

مدل‌سازی دینامیکی و کنترل مود لغزشی پمپ مارپیچ دوار

بهنام میری پور فرد^{۱*}، امیرحسام سجادی نیا^۲، فرشاد هاشمی نادر^۲

^۱دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
^۲گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۱۱-۱۵
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۱-۰۲
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۱-۲۵
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۱۳

کلمات کلیدی:

پمپ مارپیچ دوار
معادلات دینامیکی
کنترل مود لغزشی

خلاصه: انتقال سیالات دوفازی در صنعت اهمیت ویژه‌ای دارد. پمپ مارپیچ دوار یک شکل خاص از پمپ است که برای انتقال جریان دوفازی گاز-مایع و همچنین ایجاد جریان ضربانی قابل استفاده است. ساختار این پمپ با پمپ‌های مرسوم تفاوت دارد و هندسه آن در حین کار قابل تغییر است. در این مقاله، ضمن ساخت نسخه دوم این پمپ، برای اولین بار تحلیل دینامیکی انجام شده است و معادلات حاکم بر رفتار آن بر اساس متغیرهای کنترلی ورودی (سرعت دورانی و زاویه شیب پمپ) استخراج شده است. در تحلیل دینامیکی یک حجم کنترل چرخان منطبق بر لوله مارپیچ در نظر گرفته شده است. به منظور تعیین مقادیر ورودی‌های متناظر با خروجی‌های مطلوب، از منحنی‌های مشخصه بی بعد پمپ که در پژوهش قبلی منتشر شده است، استفاده می‌شود. سپس کنترل پمپ بر اساس دو متغیر ورودی انجام می‌شود تا میزان ارتفاع و نرخ جریان پمپ به مقدار مطلوب برسد. کنترل مود لغزشی بر روی این سیستم پیاده سازی شده است. نتایج کنترل پمپ برای مقدار دلخواه مطلوب ارتفاع و نرخ جریان به صورت نمودارهای متغیرهای کنترلی و سیگنال کنترلی نشان داده شده است. از ویژگی‌های جذاب این پمپ آن است که در دوره‌های پایین هم امکان انتقال سیال را دارد و بدون تغییر دادن دور هم می‌توان نقطه کارکرد آن (ارتفاع-نرخ جریان) را تغییر داد. نتایج مقاله شامل معادلات دینامیکی استخراج شده پمپ مارپیچ دوار است که در پژوهش‌های آتی می‌توان از آن استفاده نمود. همچنین نتایج حاکی از موفقیت روش مود لغزشی در کنترل پمپ است.

۱- مقدمه

پمپ‌ها به طور گسترده‌ای در تهویه مطبوع و انتقال سیال استفاده می‌شوند. به طور کلی دو رده بندی برای پمپ‌ها وجود دارد: پمپ‌های جابجایی و پمپ‌های توربوماشین. پمپ‌های جابجایی مانند اسکرو پمپ، برای حالتی که میزان گاز در مخلوط چند فازی خیلی زیاد باشد مناسب است و پمپ‌های توربوماشینی که با تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی جنبشی کار می‌کنند اساساً تنها برای حالت مایع به کار می‌روند و وجود گاز و یا حفره گاز باعث کاویتاسیون، ارتعاش و خرابی در آنها می‌گردد. پمپ‌های اشاره شده از دیرباز در صنعت ساخته شده و مورد استفاده واقع شده‌اند.

پمپ مارپیچ دوار^۱ که موضوع این مقاله است، ساختار متفاوتی دارد. این پمپ، ابتدا توسط محسنی و همکاران [۱] معرفی شده

1 Rotating helical pump

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: bmf@guilan.ac.ir

است. در این پژوهش، نسخه اول پمپ ساخته شده و مورد آزمایش تجربی قرار گرفته است و همچنین مشخصه‌های عملکردی بی بعد آن ارائه شده است. این پمپ قابلیت‌های ویژه‌ای دارد. علاوه بر توانایی انتقال محصولات چند فازی که در صنعت امری بسیار مهم است، می‌تواند جریان ضربانی^۲ ایجاد کند. جریان‌های ضربانی کاربردهایی در پزشکی دارند [۲] و در افزایش انتقال حرارت نیز موثرند [۳]. با وجود پیچیدگی‌های زیاد، در سیالات کارهای پژوهشی زیادی بر روی جریان دوفازی داخل لوله‌های مارپیچ انجام شده است [۴-۶]. اما از آنجا که تمرکز مقاله حاضر بر مدل‌سازی و کنترل پمپ مارپیچ دوار است، پژوهش‌های مذکور مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

اگرچه در اغلب کاربردها، پمپ‌ها تحت شرایط ثابتی کار می‌کنند، در برخی موارد لازم است نرخ جریان و ارتفاع خروجی پمپ‌ها کنترل

2 Pulsatile flow





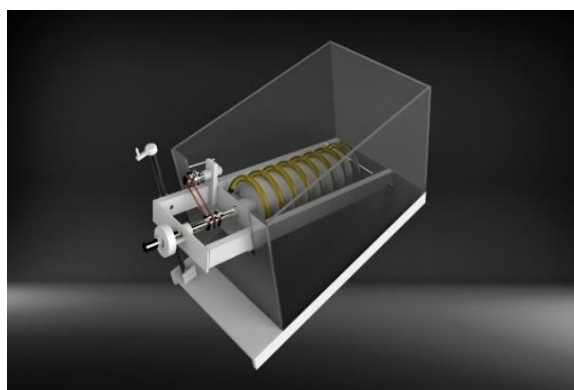
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱: (الف و ب و ج) سه نمای پمپ مارپیچ دوار ساخته شده و (د) مدل طراحی شده در سالیدورکس.

Fig. 1. (a), (b) and (c) are side, front and top view of the rotating helical pump and (d) is the model designed in SolidWorks

اساس دو ورودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار پمپ مارپیچ دوار استخراج شده است و با توجه به غیرخطی بودن آن از روش کنترل مود لغزشی استفاده خواهد شد. مشخصه‌های عملکردی بی بعد پمپ که با انجام آزمایش‌های تجربی به دست آمده است، در کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲- مواد و روش‌ها

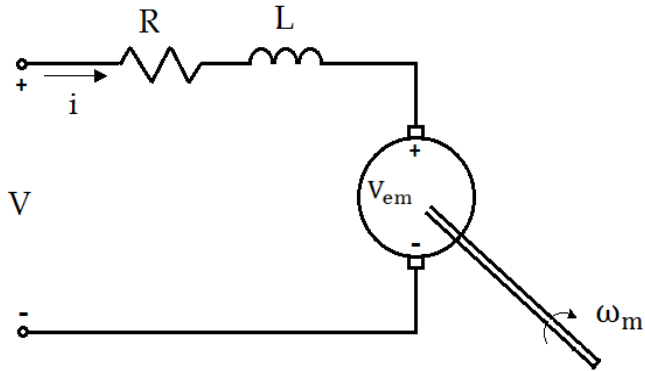
در این بخش پس از معرفی پمپ، معادلات دینامیکی آن با استفاده از قوانینی مانند کیرشهف، اویلر، نیوتون، انتقال رینولدز و با کمک روش‌های ریاضی استخراج می‌شود.

۱-۲ پمپ مارپیچ دوار

پمپ مورد بررسی در این مقاله همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است یک پمپ دورانی مارپیچ است که برای انتقال جریان‌های دوفازی گاز-مایع مورد استفاده قرار می‌گیرد. ساختمان اصلی این

گردد. به عنوان مثال، زمانی که سیال به (و یا از) یک تانک با ارتفاع متغیر پمپ می‌شود، با کنترل ارتفاع مواجه هستیم. روش‌های مختلفی برای کنترل پمپ استفاده می‌شود. برای پمپ‌هایی که ساختار هندسی ثابتی دارند معمولاً کنترل سرعت دورانی پمپ با روش تناسبی مشتقی انتگرالی انجام می‌شود [۷]. اگرچه روش مذکور مزایای فراوانی دارد و به راحتی پیاده سازی می‌شود، اما اشکالاتی هم دارد. به عنوان مثال، تنظیم پارامترهای آن مشکل است و اگر برخی پارامترهای عملکردی سیستم به صورت آنلاین تغییر کنند، کنترل تناسبی مشتقی انتگرالی قابلیت تطبیق پذیری ندارد [۸]. در نتیجه، روش‌هایی مانند کنترل بهینه [۹] و مود لغزشی [۱۰] برای کنترل پمپ‌ها مورد استفاده قرار گرفته است.

پمپ مارپیچ دوار دارای ساختار متغیری است و علاوه بر دور، زاویه شیب آن می‌تواند تغییر کند و عملکرد پمپ را متأثر سازد. نوآوری مقاله حاضر در این است که علاوه بر ساخت نسخه دوم، برای اولین بار مدل‌سازی دینامیکی و کنترل عملکرد پمپ مارپیچ دوار بر



شکل ۳: مدار حلقه بسته موتور مغناطیس دائم [۱۱]

Fig. 3. Circuit diagram of permanent magnet dc motor

۲-۲ استخراج معادلات دینامیکی پمپ مارپیچ دوار

معادلات دینامیکی شامل دو معادله دیفرانسیل جدا از هم است که یکی برحسب متغیر سرعت دورانی پمپ ω و مشتقات آن و دیگری برحسب متغیر زاویه شیب پمپ α و مشتقات آن است. هدف آن است که ارتباط دینامیکی بین ارتفاع H و نرخ جریان پمپ Q با دو متغیر ورودی قابل کنترل یعنی ω و α برقرار شود.

۲-۲-۱ معادله دیفرانسیل پمپ بر حسب متغیر کنترلی سرعت

دورانی پمپ ω

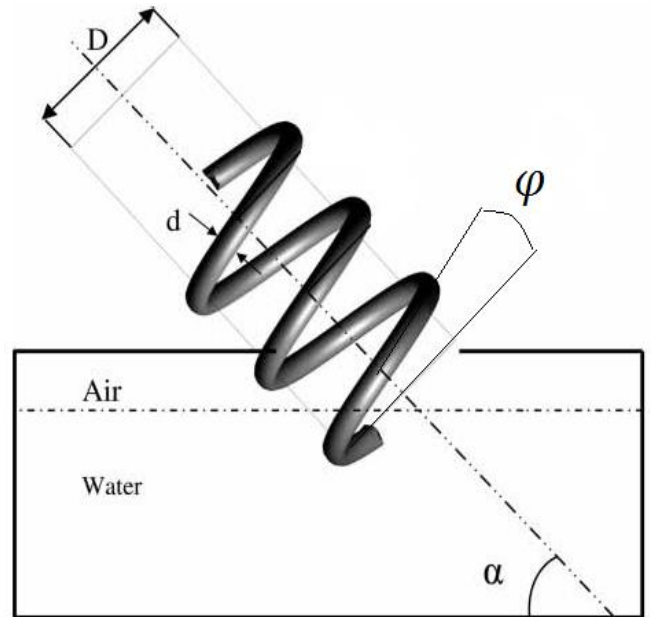
برای استخراج معادله دیفرانسیل پمپ برحسب متغیر کنترلی سرعت دورانی پمپ (ω) با توجه به اینکه استوانه پمپ توسط یک موتور DC مغناطیس دائم می‌چرخد می‌توان با توجه به شکل ۳ معادله کیرشهف حلقه بسته مدار موتور را به دست آورد (معادله (۱-الف) پیوست الف).

با توجه به شکل ۴ که شماتیک موتور و جعبه دنده و بار (پمپ) متصل به آن را نشان می‌دهد می‌توان معادلات دینامیکی طرف موتور و طرف بار را به کمک معادله اویلر نوشت که با نسبت تبدیل چرخ دنده به هم قابل تبدیل هستند. این معادلات (معادله (۲-الف)، (۳-الف) و (۴-الف)) در پیوست الف آمده‌اند.

در نهایت، برای موتور می‌توان معادله زیر را نوشت:

$$\dot{\omega} = \frac{N}{J_e} K_m i - \frac{1}{J_e} T_L \quad (1)$$

که در آن $\dot{\omega}$ شتاب زاویه‌ای شفت موتور، N ضریب تبدیل چرخ دنده J_e ممان اینرسی معادل بار و موتور، K_m ثابت القایی موتور و



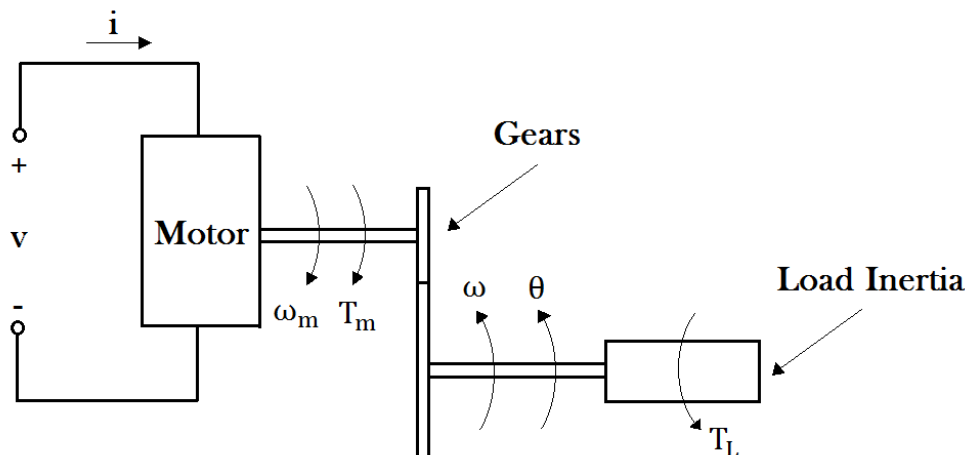
شکل ۲: زاویه شیب پمپ به همراه برخی از پارامترهای هندسی دیگر [۱]

Fig. 2. The inclination angle of the pump and other parameters

پمپ متشکل از یک استوانه توپر است که به دور آن یک لوله به صورت مارپیچ پیچیده شده است. همچنین از درون استوانه یک شفت عبور کرده که بر روی یاتاقان سوار می‌شود. این شفت توخالی است. یاتاقان‌ها بر روی شاسی قرار دارند. یک طرف شاسی بر روی اتصال پیچ انتقال قدرت و یک طرف دیگر آن به پایه زیرین لولا شده است. کل مجموعه در داخل یک مخزن حاوی سیال مانند آب قرار دارد.

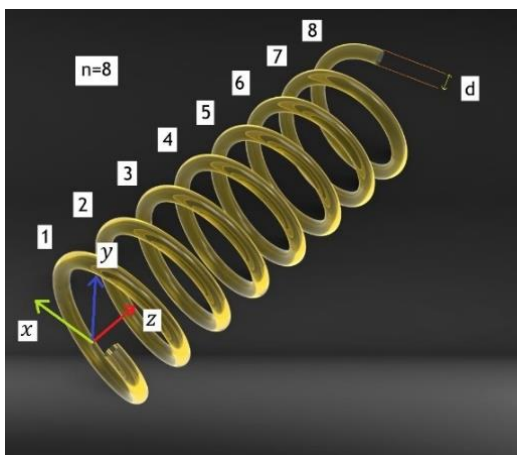
نحوه عملکرد این پمپ به طور خلاصه به این صورت است که استوانه توسط یک موتور DC مغناطیس دائم که به وسیله یک پولی و تسمه به شفت استوانه متصل است می‌چرخد و با چرخش آن لوله مارپیچ متصل به آن نیز به چرخش در می‌آید. انتهای پایینی لوله مارپیچ که ورودی سیال است با دوران پمپ به صورت متناوب از هوا و آب پر می‌شود. انتهای بالایی لوله مارپیچ به شفت توخالی استوانه متصل است. در نهایت مخلوط آب و هوا از لوله متصل به شفت خارج می‌شود.

شکل ۲ پارامترهای هندسی پمپ را از نمای جانبی نشان می‌دهد. بخش پایینی شاسی به پایه زیرین لولا شده است و بخش بالایی شاسی بر روی اتصال پیچ انتقال قدرت قرار دارد. می‌توان با چرخاندن پیچ توسط یک موتور DC مغناطیس دائم زاویه شیب شاسی یا همان زاویه شیب پمپ α در شکل ۲ را تغییر داد.



شکل ۴: شماتیک موتور و جعبه دنده و بار متصل به آن [۱۱]

Fig. 4. Schematic diagram of DC motor, gear and load



شکل ۵: حجم کنترل چرخان و چارچوب متصل به آن، n تعداد دورها و d قطر لوله است.

Fig. 5. Rotating control volume and its coordinate system. n is the number of rotations and d is pipe diameter.

برای این منظور حجم کنترل را مطابق شکل ۵ همان لوله مارپیچ و مرزهای آن را دقیقاً منطبق بر مرزهای لوله مارپیچ در نظر می‌گیریم. در این صورت سطح مقطع‌های دوسر لوله مارپیچ همان سطوح کنترل هستند.

شکل‌های ۵ و ۶ موقعیت چارچوب متصل به حجم کنترل چرخان را به ترتیب نسبت به خود حجم کنترل و استوانه پمپ نشان می‌دهد که با حروف کوچک مشخص می‌شود. همچنین شکل ۶ موقعیت چارچوب مرجع را نسبت به استوانه پمپ و حجم کنترل نشان می‌دهد که با حروف بزرگ مشخص می‌شود. مبدأ هر دو دستگاه بر روی شفت استوانه قرار دارد.

T_L گشتاور بار نامیده می‌شود.

با یک بار مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله (۱) داریم:

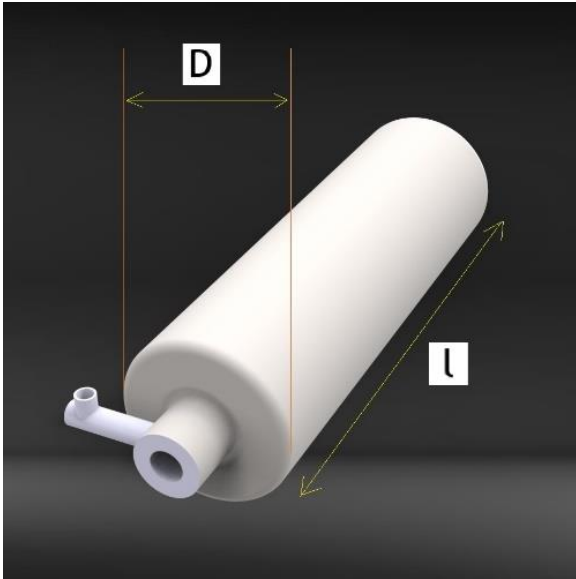
$$\ddot{\omega} = \frac{NK_m}{J_e} \frac{di}{dt} - \frac{1}{J_e} \dot{T}_L \quad (2)$$

به کمک معادلات پیوست الف و با انجام یک سری ساده‌سازی‌ها می‌توان به معادله دیفرانسیل زیر دست پیدا کرد:

$$\ddot{\omega} = \frac{NK_m V}{LJ_e} - \frac{N^2 K_m^2}{LJ_e} \omega - \frac{R}{L} \dot{\omega} - \frac{R}{LJ_e} T_L - \frac{1}{J_e} \dot{T}_L \quad (3)$$

در این معادله V ولتاژ اعمالی به موتور است که همان سیگنال کنترلی سیستم است و ω سرعت دورانی پمپ است که همان متغیر کنترلی است و T_L و \dot{T}_L به ترتیب گشتاور بار (پمپ) و مشتق آن است.

در معادله (۳) گشتاور بار T_L همان گشتاور ناشی از حرکت سیال درون لوله مارپیچ است و برای تعیین آن باید از معادله انتقال رینولدز برای حجم کنترل چرخان یا معادله پایستاری تکانه زاویه‌ای \vec{H} استفاده کرد. از طرفی چون در این مقاله هدف تجزیه و تحلیل دقیق جریان دوفازی داخل لوله نیست و اهداف کنترلی اهمیت بیشتری دارد و چون این معادله فقط برای محیط‌های پیوسته یا جریان‌های سیال تک فاز به کار می‌رود بایستی جریان دوفازی هوا-آب داخل لوله مارپیچ را به صورت یک جریان سیال تک فاز با چگالی میانگین ρ مدل‌سازی کرد. می‌توان فرض کرد چگالی این سیال فرضی میانگینی از چگالی‌های آب و هوا است.



شکل ۷: استوانه پمپ و مشخصات آن

Fig. 7. The cylinder of pump and its geometry

معقولی که برای اهداف صرفاً کنترلی ما در این مقاله کفایت می کند سرعت خطی سیال v داخل لوله را متأثر از سرعت دورانی پمپ ω دانست. بنابراین سرعت خطی سیال v و مشتق آن به صورت زیر بیان می شود:

$$v = \left(\frac{D+d}{2}\right)\omega \quad (6)$$

$$\dot{v} = \left(\frac{D+d}{2}\right)\dot{\omega} \quad (7)$$

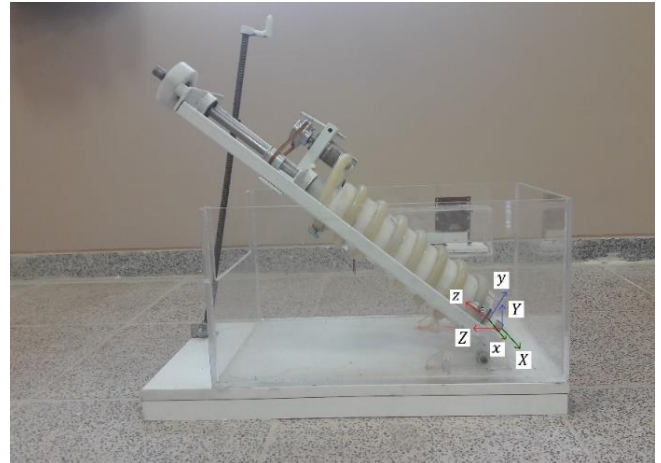
همچنین بردار مکان چارچوب چرخان نسبت به چارچوب مرجع برابر است با:

$$\vec{R} = m \sin \alpha \hat{J} + m \cos \alpha \hat{k} \quad (8)$$

که در آن پارامتر m طول شفت استوانه مابین نقاط مبدأ دو چارچوب است. شایان ذکر است که در معادله (۳) و هنگام کنترل سرعت دورانی پمپ ω می بایست زاویه شیب پمپ α ثابت بماند پس در معادله (۸) زاویه α تغییراتی نسبت به زمان ندارد. پس بردار شتاب کلی چارچوب چرخان نسبت به چارچوب مرجع به صورت زیر است:

$$\vec{a} = 0 \quad (9)$$

همچنین بردارهای سرعت زاویه ای چارچوب چرخان و مشتق آن نسبت به چارچوب مرجع به صورت زیر است:



شکل ۶: موقعیت چارچوب چرخان (xyz) و مرجع (XYZ) نسبت به پمپ
Fig. 6. The position of moving coordinate system (xyz) and inertial coordinate system (XYZ)

معادله پایستاری تکانه زاویه ای برای حجم کنترل چرخان پمپ مارپیچ دوار مطابق معادله (۵-الف) پیوست الف است. نحوه توزیع بردارهای موجود در معادله (۵-الف) به صورت زیر است:

$$\vec{r} = \left(\frac{D+d}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{l_c}z\right)\hat{i} + \left(\frac{D+d}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{l_c}z\right)\hat{j} + z\hat{k} \quad (4)$$

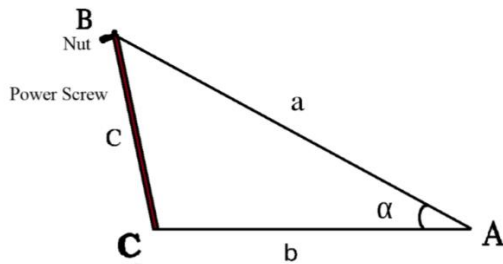
در معادله (۴) بردار \vec{r} بردار مکان سیال داخل لوله مارپیچ نسبت به چارچوب متصل به حجم کنترل چرخان است و پارامترهای D ، d ، n و l_c به ترتیب قطر استوانه پمپ، قطر لوله مارپیچ، تعداد دور حلقه های لوله مارپیچ و طول استوانه پمپ است که در شکل های ۵ و ۷ نشان داده شده اند. همچنین متغیر z ، متغیر طول استوانه پمپ است که در جهت مثبت محور z سنجیده می شود.

بردار \vec{v} به صورت زیر است:

$$\vec{v} = v \cos \varphi \cos\left(\frac{2\pi n}{l_c}z\right)\hat{i} - v \cos \varphi \sin\left(\frac{2\pi n}{l_c}z\right)\hat{j} + v \sin \varphi \hat{k} \quad (5)$$

در معادله (۵) بردار \vec{v} بردار سرعت خطی سیال داخل لوله مارپیچ نسبت به چارچوب متصل به حجم کنترل چرخان است و پارامترهای φ و v به ترتیب زاویه مارپیچ لوله مارپیچ و اندازه یا مقدار سرعت خطی سیال داخل لوله است که در شکل ۲ نشان داده شده است.

لازم به ذکر است که با صرف نظر از اثرات پیچیده کوریولیس و نیروهای مرکزگرا در حرکت دورانی که سبب ایجاد جریان های بسیار پیچیده ثانویه و اصطکاک در جریان می شوند می توان با دقت



شکل ۸: شماتیک ساده پمپ

Fig. 8. A simplified schematic figure of pump

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \sin \alpha \hat{j} - \dot{\theta} \cos \alpha \hat{k} \quad (10)$$

$$\vec{\omega} = -\ddot{\theta} \sin \alpha \hat{j} - \ddot{\theta} \cos \alpha \hat{k} \quad (11)$$

که در آن متغیر θ متغیر دورانی یا زاویه‌ای استوانه پمپ است. لازم به ذکر است که در انتگرال‌های معادله (۵-الف) می‌توان عبارت ρdv را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho dv = \rho A dl = \frac{\rho \pi d^2}{4} \sqrt{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 \left(\frac{2\pi n}{l_c}\right)^2 + 1} dz \quad (12)$$

پس در نتیجه انتگرال‌ها بر حسب متغیر طول استوانه z محاسبه می‌شوند. می‌توان معادله (۵-الف) را به صورت معادله (۶-الف) نوشت که در پیوست الف مقاله آمده است. حال می‌توان با جایگذاری معادلات (۴) تا (۱۲) در معادله (۶-الف) تک تک انتگرال‌ها را با روش‌های مرسوم انتگرال‌گیری محاسبه کرد. لازم به ذکر است که حاصل انتگرال‌ها در معادله (۶-الف) و در نتیجه گشتاور بار \vec{T}_L عبارتی برداری است و برای اهداف کنترلی در معادله دیفرانسیل (۳) باید در جهت محور شفت استوانه بیان شود.

با تصویر کردن مولفه‌های \vec{T}_L در معادله (۶-الف) بر روی محور شفت استوانه و با انجام ساده سازی‌ها می‌توان گشتاور بار T_L و مشتق آن را مطابق معادلات (۷-الف) تا (۱۰-الف) به دست آورد که در پیوست الف مقاله ذکر شده است.

در معادلات (۷-الف) و (۱۰-الف) پارامتر آلفا ثابت و مقدار آن در محدوده‌ی کارکردی پمپ خواهد بود. در معادله (۷-الف) با فاکتورگیری از ضرایب ω^2 و $\dot{\omega}$ و همچنین در معادله (۱۰-الف) با فاکتورگیری از ضرایب $\omega \dot{\omega}$ و $\ddot{\omega}$ داریم:

$$T_L = h \omega^2 + j \dot{\omega} \quad (13)$$

$$\dot{T}_L = m \omega \dot{\omega} + q \ddot{\omega} \quad (14)$$

حال با جایگذاری معادلات (۱۳) و (۱۴) در معادله کنترلی (۳) و با مرتب کردن معادله برحسب بالاترین مرتبه مشتق داریم:

$$\ddot{\omega} = \frac{NK_m}{L(q+J_e)} V - \frac{N^2 K_m^2}{L(q+J_e)} \omega - \frac{Rh}{L(q+J_e)} \omega^2 - \left(\frac{J_e}{q+J_e}\right) \left(\frac{R}{L} + \frac{Rj}{LJ_e}\right) \dot{\omega} - \frac{m}{(q+J_e)} \omega \dot{\omega} \quad (15)$$

معادله (۱۵) معادله دیفرانسیل پمپ مارپیچ دوار بر حسب متغیر کنترلی سرعت دورانی پمپ ω است.

۲-۲-۲ معادله دیفرانسیل پمپ بر حسب متغیر کنترلی زاویه

شیب پمپ α

در پمپ مارپیچ دوار زاویه شیب پمپ α به کمک پیچ انتقال قدرت که توسط موتور DC مغناطیس دائم می‌چرخد، تغییر می‌کند. در این مرحله، مشابه بخش قبل با نوشتن معادلات کیرششف حلقه بسته مدار موتور و همچنین معادلات نیوتون - اوپلر قبل و بعد از چرخنده و ادغام هر سه معادله با هم به معادله‌ای مشابه معادله (۳) دست پیدا می‌کنیم:

$$\ddot{\omega} = \frac{NK_m V}{LJ_e} - \frac{N^2 K_m^2}{LJ_e} \omega - \frac{R}{L} \dot{\omega} - \frac{R}{LJ_e} T_L - \frac{1}{J_e} \dot{T}_L \quad (16)$$

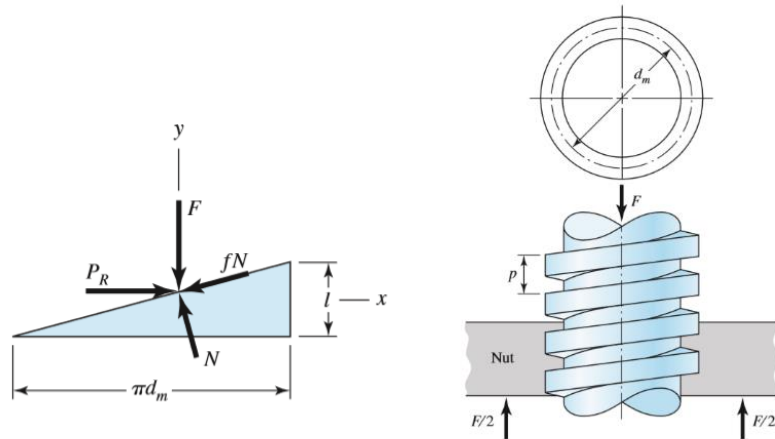
در معادله (۱۶) متغیر ω سرعت دورانی شفت پیچ انتقال قدرت، متغیر V ولتاژ اعمالی به موتور پیچ انتقال قدرت یا سیگنال کنترلی است، همچنین T_L گشتاور بار وارده به شفت پیچ انتقال قدرت است که همان گشتاور لازم برای غلبه بر اصطکاک بین پیچ و مهره و چرخاندن پیچ است. برای شروع کار ابتدا شماتیکی ساده از پمپ را مطابق شکل ۸ در نظر می‌گیریم.

در شکل ۸ ضلع AB شاسی پمپ با طول ثابت a ، ضلع AC صفحه زیرین پمپ با طول ثابت b ، ضلع BC پیچ انتقال قدرت با طول متغیر c است که زاویه α را تغییر می‌دهد. حال رابطه قانون کسینوس‌ها را برای مثلث شکل ۸ می‌نویسیم:

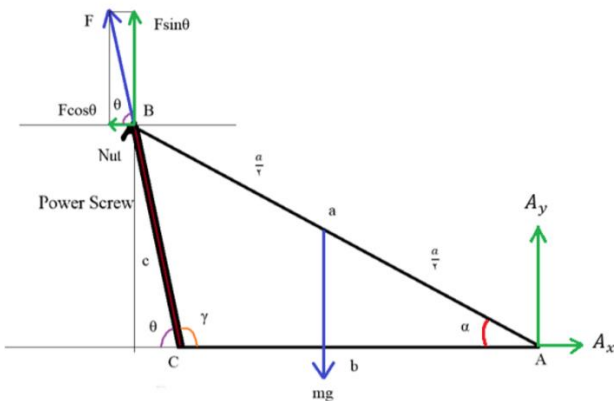
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad (17)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \quad (18)$$

با دو بار مشتق‌گیری نسبت به زمان از رابطه (۱۷) می‌توان روابط (۱۱-الف) و (۱۲-الف) را به دست آورد که در پیوست الف آمده‌اند. رابطه تغییرات طول c با سرعت دورانی پیچ انتقال قدرت ω و گام



شکل ۹: پیچ و مشخصات آن [۱۲]
Fig. 9. The parameters of screw



شکل ۱۰: نمودار پیکر آزاد شاسی پمپ و نیروهای وارد بر آن
Fig. 10. Free body diagram of pump and applied forces

پیچ p (شکل ۹) به صورت زیر است:

$$\dot{c} = \frac{p}{2\pi} \omega \quad (19)$$

با جایگذاری معادلات (۱۸) و (۱۹) در معادله (۱۱-الف) داریم:

$$\omega = \left(\frac{2\pi ab}{p} \right) \left(\frac{\sin \alpha \dot{\alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} \right) \quad (20)$$

با دو مرتبه مشتق گیری از معادله (۲۰) داریم:

$$\ddot{\omega} = \left(\frac{2\pi ab}{p} \right) \left(\frac{(\cos \alpha (\dot{\alpha})^2 + \sin \alpha \ddot{\alpha})c - \sin \alpha \dot{\alpha} \dot{c}}{c^2} \right) \quad (21)$$

که در آن پارامترهای c ، c^{\cdot} و \dot{c} مطابق معادلات (۱۷)، (۱۸)

و (۱۱-الف) است.

$$\ddot{\omega} = \left(\frac{2\pi ab}{p} \right) \left(\frac{s}{c^5} \right) \quad (22)$$

که در آن پارامتر s مطابق معادله (۱۳-الف) است که در پیوست

الف آمده است.

همچنین متغیر c^{\cdot} با توجه به معادلات (۱۷) و (۱۸) به صورت

معادله (۱۴-الف) پیوست الف تعریف می شود.

در این مرحله با جایگذاری معادله (۲۲) در (۱۶) داریم:

$$\left(\frac{2\pi ab}{p} \right) s = \frac{NK_m}{LJ_e} Vc^5 - \frac{N^2 K_m^2}{LJ_e} \omega c^5 - \frac{R}{L} \dot{\omega} c^5 - \frac{R}{LJ_e} T_L c^5 - \frac{1}{J_e} \dot{T}_L c^5 \quad (23)$$

که در آن پارامترهای s ، c^{\cdot} ، ω و $\dot{\omega}$ به ترتیب مطابق معادلات

(۱۳-الف)، (۱۴-الف)، (۲۰) و (۲۱) است.

در معادله (۲۳) T_L گشتاور لازم برای چرخاندن پیچ انتقال قدرت برای پمپ به صورت معادله (۱۵-الف) تعریف می شود که در پیوست الف مقاله آمده است. پارامترهای موجود در معادله (۱۵-الف) در شکل (۹) نشان داده شده اند.

برای محاسبه نیروی محوری F با رسم نمودار پیکر آزاد شاسی پمپ در شکل ۱۰ داریم:

در شکل ۱۰ نیروهای وارد بر شاسی پمپ شامل: نیروی وزن mg که شامل وزن شاسی و پمپ و سیال داخل آن است، نیروی عکس العمل تکیه گاه لولایی A ، نیروی F که همان نیروی عکس العمل وارد به شاسی از طرف اتصال پیچ انتقال قدرت است که در راستای محور پیچ انتقال قدرت است. این نیرو دقیقاً همان نیروی محوری F وارد بر پیچ قدرت ناشی از وزن سازه بر روی پیچ است که در معادله (۱۵-)

الف آمده است.

حال با جایگذاری معادلات (۱۸-الف) و (۱۹-الف) در معادله (۲۳)

و با انجام عملیات ریاضی داریم:

$$\left(\frac{2\pi ab}{p}\right) s(2ab \sin \alpha)^2 = \frac{NK_m}{LJ_e} V c^5 (2ab \sin \alpha)^2$$

$$-\frac{N^2 K_m^2}{LJ_e} \omega c^5 (2ab \sin \alpha)^2 - \frac{R}{L} \dot{\omega} c^5 (2ab \sin \alpha)^2 \quad (28)$$

$$-\frac{R}{LJ_e} T_L c^5 (2ab \sin \alpha)^2 - \frac{1}{J_e} \dot{T}_L c^5 (2ab \sin \alpha)^2$$

باید خاطر نشان کرد که تک تک ترمها و جملات معادله (۲۸)

عبارتهایی مثلثاتی برحسب متغیر زاویه شیب پمپ α و مشتقات اول و دوم و سوم و ترکیبات مختلف از آن است که به شدت غیرخطی هستند. فرم معادله (۲۸) برای اهداف کنترلی مناسب نیست بنابراین باید برحسب مشتقات متغیر α دسته بندی و مرتب شود تا بتوان آن را به فرم فضای حالت درآورد. معادلات مرتب و دسته بندی شده بر حسب مشتقات اول، دوم و سوم زاویه شیب پمپ α و ترکیبات مختلف از آنها به ترتیب مطابق معادلات (۲۰-ب) تا (۲۷-ب) است که در پیوست ب آمده است.

پس در نهایت معادله (۲۸) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$C(\alpha)\ddot{\alpha} = A(\alpha)\dot{\alpha} + B(\alpha)\ddot{\alpha} + D(\alpha)\dot{\alpha}^2 + E(\alpha)\dot{\alpha}^3 + F(\alpha)\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + G(\alpha) + VH(\alpha) \quad (29)$$

و در نهایت:

$$\ddot{\alpha} = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha} + \frac{B(\alpha)}{C(\alpha)}\ddot{\alpha} + \frac{D(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha}^2 + \frac{E(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha}^3 + \frac{F(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{G(\alpha)}{C(\alpha)} + \frac{H(\alpha)}{C(\alpha)}V \quad (30)$$

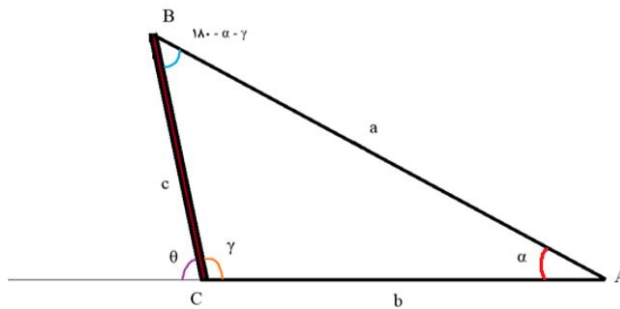
معادله (۳۰) معادله دیفرانسیل پمپ ماریپیچ دوار بر حسب متغیر

کنترلی زاویه شیب پمپ α است.

۳- کنترل پمپ ماریپیچ دوار

هدف از کنترل این است که وقتی ارتفاع و نرخ جریان مطلوب

مشخص می شود، ابتدا به کمک منحنی مشخصه های پمپ مقادیر ورودی متناظر و مطلوب (سرعت دورانی پمپ ω و زاویه شیب پمپ α) تعیین می شوند. سپس کنترلر با اجرای الگوریتم های کنترلی معرفی شده در این بخش و با ارسال سیگنال های کنترلی V تغییرات سرعت دورانی پمپ ω و زاویه شیب پمپ α را طوری کنترل و



شکل ۱۱: مثلث شاسی پمپ

Fig. 11. Triangle showing the chassis of the pumps

الف) ظاهر شده است.

با نوشتن معادله تعادل گشتاورها حول مفصل A و با توجه به این که جهت مثبت گشتاورها پادساعتگرد است، داریم:

$$F = \frac{mg \cos \alpha}{2 \sin(\theta - \alpha)} - \frac{I \ddot{\alpha}}{a \sin(\theta - \alpha)} \quad (24)$$

که در آن پارامتر I ممان اینرسی جرمی مجموعه شاسی پمپ و اجزای آن است. برای حذف متغیر θ از معادله (۲۴) دوباره مثلث شماتیک پمپ را به صورت شکل ۱۱ در نظر می گیریم. قانون سینوس ها برای مثلث شکل ۱۱ به صورت زیر است:

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin(180 - \alpha - \gamma)} \quad (25)$$

با بسط مخرج سمت راست تساوی و انجام یک رشته عملیات ریاضی می توان به معادله (۱۶-الف) دست پیدا کرد که در پیوست الف آمده است.

همچنین با توجه به شکل ۱۱ رابطه بین زوایای θ و γ به صورت معادله (۱۷-الف) است که در پیوست الف آمده است.

با ترکیب دو معادله (۱۶-الف) و (۱۷-الف) داریم:

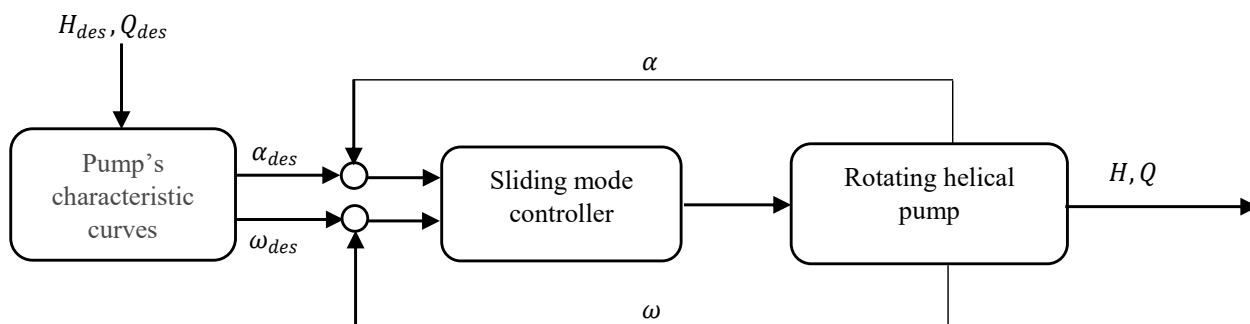
$$\cot \theta = \cot \alpha - \frac{b}{a} \csc \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

حال با بسط مخرج در معادله (۲۴) و جایگذاری معادله (۲۶) در

آن می توان رابطه (۲۷) را نوشت:

$$F = \left(\frac{amg \cos \alpha - 2I \ddot{\alpha}}{2ab \sin \alpha} \right) \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \quad (27)$$

با ترکیب معادلات (۱۵-الف) و (۲۷) می توان رابطه ای برای گشتاور T_L در معادله (۱۵-الف) و مشتق آن به دست آورد که به ترتیب مطابق با معادلات (۱۸-الف) و (۱۹-الف) است و در پیوست

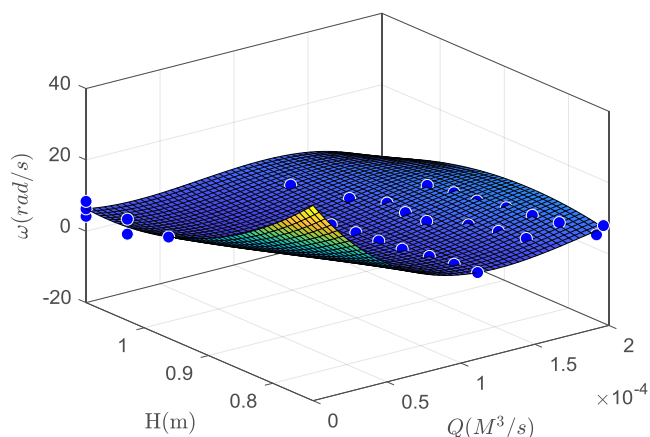


شکل ۱۲: بلوک دیاگرام الگوریتم کنترل
Fig. 12. Block diagram of the control

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 = \ddot{\omega} = & \frac{NK_m}{L(q+J_e)}V - \frac{N^2 K_m^2}{L(q+J_e)}X_1 - \\ & \frac{Rh}{L(q+J_e)}X_1^2 - \left(\frac{J_e}{q+J_e}\right)\left(\frac{R}{L} + \frac{Rj}{LJ_e}\right)X_2 \\ & - \frac{m}{(q+J_e)}X_1X_2 \end{aligned} \quad (32)$$

به دلیل ماهیت غیرخطی معادلات از روش کنترل غیرخطی مود لغزشی^۱ استفاده می‌شود [۱۳]. بلوک دیاگرام الگوریتم کنترلی مطابق شکل ۱۲ است:

لازم به ذکر است که در شکل ۱۲، مقدار مطلوب ω است که از معادله رویه برازش شده منحنی مشخصه پمپ حاصل می‌شود. منحنی مشخصه پمپ، نمودار ارتفاع H برحسب نرخ جریان Q به ازای چند سرعت دورانی مختلف پمپ ω است اما معادله رویه برازش شده به صورت یک تابع دو متغیره است که در آن سرعت دورانی پمپ ω برحسب ارتفاع H و نرخ جریان Q بیان می‌شود. شکل ۱۳ رویه برازش شده از منحنی مشخصه پمپ (مرجع [۱]) را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳: رویه برازش شده منحنی مشخصه سرعت دورانی پمپ ω
Fig. 13. Fitted curve on the characteristic curve of the pump for rotational speed

تنظیم می‌کند که مقادیر آنها به مقدار مطلوب نزدیک گردد و در نتیجه مقادیر مطلوب ارتفاع H و نرخ جریان Q حاصل شود.

۳-۱- کنترل سرعت دورانی پمپ ω

با در نظر گرفتن معادله سیستم در رابطه (۱۵):

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} = & \frac{NK_m}{L(q+J_e)}V - \frac{N^2 K_m^2}{L(q+J_e)}\omega - \frac{Rh}{L(q+J_e)}\omega^2 - \\ & \left(\frac{J_e}{q+J_e}\right)\left(\frac{R}{L} + \frac{Rj}{LJ_e}\right)\dot{\omega} - \frac{m}{(q+J_e)}\omega\dot{\omega} \end{aligned} \quad (15)$$

و با در نظر گرفتن متغیرهای حالت مطابق زیر:

$$\begin{aligned} X_1 = & \omega \\ X_2 = & \dot{\omega} \end{aligned} \quad (31)$$

فرم معادلات حالت سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{X}_1 = \dot{\omega} = X_2$$

۳-۲- کنترل زاویه شیب پمپ α

با در نظر گرفتن معادله سیستم در رابطه (۳۰):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha} + \frac{B(\alpha)}{C(\alpha)}\ddot{\alpha} + \frac{D(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha}^2 + \\ & \frac{E(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha}^3 + \frac{F(\alpha)}{C(\alpha)}\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{G(\alpha)}{C(\alpha)} + \frac{H(\alpha)}{C(\alpha)}V \end{aligned} \quad (30)$$

و با در نظر گرفتن متغیرهای حالت مطابق زیر:

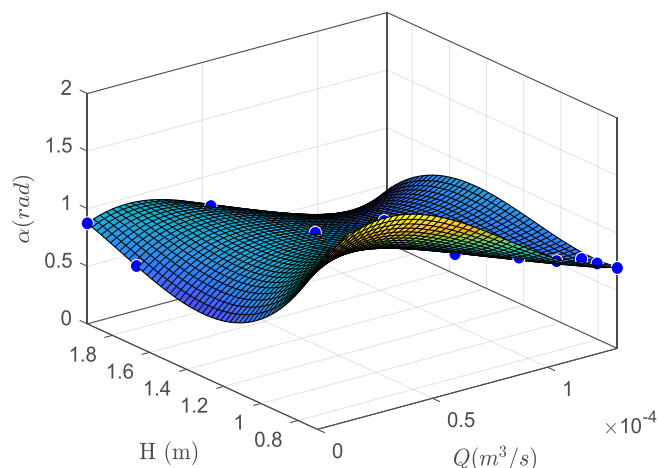
$$\begin{aligned} X_1 = & \alpha \\ X_2 = & \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (33)$$

1 Sliding mode

ساختمان هندسی و جرمی پمپ است مانند d, D, l, l_c, N ، آزمایشگاهی ساخته شده استخراج شده‌اند که تصویر نمونه واقعی ساخته شده را در شکل‌های ۱ و ۶ و مدل سالیدورک طراحی شده آن را در شکل‌های ۱، ۵ و ۷ مقاله می‌توان مشاهده کرد، پارامتر g شتاب گرانش است که مقداری ثابت است، پارامتر ρ همانطور که در متن مقاله اشاره شده چگالی میانگین آب و هوا است که چگالی آب 1000 و چگالی هوا 1 کیلوگرم بر متر مکعب است. پارامتر f ضریب اصطکاک بین پیچ و مهره است که با توجه به نوع مهره و پیچ استفاده شده در نمونه ساخته شده و با استفاده از جداول طراحی پیچ می‌توان با ضریب اطمینان کافی مقدار بیشتری را برای آن انتخاب کرد، مقادیر H و Q مقادیر دلخواه مطلوب است که در حدود مجاز ذکر شده در مقاله قرار دارد و این حدود با آزمایش بر روی نمونه آزمایشگاهی استخراج شده است، مقادیر I و J_e به ترتیب ممان اینرسی جرمی شاسی و پمپ و اجزای آن و ممان اینرسی معادل بار و موتور است که به کمک فرمولهای ممان اینرسی و از روی داده‌های هندسی و جرمی سیستم محاسبه شده‌اند و در انتها مقادیر R, L و K_m داده‌های الکتریکی موتور است که به طور آزمایشی و از روی داده‌های مقادیر ولتاژ و جریان موتور که با ولت متر و آمپر متر اندازه گیری شده‌اند به دست آمده است

در شکل ۱۵ تغییرات سرعت زاویه‌ای و مشتق آن با گذشت زمان نشان داده شده است. شکل ۱۵ نشان می‌دهد که متغیر کنترلی به مقدار مطلوب رسیده و همچنین مشتق آن که بیانگر تغییرات سرعت دورانی است به صفر رسیده است. در واقع، در حالت پایا سرعت دورانی تغییر نمی‌کند. در شکل ۱۶ مقدار سیگنال کنترلی در شروع کار نسبت به حالت پایا بیشتر است که نشانگر این است که برای شروع به کار پمپ، موتور جریان کشی بالایی دارد و به تبع ولتاژ بالایی را می‌طلبد. سپس در حالت پایا مقدار ولتاژ به مقدار ثابت می‌رسد که این دقیقاً بیانگر این است که کنترلر مقدار سرعت دورانی پمپ ω را در مقدار ثابت و مشخصی نگه داشته است.

در شکل ۱۷ متغیر حالت زاویه شیب پمپ (α) ترسیم شده است. شکل ۱۷ نشان می‌دهد که مقادیر متغیر کنترلی به مقدار مطلوب رسیده و همچنین مشتقات آن که بیانگر تغییرات زاویه شیب پمپ است به صفر رسیده‌اند چون در حالت پایا زاویه شیب پمپ



شکل ۱۴: رویه برازش شده منحنی مشخصه زاویه شیب پمپ α
Fig. 14. Fitted curve on the characteristic curve of the pump for inclination angle

$$X_3 = \ddot{\alpha}$$

فرم معادلات حالت سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \dot{\alpha} = X_2 \\ \dot{X}_2 &= \ddot{\alpha} = X_3 \\ \dot{X}_3 &= \dddot{\alpha} = \frac{A(X_1)}{C(X_1)} X_2 + \frac{B(X_1)}{C(X_1)} X_3 + \\ &\frac{D(X_1)}{C(X_1)} X_2^2 + \frac{E(X_1)}{C(X_1)} X_2^3 + \frac{F(X_1)}{C(X_1)} X_2 X_3 + \\ &\frac{G(X_1)}{C(X_1)} + \frac{H(X_1)}{C(X_1)} V \end{aligned} \quad (34)$$

در شکل ۱۲، مقدار مطلوب متغیر α است که از معادله رویه برازش شده منحنی مشخصه پمپ حاصل می‌شود. شکل ۱۴ رویه برازش شده از منحنی مشخصه پمپ (مرجع [۱]) را نشان می‌دهد.

۴- نتایج

مقادیر عددی پارامترهای شبیه سازی در جدول ۱ نشان داده شده است. ذکر این نکته ضروری است که همانند همه پمپ‌ها، مقادیر ارتفاع (H) و نرخ جریان (Q) کراندار است. این حدود به صورت زیر است:

$$0 < Q < 0.2 \text{ lit/s}$$

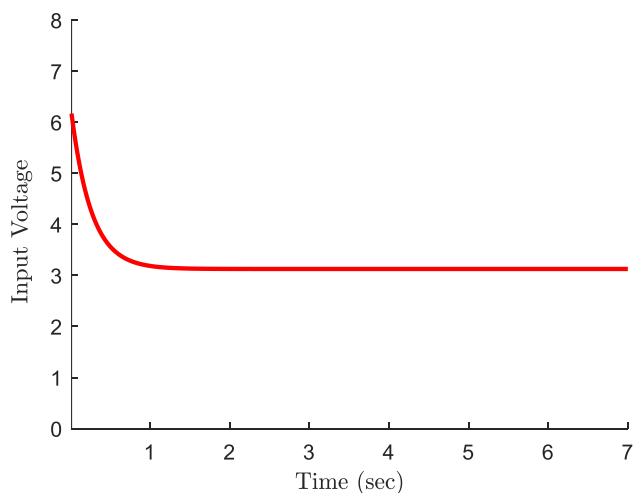
$$60 < H < 200 \text{ cm}$$

لازم به توضیح است در جدول ۱ پارامترهایی که مربوط به

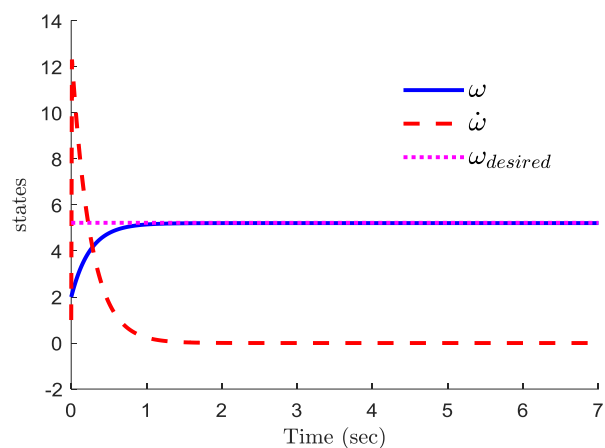
جدول ۱: مقادیر عددی پارامترهای مدل ساخته شده که در کنترل استفاده شده است.

Table 1. The numerical values of the model parameters that have been used in the control.

مقدار	واحد	کمیت	مقدار	واحد	کمیت
۸		n تعداد دور حلقه‌های لوله	۰/۰۵	H	L اندوکتانس سلف موتور
$\pi/۱۲$	رادیان	φ زاویه مارپیچ لوله	۲	Ω	R مقاومت الکتریکی موتور
۱	m	H ارتفاع	۰/۰۵	V.s	K_m ثابت القایی موتور
۰/۰۰۰۱	m ³ /s	Q نرخ جریان	۰/۱۳۵۲	kg.m ²	J_e ممان اینرسی معادل بار و موتور
۰/۰۰۱	m	p گام پیچ	۱۲		N ضریب تبدیل چرخ دنده
۴	kg	m جرم پمپ	۵۰/۰۵	kg/m ³	ρ چگالی سیال معادل
۹/۸۰۶	m/s ²	g شتاب گرانش	۰/۰۲	m	d_m قطر میانگین پیچ
۰/۷	m	a طول ثابت	۰/۰۲	kg.m ²	I ممان اینرسی جرمی پمپ
۰/۵	m	b طول ثابت	۰/۵	m	l_c طول استوانه پمپ
۰/۴		f ضریب اصطکاک بین پیچ و مهره	۰/۰۰۳	m	l طول رزوه پیچ
$\pi/۲$	رادیان	α زاویه شیب پمپ (برای معادله (۳۲))	۰/۱	m	D قطر استوانه پمپ
			۰/۰۱	m	d قطر لوله مارپیچ

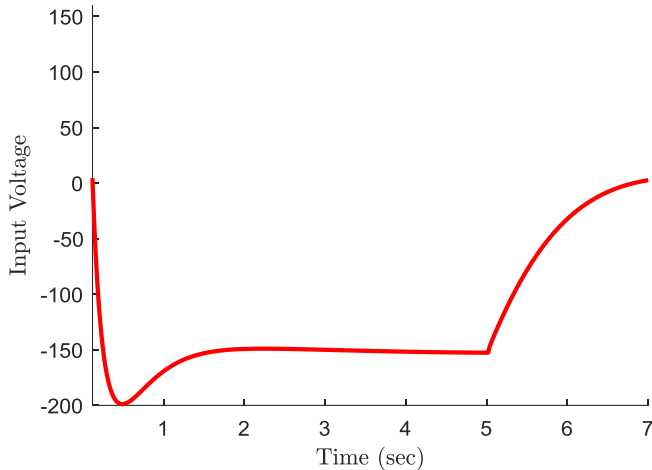


شکل ۱۶: سیگنال کنترلی ولتاژ برای کنترل ω
Fig. 16. Control effort (Voltage) for rotational speed



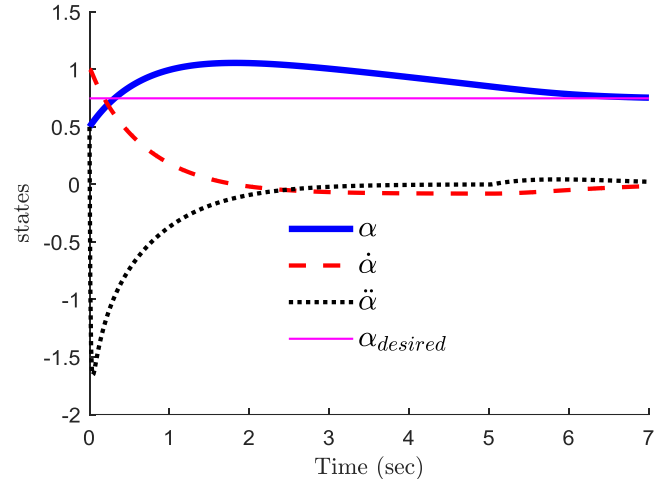
شکل ۱۵: مقادیر متغیر کنترلی ω و مشتقات آن به همراه مقدار مطلوب ω بر حسب رادیان بر ثانیه

Fig. 15. The variation of rotational speed (rad/sec) with applying sliding mode controller



شکل ۱۸: سیگنال کنترلی ولتاژ برای متغیر کنترلی α

Fig. 18. Control effort (Voltage) for inclination angle



شکل ۱۷: مقادیر متغیر کنترلی α و مشتقات آن به همراه مقدار مطلوب

Fig. 17. The variation of inclination angle (rad) with applying sliding mode controller

نهایت، یک کنترل کننده مود لغزشی برای پمپ طراحی شده است که می‌تواند دور و شیب پمپ را برای رسیدن به ارتفاع و نرخ جریان مطلوب تنظیم کند. نتایج نشان می‌دهد که کنترل کننده اعمال شده به خوبی توانسته است سیستم را کنترل کند و متغیرهای حالت سیستم را به مقدار مطلوب برساند.

پیوست الف: معادلات موتور و پمپ

معادله کیرشهف حلقه بسته مدار موتور (شکل ۳)، به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۱]

$$L \frac{di}{dt} = V - Ri - K_m \omega_m \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن L ، i ، R ، K_m ، ω_m و V به ترتیب اندوکتانس سلف موتور، جریان الکتریکی موتور، مقاومت الکتریکی موتور، ثابت القایی موتور، سرعت دورانی شفت موتور و ولتاژ الکتریکی اعمالی به موتور یا همان سیگنال کنترلی است. معادله نیوتون - اوپلر طرف موتور (قبل از عبور از چرخ دنده) به صورت زیر است [۱۱]:

$$T_e = K_m i - J_m \dot{\omega}_m \quad (\text{الف-۲})$$

که در آن J_m ممان اینرسی موتور و T_e گشتاور انتقالی از موتور به بار است. معادله نیوتون - اوپلر طرف بار (بعد از عبور از چرخ دنده) به صورت زیر است [۱۱]:

$$J \dot{\omega} = NT_e - T_L \quad (\text{الف-۳})$$

تغییر نمی‌کند. در شکل ۱۸ مقدار سیگنال کنترلی در لحظه‌های اولیه جهشی زیاد دارد و با گذشت زمان در حالت پایا مقدار آن کاهش یافته و به صفر رسیده است. صفر شدن آن به این دلیل است که وقتی مقدار متغیر کنترلی زاویه شیب پمپ α به مقدار مطلوب می‌رسد نیازی به چرخش موتور نیست و موتور خاموش می‌شود. جهش زیاد سیگنال کنترلی در لحظات اولیه نیز به این دلیل است که مشخصات موتور مورد استفاده در پیچ انتقال قدرت دقیقاً همان موتور مورد استفاده برای چرخش استوانه پمپ است و چون چرخیدن پیچ قدرت با توجه به بار وارده بر آن و اصطکاک مابین پیچ و مهره بسیار سخت‌تر از پمپ است بنابراین نیاز به ولتاژ بیشتری برای راه اندازی دارد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله برای اولین بار معادلات دینامیکی پمپ مارپیچ دوار استخراج شده است. یک حجم کنترل چرخان برای به دست آوردن معادلات استفاده شده است. استخراج این معادلات با در نظر گرفتن بخش الکتریکی انجام شده است. همچنین در این مقاله و در ادامه پژوهش [۱] بر اساس منحنی‌های مشخصه تجربی پمپ، رویه‌های برازش شده‌ای به دست آمده است. به کمک این رویه‌ها می‌توان دور پمپ و زاویه شیب لازم برای داشتن یک نقطه کار مطلوب (ارتفاع و نرخ جریان مشخص) را تعیین کرد. تمامی پارامترهای استفاده شده در کنترل بر اساس مدل ساخته شده مقدار دهی شده‌اند. در

$$\left(\frac{D+d}{2}\right) = c \quad (\text{الف-۸})$$

$$\sqrt{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{l_c}\right)^2} + 1 = e \quad (\text{الف-۹})$$

با مشتق گیری از معادله (الف-۷) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{T}_L = & \left(-\frac{\rho l_c \pi d^2}{4} c^2 e (\cos \alpha)^2 \dot{\omega}\right) + \left(-\frac{\rho l_c^2 d^2}{4n} c e \sin \alpha (\cos \alpha)^2 \omega \dot{\omega}\right) + \\ & \left(-\frac{\rho l_c \pi d^2}{4} c^2 e \cos \varphi \cos \alpha \dot{\omega}\right) + \left(-\frac{\rho l_c^3 \pi d^2}{12} e (\sin \alpha)^2 \ddot{\omega}\right) + \\ & \left(-\frac{\rho l_c \pi d^2}{8} c^2 e (\sin \alpha)^2 \dot{\omega}\right) + \left(\frac{\rho l_c^2 d^2}{4n} c e \sin \alpha \omega \dot{\omega}\right) + \\ & \left(-\frac{\rho l_c^2 d^2}{4n} c e (\sin \alpha)^3 \omega \dot{\omega}\right) + \left(-\frac{\rho l_c^2 \pi d^2}{2} c e \sin \varphi (\sin \alpha)^2 \omega \dot{\omega}\right) + \\ & \left(\frac{\rho l_c^2 d^2}{2n} c e \sin \alpha \cos \varphi \cos \alpha \omega \dot{\omega}\right) + \left(\frac{\rho l_c \pi d^2}{2} c^2 \sin \alpha \cos \varphi \omega \dot{\omega}\right) \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۰})$$

با دو بار مشتق گیری نسبت به زمان از رابطه (۱۷) می توان روابط (الف-۱۱) و (الف-۱۲) را به دست آورد.

$$\dot{c} = ab \frac{\sin \alpha \dot{\alpha}}{c} \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$\ddot{c} = ab \frac{\cos \alpha (\dot{\alpha})^2 c + \sin \alpha \ddot{\alpha} c - \sin \alpha \dot{\alpha} \dot{c}}{c^2} \quad (\text{الف-۱۲})$$

پارامتر مطابق رابطه زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} s = & \left[\frac{(-\sin \alpha (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) - 3ab \sin \alpha \cos \alpha)}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) + 3a^2 b^2 (\sin \alpha)^3} \right] (\dot{\alpha})^3 \\ & + \sin \alpha (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^2 \ddot{\alpha} \\ & + (3 \cos \alpha (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) - \\ & 3ab (\sin \alpha)^2) (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۳})$$

متغیر c^5 با توجه به معادلات (۱۷) و (۱۸) به صورت زیر تعریف می شود:

$$c^5 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^2 \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)} \quad (\text{الف-۱۴})$$

در معادله (۲۳) T_L گشتاور لازم برای چرخاندن پیچ انتقال قدرت برای پمپ به صورت معادله (الف-۱۵) تعریف می شود [۱۲]. پارامترهای موجود در معادله (الف-۱۵) در شکل (۹) نشان داده شده اند.

$$T_L = \frac{F d_m}{2} \left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp f l} \right) \quad (\text{الف-۱۵})$$

که در آن d_m قطر میانگین پیچ، f ضریب اصطکاک بین پیچ

که در آن J ممان اینرسی بار و گشتاور T_L گشتاور بار نامیده می شود.

با توجه به اینکه شفت موتور و شفت استوانه پمپ با چرخ دنده به هم متصل اند، داریم [۱۱]:

$$\omega_m = N \omega \quad (\text{الف-۴})$$

که در آن ω سرعت دورانی پمپ و N ضریب تبدیل چرخ دنده است.

معادله پایستاری تکانه زاویه ای برای حجم کنترل چرخان پمپ ماریچ دوار مطابق معادله (الف-۵) است [۱۴].

$$\begin{aligned} \vec{H} = & \vec{T}_L - \int_{cv} \vec{r} \times \vec{a} \rho dv - \\ & \int_{cv} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \rho dv - \int_{cv} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \rho dv \end{aligned} \quad (\text{الف-۵})$$

$$\begin{aligned} - \int_{cv} 2\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) \rho dv = \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \vec{r} \times \vec{v} \rho dv + \int_{cs} \rho (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{dA} \end{aligned}$$

در معادله (الف-۵) پارامتر ρ همان چگالی معادل سیال داخل لوله ماریچ است که به صورت چگالی میانگین آب و هوا بیان می شود.

می توان معادله (الف-۵) را به صورت معادله (الف-۶) نوشت

$$\begin{aligned} \vec{T}_L = & \int_{cv} \vec{r} \times \vec{a} \rho dv + \int_{cv} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \rho dv + \\ & \int_{cv} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \rho dv + \int_{cv} 2\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) \rho dv + \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \vec{r} \times \vec{v} \rho dv + \int_{cs} \rho (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{dA} \end{aligned} \quad (\text{الف-۶})$$

می توان گشتاور بار T_L و مشتق آن را مطابق معادلات (الف-۷) تا (الف-۱۰) به دست آورد.

$$\begin{aligned} T_L = & \left(-\frac{\rho l_c \pi d^2}{4} c^2 e (\cos \alpha)^2 \dot{\omega}\right) + \left(-\frac{\rho l_c^2 d^2}{8n} c e \sin \alpha (\cos \alpha)^2 \omega^2\right) + \\ & \left(-\frac{\rho l_c \pi d^2}{4} c^2 e \cos \varphi \cos \alpha \dot{\omega}\right) + \left(-\frac{\rho l_c^3 \pi d^2}{12} e (\sin \alpha)^2 \dot{\omega}\right) \\ & + \left(-\frac{\rho l_c \pi d^2}{8} c^2 e (\sin \alpha)^2 \dot{\omega}\right) + \left(\frac{\rho l_c^2 d^2}{8n} c e \sin \alpha \omega^2\right) + \\ & \left(-\frac{\rho l_c^2 d^2}{8n} c e (\sin \alpha)^3 \omega^2\right) + \left(-\frac{\rho l_c^2 \pi d^2}{4} c e \sin \varphi (\sin \alpha)^2 \omega^2\right) \\ & + \left(\frac{\rho l_c^2 d^2}{4n} c e \sin \alpha \cos \varphi \cos \alpha \omega^2\right) + \left(\frac{\rho l_c \pi d^2}{4} c^2 \sin \alpha \cos \varphi \omega^2\right) \end{aligned} \quad (\text{الف-۷})$$

در معادله (الف-۷) پارامترهای c و e به صورت زیر است:

$$B(\alpha)\ddot{\alpha}, B(\alpha) = -\frac{R}{L}\left(\frac{2\pi ab}{p}\right)\sin\alpha$$

$$(2ab\sin\alpha)^2(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^2$$

$$+\frac{2Rd_m}{LJ_e}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right)abI\sin\alpha$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^3 \quad (ب-۲۱)$$

۳- عبارت برحسب مشتق سوم $\ddot{\alpha}$: با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸) برابر $C(\alpha)\ddot{\alpha}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\alpha) = \left(\frac{2\pi ab}{p}\right)\sin\alpha(2ab\sin\alpha)^2$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^2$$

$$-\frac{2d_m}{J_e}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right)abI\sin\alpha$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^3 \quad (ب-۲۲)$$

۴- عبارت برحسب توان ۲ مشتق اول $\dot{\alpha}$: با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸) $D(\alpha)(\dot{\alpha})^2$

$$D(\alpha) = -\frac{R}{L}\left(\frac{2\pi ab}{p}\right)$$

$$(\cos\alpha(a^2+b^2-2ab\cos\alpha) -$$

$$ab(\sin\alpha)^2)(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)(2ab\sin\alpha)^2 \quad (ب-۲۳)$$

۵- عبارت برحسب توان ۳ مشتق اول $\dot{\alpha}$: با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸) $E(\alpha)(\dot{\alpha})^3$

$$E(\alpha) = -\left(\frac{2\pi ab}{p}\right)$$

$$((-\sin\alpha(a^2+b^2-2ab\cos\alpha) -$$

$$3ab\sin\alpha\cos\alpha)(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)$$

$$+3a^2b^2(\sin\alpha)^3)(2ab\sin\alpha)^2 \quad (ب-۲۴)$$

۶- عبارت برحسب مشتق اول ضرب در مشتق دوم $\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$: با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸) $F(\alpha)\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$:

$$F(\alpha) = -\left(\frac{2\pi ab}{p}\right)$$

$$(3\cos\alpha(a^2+b^2-2ab\cos\alpha) -$$

$$3ab(\sin\alpha)^2)(2ab\sin\alpha)^2$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)$$

$$-\frac{2d_m}{J_e}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right)abI\cos\alpha$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^3 \quad (ب-۲۵)$$

و مهره، l طول رزوه پیچ و F نیروی محوری وارد بر پیچ که در راستای محور طولی پیچ است. این پارامترها در شکل (۹) نشان داده شده‌اند. وجود دو علامت نشانگر حالت‌های بالا رفتن بار (افزایش زاویه α) و پایین آمدن بار (کاهش زاویه α) است.

$$\cot\gamma = \frac{b}{a}\csc\alpha - \cot\alpha \quad (الف-۱۶)$$

با توجه به شکل (۱۱) رابطه بین زوایای γ و θ به صورت معادله (۱۷-الف) است:

$$\gamma = 180 - \theta \quad (الف-۱۷)$$

با ترکیب معادلات (۱۵-الف) و (۲۷) می‌توان رابطه‌ای برای گشتاور T_L در معادله (۱۵-الف) و مشتق آن به دست آورد که به ترتیب مطابق با معادلات (۱۸-الف) و (۱۹-الف) است.

$$T_L = \frac{d_m}{2}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right)\left(\frac{amg\cos\alpha - 2I\ddot{\alpha}}{2ab\sin\alpha}\right)$$

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha} \quad (الف-۱۸)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۱۸-الف) داریم:

$$\dot{T}_L = \frac{d_m}{2}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right) \times$$

$$\left[\frac{(-2a^2bmg\dot{\alpha} - 4abI\sin\alpha\ddot{\alpha} + 4abI\cos\alpha\dot{\alpha}\ddot{\alpha})\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{(2ab\sin\alpha)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{amg\cos\alpha\dot{\alpha} - 2I\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} \right] \quad (الف-۱۹)$$

پیوست ب: معادلات مرتب و دسته بندی شده بر حسب مشتقات اول، دوم و سوم زاویه شیب پمپ α و ترکیبات مختلف آن

۱- عبارت برحسب مشتق اول $\dot{\alpha}$: با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸):

$$A(\alpha)\dot{\alpha}, A(\alpha) = -\frac{N^2 K_m^2}{LJ_e}\left(\frac{2\pi ab}{p}\right)$$

$$\sin\alpha(2ab\sin\alpha)^2(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^2$$

$$+\frac{d_m}{J_e}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right)a^2bmg(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^3 \quad (ب-۲۰)$$

$$-\frac{1}{J_e}\frac{d_m}{4}\left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl}\right)amg\cos\alpha(2ab\sin\alpha)^2$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^2$$

۲- عبارت برحسب مشتق دوم $\ddot{\alpha}$: با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸)

- [5] R. Sachdeva, Two phase flow through electrical submersible pumps, University of Tulsa, Tulsa, UK, 1988.
- [6] K. Minemura, T. Uchiyama, S. Shoda, K. Egashira, Prediction of air-water two-phase flow performance of a centrifugal pump based on one-dimensional twofluid model, Journal of Fluids Engineering, 120(2) (1998) 327-334.
- [7] Y. Shi, Pump Controller Design for Variable Primary Flow Configuration Systems, (2013).
- [8] K.-S. Tang, K.F. Man, G. Chen, S. Kwong, An optimal fuzzy PID controller, IEEE transactions on industrial electronics, 48(4) (2001) 757-765.
- [9] L. Liu, F. Wang, W. He, T. Li, W. Zhao, J. Ji, Optimal control of permanent-magnet motor for pulsatile axial blood pump applications, in: Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2011 International Conference on, IEEE, 2011, pp. 1-5.
- [10] M. Perron, J. de Lafontaine, Y. Desjardins, Sliding mode control of a servomotor-pump in a position control application, in: Electrical and Computer Engineering, 2005. Canadian Conference on, IEEE, 2005, pp. 1287-1291.
- [11] H. Taghirad, Introduction to modern control, 3 ed., Khajeh Nasireddin Toosi, Iran, 2014.
- [12] J.E. Shigley, Shigley's mechanical engineering design, Tata McGraw-Hill Education, 2011.
- [13] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi, Sliding mode control in electro-mechanical systems, CRC press, 2009.
- [14] E. Shirani, Turbomachines, Isfahan university of technology, Iran, 2013.

$$+ \frac{1}{J_e} \frac{d_m}{2} \left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl} \right) I$$

$$(2ab \sin \alpha)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^2$$

۷- عبارتی که فاقد مشتقات α : با فاکتورگیری از ضرایب جملات مربوطه در معادله (۲۸):

$$- \frac{R}{LJ_e} \frac{d_m}{2} \left(\frac{\pi f d_m \pm l}{\pi d_m \mp fl} \right) amg \cos \alpha$$

$$(2ab \sin \alpha) (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^3 = G(\alpha) \quad (ب-۲۶)$$

$$V \frac{NK_m}{LJ_e} (2ab \sin \alpha)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} = VH(\alpha) \quad (ب-۲۷)$$

مراجع

- [1] M. Mohseni, B. Miripour-Fard, A. Zajkani, Experimental Study of Pumping Performance of Rotating Helical Pump as a Gas—Liquid Transporter, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 224 (11) (2010) 2418-2422.
- [2] A. Tiwari, S.S. Chauhan, Effect of Varying Viscosity on Two-Fluid Model of Pulsatile Blood Flow through Porous Blood Vessels: A Comparative Study, Microvascular research, (2019).
- [3] J. Jo, J. Kim, S.J. Kim, Experimental investigations of heat transfer mechanisms of a pulsating heat pipe, Energy Conversion and Management, 181 (2019) 331-341.
- [4] O. Furuya, An analytical model for prediction of two phase (non-condensable) flow pump performance, Trans. ASME J. Fluids Eng, 107 (1985) 139-147.

