Online: 2019-04-29

Keywords:

Finite element

Laminated beam

Free vibration

Buckling

1. INTRODUCTION

Laminated beams due to their properties such as strength, hardness and lightness, are widely used in the construction of various engineering structures such as civil engineering, mechanics and aerospace. So far, many theories have been proposed for the structures analysis. In the classical beams theory (CBT), is not considered the effect of shear deformation of beam. For the analysis of thick beams that the effect of shear deformations is effective, two theories are developed; the first-order shear deformation theory (FSDT) and the high-shear deformation theory (HSDT).

Free vibration analysis is one of the important issues in the analysis of laminated beams. So far, various approaches have been proposed to solve the analytical and numerical problems of free vibration of these beams. Khdeir and Reddy presented the analytical solution for free vibration analysis of cross-ply laminated beams with virus theory [1]. Similar to the free vibration case, buckling analysis of these structures, is attractive for the researchers due to their wide application in the design of structures. Khdeir and Reddy developed the analytical solution of refined beam theories to study the buckling behavior of cross-ply rectangular beams with

arbitrary boundary conditions [2]. In 2012, Vo and Thai performed vibration and buckling analysis of composite beams with arbitrary lay-ups using refined shear deformation theory [3]. Mantari and Canales in 2016, presented an analytical solution for the buckling and free vibration analysis of laminated beams by using a refined and generalized shear deformation theory. They used Rayleigh quotient, and the Ritz method is used to approximate the displacement field [4]. In this year, Kahya presented a multilayered beam element based on first-order shear deformation theory (FSDT) for buckling analysis of laminated composite beams [5]. In 2017, Nguyen et al. based on trigonometric series, proposed a new analytical solution based on a higher-order beam theory for static, buckling and vibration of laminated composite beams [6]. Moreover, they presented the solutions for static, buckling and vibration of laminated composite beams based on Ritz method [7].

In this study, is proposed a 2-node beam element for free vibration and buckling analysis of symmetric laminated beams, based on first order shear deformation theory. In the second section of the paper, the finite element formulation of the element is presented. In order to formulate the element, cubic displacement polynomial and quadratic rotational

*Corresponding author's email: Karkon443@gmail.com



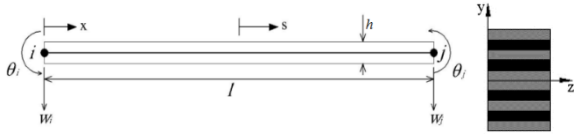


Fig. 1. Proposed laminated beam element

fields are selected. After the derivation of the finite element relations, the free vibration and the buckling analysis of the symmetric laminated beams has been evaluated with different boundary conditions. Numerical tests show the high accuracy of the proposed element in the free vibration and buckling analysis of these beams.

2. FINITE ELEMENT FORMULATION

In the finite element method, the deflection and rotation fields, are related to nodal displacements, by shape functions. “Fig. 1” shows the 2-node proposed laminated beam element. For calculating the shape functions, the deflection and rotation fields are selected from third and second order, respectively. Moreover, is assumed the shear strain to be constant. Therefore, these functions can be written as:

$$w = \frac{w_i}{2}(1-s) + \frac{w_j}{2}(1+s) + \beta_0 l (1-s^2) + \beta_1 l s (1-s^2) \tag{1}$$

$$\theta = \frac{\theta_i}{2}(1-s) + \frac{\theta_j}{2}(1+s) + \alpha_0 (1-s^2) \tag{2}$$

$$\gamma = \gamma_0 \quad , \quad s = \frac{2x}{l} - 1 \tag{3}$$

In these relations, $\beta_1, \beta_0, \alpha_0$ and γ_0 , are unknowns. In order to finding these parameters, the shear strain relation of the Timoshenko beam is used and By utilizing the shear strain value equal to γ_0 , the subsequent equations will be available:

$$\gamma = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{2}{l} \cdot \frac{dw}{ds} - \theta \tag{4}$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{l} \left(-\frac{w_i}{2} + \frac{w_j}{2} - 2\beta_0 l s + \beta_1 l - 3\beta_1 l s^2 \right) - \theta_i \left(\frac{1-s}{2} \right) - \theta_j \left(\frac{1+s}{2} \right) - \alpha_0 (1-s^2) \tag{5}$$

In the present formula, the coefficients of the terms s and s^2 are equivalent to zero. Therefore, in the succeeding lines, β_1, α_0 are determined in terms of the unknown parameter γ_0 :

$$\beta_0 = \frac{1}{8}(\theta_i - \theta_j) \quad , \quad \beta_1 = \frac{1}{6}\alpha_0 \tag{6}$$

$$\alpha_0 = -\frac{3}{2} \left(\gamma_0 - \frac{1}{l}(w_j - w_i) + \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j) \right) \tag{7}$$

It should be reminded that, in symmetric laminated beams, just the stiffness parameters D_{11} and A_{55} are nonzero. These parameter are calculated in the following way:

$$D_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \bar{Q}_{11} dz \tag{8}$$

$$A_{55} = b k_s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{55} dz \tag{9}$$

In these relations, b and k_s , are width of the beam and shear correction factor, respectively. As well as, $\bar{Q}_{11}^{(k)}$ and $\bar{Q}_{55}^{(k)}$ are determined as follows:

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \times \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta_k \tag{10}$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k \tag{11}$$

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \quad , \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \tag{12}$$

$$Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \quad , \quad Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)} \tag{13}$$

$$Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)} \quad , \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \tag{14}$$

Where θ_k is the angle from global axis x to the principle material axis. Other required finite element relationships, can be found in [8].

3. NUMERICAL TESTS

In order to assess the accuracy and efficiency of the proposed element, some numerical problems have been analyzed and its results compared with results available in the literature. It should be mentioned, The 16 proposed element is used for analysis. The shear correction factors are assumed to be 5/6 and the following material properties are considered for each layer:

$$E_1 = 40E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \tag{15}$$

$$G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

3.1. Free vibration analysis

In this section, the robustness of the proposed element is evaluated for free vibration analysis of laminated beams. For this aim, a three-layered symmetrically laminated beam with stacking sequence $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ is analyzed for different thickness ratios and boundary conditions. The results of proposed elements, is compared with those of other researchers findings.

For convenience, the following non-dimensional natural

Table 1. Non-dimensional fundamental frequency of three layered beam with $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Method	$\frac{l}{h}$	Boundary condition			
		SS	SC	CC	CF
Nguyen et al. [7]	5	9.206	-	11.601	4.230
Murthy et al. [9]		9.207	10.238	11.602	4.230
Vo and Thai [3]		9.205	-	-	-
Khdeir & Reddy [1]		9.205	9.652	10.432	4.134
Proposed element		9.216	9.664	10.447	4.135
Nguyen et al. [7]	10	13.607	-	19.707	5.490
Murthy et al. [9]		13.611	16.600	19.719	5.491
Vo and Thai [3]		13.665	-	-	-
Khdeir & Reddy [1]		13.670	16.335	19.051	5.479
Proposed element		13.679	16.350	19.075	5.480
Nguyen et al. [7]	50	17.449	-	37.629	6.262
Vo and Thai [3]		17.456	-	-	-
Proposed element		17.469	26.682	37.670	6.267

Table 2. Non-dimensional buckling load of three layered beam with $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Method	$\frac{l}{h}$	Boundary condition			
		SS	SC	CC	CF
Kahya [5]	5	8.858	9.492	10.971	-
Mantari & Canales [4]		8.858	10.192	11.502	4.673
Nguyen et al. [6]		8.613	-	11.652	4.407
Khdeir & Reddy [2]		8.606	9.412	10.802	4.747
Proposed element		8.612	9.418	10.813	4.748
Kahya [5]	10	18.88 5	25.828	34.345	-
Mantari & Canales [4]		18.79 6	27.090	34.365	6.757
Nguyen et al. [6]		18.83 2	-	34.453	6.772
Khdeir & Reddy [2]		18.98 9	25.940	34.426	6.797
Proposed element		19.00 4	25.974	34.513	6.780
Nguyen et al. [6]	50	30.90 6	-	114.39 8	7.886
Proposed element		30.93 1	61.288	114.83 0	7.887

frequency will be given in term of the following form:

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega l^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (16)$$

The results of proposed element along with the other published results, are presented in “Table 1”. It is clearly seen that for all the aspect ratios and boundary conditions, the proposed element has rapid rate of convergence.

3.2. Buckling analysis

In order to assess the accuracy of the proposed element for buckling analysis of laminated beam structures, a three-layered symmetrically laminated beam with stacking sequence $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ is analyzed for different thickness ratios and boundary conditions. For simplicity, the critical loads are given in non-dimensional form as follows:

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} l^2}{E_2 b h^3} \quad (17)$$

The results of the proposed element are compared with those of other researchers’ findings, in “Table 2”. The data listed in this Table confirm the element’s high accuracy and rapid convergence.

4. CONCLUSION

In this study a simple 2-node element was proposed for free vibration and buckling analysis of symmetric laminated beams. The element was formulated based on FSDT theory. For this purpose, the displacement and rotation field of the element, has been selected from third and second order, respectively. In order to examine the accuracy and efficiency of the proposed element, several numerical tests were

conducted. The results reveal that the suggested element has a high accuracy and convergence rate for free vibration and buckling analysis of symmetric beams.

REFERENCES

- [1] A. Khdeir, J. Reddy, Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *International Journal of Engineering Science*, 32(12) (1994) 1971-1980.
- [2] A. Khdeir, J. Redd, Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *Composite Structures*, 37(1) (1997) 1-3.
- [3] T.P. Vo, H.-T. Thai, Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1) (2012) 67-76.
- [4] J. Mantari, F. Canales, Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalized boundary conditions, *Composite Structures*, 152 (2016) 306-315.
- [5] V. Kahya, Buckling analysis of laminated composite and sandwich beams by the finite element method, *Composites Part B: Engineering*, 91 (2016) 126-134.
- [6] T.-K. Nguyen, N.-D. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams, *Composite Structures*, 160 (2017) 142-151.
- [7] N.-D. Nguyen, T.-K. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Ritz-Based Analytical Solutions for Bending, Buckling and Vibration Behavior of Laminated Composite Beams, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(11) (2018) 1850130.
- [8] A. Moallemi-Oreh, M. Karkon, Finite element formulation for stability and free vibration analysis of Timoshenko beam, *Advances in Acoustics and Vibration*, 2013 (2013).
- [9] M. Murthy, D.R. Mahapatra, K. Badarinarayana, S. Gopalakrishnan, A refined higher order finite element for asymmetric composite beams, *Composite Structures*, 67(1) (2005) 27-35.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Karkon, S. Ghouhestani, S.M. Saberizadeh, M. Yaghoobi, A new simple finite element method for free vibration and buckling analysis of symmetrically laminated beams, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(9) (2020) 551-554.

DOI: 10.22060/ceej.2019.16111.6128





پیشنهاد یک روش ساده اجزای محدود برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه

محمد کارکن^{۱*}، سلیمان قوهستانی^۲، سیدمحمد صابری زاده^۳، مجید یعقوبی^۴

^۱ استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان، ایران

^۲ استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه فسا، فسا

^۳ دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

^۴ استادیار، گروه مهندسی عمران و معماری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۱-۲۱

بازنگری: ۱۳۹۸-۰۱-۳۰

پذیرش: ۱۳۹۸-۰۲-۰۱

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۰۹

کلمات کلیدی:

اجزای محدود

تیر چندلایه

ارتعاش آزاد

کمانش

خلاصه: در این مقاله یک جزء دو گرهی برپایه‌ی نگره‌ی برشی مرتبه یکم (FSDT)، برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه متقارن پیشنهاد می‌گردد. برای رابطه‌سازی جزء، میدان جابجایی از درجه سوم و میدان دوران آن نیز از درجه دوم انتخاب می‌شود. هم‌چنین کرنش برشی جزء نیز مقداری ثابت فرض شده است. با نوشتن کارمایه کل تیر و ایستادن آن نسبت به کرنش برشی، تابع‌های درون‌یاب برای میدان جابه‌جایی و دوران تیر به صورت صریح محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که با کاهش ضخامت تیر، تابع‌های درون‌یاب جزء پیشنهادی، به تابع‌های درونیاب جزء اولر-برنولی تبدیل می‌شوند و مشکل قفل برشی در آن رخ نمی‌دهد. با بهره‌جویی از این تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی تیر محاسبه می‌شود. در ادامه با نوشتن معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیر، شکل صریح ماتریس جرم انتقالی و دورانی جزء پیشنهادی نیز محاسبه می‌شود. هم‌چنین، با بهره‌جویی از تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی هندسی جزء نیز در دسترس قرار می‌گیرد. در پایان با آزمون‌های عددی پرشمار دقت و کارایی جزء پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور، تیرهای چندلایه متقارن با شرط‌های مرزی و نسبت طول به ضخامت گوناگون تحلیل می‌گردد. این آزمون‌ها نشان دهنده‌ی دقت بالای جزء در تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه متقارن نازک و ضخیم می‌باشند. هم‌چنین، نبود مشکل قفل برشی در جزء پیشنهادی نیز به اثبات می‌رسد.

۱- مقدمه

تیر-های ضخیم که اثر تغییر شکل-های برشی تأثیرگذار می‌باشد، دو گونه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۱ (FSDT) و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا^۲ (HSDT) گسترش یافته‌اند. در نگره (FSDT) با توجه به پنداشت ثابت بودن کرنش برشی در هر مقطع تیر، تغییرات جابه‌جایی درون صفحه تیر در راستای ضخامت، خطی می‌باشد، اما خط جابه‌جایی در راستای ضخامت تیر بر میان-تار عمود نخواهد بود. این شیوه در تیرهای تا ضخامت متوسط، پاسخ با دقت مناسب را به دست می‌دهد. در مقابل، در نگره-ی (HSDT)، گر چه پاسخ دقیقتری را بخصوص در تیرهای با ضخامت بالا به دست

تیرهای چندلایه به دلیل خواصی نظیر مقاومت، سختی و سبکی دارای کاربردهای وسیعی در ساخت سازه‌های مختلف مهندسی مانند عمران، مکانیک و هوافضا می‌باشند. تاکنون، تئوری-های زیادی برای تحلیل این گونه سازه‌ها پیشنهاد شده است. در نگره-ی کلاسیک صفحات^۱ (CBT)، اثر برش وارد تغییر شکل صفحه نمی‌گردد. این شیوه، برای تیر-های نازک پاسخ مناسب را به دست می‌دهد ولی با افزایش ضخامت، خطای پاسخ نیز افزایش پیدا می‌کند. برای تحلیل

1 Classic beam theory

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.karkon@iaularestan.ac.ir

2 First order shear deformation theory
3 Higher order shear deformation theory



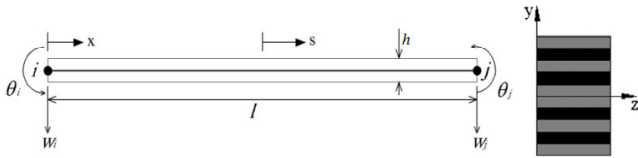
[۱۳، ۱۴]. شایان ذکر است جزء پیشنهادی توسط این پژوهشگران فاقد مشکل قفل برشی است. در سال ۲۰۱۲ جعفری تلوکلایی و همکاران^{۱۱}، با استفاده از راهکار ضرائب لاگرانژ، پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را ارائه کردند [۱۵]. در این سال وو و تهی^{۱۲}، یک جزء دو گرهی با ده درجه آزادی را برای تحلیل ارتعاش و کمانش تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند [۱۶]. لی و همکاران^{۱۳}، پاسخ نگره-های گوناگون مرتبه-ی بالا برای ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را بار روش اجزای محدود طیفی، مقایسه کردند. آنها برای اینکار یک جزء دو گرهی با هشت درجه آزادی را رابطه-سازی کردند [۱۷]. در سال ۲۰۱۵ وانگ و همکاران^{۱۴}، روش اجزای محدود هم-هندسی را برای تحلیل کمانش تیرهای چندلایه بکار بردند [۱۸]. هم-چنین در این سال فیلیپی و همکاران^{۱۵}، با استفاده از چندجمله-ای-های چبیشف تحلیل ایستایی و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را انجام دادند [۱۹]. در سال ۲۰۱۶، مانتاری و کانالز^{۱۶} با استفاده از روش ریتز و بکار بردن سری-های مثلثاتی و سری-های پیوندی، پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه را بر پایه-ی نگره (HSDT) ارائه کردند [۲۰، ۲۱]. هم-چنین در این سال، کایا^{۱۷} یک جزء درجه بالا بر پایه نگره برشی مرتبه یکم را، برای تحلیل کمانش تیرهای چندلایه پیشنهاد کرد [۲۲]. عثمان و همکاران^{۱۸}، یک جزء سه گرهی را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه رابطه-سازی کردند [۲۳]. در سال ۲۰۱۷ نگوین و همکاران^{۱۹} با بهره-جویی از سری-های مثلثاتی، یک شیوه تحلیلی جدید بر پایه (HSDT) را، برای واکاوی ایستایی، کمانش و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند [۲۴]. هم-چنین، آن-ها با استفاده از روش ریتز نیز، پاسخ تحلیلی ایستایی، کمانش و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را به-دست آوردند [۲۵]. غضنفری و همکاران^{۲۰} نیز در سال ۲۰۱۹، بر پایه رابطه-سازی یک-پارچه کریرا (CUF) و استفاده از شیوه هم-هندسی، تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را انجام دادند [۲۶]. یادآوری می-گردد که، یک مرور جامع بر مقالاتی که در زمینه تحلیل ایستایی، کمانش و

می-دهد، اما نیازمند تلاش محاسباتی بیشتری نسبت به (FSDT) است [۱].

یکی از موضوعات مهم در تحلیل تیرهای چندلایه، تحلیل ارتعاش آزاد آن می باشد. تا کنون شیوه-های گوناگونی برای حل تحلیلی و عددی ارتعاش آزاد این گونه تیرها پیشنهاد شده است. چاندارشخارا و همکاران^۱ بر پایه نگره برشی مرتبه یکم، یک شیوه تحلیلی را برای پاسخ ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه با شرط-های گوناگون مرزی ارائه کردند [۲]. هم-چنین خدیر و ردی^۲ نیز پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه با چیدمان متعامد بر پایه نگره های گوناگون برشی، بدست آوردند [۳]. چاندارشخارا و بانجرا^۳ یک جزء محدود بر پایه (HSDT) را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند [۴]. تا کنون پژوهش-های کمتری بر روی کمانش تیر نسبت به ارتعاش آزاد آن صورت پذیرفته است. خدیر و ردی پاسخ تحلیلی کمانش تیرهای چندلایه با چیدمان متعامد و شرطهای مختلف مرزی را ارائه کردند [۵]. در سال ۲۰۰۲، چاکرابورتی و همکاران^۴ بر پایه برش مرتبه یکم اصلاح شده تحلیل ارتعاش آزاد و انتشار موج را در تیرهای چندلایه با ناپیوستگی سازه-ای را مورد بررسی قرار دادند [۶]. چن و بین^۵ با گسسته سازی رابطه-های فضای حالت و بهره-جویی از فن مربعات دیفرانسیل، تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چند لایه را انجام دادند [۷]. در سال ۲۰۰۵، مورتی و همکاران^۶ بر پایه نگره برشی مرتبه بالای اصلاح شده، یک جزء دو گرهی با هشت درجه آزادی را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه نامتقارن پیشنهاد کردند [۸]. هم-چنین، آیدوگدو^۷ با راهکار ریتز، تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای با چیدمان متعامد و زاویه-ای را به انجام رسانید [۹-۱۱]. با بهره-جویی از رابطه-سازی یکپارچه کریرا (CUF)^۸، کاتاپانو و همکاران^۹ تحلیل ایستایی تیرهای چندلایه را انجام دادند [۱۲]. لزگی نظرگاه و همکاران^{۱۰} در سال ۲۰۱۱، بر پایه نگره برشی مرتبه بالای اصلاح شده، یک جزء سه گرهی با پیوستگی C¹ را، برای تحلیل ایستایی و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند

11 Jafari-Talookolaei et al.
12 Vo and Thai
13 Li et al.
14 Wang et al.
15 Filippi et al.
16 Mantari and Canales
17 Kahya
18 Osman et al.
19 Nguyen et al.
20 Ghazanfari et al.

1 Chandrashekhara et al.
2 Khdeir and Reddy
3 Chandrashekhara and Bangera
4 Chakraborty et al.
5 Chen and Bian
6 Murthy et al.
7 Aydogdu
8 Carrera's Unified Formulation
9 Catapano et al.
10 Lezgy-Nazargah et al.



شکل ۱. جزء تیر پیشنهادی

Fig. 1. Proposed laminated beam element

$$s = \frac{2x}{l} - 1 \quad (4)$$

در رابطه-های کنونی عامل-های $\beta_1, \beta_0, \alpha_0$ و γ_0 ، مجهول می-باشند. برای یافتن این عامل-ها، نخست معادله کرنش برشی برای جزء تیموشنکو برپا می-گردد و مقدار آن برابر γ_0 قرار داده می-شود:

$$\gamma = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{2}{l} \cdot \frac{dw}{ds} - \theta \quad (5)$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{l} \left(-\frac{w_i}{2} + \frac{w_j}{2} - 2\beta_0 l s + \beta_1 l - 3\beta_1 l s^2 \right) - \quad (6)$$

$$\theta_i \left(\frac{1-s}{2} \right) - \theta_j \left(\frac{1+s}{2} \right) - \alpha_0 (1-s^2)$$

با توجه به رابطه-ی کنونی، ضریب جمله-های s و s^2 مساوی صفر می-باشد. بنابراین عامل-های β_1, α_0 برحسب عامل مجهول γ_0 به دست می-آید:

$$\beta_0 = \frac{1}{8} (\theta_i - \theta_j) \quad (7)$$

$$\alpha_0 = -\frac{3}{2} \left(\gamma_0 - \frac{1}{l} (w_j - w_i) + \frac{1}{2} (\theta_i + \theta_j) \right) \quad (8)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6} \alpha_0 \quad (9)$$

شایان ذکر است که در تیرهای چندلایه متقارن، فقط عامل-های سختی خمشی D_{11} و سختی برشی A_{55} وجود دارند و سایر عامل-های سختی صفر می-باشند. این عامل-های سختی برای تیرهای چندلایه، به صورت زیر به دست می-آید:

$$D_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \bar{Q}_{11} dz \quad (10)$$

ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه منتشر شده است، توسط صیاد و قوگال^۱ انجام شده است [۲۷].

در این مقاله برای ارتعاش آزاد و پایداری تیرهای چندلایه متقارن، یک روش جدید اجزای محدود بر پایه-ی نگره-ی برشی مرتبه یکم پیشنهاد شده است. در بخش دوم مقاله، رابطه-های اجزای محدود جزء پیشنهادی آمده است. برای رابطه-سازی جزء، میدان جابه-جایی جزء از درجه سوم و میدان دوران آن از درجه دوم انتخاب شده است. هم-چنین کرنش برشی جزء نیز ثابت، فرض شده است. در ادامه، با بهره-جویی از تابع کارمایه-ی- خمشی و برشی تیر، تابع-های درون-یاب این جزء به صورت دقیق محاسبه شده است. بهره جویی از این تابع شکل-های دقیق، سبب از بین رفتن مشکل قفل برشی در هنگام نازک شدن تیر شده است. در بخش سوم و چهارم مقاله، با به کار بردن این تابع-های درون-یاب، ماتریس سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء، به صورت صریح حساب شده است. با بهره-جویی از این ماتریس-ها در بخش پنجم مقاله، ارتعاش آزاد تیر و کماتش تیرهای چندلایه متقارن با شرایط مختلف تکیه-گاهی مورد ارزیابی قرار گرفته است. آزمون-های عددی، نشان دهنده-ی دقت بالای جزء پیشنهادی در تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد این گونه تیرها می-باشد.

۲- رابطه-سازی اجزای محدود

در روش اجزای محدود، میدان-های جابه-جایی و دوران جزء، با تابع-های درون-یاب به تغییرمکان-های گرهی وابسته می-گردد. شکل ۱ جزء دو گرهی پیشنهادی چند لایه را نشان می-دهد. برای محاسبه تابع درون-یاب جزء، میدان جایجایی از درجه سوم و میدان دوران از درجه دوم انتخاب می-گردد. هم-چنین فرض می-شود که کرنش برشی در تیر، مقدار ثابت γ_0 می-باشد. بنابراین می-توان نوشت:

$$w = \frac{w_i}{2} (1-s) + \frac{w_j}{2} (1+s) + \beta_0 l (1-s^2) + \beta_1 l s (1-s^2) \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\theta_i}{2} (1-s) + \frac{\theta_j}{2} (1+s) + \alpha_0 (1-s^2) \quad (2)$$

$$\gamma = \gamma_0 \quad (3)$$

$$U_b = U_0 + \frac{6D_{11}\gamma_0}{l} \left(\gamma_0 - \left(\frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) \right) \quad (19)$$

$$U_0 = \frac{D_{11}l}{4} \int_{-1}^1 \kappa_0^2 ds \quad (20)$$

کارمایه-ی کرنش برشی نیز می-توان به صورت زیر نوشت:

$$U_s = \frac{A_{55}}{2} \int_0^l \gamma^2 dx = \frac{A_{55}l}{4} \int_{-1}^1 \gamma_0^2 ds = \frac{A_{55}l}{2} \gamma_0^2 \quad (21)$$

بنابراین کارمایه-ی کرنشی کل، با جمع کارمایه-ی خمشی و کارمایه-ی برشی به صورت زیر حاصل می-گردد:

$$U = U_b + U_s = U_0 - \frac{6D_{11}\gamma_0}{l} \left(\frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) + \frac{6D_{11}}{l} \gamma_0^2 + \frac{A_{55}l}{2} \gamma_0^2 \quad (22)$$

چنان-چه مشتق کارمایه-ی کل نسبت به γ_0 صفر گردد ($\partial U / \partial \gamma_0 = 0$)، عامل مجهول γ_0 به صورت زیر، پیدا می-گردد:

$$\gamma_0 = \frac{6D_{11}}{A_{55}l^2 + 12D_{11}} \left(\frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) = \delta \left(\frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) \quad (23)$$

$$\delta = \frac{6\lambda}{l^2 + 12\lambda}, \quad \lambda = \frac{D_{11}}{A_{55}} \quad (24)$$

با جای-گذاری عامل-های $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ و γ_0 ، در رابطه-ها-ی (۱) و (۲) تابع-های درون-یاب برای جزء پیشنهادی شکل ۱ به صورت زیر به دست می-آید:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = [N] \{D\}_E = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$A_{55} = bk_s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{55} dz \quad (11)$$

در رابطه-های کنونی، b عرض تیر و k_s ضریب اصلاح برش مقطع تیر می-باشد. هم-چنین، عامل-های سختی $\bar{Q}_{11}^{(k)}$ و $\bar{Q}_{55}^{(k)}$ به صورت زیر حساب می-شود:

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta_k \quad (12)$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k \quad (13)$$

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad (14)$$

$$Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}$$

$$Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)}, \quad Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \quad (15)$$

در این رابطه-ها θ_k ، زاویه لایه k ام نسبت به محور x می-باشد. در ادامه برای یافتن γ_0 ، مشتق کارمایه-ی کرنشی تیر نسبت به γ_0 صفر می-گردد. کارمایه-ی کرنشی از جمع دو بخش کارمایه-ی خمشی و کارمایه-ی برشی حاصل می-شود. کارمایه-ی خمشی را می-توان به صورت زیر به دست آورد:

$$U_b = \frac{D_{11}}{2} \int_0^l \kappa^2 dx = \frac{D_{11}l}{4} \int_{-1}^1 \kappa^2 ds \quad (16)$$

در رابطه-ی کنونی، κ ، انحنای تیر می-باشد که به صورت زیر حساب می-شود:

$$\kappa = -\frac{2}{l} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \kappa_0 - 6 \frac{s\gamma_0}{l} \quad (17)$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{l} \left(\theta_i - \theta_j + 3s \left(\frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) \right) \quad (18)$$

با جای-گذاری رابطه-های کنونی در معادله (۱۶)، کارمایه-ی حاصل از خمش به صورت زیر پیدا می-گردد:

به دست می-آید:

$$[D_m] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad (30)$$

با محاسبه- رابطه-ی (۲۹)، ماتریس سختی جزء به صورت زیر

به دست می-آید:

$$[K_0] = \frac{D_{11}}{l^3 + 12l\lambda} \times \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 + 12\lambda & -6l & 2l^2 - 12\lambda \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 - 12\lambda & -6l & 4l^2 + 12\lambda \end{bmatrix} \quad (31)$$

۳- ماتریس جرم

کارمایه-ی جنبشی تیر با اثر برش را می-توان به صورت جمع دو

بخش کارمایه-ی جنبشی انتقالی و دورانی نوشت [۲۹]:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho A \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho I \dot{\theta}^2 dx \quad (32)$$

بنابراین ماتریس جرم جزء را می-توان به صورت زیر نوشت:

$$[M] = [M_1] + [M_2] = \frac{\rho b h l}{2} \int_1^1 [N_w]^T [N_w] ds + \frac{\rho b h^3 l}{24} \int_{-l/2}^{l/2} [N_\theta]^T [N_\theta] ds \quad (33)$$

ماتریس-جرم انتقالی $[M_1]$ برای این جزء به صورت زیر به دست می-آید:

$$[M_1] = \frac{\rho b h l^5}{210(12\lambda + l^2)^2} \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{15} & -m_{14} & m_{16} \\ m_{13} & -m_{14} & m_{11} & -m_{12} \\ m_{14} & m_{16} & -m_{12} & m_{15} \end{bmatrix} \quad (34)$$

عامل-های ماتریس بالا، به صورت زیر تعریف می-شوند:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{6}{l^4} (1680\lambda^2 + 294l^2\lambda + 13l^4) \\ m_{12} &= \frac{1}{l^3} (1260\lambda^2 + 231l^2\lambda + 11l^4) \\ m_{13} &= \frac{9}{l^4} (560\lambda^2 + 84l^2\lambda + 3l^4) \\ m_{14} &= -\frac{1}{2l^3} (2520\lambda^2 + 378l^2\lambda + 13l^4) \\ m_{15} &= \frac{2}{l^2} (126\lambda^2 + 21l^2\lambda + 13l^4) \\ m_{16} &= -\frac{3}{2l^2} (168\lambda^2 + 28l^2\lambda + 13l^4) \end{aligned} \quad (35)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} [2 + s^3 (1 - 2\delta) + s(-3 + 2\delta)]$$

$$N_2 = \frac{l}{4} [0.5(1 - s^2) + (s^3 - s)(0.5 - \delta)]$$

$$N_3 = \frac{1}{4} [2 - s^3 (1 - 2\delta) - s(-3 + 2\delta)]$$

$$N_4 = \frac{l}{4} [-0.5(1 - s^2) + (s^3 - s)(0.5 - \delta)] \quad (26)$$

$$N_5 = \frac{1}{4l} [6(1 - s^2)(-1 + 2\delta)]$$

$$N_6 = \frac{1}{4} [-1 + s(-2 + 3s) + 6(1 - s^2)\delta]$$

$$N_7 = \frac{1}{4l} [-6(1 - s^2)(-1 + 2\delta)]$$

$$N_8 = \frac{1}{4} [-1 + s(2 + 3s) + 6(1 - s^2)\delta]$$

یادآوری می گردد که، عامل $\{D\}_E$ بردار تغییر مکان-های جزء

می باشد. در روش اجزای محدود، تغییر مکان-های درون جزء با

تابع-های درون-یاب به درجه آزادی-های گرهی جزء وابسته

می-گردند. هم-چنین می-توان کرنش نیز به درجه آزادی-های

گرهی وابسته نمود. بنابراین روابط کلی اجزای محدود را می-توان به

صورت زیر نوشت [۲۸]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{dw}{dx} \\ -\frac{dw}{dx} + \theta \end{Bmatrix} = [B] \{D\}_E \quad (27)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & -1 \end{bmatrix} [N] \quad (28)$$

در این رابطه-ها $[N]$ ماتریس تابع درون-یاب رابطه-ی (۲۵)

می-باشد، هم-چنین $[B]$ ماتریس کرنش می-باشد. بنابراین ماتریس

سختی جزء تیموشنکو را می-توان از رابطه-ی زیر به دست آورد:

$$[K_0] = \int [B]^T [D_m] [B] dx \quad (29)$$

در رابطه-ی کنونی ماتریس $[D_m]$ ، وابسته به خصوصیات مکانیکی

جسم می-باشد. برای جزء چندلایه متقارن این ماتریس به صورت زیر

با محاسبه-ی رابطه-ی بالا، ماتریس سختی هندسی به صورت زیر به دست می-آید:

$$[K_g] = \frac{P}{60l} \begin{bmatrix} k_{g1} & k_{g2} & k_{g3} & k_{g2} \\ k_{g2} & k_{g4} & -k_{g2} & k_{g5} \\ k_{g3} & -k_{g2} & k_{g1} & -k_{g2} \\ k_{g2} & k_{g5} & -k_{g2} & k_{g4} \end{bmatrix} \quad (41)$$

عامل-های ماتریس سختی هندسی کنونی، به صورت زیر می-باشند:

$$\begin{aligned} k_{g1} &= 60 + 12\beta \\ k_{g2} &= 6\beta l \\ k_{g3} &= -60 - 12\beta \\ k_{g4} &= 5l^2 + 3\beta l^2 \\ k_{g5} &= 3\beta l^2 - 5l^2 \\ \beta &= \frac{l^4}{(l^2 + 12\lambda)^2} \end{aligned} \quad (42)$$

کمانش زمانی رخ خواهد داد که سختی کل سازه صفر گردد. باید توجه داشت که ماتریس سختی کل سازه از روی هم-گذاری ماتریس سختی هر جزء سازه به دست می-آید. بنابراین بار بحرانی را می-توان با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی کل سازه به دست آورد:

$$\det([K_t]) = \det([K] - P[K_G]) = 0 \Rightarrow P_{cr} \quad (43)$$

در رابطه-ی کنونی $[K]$ و $[K_G]$ به ترتیب، ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی کل سازه می-باشند. هم-چنین $[K_t]$ نیز ماتریس سختی کل سازه با اثر نیروی محوری می-باشد. شایان ذکر است، کوچک-ترین مقدار ویژه-ی معادله (۴۳) بار کمانشی تیر خواهد بود.

۵- آزمون-های عددی

به منظور سنجش دقت و کارایی جزء پیشنهادی، آزمون-های عددی در دو بخش تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه انجام می-گردد و پاسخ-های جزء پیشنهادی با یافته-های دیگر پژوهشگران مقایسه می-شود. شایان ذکر است که در تمامی این

هم-چنین ماتریس-جرم دورانی $[M_2]$ نیز، می-توان به صورت زیر به دست آورد:

$$[M_2] = \frac{\rho b h^3 l^2}{360(12\lambda + l^2)^2} \times \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & -m_{21} & m_{22} \\ m_{22} & m_{23} & -m_{22} & m_{24} \\ -m_{21} & -m_{22} & m_{21} & -m_{12} \\ m_{22} & m_{24} & -m_{12} & m_{23} \end{bmatrix} \quad (36)$$

عامل-های بکار رفته در ماتریس کنونی به صورت زیر می-باشند:

$$\begin{aligned} m_{21} &= 36l \\ m_{22} &= -3(60\lambda - l^2) \\ m_{23} &= \frac{4}{l}(360\lambda^2 + 15l^2\lambda + 3l^4) \\ m_{24} &= \frac{1}{l}(720\lambda^2 - 60l^2\lambda - l^4) \end{aligned} \quad (37)$$

یادآوری می-گردد، برای تحلیل ارتعاش آزاد و به دست آوردن فرکانس-های طبیعی تیر (ω_i) ، باید مسأله مقدار ویژه-ی زیر را حل کرد:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (38)$$

در رابطه-ی کنونی، عامل-های $[K]$ و $[M]$ به ترتیب، ماتریس سختی و ماتریس جرم کل سازه می-باشند.

۴- ماتریس سختی هندسی

برای تحلیل کمانش از مفهوم تعادل خنثی استفاده می-شود. تیر در وضعیت تعادل خنثی می-تواند هر دو شکل مستقیم و یا خم شده را داشته باشد. با فرض کوچک بودن تغییرمکان-ها، میزان کار بار خارجی ناشی از کمانش خمشی را می-توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta W = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (39)$$

در رابطه-ی کنونی P نیروی محوری می-باشد. بنابراین با توجه به معادله (۳۹) ماتریس سختی هندسی جزء به صورت زیر حساب می-شود:

$$[K_g] = \int_0^l \left[\frac{dN_w}{dx} \right]^T P \left[\frac{dN_w}{dx} \right] dx \quad (40)$$

جدول ۱. بسامدهای طبیعی (kHz) تیر یک لایه چندسانگرد ساخته شده از ماده گرافن-اپوکسی با تکیه گاه های ساده

Table 1. Natural Frequencies of simply supported orthotropic beam with one layer made of graphene-epoxy

روش	تعداد جزء	شماره مود				
		۱	۲	۳	۴	۵
جزء پیشنهادی	۲	۰/۷۶۷	۳/۵۸۱	۸/۵۹۱	۱۹/۶۶۱	-
	۴	۰/۷۵۸	۲/۶۴۹	۵/۳۰۲	۱۴/۰۱۹	۱۸/۴۵۳
	۸	۰/۷۵۶	۲/۵۷۳	۴/۸۷۳	۷/۴۶۲	۱۰/۳۱۸
	۱۶	۰/۷۵۵	۲/۵۵۴	۴/۷۵۵	۷/۰۸۶	۹/۴۸۶
	۳۲	۰/۷۵۵	۲/۵۴۹	۴/۷۲۶	۶/۹۹۲	۹/۲۶۷
چاندارشخارا و همکاران [۲]	-	۰/۷۵۵	۲/۵۴۸	۴/۷۱۶	۶/۹۶۰	۹/۱۹۴
چاکرابورتی و همکاران [۶]	۱۰	۰/۷۵۵	۲/۵۶۳	۴/۸۱۶	۷/۲۸۳	۹/۹۳۵
نگره کلاسیک [۳۰]	-	۰/۸۱۳	۳/۲۵۰	۷/۳۱۴	۱۳/۰۰۲	۲۰/۳۱۶

آزمون-ها، ضریب اصلاح برش تیر $k_s = 5/6$ پنداشته می-شود.

۱-۵- آزمون عددی یکم (تحلیل ارتعاش آزاد)

در این بخش دقت جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه متقارن مورد ارزیابی قرار می-گیرد. برای این منظور، ابتدا یک تیر یک لایه چندسانگرد ساخته شده از ماده گرافن-اپوکسی با مشخصات زیر تحلیل می-گردد [۲]:

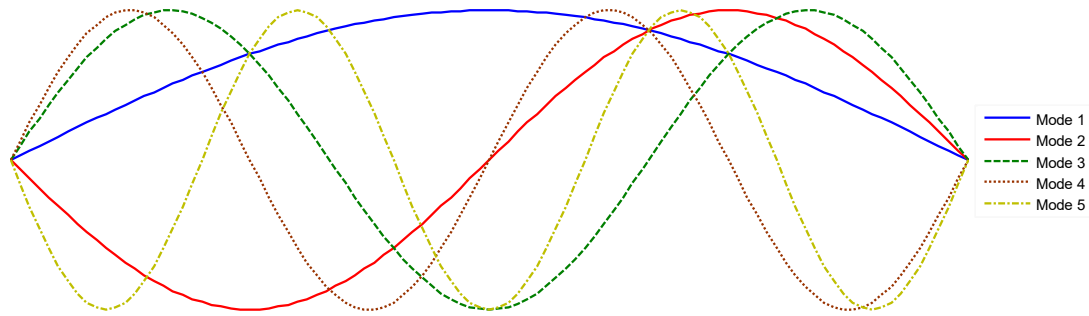
$$\begin{aligned}
 E_1 &= 144.84 \text{ GPa}, \\
 E_2 &= 9.65 \text{ GPa}, \\
 G_{23} &= 3.45 \text{ GPa} \\
 G_{12} &= G_{13} = 4.14 \text{ GPa}, \\
 \nu_{12} &= 0.3, \\
 \rho &= 1389.79 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{۴۴}$$

شکلی تیر برای پنج مود اول نیز در شکل ۲ نشان داده شده است. به منظور بهتر نشان دادن کارایی جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چند لایه، یک تیر چهار لایه ساخته شده از ماده گرافن-اپوکسی با زاویه-های مختلف برای لایه-ها و با چیدمان $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$ ، تحلیل می-گردد. در این حالت نیز، عامل بدون بعد بسامد زاویه-ای اصلی تیر برای شرط-های مختلف تکیه-گاهی و نسبت- طول به ضخامت $l/h = 15$ حساب می-گردد. یادآوری می-گردد که، عامل بدون بعد بسامد زاویه-ای تیر چندلایه به صورت زیر حساب می-گردد:

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega l^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_1}}
 \tag{۴۵}$$

این تیر، با بکار بردن ۱۶ جزء تحلیل می-شود. پاسخ-های جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۲ درج شده است. شایان ذکر است، در این جدول تکیه-گاه ساده با حرف S،

این تیر دارای تکیه-گاه-های ساده و نسبت ضخامت به طول برابر $l/h = 15$ می-باشد. با به کار بردن تعداد جزءهای متفاوت تیر مورد نظر تحلیل می-شود و بسامدهای طبیعی پنج مود اول آن بر حسب کیلو هرتز حساب می-گردد. نتیجه-ی تحلیل جزء پیشنهادی به همراه پاسخ سایر پژوهشگران در جدول ۱ درج شده است. یادآوری می-گردد که پاسخ-های چاندارشخارا و همکاران [۲] به صورت تحلیلی بر پایه برش مرتبه یکم می-باشد. هم-چنین یافته-های



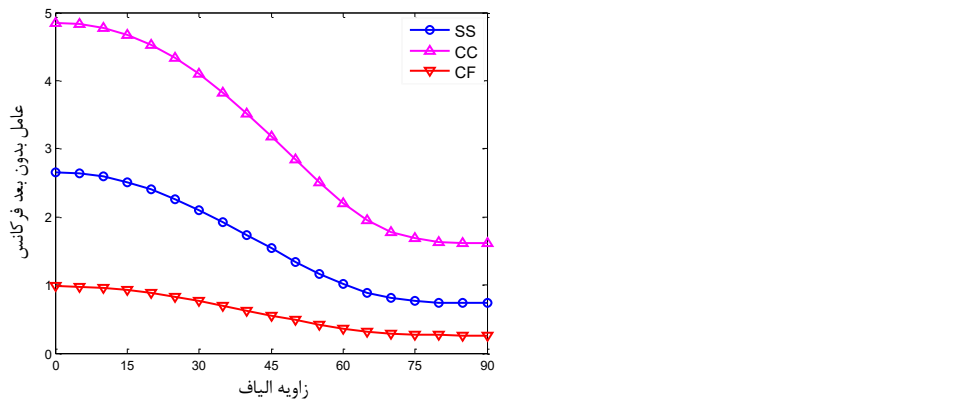
شکل ۲. حالت‌های تغییرشکلی پنج‌مود اول تیر یک لایه گرافن-اپوکسی با تکیه‌گاه‌های ساده

Fig. 2. First five mode shapes of the simply supported orthotropic beam made of graphene-epoxy

جدول ۲. بسامد زاویه‌های اصلی بدون بعد برای تیر چهار لایه با چیدمان $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$

Table 2. Non-dimensional fundamental frequency of four layered beam with $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$

شرط‌های تکیه‌گاهی	روش	زاویه θ°						
		۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
SS	نگوین و همکاران [۲۴]	۲/۶۵۶۳	۲/۵۱۰۸	۲/۱۰۳۳	۱/۵۳۶۷	۱/۰۱۲۱	۰/۷۶۰۸	۰/۷۳۱۷
	چاندارشخارا و همکاران [۲]	۲/۶۵۶۰	۲/۵۱۰۵	۲/۱۰۳۲	۱/۵۳۶۸	۱/۰۱۲۴	۰/۷۶۱۱	۰/۷۳۲۰
	جزء پیشنهادی	۲/۶۵۶۶	۲/۵۱۱۰	۲/۱۰۳۵	۱/۵۳۶۹	۱/۰۱۲۴	۰/۷۶۱۱	۰/۷۳۲۰
CC	نگوین و همکاران [۲۴]	۴/۹۱۱۶	۴/۷۱۷۳	۴/۱۳۰۷	۳/۱۹۷۳	۲/۲۰۲۹	۱/۶۸۲۵	۱/۶۲۰۵
	چاندارشخارا و همکاران [۲]	۴/۸۴۸۷	۴/۶۶۳۵	۴/۰۹۸۱	۳/۱۸۴۳	۲/۱۹۸۴	۱/۶۸۱۵	۱/۶۲۰۰
	جزء پیشنهادی	۴/۸۵۲۲	۴/۶۶۶۷	۴/۱۰۰۳	۳/۱۸۵۴	۲/۱۹۸۸	۱/۶۸۱۶	۱/۶۱۹۹
CF	نگوین و همکاران [۲۴]	۰/۹۸۳۲	۰/۹۲۵۹	۰/۷۶۸۳	۰/۵۵۵۳	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۲	۰/۲۶۱۸
	چاندارشخارا و همکاران [۲]	۰/۹۸۲۰	۰/۹۲۴۹	۰/۷۶۷۸	۰/۵۵۵۱	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۳	۰/۲۶۱۹
	جزء پیشنهادی	۰/۹۸۲۱	۰/۹۲۴۹	۰/۷۶۷۸	۰/۵۵۵۲	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۳	۰/۲۶۱۹



شکل ۳. اثر زاویه الیاف بر روی عامل بدون بعد فرکانس تیر چهار لایه با چیدمان $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$

Fig. 3. Effects of the fiber angle change on the nondimensional fundamental frequency of $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$ laminated beams with various boundary conditions

جدول ۳. بسامد زاویهای اصلی بدون بعد برای تیر سه لایه با چیدمان $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Table 3. Non-dimensional fundamental frequency of three layered beam with $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

روش	l	شرطهای تکیه‌گاهی			
		SS	SC	CC	CF
نگوین و همکاران [۲۵]	۵	۹/۲۰۶	-	۱۱/۶۰۱	۴/۲۳۰
مورتی و همکاران [۸]		۹/۲۰۷	۱۰/۲۳۸	۱۱/۶۰۲	۴/۲۳۰
وو و ته‌ای [۱۶]		۹/۲۰۵	-	-	-
خدیر و ردی [۳]		۹/۲۰۵	۹/۶۵۲	۱۰/۴۳۲	۴/۱۳۴
جزء پیشنهادی		۹/۲۱۶	۹/۶۶۴	۱۰/۴۴۷	۴/۱۳۵
نگوین و همکاران [۲۵]	۱۰	۱۳/۶۰۷	-	۱۹/۷۰۷	۵/۴۹۰
مورتی و همکاران [۸]		۱۳/۶۱۱	۱۶/۶۰۰	۱۹/۷۱۹	۵/۴۹۱
وو و ته‌ای [۱۶]		۱۳/۶۶۵	-	-	-
خدیر و ردی [۳]		۱۳/۶۷۰	۱۶/۳۳۵	۱۹/۰۵۱	۵/۴۷۹
جزء پیشنهادی		۱۳/۶۷۹	۱۶/۳۵۰	۱۹/۰۷۵	۵/۴۸۰
نگوین و همکاران [۲۵]	۵۰	۱۷/۴۴۹	-	۳۷/۶۲۹	۶/۲۶۲
وو و ته‌ای [۱۶]		۱۷/۴۵۶	-	-	-
جزء پیشنهادی		۱۷/۴۶۹	۲۶/۶۸۲	۳۷/۶۷۰	۶/۲۶۷

برای راحتی مقایسه پاسخ-ها، عامل بدون بعد بسامد زاویه-ای اصلی تیر چندلایه، به صورت زیر حساب می-شود:

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega l^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (47)$$

پاسخ-های جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۳ درج شده است. در این جدول پاسخ-های خدیر و ردی [۳] و نیز وو و ته‌ای [۱۶] بر پایه نگره برشی مرتبه یکم می-باشد. هم-چنین، پاسخ-های مرجع [۲۵] و [۸] بر پایه-نگره برشی مرتبه بالا به دست آمده است. بررسی این جدول نشان می-دهد که جزء پیشنهادی از دقت بالایی در تحلیل تیر با ضخامت-های مختلف و شرط-های گوناگون تکیه-گاهی برخوردار است. هم-چنین، مشاهده می-شود که پاسخ-های جزء پیشنهادی به نتایج خدیر و ردی [۳] که با شیوه تحلیلی به دست آمده است، بسیار نزدیک است.

۵-۲- آزمون عددی دوم (تحلیل کمناش)

به منظور سنجش دقت و کارایی جزء پیشنهادی در تحلیل کمناش تیرهای چندلایه، یک تیر سه-لایه متقارن با چیدمان متعامد

تکیه-گاه گیردار با حرف C و تکیه-گاه آزاد تیر با حرف F نشان داده شده است (به عنوان نمونه علامت SS بیان-گر تیر با هر دو تکیه-گاه ساده می-باشد). این جدول نشان می-دهد که جزء پیشنهادی در تحلیل تیرهای چندلایه با چیدمان زاویه-ای نیز از دقت بالایی برخوردار می-باشد. هم-چنین، مشاهده می-شود که پاسخ-های جزء پیشنهادی به نتایج مرجع [۲] که مبنای تحلیلی دارد بسیار نزدیک است. به منظور بهتر نشان دادن اثر زاویه الیاف بر روی بسامد طبیعی این تیر، تغییرات عامل بدون بعد فرکانس نسبت به زاویه الیاف برای شرط-های مختلف تکیه-گاهی در شکل ۳ نشان داده شده است.

در ادامه یک تیر سه-لایه متقارن با چیدمان متعامد لایه-ها- به صورت $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ و با شرایط مختلف تکیه-گاهی و نسبت-های طول به ضخامت $l/h = 5$ ، $l/h = 10$ و $l/h = 50$ تحلیل می-گردد و پاسخ جزء پیشنهادی با نتایج سایر پژوهشگران مقایسه می-شود. این تیر، با بکار بردن ۱۶ جزء پیشنهادی تحلیل می-شود. هم-چنین، مشخصات مواد برای هر لایه تیر به صورت زیر می-باشد:

$$\begin{aligned} E_1 &= 40E_2, & G_{12} &= G_{13} = 0.6E_2, \\ G_{23} &= 0.5E_2, & \nu_{12} &= 0.25 \end{aligned} \quad (46)$$

جدول ۴. عامل بدون بعد کمانش برای تیر سه لایه با چیدمان $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Table 4. Non-dimensional buckling load of three layered beam with $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

روش	l	شرط‌های تکیه‌گاهی			
		SS	SC	CC	CF
کایا [۲۲]	۵	۸/۵۸۵	۹/۴۹۲	۱۰/۹۷۱	-
مانتاری و کانالز [۲۰]		۸/۵۸۵	۱۰/۱۹۲	۱۱/۵۰۲	۴/۶۷۳
نگوین و همکاران [۲۴]		۸/۶۱۳	-	۱۱/۶۵۲	۴/۷۰۸
خدیر و ردی [۵]		۸/۶۰۶	۹/۴۱۲	۱۰/۸۰۲	۴/۷۴۷
جزء پیشنهادی		۸/۶۱۲	۹/۴۱۸	۱۰/۸۱۳	۴/۷۴۸
کایا [۲۲]	۱۰	۱۸/۸۸۵	۲۵/۸۲۸	۳۴/۳۴۵	-
مانتاری و کانالز [۲۰]		۱۸/۷۹۶	۲۷/۰۹۰	۳۴/۳۶۵	۶/۷۵۷
نگوین و همکاران [۲۴]		۱۸/۸۳۲	-	۳۴/۴۵۳	۶/۷۷۲
خدیر و ردی [۵]		۱۸/۹۸۹	۲۵/۹۴۰	۳۴/۴۲۶	۶/۷۹۷
جزء پیشنهادی		۱۹/۰۰۴	۲۵/۹۷۴	۳۴/۵۱۳	۶/۷۸۰
نگوین و همکاران [۲۴]	۵۰	۳۰/۹۰۶	-	۱۱۴/۳۹۸	۷/۸۸۶
جزء پیشنهادی		۳۰/۹۳۱	۶۱/۲۸۸	۱۱۴/۸۳۰	۷/۸۸۷

است. هم-چنین، مشاهده می-شود که پاسخ-های جزء پیشنهادی به نتایج خدیر و ردی [۵] که با شیوه تحلیلی به دست آمده است، بسیار نزدیک است.

۶- نتیجه-گیری

در این مقاله یک جزء کارآ و با دقت بالا برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه متقارن پیشنهاد شد. جزء پیشنهادی دارای دو گره و چهار درجه آزادی می-باشد. هم-چنین، رابطه سازی جزء بر پایه برش مرتبه یکم انجام شد. برای رابطه-سازی اجزای محدود، میدان جابه-جایی جزء از درجه-ی سه، میدان دوران آن از درجه-ی دو و کرنش برشی آن نیز ثابت اختیار گردید. با بهره جویی از تابع کارمایه-ی خمشی و برشی تیر و کمینه کردن آن کرنش برشی تیر حساب گردید. با یافتن دیگر عامل-های مجهول تابع میدان جابه-جایی و دوران جزء و هم-چنین به کار بردن کرنش برشی محاسبه شده، تابع-های درون-یاب جزء، به دست آمد. در ادامه با به کار بردن این تابع-های درون-یاب ماتریس-سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء پیشنهادی به صورت صریح به دست آمده است. در پایان برای نشان دادن کارآیی و دقت جزء در

لایه-ها- به صورت $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ و با شرایط مختلف تکیه-گاهی و نسبت-های طول به ضخامت $l/h = 5$ ، $l/h = 10$ و $l/h = 50$ تحلیل می-گردد و با یافته-های دیگر پژوهشگران مقایسه می-شود. شایان ذکر است در این حالت نیز برای تحلیل تیر، ۱۶ جزء به-کار می-رود. همچنین، مشخصات مواد برای هر لایه، در رابطه (۴۶) آمده است. برای راحتی مقایسه پاسخ-ها، عامل بدون بعد بار کمانش، به صورت زیر حساب می-شود:

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} l^2}{E_2 b h^3} \quad (48)$$

پاسخ-های جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۴ درج شده است. شایان ذکر است که، پاسخ-های خدیر و ردی [۵] بر پایه برش مرتبه یکم و با شیوه تحلیلی به دست آمده است. کایا [۲۲] نیز با استفاده از یک جزء ۵ گرهی درجه بالا بر پایه برش مرتبه یکم، بار کمانشی را بدست آورده است. پاسخ-های مانتاری و کانالز [۲۰] و همچنین، نگوین و همکاران [۲۴] نیز بر پایه-نگره برشی مرتبه بالا به دست آمده است. بررسی این جدول نشان می-دهد که جزء پیشنهادی از دقت بالایی در تحلیل کمانش تیر با ضخامت-های مختلف و شرط-های گوناگون تکیه-گاهی برخوردار

- International Journal of Mechanical Sciences, 47(11) (2005) 1740-1755.
- [10] M. Aydogdu, Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions, Journal of reinforced plastics and composites, 25(15) (2006) 1571-1583.
- [11] M. Aydogdu, Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, Composites Science and Technology, 66(10) (2006) 1248-1255.
- [12] A. Catapano, G. Giunta, S. Belouettar, E. Carrera, Static analysis of laminated beams via a unified formulation, Composite structures, 94(1) (2011) 75-83.
- [13] M. Lezgy-Nazargah, M. Shariyat, S. Beheshti-Aval, A refined high-order global-local theory for finite element bending and vibration analyses of laminated composite beams, Acta Mechanica, 217(3-4) (2011) 219-242.
- [14] M. Lezgy-Nazargah, S. Beheshti-Aval, M. Shariyat, A refined mixed global-local finite element model for bending analysis of multi-layered rectangular composite beams with small widths, Thin-Walled Structures, 49(2) (2011) 351-362.
- [15] R.A. Jafari-Talookolaei, M. Abedi, M.H. Kargarnovin, M.T. Ahmadian, An analytical approach for the free vibration analysis of generally laminated composite beams with shear effect and rotary inertia, International Journal of Mechanical Sciences, 65(1) (2012) 97-104.
- [16] T.P. Vo, H.-T. Thai, Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory, International Journal of Mechanical Sciences, 62(1) (2012) 67-76.
- [17] J. Li, Z. Wu, X. Kong, X. Li, W. Wu, Comparison of various shear deformation theories for free vibration of laminated composite beams with general lay-ups, Composite structures, 108 (2014) 767-778.
- [18] X. Wang, X. Zhu, P. Hu, Isogeometric finite element method for buckling analysis of generally laminated composite beams with different boundary conditions, International Journal of Mechanical Sciences, 104 (2015) 190-199.
- تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه، آزمون-های پرشماری با نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و شرط-های مرزی انجام شد. نتایج این آزمون-ها، دقت و کارایی بالای جزء پیشنهادی را در تحلیل ارتعاش و کمانش تیرهای چندلایه در حالت-های مختلف را به اثبات می-رسانند.
- مراجع**
- [1] Y. Ghugal, R. Shimpi, A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams, Journal of reinforced plastics and composites, 20(3) (2001) 255-272.
- [2] K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy, S. Roy, Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation, Composite Structures, 14(4) (1990) 269-279.
- [3] A. Khdeir, J. Reddy, Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, International Journal of Engineering Science, 32(12) (1994) 1971-1980.
- [4] K. Chandrashekhara, K.M. Bangera, Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element, Computers & structures, 43(4) (1992) 719-727.
- [5] A. Khdeir, J. Redd, Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, Composite Structures, 37(1) (1997) 1-3.
- [6] A. Chakraborty, D.R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan, Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities, Composite Structures, 55(1) (2002) 23-36.
- [7] W. Chen, C. Lv, Z. Bian, Free vibration analysis of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature, Composite Structures, 63(3-4) (2004) 417-425.
- [8] M. Murthy, D.R. Mahapatra, K. Badarinarayana, S. Gopalakrishnan, A refined higher order finite element for asymmetric composite beams, Composite Structures, 67(1) (2005) 27-35.
- [9] M. Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method,

- [25] N.-D. Nguyen, T.-K. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Ritz-Based Analytical Solutions for Bending, Buckling and Vibration Behavior of Laminated Composite Beams, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(11) (2018) 1850130.
- [26] S. Ghazanfari, S. Hamzehei-Javaran, A. Alesadi, S. Shojaee, Free vibration analysis of cross-ply laminated beam structures using refined beam theories and B-spline basis functions, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (2019) 1-9.
- [27] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature, *Composite Structures*, 171 (2017) 486-504.
- [28] A. Moallemi-Oreh, M. Karkon, Finite element formulation for stability and free vibration analysis of Timoshenko beam, *Advances in Acoustics and Vibration*, 2013 (2013).
- [29] M. Petyt, *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge university press, 2010.
- [30] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski, *The behavior of structures composed of composite materials*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [19] M. Filippi, A. Pagani, M. Petrolo, G. Colonna, E. Carrera, Static and free vibration analysis of laminated beams by refined theory based on Chebyshev polynomials, *Composite Structures*, 132 (2015) 1248-1259.
- [20] J. Mantari, F. Canales, Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalized boundary conditions, *Composite Structures*, 152 (2016) 306-315.
- [21] F. Canales, J. Mantari, Buckling and free vibration of laminated beams with arbitrary boundary conditions using a refined HSDT, *Composites Part B: Engineering*, 100 (2016) 136-145.
- [22] V. Kahya, Buckling analysis of laminated composite and sandwich beams by the finite element method, *Composites Part B: Engineering*, 91 (2016) 126-134.
- [23] M.Y. Osman, O.M.E. Suleiman, Free vibration analysis of laminated composite beams using finite element method, *International Journal of Engineering Research and Advanced Technology (IJERAT)*, 3(2) (2017) 5-22.
- [24] T.-K. Nguyen, N.-D. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams, *Composite Structures*, 160 (2017) 142-151.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Karkon, S. Ghouhestani, S.M. Saberizadeh, M. Yaghoobi, A new simple finite element method for free vibration and buckling analysis of symmetrically laminated beams, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(9) (2020) 2243-2254.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16111.6128](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16111.6128)

