Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(8) (2020) 545-548
DOI: 10.22060/mej.2019.15404.6115

Free Vibration Analysis of Doubly Curved Composite Sandwich Panels with Variable Thickness

M. Livani*, K. Malekzadehfard

Department of Aerospace Engineering, Aeronautical University of Shahid Sattari, Tehran, Iran2 Space Research Institute, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this research, the free vibration analysis of doubly curved composite sandwich panels with variable thickness is studied using higher order sandwich panel theory. For the first time, considering different radii of curvatures of the face sheets in this paper, the thickness of the core is a function of plane coordinates (x,y). In addition, in the current model, the continuity conditions of the transverse shear stress, transverse normal stress and transverse normal stress gradient at the layer interfaces, as well as the conditions of zero transverse shear stresses on the upper and lower surfaces of the sandwich panel are satisfied, which is unique. The vertical displacement component of the face sheets is assumed as a quadratic one, while a cubic pattern is used for the in-plane displacement components of the face sheets and all displacement components of the core. The equations of motion and boundary conditions are derived using the Hamilton principle. The effects of some important parameters including composite layup sequences, length to width ratio, varying properties of the face sheets materials, Face sheet thicknesses ratio and varying materials of the face sheets were investigated. The results are validated by the latest results published in the literature.

Review History:

Received: 2018/12/08
Revised: 2019/04/22
Accepted: 2019/05/05
Available Online: 2019/05/10

Keywords:

Double curved sandwich panels
Higher order theory
Variable thickness
Free vibration
Hamilton principle

1- Introduction

Sandwich plates are widely used in many engineering applications such as aerospace, automobile, and shipbuilding because of their high strength and stiffness, low weight and durability. These plates are generally consisting of two stiff face sheets and a soft core, which are bonded together. Zhen and Wanji [1] applied a C0 type higher order equivalent single layer theory to investigate the bending analysis of composite sandwich plates subjected to the thermal and mechanical loadings. The continuity conditions of transverse shear stresses at interfaces and the conditions of zero transverse shear stresses on the upper and lower surfaces were considered. Biglari and Jafari [2] studied a three layer theory for the free vibration and bending analyses of open single curved sandwich structures. In their model, Donell’s theory was applied for the face sheets. Ghavanloo and Fazelzadeh [3] using Novozhilov’s linear shallow shell theory presented the free vibration analysis of simply supported doubly curved shallow shells. Livani et al. [4] studied the supersonic panel flutter of doubly curved composite sandwich panels with variable thicknesses under aerothermoelastic loading. In their model, the continuity conditions of the transverse shear stress, transverse normal stress, and transverse normal stress gradient at the layer interfaces, as well as the conditions of zero transverse shear stress on the upper and lower surfaces of the sandwich panel are satisfied.

In this paper, the free vibration analysis of doubly curved composite sandwich panels with variable thickness is studied using higher order sandwich panel theory.

2- Methodology

Consider a doubly curved composite sandwich panel which is composed of two composite laminated face sheets. The sandwich is composed of three layers: the top and bottom face sheets and the core layer. The panel is assumed to have the length of a and width of b, as shown in Fig. 1.

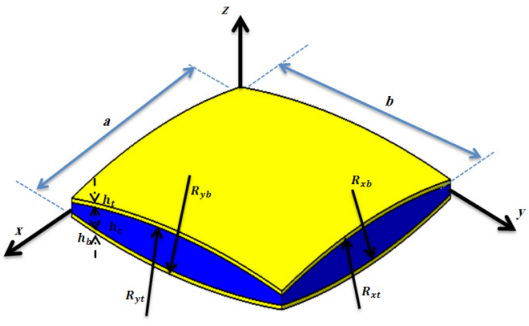


Fig. 1. The geometry of the studied doubly curved sandwich panel

The relation of the core thickness can be defined as follows:

$$h_c(x,y)=\frac{h_c^0}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{1}{R_{xb}}-\frac{1}{R_{xt}}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{1}{R_{yb}}-\frac{1}{R_{yt}}\right). \tag{1}$$

*Corresponding author’s email: m.livani@ssau.ac.ir

where h_c^0 is the thickness of the core in the center of the panel. The displacement fields of the face sheets are based on model II of Frostig for the thick core, take a cubic pattern for the in-plane displacements and a quadratic one for the vertical ones and are read as [5]:

$$\begin{aligned}
&u_i(x,y,z_i,t)=u_{0i}(x,y,t)+u_{1i}(x,y,t)z_i+\\
&u_{2i}(x,y,t)z_i^2+u_{3i}(x,y,t)z_i^3,\\
&v_i(x,y,z_i,t)=v_{0i}(x,y,t)+v_{1i}(x,y,t)z_i+\\
&v_{2i}(x,y,t)z_i^2+v_{3i}(x,y,t)z_i^3,\\
&w_i(x,y,z_i,t)=w_{0i}(x,y,t)+w_{1i}(x,y,t)z_i+\\
&w_{2i}(x,y,t)z_i^2 \quad ; \quad (i=t,b).
\end{aligned} \tag{2}$$

where z_i is the vertical coordinate of each face-sheet (i = t, b) and is measured upward from the mid-plane of each face-sheet. Also, all displacement fields of the core are cubic polynomial functions as:

$$\begin{aligned}
&u_c(x,y,z_c,t)=u_{0c}(x,y,t)+u_{1c}(x,y,t)z_c+\\
&u_{2c}(x,y,t)z_c^2+u_{3c}(x,y,t)z_c^3,\\
&v_c(x,y,z_c,t)=v_{0c}(x,y,t)+v_{1c}(x,y,t)z_c+\\
&v_{2c}(x,y,t)z_c^2+v_{3c}(x,y,t)z_c^3,\\
&w_c(x,y,z_c,t)=w_{0c}(x,y,t)+w_{1c}(x,y,t)z_c+\\
&w_{2c}(x,y,t)z_c^2+w_{3c}(x,y,t)z_c^3..
\end{aligned} \tag{3}$$

The compatibility conditions in this paper were perfect bonding between the face sheets and core, continuity conditions of the transverse shear stresses, transverse normal stress and transverse normal stress gradient at the layer interfaces and the conditions of zero transverse shear stresses on the upper and lower surfaces of the sandwich panel.

The equilibrium equations for the face sheets and core are derived using the Hamilton principle:

$$\int_0^t \delta L dt \equiv \int_0^t [\delta K - \delta U] dt = 0. \tag{3}$$

where δK and δU denote variation of kinetic energy and variation of strain energy, respectively.

The displacement fields based on double Fourier series for a composite sandwich panel satisfying the simply supported boundary conditions are assumed to be in the following forms($(i=0,1,2,3)$, $(l=0,1,2)$,$(j=t,b)$.):

$$\begin{bmatrix} u_{ij}(x,y,t) \\ v_{ij}(x,y,t) \\ w_{lj}(x,y,t) \\ u_{ic}(x,y,t) \\ v_{ic}(x,y,t) \\ w_{ic}(x,y,t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \bar{V}_{ij}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \\ \bar{W}_{lj}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \bar{U}_{ic}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \bar{V}_{ic}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \\ \bar{W}_{ic}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \end{bmatrix} \tag{4}$$

3- Results and Discussion

In this section, the results of the free vibration analysis of doubly curved composite sandwich panels with variable thickness are presented.

3- 1- The effect of elastic modulus ratio

In this example, the effect of elastic modulus ratio of the face sheets of doubly curved composite sandwich panels with cross ply [0/90/0/90/0/Core/0/90/0/90/0], angle ply [45/-45/45/-45/45/Core/45/-45/45/-45/45] and [30/-30/30/-30/30/Core/30/-30/30/-30/30] stacking sequence on the dimensionless fundamental natural frequency is investigated. As can be seen from Fig. 2, by increasing the elastic modulus ratio, the dimensionless fundamental natural frequencies for three types of lay-ups are decreased.

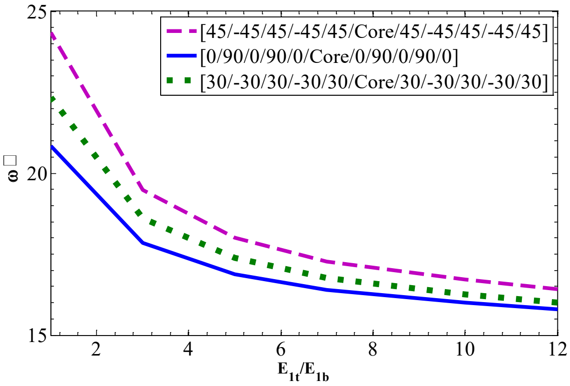


Figure 2. The effect of elastic modulus ratio of the face sheets on the dimensionless natural frequency

3- 2- The effect of panel length to width ratio

In this example, the effect of the panel length to width ratio on the dimensionless fundamental natural frequency with [0/90/0/Core/0/90/0], [45/-45/45/Core/45/-45/45] and [30/-30/30/Core/30/-30/30] stacking sequence on the dimensionless fundamental natural frequency is investigated. Fig. 3 demonstrates that by increasing the panel length to width ratio from 1 to 3, the dimensionless fundamental natural frequencies for three types of lay-ups are increased.

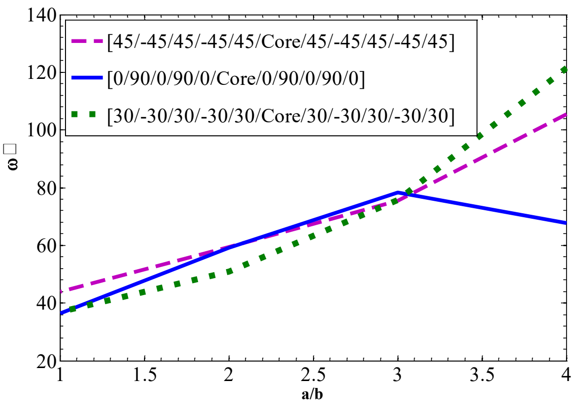


Fig. 3. The effect of panel length to width ratio on the dimensionless natural frequency

4- Conclusions

In this work, the free vibration analysis of doubly curved composite sandwich panels with variable thickness is studied based on a new improved higher order sandwich plate theory. The main conclusions are:

- The new higher-order sandwich panel theory used in this paper can accurately predict the dynamic behavior of doubly curved composite sandwich panels.
- With the increase of the effect of elastic modulus ratio, the dimensionless fundamental natural frequencies are decreased.
- By increasing the panel length to width ratio from 1 to 3, the dimensionless fundamental natural frequencies are increased.

5- References

[1] W. Zhen, C. Wanji, A C0-type higher-order theory for bending analysis of laminated composite and sandwich plates, Composite Structures, 92(3) (2010) 653-661.

[2] H. Biglari, A.A. Jafari, High-order free vibrations of doubly-curved sandwich panels with flexible core based on a refined three-layered theory, Composite Structures, 92(11) (2010) 2685-2694.

[3] E. Ghavanloo, S.A. Fazelzadeh, Free vibration analysis of orthotropic doubly-curved shallow shells based on the gradient elasticity, Composites Part B: Engineering, 45(1) (2013) 1448-1457.

[4] M. Livani, K. MalekzadehFard, S. Shokrollahi, Higher order flutter analysis of doubly curved sandwich panels with variable thicknesses under aerothermoelastic loading, Structural Engineering and Mechanics, 60(1) (2016) 1-19.

[5] Y. Frostig, O.T. Thomsen, High-order free vibrations of sandwich panels with a flexible core, International Journal of Solids Structures, 41 (2004) 1697-1724.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۸، سال ۱۳۹۹، صفحات ۲۱۹۵ تا ۲۲۱۲
DOI: 10.22060/mej.2019.15404.6115

تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب با ضخامت متغیر

مصطفی لیوانی[1*] کرامت ملک‌زاده‌فرد[2]

[1] دانشکده هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
[2] مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

خلاصه: در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری مرتبه بالای جدید مطالعه می‌شود. برای اولین بار، بدلیل در نظر گرفتن شعاع‌های انحنای متفاوت برای رویه‌ها، ضخامت هسته متغیر و تابعی از مختصات درون صفحه‌ای می‌باشد. به علاوه، در مدل جدید ارائه شده در این پژوهش، شرایط پیوستگی تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادیان تنش نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، همچنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا می‌شود. معادلات بر مبنای تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی ارتقا یافته استخراج گردید، به طوری که تابعی مرتبه دوم برای مؤلفه‌ی عرضی جابجایی رویه‌ها و تابعی درجه سه برای مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای رویه‌ها و همه‌ی مؤلفه‌های جابجایی هسته در نظر گرفته شد. معادلات حاکم و شرایط مرزی بر مبنای اصل همیلتون به دست آمدند. اثرات لایه‌چینی‌های مختلف، نسبت طول به عرض پنل، تغییر خواص مواد رویه‌ها، نسبت ضخامت‌های رویه‌ها و جنس‌های مختلف مواد رویه‌ها روی ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر بررسی شد. نتایج حاصل از تئوری حاضر با نتایج موجود در مراجع اعتبارسنجی شده است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷-۰۹-۱۷
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۲-۰۲
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۲-۱۵
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۲۰

کلمات کلیدی:
پنل‌های ساندویچی دوانحنایه
تئوری مرتبه بالا
ضخامت متغیر
ارتعاش آزاد
اصل همیلتون

۱- مقدمه

امروزه استفاده از سازه‌های سبک و مقاوم که دارای نسبت سفتی به وزن و استحکام به وزن بالایی هستند، در مصارف مهندسی بسیار رایج و متداول شده است. از جمله کاربردهای این نوع سازه‌ها می‌توان به بدنه اجسام پرنده مانند هواپیماها، موشک‌ها و فضاپیماها، بدنه کشتی‌ها، قطارها و خودروها، سقف‌ها، دیواره‌ها، تیرهای ساختمانی، ستون‌ها و پل‌ها و مصارف عمده دیگر نام برد. از جدیدترین و رایج‌ترین سازه‌های مستحکم و سبک مهندسی، تیرها و ورق‌های ساندویچی می‌باشند [۱]. یک سازه ساندویچی اعم از تیر یا ورق، متشکل از دو رویه‌ی نازک و مستحکم است که یک هسته‌ی نرم، انعطاف‌پذیر و نسبتاً ضخیم را در بر گرفته‌اند. کاربرد اصلی پنل‌های ساندویچی، سطوح بال و دم هواپیما، بالک و بدنه موشک می‌باشد که می‌توان این سطوح را در حالت کلی با یک پنل دوانحنایه مدل کرد. از طرفی، پنل ساندویچی دوانحنایه در حالت‌های خاص می‌تواند به شکل کروی، استوانه‌ای و یا ورق تخت نیز باشد. در نتیجه این مقاله می‌تواند طیف وسیعی از سازه‌های مورد استفاده در صنایع هوایی را تحت پوشش خود قرار دهد.

با توجه به این موضوع که در این مقاله هدف این است که نتایج حاصله برای طیف وسیعی از هندسه سازه‌ها کاربرد داشته باشد، در ابتدا کارهای جدید انجام شده بر روی پنل‌های ساندویچی و انحنادار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ژن و وانجی[1] [۲] با به کارگیری تئوری تک لایه معادل مرتبه بالا به مطالعه خمش صفحات ساندویچی کامپوزیتی تحت نیروهای حرارتی و مکانیکی پرداخت. آن‌ها در استخراج معادلات، شرایط پیوستگی تنش‌های برشی عرضی در فصل مشترک هسته با رویه‌ها و شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی را ارضا کردند. بیگلری و جعفری [۳] به بررسی ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی دوانحنایه با هسته‌ی انعطاف‌پذیر بر اساس تئوری اصلاح شده لایه مجزا پرداختند. آن‌ها از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، تنش عرضی خطی و تنش برشی یکنواخت در راستای ضخامت هسته

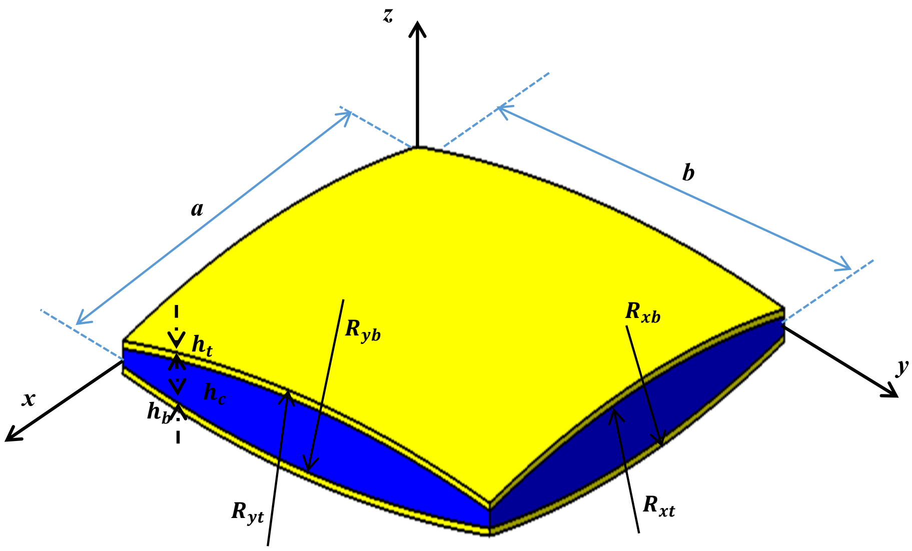
* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.livani@ssau.ac.ir

1 Wanji&Zhen

در استخراج معادلات حاکم استفاده کردند. گیونتا[1] و همکاران [۴] به بررسی رفتار پوسته‌های دوانحنایه چندلایه با استفاده از تئوری‌های مختلف کلاسیک، زیگ زاگ، مرتبه بالا و چندلایه پرداختند. پوسته‌ها تحت بارگذاری گسترده و متمرکز قرار داشته‌اند. اُکتم و سوآرِز[2] [۵] روشی تحلیلی برای تحلیل خمش صفحات دوانحنایه مرکب چندلایه مستطیل شکل با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا ارائه دادند و اثر شرایط مرزی، انحنا، چندلایه بودن، جنس مواد، ضخامت و بارهای مختلف را بررسی کردند. گاتو[3] [۶] با استفاده از تئوری کیرشهف، اثر قیود صفحه‌ای مختلف روی لبه‌های پوسته دوانحنایه همسانگرد نازک مستطیل شکل را بر فرکانس طبیعی بررسی کرده است. علی‌جانی و همکاران [۷] ارتعاشات غیرخطی اجباری پوسته‌های دوانحنایه مدرج تابعی [4]را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری غیرخطی دونِل برای پوسته نازک استفاده کردند و اثر نسبت حجمی و نرم یا سفت شدن پوسته بر فرکانس تحریک را هم در نزدیکی فرکانس اصلی و هم در نزدیکی دو برابر فرکانس اصلی مورد بحث و بررسی قرار دادند. ملک‌زاده‌فرد و همکاران [۸] تحلیل کمانش پنل‌های ساندویچی با هسته دارای انعطاف‌پذیری عرضی که دارای جرم متصله است را با استفاده از نرم‌افزارهای المان محدود تحلیل نمودند. آن‌ها از یک مدل المان محدود سه‌بعدی برای مطالعه اثر جرم متصله روی کمانش بهره بردند و از المان‌های ورق برای رویه‌ها و المان‌های سه‌بعدی برای هسته استفاده کردند. ویولا[5] و همکاران [۹] به تحلیل دینامیکی صفحات دوانحنایه مرکب چندلایه ضخیم با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالای دوبعدی پرداختند. آن‌ها مقایسه‌ای میان تئوری‌های مختلف شامل تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر انجام داده‌اند. هی[6] و همکاران [۱۰] تحلیل خمش پنل‌های ساندویچی برای هندسه‌های مختلف هسته شامل هسته راه‌راه[7]، لانه‌زنبوری و X شکل انجام دادند. آن‌ها از تئوری‌های کلاسیک و تغییرشکل برشی مرتبه اول برای رویه‌ها و هسته بهره بردند و از کرنش‌های برشی عرضی در رویه‌ها صرف‌نظر کردند. یاسین و کاپوریا[8] [۱۱] با استفاده از المان چهارگوشه‌ای چهارگرهی و تئوری زیگ‌زاگ، به تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق‌های دوانحنایه نازک ساندویچی مرکب پرداختند. در تئوری آنها، از تنش‌های نرمال عرضی صرف‌نظر شده است. قوانلو و فلاح‌زاده [۱۲] تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های دوانحنایه نازک ارتوتروپیک با شرایط مرزی ساده را مورد مطالعه قرار دادند. معادلات آنها بر اساس تئوری خطی ورق‌های نازک نووژیلف[9] به دست آمده‌اند. ماتوری[10] و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۴، تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی تخت را با ارائه تئوری لایه مجزا انجام دادند. وانگ و شی[11] [۱۴] تحلیل استاتیکی پنل‌های ساندویچی کامپوزیتی را انجام دادند. تئوری ارائه شده توسط آنها از چندجمله‌ای درجه سه برای کرنش‌های برشی عرضی و تابعی خطی برای کرنش‌های محوری عرضی استفاده می‌کرد. تئوری آنها هم‌چنین شرایط پیوستگی جابجایی‌ها و تنش‌های نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته را ارضا می‌کرد. تورنابِن[12] و همکاران [۱۵] تحلیل استاتیکی پنل‌های دوانحنایه مرکب را با استفاده از تئوری تک لایه معادل مرتبه بالای دوبعدی انجام دادند. لیوانی و همکاران [۱۶] تحلیل فلاتر پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر تحت بارگذاری آیروترمومکانیکی مطالعه کردند. در مدل ارائه شده توسط آنها، شرایط پیوستگی تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادیان تنش نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، هم‌چنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا شد. شوشتری و منتشلو [۱۷] ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق مستطیل شکل مدرج تابعی با خواص مگنتو-الکترو-الاستیک با شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند.

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی انجام می‌شود. معادلات حاکم بر مبنای اصل همیلتون استخراج می‌گردند. با توجه پیشینه تحقیقی، در این مقاله ارتعاش آزاد مدل ارائه شده توسط لیوانی و همکاران [۱۶] مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

1 Giunta
2 Oktem & Soares
3 Qatu
4 Functionally Graded
5 Viola
6 He
7 Corrugated
8 Yasin & Kapuria
9 Novozhilov
10 Maturi
11 Wang & Shi
12 Tornabene



شکل ۱: هندسه پنل ساندویچی دوانحنایه مورد مطالعه

Fig. 1. Geometry of studied doubly curved sandwich panel

۲- به دست آوردن معادلات حاکم

در این بخش، در ابتدا مدل هندسی مورد مطالعه ارائه می‌گردد، سپس تئوری مورد استفاده ارائه می‌شود، بعد از آن شرایط سازگاری جابجایی‌ها و تنش بیان می‌شود و در انتهای این بخش، معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد پنل‌های ساندویچی مرکب دوانحنایه بر مبنای تئوری پنل ساندویچی مرتبه بالای ارتقا یافته استخراج خواهد شد.

۲-۱- مدل هندسی

هندسه مدل مورد مطالعه در این مقاله عبارت است از پنل ساندویچی دوانحنایه که از دو رویه مرکب لایه‌ای تشکیل شده است. ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی مقادیر ثابت می‌باشد، ولی ضخامت هسته متغیر است. پنل ساندویچی موردنظر به صورت دوانحنایه است و شعاع‌های انحنای رویه‌های بالایی و پایینی می‌تواند متفاوت باشد. هیچ محدودیتی بر روی ابعاد هسته و رویه‌ها وجود ندارد و پنل ساندویچی در حالت کلی می‌تواند از نظر هندسی نامتقارن باشد. با توجه به این موضوع که مدلسازی در این مقاله پارامتری می‌باشد، با مدل پیشنهادی در این مقاله می‌توان پنل‌های ساندویچی با هسته‌ی فوم و لانه‌زنبوری را نیز مورد تحلیل قرار داد، برای اینکار تنها کافی است که مدول الاستیسیته و مدول صلابت در سه راستا را به دست آورد و برای هسته یک ماده ارتوتروپیک با این خواص داده شده تعریف نمود.

همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، ضخامت‌های رویه‌های بالایی و پایینی بترتیب برابر با مقادیر ثابت h_t و h_b می‌باشد. همچنین ضخامت هسته برابر با $h_c(x,y)$ است. پنل دارای طول a و عرض b و ضخامت کل h می‌باشد. پنل ساندویچی موردنظر به صورت دوانحنایه است و شعاع‌های انحنای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته در صفحه xz بترتیب برابر است با R_{xt}، R_{xb} و R_{xc} و در صفحه yz بترتیب برابر است با R_{yt}، R_{yb} و R_{yc}. هیچ محدودیتی بر روی ابعاد هسته و رویه‌ها وجود ندارد و پنل ساندویچی در حالت کلی می‌تواند از نظر هندسی نامتقارن باشد.

معادله صفحه برای پنل دوانحنایه دارای طول a و عرض b و شعاع انحنای R_x در صفحه xz و شعاع انحنای R_y در صفحه yz - برای حالتی که مبدأ مختصات کارتزین در مرکز آن قرار دارد- به صورت زیر است [۱۷]:

$$z=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_x}+\frac{y^2}{R_y}\right) \quad (۱)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۱) برای پنل دوانحنایه برای حالتی که مبدأ مختصات کارتزین در گوشه آن قرار دارد، به صورت زیر است:

$$z=-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{R_x}+\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{R_y}\right) \quad (۲)$$

با توجه به هندسه مورد بررسی، رابطه‌ی مربوط به ضخامت هسته که شامل قسمت ثابت h_c^0 که ضخامت مرکز هسته است و قسمت متغیر ناشی از متفاوت بودن شعاع‌های انحنای رویه‌های بالایی و پایینی است، از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$h_c(x,y)=\frac{h_c^0}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{1}{R_{xb}}-\frac{1}{R_{xt}}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{1}{R_{yb}}-\frac{1}{R_{yt}}\right). \quad (۳)$$

۲-۲- میدان جابجایی رویه‌ها و هسته

تعامل اثرات هسته با رویه‌ها و رفتار انعطاف‌پذیر هسته میانی، باعث پیچیدگی مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی می‌گردد. لذا با توجه به این که تئوری‌های متداول قادر به پیش‌بینی اثرات تغییرشکل‌های دقیق در راستای ضخامت‌هاي رویه‌ها و هسته نمی‌باشند، ارائه مدل تحلیلی مرتبه بالا که قادر به لحاظ کردن اثرات انعطاف‌پذیری هسته باشد، ضروری است. به همین منظور در این مطالعه مدل مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این تئوری بر خلاف تئوری‌های متداول، هیچ محدودیتی بر میدان جابجایی هسته و رویه‌ها اعمال نمی‌گردد و اثرات مرتبه بالا پس از حل مسأله ظاهر می‌گردند. در اين تئوري براي رويه‌ها از تئوری مرتبه سومی که در مدل دوم فروستیگ برای هسته استفاده شده، بکار گرفته می‌شود [۱۸]. جابجایی‌های u، v و w رویه‌ها در راستای محورهای x، y و z به صورت روابط زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
&u_i(x,y,z_i,t)=u_{0i}(x,y,t)+u_{1i}(x,y,t)z_i+\\
&u_{2i}(x,y,t)z_i^2+u_{3i}(x,y,t)z_i^3,\\
&v_i(x,y,z_i,t)=v_{0i}(x,y,t)+v_{1i}(x,y,t)z_i+\\
&v_{2i}(x,y,t)z_i^2+v_{3i}(x,y,t)z_i^3,\\
&w_i(x,y,z_i,t)=w_{0i}(x,y,t)+w_{1i}(x,y,t)z_i+\\
&w_{2i}(x,y,t)z_i^2 \quad ; \quad (i=t,b)
\end{aligned} \quad (۴)$$

جایی‌که اندیس‌های t و b به ترتیب نشان‌دهنده‌ی رویه بالایی و رویه پایینی است. هم‌چنین u_{0i}، u_{1i}، u_{2i} و u_{3i} $(i=t,b)$ مجهولات جابجايي درون صفحه‌ای صفحه میانی رویه‌ها در جهت محور x، v_{0i}، v_{1i}، v_{2i} و v_{3i} $(i=t,b)$ مجهولات جابجايي درون صفحه‌ای صفحه میانی رویه‌ها در راستای محور y، و w_{0i}، w_{1i} و w_{2i} $(i=t,b)$ مجهولات جابجایی عرضی صفحه میانی رویه‌ها در راستای محور z می‌باشند.

در این پژوهش، برای هسته از همان تئوری مرتبه سومی که در مدل دوم فروستیگ برای هسته استفاده شده، به کار گرفته می‌شود، با این تفاوت که در مدل دوم فروستیگ، جابجایی عرضی w هسته، تابعی درجه دو از مختصه عرضی z است، اما در تئوری حاضر از مدل درجه سه استفاده شده است. با این تغییر می‌توان رفتار هسته انعطاف‌پذیر با ضخامت متغیر را با دقت بالاتری پیش‌بینی کرد:

$$\begin{aligned}
&u_c(x,y,z_c,t)=u_{0c}(x,y,t)+u_{1c}(x,y,t)z_c+\\
&u_{2c}(x,y,t)z_c^2+u_{3c}(x,y,t)z_c^3,\\
&v_c(x,y,z_c,t)=v_{0c}(x,y,t)+v_{1c}(x,y,t)z_c+\\
&v_{2c}(x,y,t)z_c^2+v_{3c}(x,y,t)z_c^3,\\
&w_c(x,y,z_c,t)=w_{0c}(x,y,t)+w_{1c}(x,y,t)z_c+\\
&w_{2c}(x,y,t)z_c^2+w_{3c}(x,y,t)z_c^3.
\end{aligned} \quad (۵)$$

جایی‌که اندیس c نشان‌دهنده‌ی هسته است. هم‌چنین u_{jc} و v_{jc} بترتیب مجهولات جابجایی صفحه‌ای صفحه میانی هسته در راستای محورهای x و y، و w_{jc} مجهولات جابجایی عرضی صفحه میانی هسته در راستای محور z می‌باشند($j=۰,۱,۲,۳$).

۲-۳- روابط کرنش- جابجایی

روابط سینماتیک رویه‌ها برای پنل ساندویچی دوانحنایه با ملاحظات مربوط به پنل دوانحنایه و با فرض اینکه $\left(1+z/R_{xi}\right)\approx ۱$ و $\left(1+z/R_{yi}\right)\approx ۱$ بخاطر نازک بودن رویه‌ها به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xxi}=\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{w_i}{R_{xi}},\varepsilon_{yyi}=\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{w_i}{R_{yi}},\\
&\varepsilon_{zzi}=\frac{\partial w_i}{\partial z_i},\gamma_{xyi}=2\varepsilon_{xyi}=\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x},\\
&\gamma_{xzi}=2\varepsilon_{xzi}=\frac{\partial u_i}{\partial z_i}+\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}-\frac{u_i}{R_{xi}}\right),\\
&\gamma_{yzi}=2\varepsilon_{yzi}=\frac{\partial v_i}{\partial z_i}+\left(\frac{\partial w_i}{\partial y}-\frac{v_i}{R_{yi}}\right);i=t,b.
\end{aligned} \quad (۶)$$

جایی‌که ε_{xxi}، ε_{yyi} و ε_{zzi} $(i=t,b)$ بترتیب کرنش‌های محوری رویه‌ها در راستای محورهای x، y و z، γ_{xyi} ($i=t,b$

)، کرنش برشی درون صفحه‌ای رویه‌ها، γ_{xzi} و γ_{yzi} ($i=t,b$) کرنش‌های برشی عرضی رویه‌ها می‌باشند. حال با قراردهی رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۶) داریم:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xxi}=\varepsilon_{xxi}^{0}+z_i\,\varepsilon_{xxi}^{I}+z_i^2\,\varepsilon_{xxi}^{II}+z_i^3\,\varepsilon_{xxi}^{III},\varepsilon_{yyi}=\\
&\varepsilon_{yyi}^{0}+z_i\,\varepsilon_{yyi}^{I}+z_i^2\,\varepsilon_{yyi}^{II}+z_i^3\,\varepsilon_{yyi}^{III},\varepsilon_{zzi}=\varepsilon_{zzi}^{0}+z_i\,\varepsilon_{zzi}^{I},\\
&\gamma_{xyi}=2\varepsilon_{xyi}=\gamma_{xyi}^{0}+z_i\,\gamma_{xyi}^{I}+z_i^2\,\gamma_{xyi}^{II}+z_i^3\,\gamma_{xyi}^{III},\gamma_{xzi}=\\
&2\varepsilon_{xzi}=\gamma_{xzi}^{0}+z_i\,\gamma_{xzi}^{I}+z_i^2\,\gamma_{xzi}^{II}+z_i^3\,\gamma_{xzi}^{III},\\
&\gamma_{yzi}=2\varepsilon_{yzi}=\gamma_{yzi}^{0}+z_i\,\gamma_{yzi}^{I}+z_i^2\,\gamma_{yzi}^{II}+z_i^3\,\gamma_{yzi}^{III}.
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

جایی‌که:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xxi}^{0}=u_{0i,x}+\frac{w_{0i}}{R_{xi}},\varepsilon_{xxi}^{I}=u_{1i,x}+\frac{w_{1i}}{R_{xi}},\varepsilon_{xxi}^{II}=u_{2i,x}+\frac{w_{2i}}{R_{xi}},\varepsilon_{xxi}^{III}=u_{3i,x},\\
&\varepsilon_{yyi}^{0}=v_{0i,y}+\frac{w_{0i}}{R_{yi}},\ \varepsilon_{yyi}^{I}=v_{1i,y}+\frac{w_{1i}}{R_{yi}},\varepsilon_{yyi}^{II}=\\
&v_{2i,y}+\frac{w_{2i}}{R_{yi}},\varepsilon_{yyi}^{III}=v_{3i,y},\ \varepsilon_{zzi}^{0}=w_{1i},\ \ \varepsilon_{zzi}^{I}=2w_{2i},\\
&\gamma_{xyi}^{0}=u_{0i,y}+v_{0i,x},\gamma_{xyi}^{I}=u_{1i,y}+v_{1i,x},\gamma_{xyi}^{II}=\\
&u_{2i,y}+v_{2i,x},\gamma_{xyi}^{III}=u_{3i,y}+v_{3i,x},\\
&\gamma_{xzi}^{0}=u_{1i}+w_{0i,x}-\frac{u_{0i}}{R_{xi}},\gamma_{xzi}^{I}=\\
&2u_{2i}+w_{1i,x}-\frac{u_{1i}}{R_{xi}},\gamma_{xzi}^{II}=3u_{3i}+w_{2i,x}-\frac{u_{2i}}{R_{xi}},\\
&\gamma_{xzi}^{III}=-\frac{u_{3i}}{R_{xi}},\gamma_{yzi}^{0}=v_{1i}+w_{0i,y}-\frac{v_{0i}}{R_{yi}},\ \gamma_{yzi}^{I}=\\
&2v_{2i}+w_{1i,y}-\frac{v_{1i}}{R_{yi}},\gamma_{yzi}^{II}=3v_{3i}+w_{2i,y}-\frac{v_{2i}}{R_{yi}},\\
&\gamma_{yzi}^{III}=-\frac{v_{3i}}{R_{yi}}.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

روابط سینماتیک هسته برای پنل ساندویچی دوانحنایه با ملاحظات مربوط به پنل دوانحنایه، به صورت زیر می‌باشد [۲۰]:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xxc}=\frac{1}{\left(1+z_c/R_{xc}\right)}\left[\frac{\partial u_c}{\partial x}+\frac{w_c}{R_{xc}}\right],\varepsilon_{yyc}=\\
&\frac{1}{\left(1+z_c/R_{yc}\right)}\left[\frac{\partial v_c}{\partial y}+\frac{w_c}{R_{yc}}\right],\varepsilon_{zzc}=\frac{\partial w_c}{\partial z},\\
&\gamma_{xyc}=2\varepsilon_{xyc}=\frac{1}{\left(1+z_c/R_{yc}\right)}\frac{\partial u_c}{\partial y}+\frac{1}{\left(1+z_c/R_{xc}\right)}\frac{\partial v_c}{\partial x},\\
&\gamma_{xzc}=2\varepsilon_{xzc}=\frac{\partial u_c}{\partial z}+\frac{1}{\left(1+z_c/R_{xc}\right)}\left(\frac{\partial w_c}{\partial x}-\frac{u_c}{R_{xc}}\right),\\
&\gamma_{yzc}=2\varepsilon_{yzc}=\frac{\partial v_c}{\partial z}+\frac{1}{\left(1+z_c/R_{yc}\right)}\left(\frac{\partial w_c}{\partial y}-\frac{v_c}{R_{yc}}\right).
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

جایی‌که ε_{xxc}، ε_{yyc} و ε_{zzc} بترتیب کرنش‌های محوری هسته در راستای محورهای x ، y و z، γ_{xyc}، کرنش برشی درون صفحه‌ای هسته، γ_{xzc} و γ_{yzc} کرنش‌های برشی عرضی هسته می‌باشند. با قراردهی رابطه‌ی (۵) در رابطه‌ی (۹)، روابط کرنش- جابجایی هسته به صورت زیر در می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xxc}=\frac{1}{\left(1+z_c/R_{xc}\right)}\left(\varepsilon_{xxc}^{0}+z_c\,\varepsilon_{xxc}^{I}+z_c^2\,\varepsilon_{xxc}^{II}+z_c^3\,\varepsilon_{xxc}^{III}\right),\\
&\varepsilon_{yyc}=\frac{1}{\left(1+z_c/R_{yc}\right)}\left(\varepsilon_{yyc}^{0}+z_c\,\varepsilon_{yyc}^{I}+z_c^2\,\varepsilon_{yyc}^{II}+z_c^3\,\varepsilon_{yyc}^{III}\right),\\
&\varepsilon_{zzc}=\varepsilon_{zzc}^{0}+z_c\,\varepsilon_{zzc}^{I}+z_c^2\,\varepsilon_{zzc}^{II},\\
&\gamma_{xyc}=\frac{1}{\left(1+z_c/R_{yc}\right)}\left(u_{0c,y}+u_{1c,y}\,z_c+u_{2c,y}\,z_c^2+u_{3c,y}\,z_c^3\right)+\\
&\frac{1}{\left(1+z_c/R_{xc}\right)}\left(v_{0c,x}+v_{1c,x}\,z_c+v_{2c,x}\,z_c^2+v_{3c,x}\,z_c^3\right),\\
&\gamma_{xzc}=2\varepsilon_{xzc}=u_{1c}+2u_{2c}\,z_c+3u_{3c}\,z_c^2+\\
&\frac{1}{\left(1+z_c/R_{xc}\right)}\left(\gamma_{xzc}^{0}+z_c\,\gamma_{xzc}^{I}+z_c^2\,\gamma_{xzc}^{II}+z_c^3\,\gamma_{xzc}^{III}\right),\\
&\gamma_{yzc}=2\varepsilon_{yzc}=v_{1c}+2v_{2c}\,z_c+3v_{3c}\,z_c^2+\\
&\frac{1}{\left(1+z_c/R_{yc}\right)}\left(\gamma_{yzc}^{0}+z_c\,\gamma_{yzc}^{I}+z_c^2\,\gamma_{yzc}^{II}+z_c^3\,\gamma_{yzc}^{III}\right).
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

جایی‌که:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xxc}^{0}=u_{0c,x}+\frac{w_{0c}}{R_{xc}},\varepsilon_{xxc}^{I}=u_{1c,x}+\frac{w_{1c}}{R_{xc}},\\
&\varepsilon_{xxc}^{II}=u_{2c,x}+\frac{w_{2c}}{R_{xc}},\varepsilon_{xxc}^{III}=u_{3c,x}+\frac{w_{3c}}{R_{xc}},\\
&\varepsilon_{yyc}^{0}=v_{0c,y}+\frac{w_{0c}}{R_{yc}},\varepsilon_{yyc}^{I}=v_{1c,y}+\frac{w_{1c}}{R_{yc}},\\
&\varepsilon_{yyc}^{II}=v_{2c,y}+\frac{w_{2c}}{R_{yc}},\varepsilon_{yyc}^{III}=v_{3c,y}+\frac{w_{3c}}{R_{yc}},\\
&\varepsilon_{zzc}^{0}=w_{1c},\varepsilon_{zzc}^{I}=2w_{2c},\varepsilon_{zzc}^{II}=3w_{3c},\\
&\gamma_{xzc}^{0}=w_{0c,x}-\frac{u_{0c}}{R_{xc}},\gamma_{xzc}^{I}=w_{1c,x}-\frac{u_{1c}}{R_{xc}},
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

$$\gamma_{xzc}^{II}=w_{2c,x}-\frac{u_{2c}}{R_{xc}},\gamma_{xzc}^{III}=w_{3c,x}-\frac{u_{3c}}{R_{xc}},$$
$$\gamma_{yzc}^{0}=w_{0c,y}-\frac{v_{0c}}{R_{yc}},\gamma_{yzc}^{I}=w_{1c,y}-\frac{v_{1c}}{R_{yc}},$$
$$\gamma_{yzc}^{II}=w_{2c,y}-\frac{v_{2c}}{R_{yc}},\gamma_{yzc}^{III}=w_{3c,y}-\frac{v_{3c}}{R_{yc}}.$$

۴-۲- روابط تنش-کرنش

در این مقاله فرض بر این است که هر کدام از رویه‌ها از پنل مرکب چندلایه با ضخامت یکنواخت ساخته شده‌اند. روابط تنش-کرنش کاهش‌یافته برای لایه kام به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\tau_{xy}\\\tau_{xz}\\\tau_{yz}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}&\bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{13}&\bar{Q}_{14}&0&0\\\bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{22}&\bar{Q}_{23}&\bar{Q}_{24}&0&0\\\bar{Q}_{13}&\bar{Q}_{23}&\bar{Q}_{33}&\bar{Q}_{34}&0&0\\\bar{Q}_{14}&\bar{Q}_{24}&\bar{Q}_{34}&\bar{Q}_{44}&0&0\\0&0&0&0&\bar{Q}_{55}&\bar{Q}_{56}\\0&0&0&0&\bar{Q}_{56}&\bar{Q}_{66}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\\\gamma_{xy}\\\gamma_{xz}\\\gamma_{yz}\end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (۱۲)$$

جایی که σ_{xx}، σ_{yy} و σ_{zz} تنش‌های محوری در راستای محورهای مختصات اصلی (x,y,z)، τ_{xy} تنش برشی درون صفحه‌ای، τ_{xz} و τ_{yz} تنش‌های برشی عرضی، ε_{xx}، ε_{yy} و ε_{zz} کرنش‌های محوری در راستای محورهای مختصات اصلی (x,y,z)، γ_{xy} کرنش برشی درون صفحه‌ای، و γ_{xz} و γ_{yz} کرنش‌های برشی عرضی می‌باشند. همچنین در رابطه‌ی (۱۲)، $\bar{Q}_{mn}$ ($m,n=۱,۲,۴$) ثوابت سفتی کاهش‌یافته درون صفحه‌ای و $\bar{Q}_{mn}$ ($m,n=۳,۵,۶$) ثوابت سفتی کاهش‌یافته عرضی لایه kام می‌باشند.

در این مقاله فرض بر این است که هسته از ماده ارتوتروپیک ساخته شده باشد. روابط تنش-کرنش برای یک ماده ارتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx\,c}\\\sigma_{yy\,c}\\\sigma_{zz\,c}\\\tau_{xy\,c}\\\tau_{xz\,c}\\\tau_{yz\,c}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}&0&0&0\\Q_{12}&Q_{22}&Q_{23}&0&0&0\\Q_{13}&Q_{23}&Q_{33}&0&0&0\\0&0&0&Q_{44}&0&0\\0&0&0&0&Q_{55}&0\\0&0&0&0&0&Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx\,c}\\\varepsilon_{yy\,c}\\\varepsilon_{zz\,c}\\\gamma_{xy\,c}\\\gamma_{xz\,c}\\\gamma_{yz\,c}\end{Bmatrix}. \quad (۱۳)$$

جایی‌که Q_{mn} ($m,n=۱,۲,۴$) ثوابت سفتی درون صفحه‌ای و Q_{mn} ($m,n=۳,۵,۶$) ثوابت سفتي عرضي می‌باشند.

۵-۲- شرایط سازگاری جابجایی‌ها و تنش‌ها

در این مقاله، شرایط پیوستگی جابجاییها، تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادیان آن در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، هم‌چنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا می‌شود.

در این مقاله رویه‌ها به صورت ایده‌آل به هسته چسبیده‌اند. به عبارت دیگر، شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در فصل مشترک هسته و رویه‌ها برقرار است و به صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&u_t\left(z_t=z_t^l(x,y)\right)=u_c\left(z_c=z_c^u(x,y)\right),\\&u_b\left(z_b=z_b^u(x,y)\right)=u_c\left(z_c=z_c^l(x,y)\right),\\&v_t\left(z_t=z_t^l(x,y)\right)=v_c\left(z_c=z_c^u(x,y)\right),\\&v_b\left(z_b=z_b^u(x,y)\right)=v_c\left(z_c=z_c^l(x,y)\right),\\&w_t\left(z_t=z_t^l(x,y)\right)=w_c\left(z_c=z_c^u(x,y)\right),\\&w_b\left(z_b=z_b^u(x,y)\right)=w_c\left(z_c=z_c^l(x,y)\right).\end{aligned} \quad (۱۴)$$

تنش‌های برشی عرضی در سطح بالایی رویه بالایی و سطح پایینی رویه پایینی باید صفر باشد:

$$\begin{aligned}&\tau_{xzt}\left(z_t=z_t^u(x,y)\right)=0,\tau_{yzt}\left(z_t=z_t^u(x,y)\right)=\\&0,\tau_{xzb}\left(z_b=z_b^l(x,y)\right)=0,\tau_{yzb}\left(z_b=z_b^l(x,y)\right)=0.\end{aligned} \quad (۱۵)$$

اولین شرط پیوستگی تنش‌ها، برابر بودن تنش برشی عرضی در سطح پایینی رویه بالایی با سطح بالایی هسته و هم‌چنین برابر بودن تنش برشی عرضی در سطح بالایی رویه پایینی با سطح پایینی هسته است:

$$\begin{aligned}&\tau_{xzt}\left(z_t=z_t^l(x,y)\right)=\tau_{xzc}\left(z_c=z_c^u(x,y)\right),\\&\tau_{yzt}\left(z_t=z_t^l(x,y)\right)=\tau_{yzc}\left(z_c=z_c^u(x,y)\right),\\&\tau_{xzb}\left(z_b=z_b^u(x,y)\right)=\tau_{xzc}\left(z_c=z_c^l(x,y)\right),\\&\tau_{yzb}\left(z_b=z_b^u(x,y)\right)=\tau_{yzc}\left(z_c=z_c^l(x,y)\right).\end{aligned} \quad (۱۶)$$

دومین شرط پیوستگی تنش‌ها، برابر بودن تنش نرمال عرضی در سطح پایینی رویه بالایی با سطح بالایی هسته و هم‌چنین برابر بودن تنش نرمال عرضی در سطح بالایی رویه پایینی با سطح پایینی هسته است:

$$\begin{aligned}&\sigma_{zzt}\left(z_t=z_t^l\left(x,y\right)\right)=\sigma_{zzc}\left(z_c=z_c^u\left(x,y\right)\right),\\&\sigma_{zzb}\left(z_b=z_b^u\left(x,y\right)\right)=\sigma_{zzc}\left(z_c=z_c^l\left(x,y\right)\right).\end{aligned}\tag{۱۷}$$

سومین شرط پیوستگی تنش‌ها، برابر بودن گرادیان تنش نرمال عرضی در سطح پایینی رویه بالایی با سطح بالایی هسته و هم‌چنین برابر بودن گرادیان تنش نرمال عرضی در سطح بالایی رویه پایینی با سطح پایینی هسته است:

$$\begin{aligned}&\sigma_{zzt,z}\left(z_t=z_t^l\left(x,y\right)\right)=\sigma_{zzc,z}\left(z_c=z_c^u\left(x,y\right)\right),\\&\sigma_{zzb,z}\left(z_b=z_b^u\left(x,y\right)\right)=\sigma_{zzc,z}\left(z_c=z_c^l\left(x,y\right)\right)\end{aligned}\tag{۱۸}$$

۶-۲- منتجه‌های تنش

منتجه‌های تنش بر واحد طول برای رویه‌های بالایی و پایینی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}N_{xxi}\\M_{xxi}\\O_{xxi}\\H_{xxi}\end{Bmatrix}=\int_{z_i^l}^{z_i^u}\sigma_{xxi}\begin{Bmatrix}1\\z_i\\z_i^2\\z_i^3\end{Bmatrix}dz_i,\begin{Bmatrix}N_{yyi}\\M_{yyi}\\O_{yyi}\\H_{yyi}\end{Bmatrix}=\\&\int_{z_i^l}^{z_i^u}\sigma_{yyi}\begin{Bmatrix}1\\z_i\\z_i^2\\z_i^3\end{Bmatrix}dz_i,\begin{Bmatrix}N_{zzi}\\M_{zzi}\end{Bmatrix}=\int_{z_i^l}^{z_i^u}\sigma_{zzi}\begin{Bmatrix}1\\z_i\end{Bmatrix}dz_i,\\&\begin{Bmatrix}N_{xyi}\\M_{xyi}\\O_{xyi}\\H_{xyi}\end{Bmatrix}=\int_{z_i^l}^{z_i^u}\tau_{xyi}\begin{Bmatrix}1\\z_i\\z_i^2\\z_i^3\end{Bmatrix}dz_i,\begin{Bmatrix}Q_{xzi}\\S_{xzi}\\T_{xzi}\\V_{xzi}\end{Bmatrix}=\\&\int_{z_i^l}^{z_i^u}\tau_{xzi}\begin{Bmatrix}1\\z_i\\z_i^2\\z_i^3\end{Bmatrix}dz_i,\begin{Bmatrix}Q_{yzi}\\S_{yzi}\\T_{yzi}\\V_{yzi}\end{Bmatrix}=\int_{z_i^l}^{z_i^u}\tau_{yzi}\begin{Bmatrix}1\\z_i\\z_i^2\\z_i^3\end{Bmatrix}dz_i\ ;\ \left(i=t,b\right)\end{aligned}\tag{۱۹}$$

هم‌چنین، منتجه‌های تنش بر واحد طول برای هسته عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}N_{xxc}\\M_{xxc}\\O_{xxc}\\H_{xxc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\sigma_{xxc}\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}N_{yyc}\\M_{yyc}\\O_{yyc}\\H_{yyc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\sigma_{yyc}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}N_{zzc}\\M_{zzc}\\O_{zzc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\sigma_{zzc}\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\end{Bmatrix}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)dz_c,\\&\begin{Bmatrix}N_{xyc}\\M_{xyc}\\O_{xyc}\\H_{xyc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{xyc}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}N_{yxc}\\M_{yxc}\\O_{yxc}\\H_{yxc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{xyc}\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}N_{xyc}^*\\M_{xyc}^*\\O_{xyc}^*\\H_{xyc}^*\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{xyc}\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}Q_{xzc}\\S_{xzc}\\T_{xzc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{xzc}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}Q_{yzc}\\S_{yzc}\\T_{yzc}\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{yzc}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}Q_{xzc}^*\\S_{xzc}^*\\T_{xzc}^*\\V_{xzc}^*\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{xzc}\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c,\\&\begin{Bmatrix}Q_{yzc}^*\\S_{yzc}^*\\T_{yzc}^*\\V_{yzc}^*\end{Bmatrix}=\int_{z_c^l}^{z_c^u}\tau_{yzc}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_c\\z_c^2\\z_c^3\end{Bmatrix}dz_c.\end{aligned}\tag{۲۰}$$

۲-۷- معادلات حاکم

برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می‌شود، بر اساس این اصل:

$$\int_0^t \delta L dt \equiv \int_0^t \left[\delta K - \delta U\right] dt = 0. \qquad (۲۱)$$

که در آن δK تغییرات انرژی جنبشی و δU تغییرات انرژی کرنشی می‌باشد. همچنین δ اپراتور تغییرات مرتبه اول است.

رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی جنبشی برای پنل ساندویچی دوانحنایه به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta K = -\sum_{i=t,b}\left[\iint_{A_i}\int_{z_i^l}^{z_i^u} \rho_i\left(\ddot{u}_i\delta u_i + \ddot{v}_i\delta v_i + \ddot{w}_i\delta w_i\right)dz_i\,dxdy\right] - \iint_{A_c}\int_{z_c^l}^{z_c^u} \rho_c\left(\ddot{u}_c\delta u_c + \ddot{v}_c\delta v_c + \ddot{w}_c\delta w_c\right)\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)dz_c\,dxdy \qquad (۲۲)$$

رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی کرنشی برای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta U = \sum_{i=t,b}\left[\iiint \begin{pmatrix}\sigma_{xxi}\delta\varepsilon_{xxi} + \sigma_{yyi}\delta\varepsilon_{yyi} \\ +\sigma_{zzi}\delta\varepsilon_{zzi} + \tau_{xyi}\delta\gamma_{xyi} + \\ \tau_{xzi}\delta\gamma_{xzi} + \tau_{yzi}\delta\gamma_{yzi}\end{pmatrix} dz_i dA\right] + \iiint \begin{pmatrix}\sigma_{xxc}\delta\varepsilon_{xxc} + \sigma_{yyc}\delta\varepsilon_{yyc} + \\ \sigma_{zzc}\delta\varepsilon_{zzc} + \tau_{xyc}\delta\gamma_{xyc} + \\ \tau_{xzc}\delta\gamma_{xzc} + \tau_{yzc}\delta\gamma_{yzc}\end{pmatrix}\left(1+\frac{z_c}{R_{xc}}\right)\left(1+\frac{z_c}{R_{yc}}\right)dz_c dA. \qquad (۲۳)$$

هم‌چنین می‌توان شش شرط پیوستگی جابجایی‌ها در فصل مشترک هر یک از رویه‌ها با هسته (رابطه‌ی (۱۴))، چهار شرط صفر شدن تنش‌های برشی عرضی در سطح خارجی رویه‌ها (رابطه‌ی (۱۵)) و هشت شرط پیوستگی تنش‌های نرمال و برشی عرضی و گرادیان تنش نرمال عرضی در مرز رویه‌ها با هسته (روابط (۱۶) الی (۱۸)) را نیز در رابطه‌ی (۲۳) جای داد. برای این منظور کافی است هر یک از این معادلات را در یک ضریب لاگرانژ منحصر به فرد ضرب کرد.

حال با قراردهی روابط مربوط به تغییرات انرژی جنبشی (رابطه‌ی (۲۲)) و تغییرات انرژی کرنشی (رابطه‌ی (۲۳)) در اصل همیلتون (رابطه‌ی (۲۱))، معادلات حرکت حاکم بر پنل‌های ساندویچی دوانحنایی در سیستم مختصات کارتزین (x,y,z) به دست می‌آیند:

$$\delta u_{0t}: I_{0t}\ddot{u}_{0t} + I_{1t}\ddot{u}_{1t} + I_{2t}\ddot{u}_{2t} + I_{3t}\ddot{u}_{3t} - N_{xx\,t,x} - N_{xy\,t,y} - \frac{Q_{xz\,t}}{R_{x\,t}} + \chi_x^{tc} - \frac{\chi_{xz}^t}{R_{x\,t}} - \frac{\bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,t}} - \frac{\bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc}}{R_{x\,t}} - \bar{Q}_{13t}^l\chi_{zz,x}^{tc} - \bar{Q}_{34t}^l\chi_{zz,y}^{tc} = 0.$$

$$\delta u_{1t}: I_{1t}\ddot{u}_{0t} + I_{2t}\ddot{u}_{1t} + I_{3t}\ddot{u}_{2t} - M_{xx\,t,x} - M_{xy\,t,y} + Q_{xz\,t} - \frac{S_{xz\,t}}{R_{x\,t}} + z_t^l\chi_x^{tc} + \chi_{xz}^t - \frac{z_t^u\chi_{xz}^t}{R_{x\,t}} + \bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc} - \frac{z_t^l\bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,t}} + \bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc}$$
$$- \frac{z_t^l\bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc}}{R_{x\,t}} - \bar{Q}_{13t}^l\left(z_t^l\chi_{zz}^{tc}\right)_{,x} - \bar{Q}_{34t}^l\left(z_t^l\chi_{zz}^{tc}\right)_{,y} - \bar{Q}_{13t}^l\chi_{zz}^{tc}{}'_{,x} - \bar{Q}_{34t}^l\chi_{zz}^{tc}{}'_{,y} = 0.$$

$$\delta u_{2t}: I_{2t}\ddot{u}_{0t} + I_{3t}\ddot{u}_{1t} - O_{xx\,t,x} - O_{xy\,t,y} + 2S_{xz\,t} - \frac{T_{xz\,t}}{R_{x\,t}} + \left(z_t^l\right)^2\chi_x^{tc} + 2z_t^u\chi_{xz}^t - \frac{\left(z_t^u\right)^2\chi_{xz}^t}{R_{x\,t}} + 2z_t^l\bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc} - \frac{\left(z_t^l\right)^2\bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,t}}$$
$$+2z_t^l\bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc} - \frac{\left(z_t^l\right)^2\bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc}}{R_{x\,t}} - \bar{Q}_{13t}^l\left[\left(z_t^l\right)^2\chi_{zz}^{tc}\right]_{,x} - \bar{Q}_{34t}^l\left[\left(z_t^l\right)^2\chi_{zz}^{tc}\right]_{,y} - 2\bar{Q}_{13t}^l\left(\chi_{zz}^{tc}{}'z_t^l\right)_{,x} - 2\bar{Q}_{34t}^l\left(\chi_{zz}^{tc}{}'z_t^l\right)_{,y} = 0.$$

$$\delta u_{3t}: I_{3t}\ddot{u}_{0t} - H_{xx\,t,x} - H_{xy\,t,y} + 3T_{xz\,t} - \frac{V_{xz\,t}}{R_{x\,t}} + \left(z_t^l\right)^3\chi_x^{tc} + 3\left(z_t^u\right)^2\chi_{xz}^t - \frac{\left(z_t^u\right)^3\chi_{xz}^t}{R_{x\,t}} + 3\left(z_t^l\right)^2\bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc} - \frac{\left(z_t^l\right)^3\bar{Q}_{55t}^l\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,t}}$$
$$+3\left(z_t^l\right)^2\bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc} - \frac{\left(z_t^l\right)^3\bar{Q}_{56t}^l\chi_{yz}^{tc}}{R_{x\,t}} - \bar{Q}_{13t}^l\left[\left(z_t^l\right)^3\chi_{zz}^{tc}\right]_{,x} - \bar{Q}_{34t}^l\left[\left(z_t^l\right)^3\chi_{zz}^{tc}\right]_{,y} - 3\bar{Q}_{13t}^l\left[\chi_{zz}^{tc}{}'\left(z_t^l\right)^2\right]_{,x} - 3\bar{Q}_{34t}^l\left[\chi_{zz}^{tc}{}'\left(z_t^l\right)^2\right]_{,y} = 0$$

$$\delta v_{0t}: I_{0t}\ddot{v}_{0t} + I_{1t}\ddot{v}_{1t} + I_{2t}\ddot{v}_{2t} + I_{3t}\ddot{v}_{3t} - N_{yy\,t,y} - N_{xy\,t,x} - \frac{Q_{yz\,t}}{R_{y\,t}} + \chi_y^{tc} - \frac{\chi_{yz}^t}{R_{y\,t}} - \frac{\bar{Q}_{56t}^l\chi_{xz}^{tc}}{R_{y\,t}} - \frac{\bar{Q}_{66t}^l\chi_{yz}^{tc}}{R_{y\,t}} - \bar{Q}_{23t}^l\chi_{zz,y}^{tc} - \bar{Q}_{34t}^l\chi_{zz,x}^{tc} = 0.$$

$$\delta v_{1t}: I_{1t}\ddot{v}_{0t} + I_{2t}\ddot{v}_{1t} + I_{3t}\ddot{v}_{2t} - M_{yy\,t,y} - M_{xy\,t,x} + Q_{yz\,t} - \frac{S_{yz\,t}}{R_{y\,t}} + z_t^l\chi_y^{tc} + \chi_{yz}^t - \frac{z_t^u\chi_{yz}^t}{R_{y\,t}} + \bar{Q}_{56t}^l\chi_{xz}^{tc} - \frac{z_t^l\bar{Q}_{56t}^l\chi_{xz}^{tc}}{R_{y\,t}}$$
$$+\bar{Q}_{66t}^l\chi_{yz}^{tc} - \frac{z_t^l\bar{Q}_{66t}^l\chi_{yz}^{tc}}{R_{y\,t}} - \bar{Q}_{23t}^l\left(z_t^l\chi_{zz}^{tc}\right)_{,y} - \bar{Q}_{34t}^l\left(z_t^l\chi_{zz}^{tc}\right)_{,x} - \bar{Q}_{23t}^l\chi_{zz}^{tc}{}'_{,y} - \bar{Q}_{34t}^l\chi_{zz}^{tc}{}'_{,x} = 0.$$

$$\delta v_{2t}: I_{2t}\ddot{v}_{0t}+I_{3t}\ddot{v}_{1t}-O_{yy\,t,y}-O_{xy\,t,x}+2S_{yz\,t}-\frac{T_{yz\,t}}{R_{y\,t}}+\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_y^{tc}+2z_t^{\,u}\chi_{yz}^{t}-\frac{\left(z_t^{\,u}\right)^2\chi_{yz}^{t}}{R_{y\,t}}+2z_t^{\,l}\bar{Q}_{56t}^{l}\chi_{xz}^{tc}-\frac{\left(z_t^{\,l}\right)^2\bar{Q}_{56t}^{l}\chi_{xz}^{tc}}{R_{y\,t}}+$$

$$2z_t^{\,l}\bar{Q}_{66t}^{l}\chi_{yz}^{tc}-\frac{\left(z_t^{\,l}\right)^2\bar{Q}_{66t}^{l}\chi_{yz}^{tc}}{R_{y\,t}}-\bar{Q}_{23t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_{zz}^{tc}\right]_{,y}-\bar{Q}_{34t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_{zz}^{tc}\right]_{,x}-2\bar{Q}_{23t}^{l}\left(z_t^{\,l}\chi_{zz'}^{tc}\right)_{,y}-2\bar{Q}_{34t}^{l}\left(\chi_{zz'}^{tc}z_t^{\,l}\right)_{,x}=0.$$

$$\delta v_{3t}: I_{3t}\ddot{v}_{0t}-H_{yy\,t,y}-H_{xy\,t,x}+3T_{yz\,t}-\frac{V_{yz\,t}}{R_{y\,t}}+\left(z_t^{\,l}\right)^3\chi_y^{tc}+3\left(z_t^{\,u}\right)^2\chi_{yz}^{t}-\frac{\left(z_t^{\,u}\right)^3\chi_{yz}^{t}}{R_{y\,t}}+3\left(z_t^{\,l}\right)^2\bar{Q}_{56t}^{l}\chi_{xz}^{tc}-\frac{\left(z_t^{\,l}\right)^3\bar{Q}_{56t}^{l}\chi_{xz}^{tc}}{R_{y\,t}}+$$

$$3\left(z_t^{\,l}\right)^2\bar{Q}_{66t}^{l}\chi_{yz}^{tc}-\frac{\left(z_t^{\,l}\right)^3\bar{Q}_{66t}^{l}\chi_{yz}^{tc}}{R_{y\,t}}-\bar{Q}_{23t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^3\chi_{zz}^{tc}\right]_{,y}-\bar{Q}_{34t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^3\chi_{zz}^{tc}\right]_{,x}-3\bar{Q}_{23t}^{l}\left[\chi_{zz'}^{tc}\left(z_t^{\,l}\right)^2\right]_{,y}-3\bar{Q}_{34t}^{l}\left[\chi_{zz'}^{tc}\left(z_t^{\,l}\right)^2\right]_{,x}=0.$$

$$\delta w_{0t}: I_{0t}\ddot{w}_{0t}+I_{1t}\ddot{w}_{1t}+I_{2t}\ddot{w}_{2t}+\frac{N_{xx\,t}}{R_{x\,t}}-\left(N_{xx\,t}w_{0t,x}\right)_{,x}-\left(M_{xx\,t}w_{1t,x}\right)_{,x}+\frac{N_{yy\,t}}{R_{y\,t}}-\left(N_{yy\,t}w_{0t,y}\right)_{,y}-\left(M_{yy\,t}w_{1t,y}\right)_{,y}-Q_{xz\,t,x}$$

$$-Q_{yz\,t,y}+\chi_z^{tc}-\chi_{xz,x}^{t}-\chi_{yz,y}^{t}-\left(\bar{Q}_{55t}^{l}\chi_{xz}^{tc}\right)_{,x}-\bar{Q}_{56t}^{l}\chi_{xz,y}^{tc}-\left(\bar{Q}_{56t}^{l}\chi_{yz}^{tc}\right)_{,x}-\bar{Q}_{66t}^{l}\chi_{yz,y}^{tc}+\frac{\bar{Q}_{13t}^{l}\chi_{zz}^{tc}}{R_{x\,t}}+\frac{\bar{Q}_{23t}^{l}\chi_{zz}^{tc}}{R_{y\,t}}=0.$$

$$\delta w_{1t}: I_{1t}\ddot{w}_{0t}+I_{2t}\ddot{w}_{1t}+I_{3t}\ddot{w}_{2t}+\frac{M_{yy\,t}}{R_{y\,t}}-\left(M_{yy\,t}w_{0t,y}\right)_{,y}+N_{zz\,t}-S_{xz\,t,x}-S_{yz\,t,y}+\frac{M_{xx\,t}}{R_{x\,t}}-\left(M_{xx\,t}w_{0t,x}\right)_{,x}+z_t^{\,l}\chi_z^{tc}-\left(z_t^{\,u}\chi_{xz}^{t}\right)_{,x}-\left(z_t^{\,u}\chi_{yz}^{t}\right)_{,y}$$

$$-\bar{Q}_{55t}^{l}\left(z_t^{\,l}\chi_{xz}^{tc}\right)_{,x}-\bar{Q}_{56t}^{l}\left[z_t^{\,l}\chi_{xz}^{tc}\right]_{,y}-\bar{Q}_{56t}^{l}\left(z_t^{\,l}\chi_{yz}^{tc}\right)_{,x}-\bar{Q}_{66t}^{l}\left(z_t^{\,l}\chi_{yz}^{tc}\right)_{,y}+\frac{z_t^{\,l}\bar{Q}_{13t}^{l}\chi_{zz}^{tc}}{R_{x\,t}}+\frac{z_t^{\,l}\bar{Q}_{23t}^{l}\chi_{zz}^{tc}}{R_{y\,t}}+\bar{Q}_{33t}^{l}\chi_{zz}^{tc}+\frac{\bar{Q}_{13t}^{l}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,t}}+\frac{\bar{Q}_{23t}^{l}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{y\,t}}=0.$$

$$\delta w_{2t}: I_{2t}\ddot{w}_{0t}+I_{3t}\ddot{w}_{1t}+\frac{O_{yy\,t}}{R_{y\,t}}+2M_{zz\,t}-T_{xz\,t,x}-T_{yz\,t,y}+\frac{O_{xx\,t}}{R_{x\,t}}+\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_z^{tc}-\left[\left(z_t^{\,u}\right)^2\chi_{xz}^{t}\right]_{,x}-\left[\left(z_t^{\,u}\right)^2\chi_{yz}^{t}\right]_{,y}$$

$$-\bar{Q}_{56t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_{xz}^{tc}\right]_{,y}-\bar{Q}_{56t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_{yz}^{tc}\right]_{,x}-\bar{Q}_{66t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_{yz}^{tc}\right]_{,y}-\bar{Q}_{55t}^{l}\left[\left(z_t^{\,l}\right)^2\chi_{xz}^{tc}\right]_{,x}+\frac{\left(z_t^{\,l}\right)^2\bar{Q}_{13t}^{l}\chi_{zz}^{tc}}{R_{x\,t}}+\frac{\left(z_t^{\,l}\right)^2\bar{Q}_{23t}^{l}\chi_{zz}^{tc}}{R_{y\,t}}$$

$$+2z_t^{\,l}\bar{Q}_{33t}^{l}\chi_{zz}^{tc}+\frac{2\bar{Q}_{13t}^{l}\chi_{zz'}^{tc}z_t^{\,l}}{R_{x\,t}}+\frac{2z_t^{\,l}\bar{Q}_{23t}^{l}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{y\,t}}-3\bar{Q}_{23t}^{l}\left[\chi_{zz'}^{tc}\left(z_t^{\,l}\right)^2w_{1t,y}\right]_{,y}+2\bar{Q}_{33t}^{l}\chi_{zz'}^{tc}=0.$$

$$\delta u_{0b}: I_{0b}\ddot{u}_{0b}+I_{1b}\ddot{u}_{1b}+I_{2b}\ddot{u}_{2b}+I_{3b}\ddot{u}_{3b}-N_{xx\,b,x}-N_{xy\,b,y}-\frac{Q_{xz\,b}}{R_{x\,b}}+\chi_x^{bc}-\frac{\chi_{xz}^{b}}{R_{x\,b}}-\frac{\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,b}}-\frac{\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}}{R_{x\,b}}-\bar{Q}_{13b}^{u}\chi_{zz,x}^{bc}-\bar{Q}_{34b}^{u}\chi_{zz,y}^{bc}=0$$

$$\delta u_{1b}: I_{1b}\ddot{u}_{0b}+I_{2b}\ddot{u}_{1b}+I_{3b}\ddot{u}_{2b}-M_{xx\,b,x}-M_{xy\,b,y}+Q_{xz\,b}-\frac{S_{xz\,b}}{R_{x\,b}}+\chi_{xz}^{b}-\frac{z_b^{\,l}\chi_{xz}^{b}}{R_{x\,b}}+z_b^{\,u}\chi_x^{bc}+\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}-\frac{z_b^{\,u}\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,b}}+\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}$$

$$-\frac{z_b^{\,u}\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}}{R_{x\,b}}-\bar{Q}_{13b}^{u}\left(z_b^{\,u}\chi_{zz}^{bc}\right)_{,x}-\bar{Q}_{34b}^{u}\left(z_b^{\,u}\chi_{zz}^{bc}\right)_{,y}-\bar{Q}_{13b}^{u}\chi_{zz',x}^{bc}-\bar{Q}_{34b}^{u}\chi_{zz',y}^{bc}=0.$$

$$\delta u_{2b}: I_{2b}\ddot{u}_{0b}+I_{3b}\ddot{u}_{1b}-O_{xx\,b,x}-O_{xy\,b,y}+2S_{xz\,b}-\frac{T_{xz\,b}}{R_{x\,b}}+\left(z_b^{\,u}\right)^2\chi_x^{bc}+2z_b^{\,l}\chi_{xz}^{b}-\frac{\left(z_b^{\,l}\right)^2\chi_{xz}^{b}}{R_{x\,b}}+2z_b^{\,u}\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}-\frac{\left(z_b^{\,u}\right)^2\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,b}}$$

$$+2z_b^{\,u}\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}-\frac{\left(z_b^{\,u}\right)^2\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}}{R_{x\,b}}-\bar{Q}_{13b}^{u}\left[\left(z_b^{\,u}\right)^2\chi_{zz}^{bc}\right]_{,x}-\bar{Q}_{34b}^{u}\left[\chi_{zz}^{bc}\left(z_b^{\,u}\right)^2\right]_{,y}-2\bar{Q}_{13b}^{u}\left(\chi_{zz'}^{bc}z_b^{\,u}\right)_{,x}-2\bar{Q}_{34b}^{u}\left(\chi_{zz'}^{bc}z_b^{\,u}\right)_{,y}=0.$$

$$\delta u_{3b}: I_{3b}\ddot{u}_{0b}-H_{xx\,b,x}-\frac{V_{xz\,b}}{R_{x\,b}}+3T_{xz\,b}-H_{xy\,b,y}+\left(z_b^{\,u}\right)^3\chi_x^{bc}+3\left(z_b^{\,l}\right)^2\chi_{xz}^{b}-\frac{\left(z_b^{\,l}\right)^3\chi_{xz}^{b}}{R_{x\,b}}+3\left(z_b^{\,u}\right)^2\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}-\frac{\left(z_b^{\,u}\right)^3\bar{Q}_{55b}^{u}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,b}}+$$

$$3\left(z_b^{\,u}\right)^2\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}-\frac{\left(z_b^{\,u}\right)^3\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{yz}^{bc}}{R_{x\,b}}-\bar{Q}_{13b}^{u}\left[\left(z_b^{\,u}\right)^3\chi_{zz}^{bc}\right]_{,x}-\bar{Q}_{34b}^{u}\left[\chi_{zz}^{bc}\left(z_b^{\,u}\right)^3\right]_{,y}-3\bar{Q}_{13b}^{u}\left[\chi_{zz'}^{bc}\left(z_b^{\,u}\right)^2\right]_{,x}-3\bar{Q}_{34b}^{u}\left[\chi_{zz'}^{bc}\left(z_b^{\,u}\right)^2\right]_{,y}=0$$

$$\delta v_{0b}: I_{0b}\ddot{v}_{0b}+I_{1b}\ddot{v}_{1b}+I_{2b}\ddot{v}_{2b}+I_{3b}\ddot{v}_{3b}-N_{yy\,b,y}-N_{xy\,b,x}-\frac{Q_{yz\,b}}{R_{y\,b}}+\chi_y^{bc}-\frac{\chi_{yz}^{b}}{R_{y\,b}}-\frac{\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{xz}^{bc}}{R_{y\,b}}-\frac{\bar{Q}_{66b}^{u}\chi_{yz}^{bc}}{R_{y\,b}}-\bar{Q}_{23b}^{u}\chi_{zz,y}^{bc}-\bar{Q}_{34b}^{u}\chi_{zz,x}^{bc}=0.$$

$$\delta v_{1b}: I_{1b}\ddot{v}_{0b}+I_{2b}\ddot{v}_{1b}+I_{3b}\ddot{v}_{2b}-M_{yy\,b,y}-M_{xy\,b,x}+Q_{yz\,b}-\frac{S_{yz\,b}}{R_{y\,b}}+z_b^{\,u}\chi_y^{bc}+\chi_{yz}^{b}-\frac{z_b^{\,l}\chi_{yz}^{b}}{R_{y\,b}}+\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{xz}^{bc}-\frac{z_b^{\,u}\bar{Q}_{56b}^{u}\chi_{xz}^{bc}}{R_{y\,b}}+$$

$$\bar{Q}_{66b}^{u}\chi_{yz}^{bc}-\frac{z_b^{\,u}\bar{Q}_{66b}^{u}\chi_{yz}^{bc}}{R_{y\,b}}-\bar{Q}_{23b}^{u}\left(z_b^{\,u}\chi_{zz}^{bc}\right)_{,y}-\bar{Q}_{34b}^{u}\left(\chi_{zz}^{bc}z_b^{\,u}\right)_{,x}-\bar{Q}_{23b}^{u}\chi_{zz',y}^{bc}-\bar{Q}_{34b}^{u}\chi_{zz',x}^{bc}=0.$$

$$\delta v_{2b}: I_{2b}\ddot{v}_{0b} + I_{3b}\ddot{v}_{1b} - O_{yy\,b,y} - O_{xy\,b,x} + 2S_{yz\,b} - \frac{T_{yz\,b}}{R_{y\,b}} + \left(z_b^u\right)^2 \chi_y^{bc} + 2z_b^l \chi_{yz}^b - \frac{\left(z_b^l\right)^2 \chi_{yz}^b}{R_{y\,b}} + 2z_b^u \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{\left(z_b^u\right)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{y\,b}}$$

$$+2z_b^u \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{\left(z_b^u\right)^2 \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{y\,b}} - \bar{Q}_{23b}^u \left[\left(z_b^u\right)^2 \chi_{zz}^{bc}\right]_{,y} - \bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz}^{bc}\left(z_b^u\right)^2\right]_{,x} - 2\bar{Q}_{23b}^u \left(\chi_{zz'}^{bc} z_b^u\right)_{,y} - 2\bar{Q}_{34b}^u \left(\chi_{zz'}^{bc} z_b^u\right)_{,x} = 0.$$

$$\delta v_{3b}: I_{3b}\ddot{v}_{0b} + I_{4b}\ddot{v}_{1b} - H_{yy\,b,y} - H_{xy\,b,x} + 3T_{yz\,b} - \frac{V_{yz\,b}}{R_{y\,b}} + \left(z_b^u\right)^3 \chi_y^{bc} + 3\left(z_b^l\right)^2 \chi_{yz}^b - \frac{\left(z_b^l\right)^3 \chi_{yz}^b}{R_{y\,b}} + 3\left(z_b^u\right)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{\left(z_b^u\right)^3 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{y\,b}}$$

$$+3\left(z_b^u\right)^2 \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{\left(z_b^u\right)^3 \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{y\,b}} - \bar{Q}_{23b}^u \left[\left(z_b^u\right)^3 \chi_{zz}^{bc}\right]_{,y} - \bar{Q}_{34b}^u \left[\left(z_b^u\right)^3 \chi_{zz}^{bc}\right]_{,x} - 3\bar{Q}_{23b}^u \left[\chi_{zz'}^{bc}\left(z_b^u\right)^2\right]_{,y} - 3\bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz'}^{bc}\left(z_b^u\right)^2\right]_{,x} = 0.$$

$$\delta w_{0b}: I_{0b}\ddot{w}_{0b} + I_{1b}\ddot{w}_{1b} + I_{2b}\ddot{w}_{2b} + \frac{N_{xx\,b}}{R_{x\,b}} - \left(N_{xx\,b} w_{0b,x}\right)_{,x} - \left(M_{xx\,b} w_{1b,x}\right)_{,x} + \frac{N_{yy\,b}}{R_{y\,b}} - \left(N_{yy\,b} w_{0b,y}\right)_{,y} - \left(M_{yy\,b} w_{1b,y}\right)_{,y} - Q_{xz\,b,x}$$

$$-Q_{yz\,b,y} + \chi_z^{bc} - \chi_{xz,x}^b - \chi_{yz,y}^b - \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz,x}^{bc} - \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz,y}^{bc} - \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz,x}^{bc} - \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz,y}^{bc} + \frac{\bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{x\,b}} + \frac{\bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{y\,b}} = 0$$

$$\delta w_{1b}: I_{1b}\ddot{w}_{0b} + I_{2b}\ddot{w}_{1b} + I_{3b}\ddot{w}_{2b} + \frac{M_{yy\,b}}{R_{y\,b}} - \left(M_{yy\,b} w_{0b,y}\right)_{,y} + N_{zz\,b} - S_{xz\,b,x} - S_{yz\,b,y} + \frac{M_{xx\,b}}{R_{x\,b}} - \left(M_{xx\,b} w_{0b,x}\right)_{,x} + z_b^u \chi_z^{bc} - \left(z_b^l \chi_{xz}^b\right)_{,x} - \left(z_b^l \chi_{yz}^b\right)_{,y}$$

$$-\bar{Q}_{55b}^u \left(z_b^u \chi_{xz}^{bc}\right)_{,x} - \bar{Q}_{56b}^u \left(z_b^u \chi_{xz}^{bc}\right)_{,y} - \bar{Q}_{56b}^u \left(z_b^u \chi_{yz}^{bc}\right)_{,x} - \bar{Q}_{66b}^u \left[z_b^u \chi_{yz}^{bc}\right]_{,y} + \frac{z_b^u \bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{x\,b}} + \frac{z_b^u \bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{y\,b}} + \bar{Q}_{33b}^u \chi_{zz}^{bc} + \frac{\bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz'}^{bc}}{R_{x\,b}} + \frac{\bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz'}^{bc}}{R_{y\,b}} = 0.$$

$$\delta w_{2b}: I_{2b}\ddot{w}_{0b} + I_{3b}\ddot{w}_{1b} + \frac{O_{yy\,b}}{R_{y\,b}} + 2M_{zz\,b} - T_{xz\,b,x} - T_{yz\,b,y} + \frac{O_{xx\,b}}{R_{x\,b}} + \left(z_b^u\right)^2 \chi_z^{bc} - \left[\left(z_b^l\right)^2 \chi_{xz}^b\right]_{,x} - \left[\left(z_b^l\right)^2 \chi_{yz}^b\right]_{,y} -$$

$$\bar{Q}_{56b}^u \left[\left(z_b^u\right)^2 \chi_{xz}^{bc}\right]_{,y} - \bar{Q}_{56b}^u \left[\left(z_b^u\right)^2 \chi_{yz}^{bc}\right]_{,x} - \bar{Q}_{66b}^u \left[\left(z_b^u\right)^2 \chi_{yz}^{bc}\right]_{,y} - \bar{Q}_{55b}^u \left[\left(z_b^u\right)^2 \chi_{xz}^{bc}\right]_{,x} + \frac{\left(z_b^u\right)^2 \bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{x\,b}} + \frac{\left(z_b^u\right)^2 \bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{y\,b}}$$

$$+2\bar{Q}_{33b}^u \chi_{zz}^{bc} z_b^u + \frac{2\bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz'}^{bc} z_b^u}{R_{x\,b}} + \frac{2\bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz'}^{bc} z_b^u}{R_{y\,b}} + 2\bar{Q}_{33b}^u \chi_{zz'}^{bc} = 0.$$

$$\delta u_{0c}: I_{0c}\ddot{u}_{0c} + I_{1c}\ddot{u}_{1c} + I_{2c}\ddot{u}_{2c} + I_{3c}\ddot{u}_{3c} - N_{xx\,c,x} - N_{xy\,c,y} - \frac{Q_{xz\,c}^*}{R_{x\,c}} - \chi_x^{tc} - \chi_x^{bc} + \frac{Q_{55c}\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,c} + z_c^u} + \frac{Q_{55c}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,c} + z_c^l} +$$

$$Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz}^{tc}}{\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} + Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz}^{bc}}{\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} - Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)^2}\right]_{,x} - Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{R_{x\,c}\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)^2}\right]_{,x} = 0.$$

$$\delta u_{1c}: I_{1c}\ddot{u}_{0c} + I_{2c}\ddot{u}_{1c} + I_{3c}\ddot{u}_{2c} - M_{xx\,c,x} - M_{xy\,c,y} + Q_{xz\,c} - \frac{S_{xz\,c}^*}{R_{x\,c}} - z_c^u \chi_x^{tc} - z_c^l \chi_x^{bc} - Q_{55c}\chi_{xz}^{tc} + \frac{Q_{55c} z_c^u \chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,c} + z_c^u} - Q_{55c}\chi_{xz}^{bc} + \frac{z_c^l Q_{55c}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,c} + z_c^l}$$

$$+Q_{13c}\left[\frac{z_c^u \chi_{zz}^{tc}}{\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} + Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz}^{bc} z_c^l}{\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} - Q_{13c}\left[\frac{z_c^u \chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)^2}\right]_{,x} + Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}}{\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} -$$

$$Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} z_c^l}{R_{x\,c}\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)^2}\right]_{,x} + Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} = 0.$$

$$\delta u_{2c}: I_{2c}\ddot{u}_{0c} + I_{3c}\ddot{u}_{1c} - O_{xx\,c,x} - O_{xy\,c,y} + 2S_{xz\,c} - \frac{T_{xz\,c}^*}{R_{x\,c}} - \left(z_c^u\right)^2 \chi_x^{tc} - \left(z_c^l\right)^2 \chi_x^{bc} - 2z_c^u Q_{55c}\chi_{xz}^{tc} + \frac{\left(z_c^u\right)^2 Q_{55c}\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,c} + z_c^u} - 2z_c^l Q_{55c}\chi_{xz}^{bc}$$

$$+\frac{\left(z_c^l\right)^2 Q_{55c}\chi_{xz}^{bc}}{R_{x\,c} + z_c^l} + Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^u\right)^2 \chi_{zz}^{tc}}{\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} + Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^l\right)^2 \chi_{zz}^{bc}}{\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} - Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^u\right)^2 \chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)^2}\right]_{,x} + 2Q_{13c}\left[\frac{z_c^u \chi_{zz'}^{tc}}{\left(1 + z_c^u/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}$$

$$-Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^l\right)^2}{R_{x\,c}\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)^2}\right]_{,x} + 2Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} z_c^l}{\left(1 + z_c^l/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x} = 0.$$

$$\delta u_{3c}: I_{3c}\ddot{u}_{0c} - H_{xx\,c,x} - H_{xy\,c,y} + 3T_{xz\,c} - \frac{V_{xz\,c}^*}{R_{x\,c}} - \left(z_c^u\right)^3 \chi_x^{tc} - \left(z_c^l\right)^3 \chi_x^{bc} - 3\left(z_c^u\right)^2 Q_{55c}\chi_{xz}^{tc} + \frac{\left(z_c^u\right)^3 Q_{55c}\chi_{xz}^{tc}}{R_{x\,c} + z_c^u} - 3\left(z_c^l\right)^2 Q_{55c}\chi_{xz}^{bc}$$

$$+\frac{\left(z_c^l\right)^3 Q_{55c}\,\chi_{xz}^{bc}}{R_{xc}+z_c^l}+Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^u\right)^3\chi_{zz}^{tc}}{\left(1+z_c^u/R_{xc}\right)}\right]_{,x}+Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^l\right)^3\chi_{zz}^{bc}}{\left(1+z_c^l/R_{xc}\right)}\right]_{,x}-Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^u\right)^3\chi_{zz'}^{tc}}{R_{xc}\left(1+z_c^u/R_{xc}\right)^2}\right]_{,x}+3Q_{13c}\left[\frac{\left(z_c^u\right)^2\chi_{zz'}^{tc}}{\left(1+z_c^u/R_{xc}\right)}\right]_{,x}$$

$$-Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^l\right)^3}{R_{xc}\left(1+z_c^l/R_{xc}\right)^2}\right]_{,x}+3Q_{13c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^l\right)^2}{\left(1+z_c^l/R_{xc}\right)}\right]_{,x}=0.$$

$$\delta v_{0c}:I_{0c}\ddot{v}_{0c}+I_{1c}\ddot{v}_{1c}+I_{2c}\ddot{v}_{2c}+I_{3c}\ddot{v}_{3c}-N_{yyc,y}-N_{yxc,x}-\frac{Q_{yzc}^*}{R_{yc}}-\chi_y^{tc}-\chi_y^{bc}+\frac{Q_{66c}\chi_{yz}^{tc}}{R_{yc}+z_c^u}+\frac{Q_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}}{R_{yc}+z_c^l}+$$

$$Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{tc}}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{bc}}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}}{R_{yc}\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{R_{yc}\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}=0.$$

$$\delta v_{1c}:I_{1c}\ddot{v}_{0c}+I_{2c}\ddot{v}_{1c}+I_{3c}\ddot{v}_{2c}-M_{yyc,y}-M_{yxc,x}+Q_{yzc}-\frac{S_{yzc}^*}{R_{yc}}-z_c^u\chi_y^{tc}-z_c^l\chi_y^{bc}-Q_{66c}\chi_{yz}^{tc}+\frac{z_c^uQ_{66c}\chi_{yz}^{tc}}{R_{yc}+z_c^u}-Q_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}+$$

$$\frac{z_c^lQ_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}}{R_{yc}+z_c^l}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{tc}z_c^u}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{bc}z_c^l}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}z_c^u}{R_{yc}\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-$$

$$Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}z_c^l}{R_{yc}\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}=0.$$

$$\delta v_{2c}:I_{2c}\ddot{v}_{0c}+I_{3c}\ddot{v}_{1c}-O_{yyc,y}-O_{yxc,x}+2S_{yzc}-\frac{T_{yzc}^*}{R_{yc}}-\left(z_c^u\right)^2\chi_y^{tc}-\left(z_c^l\right)^2\chi_y^{bc}-2z_c^uQ_{66c}\chi_{yz}^{tc}+\frac{\left(z_c^u\right)^2Q_{66c}\,\chi_{yz}^{tc}}{R_{yc}+z_c^u}-$$

$$2z_c^lQ_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}+\frac{\left(z_c^l\right)^2Q_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}}{R_{yc}+z_c^l}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{tc}\left(z_c^u\right)^2}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^l\right)^2}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^u\right)^2}{R_{yc}\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}+$$

$$2Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}z_c^u}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^l\right)^2}{R_{yc}\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}+2Q_{23c}\left[\frac{z_c^l\,\chi_{zz'}^{bc}}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}=0.$$

$$\delta v_{3c}:I_{3c}\ddot{v}_{0c}-H_{yyc,y}-H_{yxc,x}+3T_{yzc}-\frac{V_{yzc}^*}{R_{yc}}-\left(z_c^u\right)^3\chi_y^{tc}-\left(z_c^l\right)^3\chi_y^{bc}-3\left(z_c^u\right)^2Q_{66c}\chi_{yz}^{tc}+\frac{\left(z_c^u\right)^3Q_{66c}\,\chi_{yz}^{tc}}{R_{yc}+z_c^u}-$$

$$3\left(z_c^l\right)^2Q_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}+\frac{\left(z_c^l\right)^3Q_{66c}\,\chi_{yz}^{bc}}{R_{yc}+z_c^l}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{tc}\left(z_c^u\right)^3}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}+Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^l\right)^3}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^u\right)^3}{R_{yc}\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}$$

$$+3Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^u\right)^2}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^l\right)^3}{R_{yc}\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)^2}\right]_{,y}+3Q_{23c}\left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^l\right)^2}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}=0.$$

$$\delta w_{0c}:I_{0c}\ddot{w}_{0c}+I_{1c}\ddot{w}_{1c}+I_{2c}\ddot{w}_{2c}+I_{3c}\ddot{w}_{3c}+\frac{N_{xxc}}{R_{xc}}-\left(N_{xxc}w_{0c,x}\right)_{,x}-\left(M_{xxc}w_{1c,x}\right)_{,x}+\frac{N_{yyc}}{R_{yc}}-\left(N_{yyc}w_{0c,y}\right)_{,y}-\left(M_{yyc}w_{1c,y}\right)_{,y}$$

$$-Q_{xzc,x}^*-Q_{yzc,y}^*-\chi_z^{tc}-\chi_z^{bc}+Q_{55c}\left[\frac{\chi_{xz}^{tc}}{\left(1+z_c^u/R_{xc}\right)}\right]_{,x}+Q_{66c}\left[\frac{\chi_{yz}^{tc}}{\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)}\right]_{,y}+Q_{55c}\left[\frac{\chi_{xz}^{bc}}{\left(1+z_c^l/R_{xc}\right)}\right]_{,x}+$$

$$Q_{66c}\left[\frac{\chi_{yz}^{bc}}{\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)}\right]_{,y}-\frac{Q_{13c}\,\chi_{zz}^{tc}}{R_{xc}+z_c^u}-\frac{Q_{23c}\,\chi_{zz}^{tc}}{R_{yc}+z_c^u}-\frac{Q_{13c}\,\chi_{zz}^{bc}}{R_{xc}+z_c^l}-\frac{Q_{23c}\,\chi_{zz}^{bc}}{R_{yc}+z_c^l}+\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{xc}^{\,2}\left(1+z_c^u/R_{xc}\right)^2}+\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{yc}^{\,2}\left(1+z_c^u/R_{yc}\right)^2}$$

$$+\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}}{R_{xc}^{\,2}\left(1+z_c^l/R_{xc}\right)^2}+\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{bc}}{R_{yc}^{\,2}\left(1+z_c^l/R_{yc}\right)^2}=0.$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_{1c}: I_{1c}\ddot{w}_{0c}+I_{2c}\ddot{w}_{1c}+I_{3c}\ddot{w}_{2c}+\frac{M_{xx\,c}}{R_{x\,c}}-\left(M_{xx\,c}w_{0c,x}\right)_{,x}+\frac{M_{yy\,c}}{R_{y\,c}}-\left(M_{yy\,c}w_{0c,y}\right)_{,y}+N_{zz\,c}-S^{*}_{xz\,c,x}-S^{*}_{yz\,c,y}-z_c^{u}\chi_z^{tc}-z_c^{l}\chi_z^{bc}\\
&+Q_{55c}\left[\frac{z_c^{u}\chi_{xz}^{tc}}{\left(1+z_c^{u}/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}+Q_{66c}\left[\frac{z_c^{u}\chi_{yz}^{tc}}{\left(1+z_c^{u}/R_{y\,c}\right)}\right]_{,y}+Q_{55c}\left[\frac{z_c^{l}\chi_{xz}^{bc}}{\left(1+z_c^{l}/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}+Q_{66c}\left[\frac{z_c^{l}\chi_{yz}^{bc}}{\left(1+z_c^{l}/R_{y\,c}\right)}\right]_{,y}-\frac{z_c^{u}Q_{13c}\chi_{zz}^{tc}}{R_{x\,c}+z_c^{u}}-\\
&\frac{Q_{23c}\chi_{zz}^{tc}z_c^{u}}{R_{y\,c}+z_c^{u}}-Q_{33c}\chi_{zz}^{tc}-\frac{Q_{13c}\chi_{zz}^{bc}z_c^{l}}{R_{x\,c}+z_c^{l}}-\frac{Q_{23c}\chi_{zz}^{bc}z_c^{l}}{R_{y\,c}+z_c^{l}}-Q_{33c}\chi_{zz}^{bc}+\frac{z_c^{u}Q_{13c}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}^{2}\left(1+z_c^{u}/R_{x\,c}\right)^{2}}-\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}+z_c^{u}}+\frac{Q_{23c}z_c^{u}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{y\,c}^{2}\left(1+z_c^{u}/R_{y\,c}\right)^{2}}-\\
&\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{y\,c}+z_c^{u}}+\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}z_c^{l}}{R_{x\,c}^{2}\left(1+z_c^{l}/R_{x\,c}\right)^{2}}-\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}}{R_{x\,c}+z_c^{l}}+\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{bc}z_c^{l}}{R_{y\,c}^{2}\left(1+z_c^{l}/R_{y\,c}\right)^{2}}-\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{bc}}{R_{y\,c}+z_c^{l}}=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_{2c}: I_{2c}\ddot{w}_{0c}+I_{3c}\ddot{w}_{1c}+\frac{O_{xx\,c}}{R_{x\,c}}+\frac{O_{yy\,c}}{R_{y\,c}}+2M_{zz\,c}-T^{*}_{xz\,c,x}-T^{*}_{yz\,c,y}-\left(z_c^{u}\right)^{2}\chi_z^{tc}-\left(z_c^{l}\right)^{2}\chi_z^{bc}+Q_{55c}\left[\frac{\left(z_c^{u}\right)^{2}\chi_{xz}^{tc}}{\left(1+z_c^{u}/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}+\\
&Q_{66c}\left[\frac{\left(z_c^{u}\right)^{2}\chi_{yz}^{tc}}{\left(1+z_c^{u}/R_{y\,c}\right)}\right]_{,y}+Q_{55c}\left[\frac{\left(z_c^{l}\right)^{2}\chi_{xz}^{bc}}{\left(1+z_c^{l}/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}+Q_{66c}\left[\frac{\left(z_c^{l}\right)^{2}\chi_{yz}^{bc}}{\left(1+z_c^{l}/R_{y\,c}\right)}\right]_{,y}-\frac{Q_{13c}\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}}{R_{x\,c}+z_c^{l}}-\frac{Q_{23c}\chi_{zz}^{tc}\left(z_c^{u}\right)^{2}}{R_{y\,c}+z_c^{u}}-2z_c^{u}Q_{33c}\chi_{zz}^{tc}\\
&-\frac{Q_{13c}\left(z_c^{u}\right)^{2}\chi_{zz}^{tc}}{R_{x\,c}+z_c^{u}}-\frac{Q_{23c}\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}}{R_{y\,c}+z_c^{l}}-2Q_{33c}\chi_{zz}^{bc}z_c^{l}+\frac{Q_{13c}\left(z_c^{u}\right)^{2}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}^{2}\left(1+z_c^{u}/R_{x\,c}\right)^{2}}-\frac{2Q_{13c}z_c^{u}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{x\,c}+z_c^{u}}\frac{Q_{23c}\left(z_c^{u}\right)^{2}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{y\,c}^{2}\left(1+z_c^{u}/R_{y\,c}\right)^{2}}-\frac{2Q_{23c}z_c^{u}\chi_{zz'}^{tc}}{R_{y\,c}+z_c^{u}}\\
&-2Q_{33c}\chi_{zz'}^{tc}+\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}}{R_{x\,c}^{2}\left(1+z_c^{l}/R_{x\,c}\right)^{2}}-\frac{2Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}z_c^{l}}{R_{x\,c}+z_c^{l}}+\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}}{R_{y\,c}^{2}\left(1+z_c^{l}/R_{y\,c}\right)^{2}}-\frac{2Q_{23c}z_c^{l}\chi_{zz'}^{bc}}{R_{y\,c}+z_c^{l}}-2Q_{33c}\chi_{zz'}^{bc}=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_{3c}: I_{3c}\ddot{w}_{0c}+\frac{H_{xx\,c}}{R_{x\,c}}+\frac{H_{yy\,c}}{R_{y\,c}}+3O_{zz\,c}-V^{*}_{xz\,c,x}-V^{*}_{yz\,c,y}-\left(z_c^{u}\right)^{3}\chi_z^{tc}-\left(z_c^{l}\right)^{3}\chi_z^{bc}+Q_{55c}\left[\frac{\left(z_c^{u}\right)^{3}\chi_{xz}^{tc}}{\left(1+z_c^{u}/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}+Q_{66c}\left[\frac{\left(z_c^{u}\right)^{3}\chi_{yz}^{tc}}{\left(1+z_c^{u}/R_{y\,c}\right)}\right]_{,y}\\
&+Q_{55c}\left[\frac{\left(z_c^{l}\right)^{3}\chi_{xz}^{bc}}{\left(1+z_c^{l}/R_{x\,c}\right)}\right]_{,x}+Q_{66c}\left[\frac{\left(z_c^{l}\right)^{3}\chi_{yz}^{bc}}{\left(1+z_c^{l}/R_{y\,c}\right)}\right]_{,y}-\frac{Q_{13c}\left(z_c^{u}\right)^{3}\chi_{zz}^{tc}}{R_{x\,c}+z_c^{u}}-\frac{Q_{23c}\chi_{zz}^{tc}\left(z_c^{u}\right)^{3}}{R_{y\,c}+z_c^{u}}-3\left(z_c^{u}\right)^{2}Q_{33c}\chi_{zz}^{tc}-\frac{Q_{13c}\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{3}}{R_{x\,c}+z_c^{l}}\\
&-\frac{Q_{23c}\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{3}}{R_{y\,c}+z_c^{l}}-3Q_{33c}\chi_{zz}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}+\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^{u}\right)^{3}}{R_{x\,c}^{2}\left(1+z_c^{u}/R_{x\,c}\right)^{2}}-\frac{3Q_{13c}\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^{u}\right)^{2}}{R_{x\,c}+z_c^{u}}+\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^{u}\right)^{3}}{R_{y\,c}^{2}\left(1+z_c^{u}/R_{y\,c}\right)^{2}}-\frac{3Q_{23c}\chi_{zz'}^{tc}\left(z_c^{u}\right)^{2}}{R_{y\,c}+z_c^{u}}-\\
&6Q_{33c}\chi_{zz'}^{tc}z_c^{u}+\frac{Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{3}}{R_{x\,c}^{2}\left(1+z_c^{l}/R_{x\,c}\right)^{2}}-\frac{3Q_{13c}\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}}{R_{x\,c}+z_c^{l}}+\frac{Q_{23c}\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{3}}{R_{y\,c}^{2}\left(1+z_c^{l}/R_{y\,c}\right)^{2}}-\frac{3Q_{23c}\chi_{zz'}^{bc}\left(z_c^{l}\right)^{2}}{R_{y\,c}+z_c^{l}}-6Q_{33c}\chi_{zz'}^{bc}z_c^{l}=0.
\end{aligned}$$

شرایط مرزی ساده اعمال شده در این تحقیق روی لبه‌های $x=0,a$ و $y=0,b$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
&N_{xxt}=0, M_{xxt}=0, O_{xxt}=0, H_{xxt}=0, v_{0t}=\\
&0, v_{1t}=0, v_{2t}=0, v_{3t}=0, w_{0t}=0, w_{1t}=0, w_{2t}=0,\\
&N_{xxb}=0, M_{xxb}=0, O_{xxb}=0, H_{xxb}=0, v_{0b}=0, v_{1b}\\
&=0, v_{2b}=0, v_{3b}=0, w_{0b}=0, w_{1b}=0, w_{2b}=0,\\
&N_{xxc}=0, M_{xxc}=0, O_{xxc}=0, H_{xxc}=0, v_{0c}=0, v_{1c}=\\
&0, v_{2c}=0, v_{3c}=0, w_{0c}=0, w_{1c}=0, w_{2c}=0, w_{3c}=0.
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

۳- حل معادلات حاکم

میدان‌های جابجایی پنل مرکب ساندویچی دوانحنایه برای شرایط مرزی ساده (رابطه‌ی (۲۴)) بر مبنای سری فوریه دوگانه به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} u_{ij}(x,y,t)\\ v_{ij}(x,y,t)\\ w_{lj}(x,y,t)\\ u_{ic}(x,y,t)\\ v_{ic}(x,y,t)\\ w_{ic}(x,y,t)\end{bmatrix}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\begin{bmatrix}\bar{U}_{ij}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\\ \bar{V}_{ij}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\\ \bar{W}_{lj}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\\ \bar{U}_{ic}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\\ \bar{V}_{ic}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\\ \bar{W}_{ic}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\end{bmatrix}, \tag{۲۵}$$

(i=0,1,2,3), (l=0,1,2),(j=t,b).

و برای ضرایب لاگرانژ به صورت زیر:

$$\begin{bmatrix} \chi_x^{jc}(x,y,t) \\ \chi_y^{jc}(x,y,t) \\ \chi_z^{jc}(x,y,t) \\ \chi_{xz}^{j}(x,y,t) \\ \chi_{yz}^{j}(x,y,t) \\ \chi_{xz}^{jc}(x,y,t) \\ \chi_{yz}^{jc}(x,y,t) \\ \chi_{zz}^{jc}(x,y,t) \\ \chi_{zz'}^{jc}(x,y,t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \begin{bmatrix} \overline{X}_{jc}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \overline{Y}_{jc}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \\ \overline{Z}_{jc}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \overline{XZ}_{j}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \overline{YZ}_{j}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \\ \overline{XZ}_{jc}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \overline{YZ}_{jc}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \\ \overline{ZZ}_{jc}^{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \\ \overline{ZZ'}_{jc}^{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \end{bmatrix}, \qquad (۲۶)$$

$$(j=t,b);\alpha_m=\frac{m\pi}{a},\beta_n=\frac{n\pi}{b}.$$

جایی‌که χ_x^{tc}، χ_y^{tc} و χ_z^{tc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در راستای محورهای x، y و z در فصل مشترک رویه بالایی با هسته، χ_x^{bc}، χ_y^{bc} و χ_z^{bc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در راستای محورهای x y و z در فصل مشترک رویه پایینی با هسته، χ_{xz}^{t}، χ_{yz}^{t}، χ_{xz}^{b} و χ_{yz}^{b} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط صفر شدن تنش‌های برشی عرضی در سطح خارجی رویه‌ها، χ_{xz}^{tc}، χ_{yz}^{tc}، χ_{xz}^{bc} و χ_{yz}^{bc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی تنش‌های برشی عرضی در مرز رویه‌ها با هسته است، χ_{zz}^{tc} و χ_{zz}^{bc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی تنش‌های نرمال در مرز رویه‌ها با هسته است و $\chi_{zz'}^{tc}$ و $\chi_{zz'}^{bc}$ بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی گرادیان تنش نرمال عرضی در مرز رویه‌ها با هسته است. همچنین $\overline{U}_{ij}^{mn}$، $\overline{V}_{ij}^{mn}$، $\overline{W}_{lj}^{mn}$، $\overline{U}_{ic}^{mn}$، $\overline{V}_{ic}^{mn}$، $\overline{W}_{ic}^{mn}$، $\overline{X}_{jc}^{mn}$، $\overline{Y}_{jc}^{mn}$، $\overline{Z}_{jc}^{mn}$، $\overline{XZ}_{j}^{mn}$، $\overline{YZ}_{j}^{mn}$، $\overline{XZ}_{jc}^{mn}$، $\overline{YZ}_{jc}^{mn}$، $\overline{ZZ}_{jc}^{mn}$ و $\overline{ZZ'}_{jc}^{mn}$ ضرایب فوریه، m، تعداد نیم موج‌ها در جهت x و n، تعداد نیم موج‌ها در جهت y می‌باشند.

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب با ضخامت متغیر از روش باقیمانده وزنی به شیوه توابع وزنی گالرکین استفاده می‌شود:

$$\int_0^a\int_0^b\left(\left[\overline{L}\right]\{\phi\}\right)\{\psi\}dxdy=\{0\}. \qquad (۲۷)$$

جایی‌که $\{\phi\}$ بردار شکل‌مودهای طبیعی و $\{\psi\}$ بردار توابع وزنی هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند : (i=0,1,2,3), (l=0,1,2),(j=t,b)

$$\begin{aligned}\{\phi\}^T=\{&\overline{U}_{ij}^{mn}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\overline{V}_{ij}^{mn}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\\ &\overline{W}_{lj}^{mn}\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\overline{U}_{ic}^{mn}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\overline{V}_{ic}^{mn}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\overline{W}_{ic}^{mn}\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\overline{X}_{jc}^{mn}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\overline{Y}_{jc}^{mn}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\\ &\overline{Z}_{jc}^{mn}\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\overline{XZ}_{j}^{mn}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\overline{YZ}_{j}^{mn}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\overline{XZ}_{jc}^{mn}\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\overline{YZ}_{jc}^{mn}\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\overline{ZZ}_{jc}^{mn}\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\overline{ZZ'}_{jc}^{mn}\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\};\\ \{\psi\}^T=\{&\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\\ &\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\\ &\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y),\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y),\\ &\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\}.\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲۷)، معادله حاکم به صورت زیر حاصل می‌شود : (i=0,1,2,3), (l=0,1,2),(j=t,b)

$$\begin{aligned}&[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=\{0\};\{X\}^T=\\ &\{\overline{U}_{ij}^{mn},\overline{V}_{ij}^{mn},\overline{W}_{lj}^{mn},\overline{U}_{ic}^{mn},\overline{V}_{ic}^{mn},\overline{W}_{ic}^{mn},\overline{X}_{jc}^{mn},\\ &\overline{Y}_{jc}^{mn},\overline{Z}_{jc}^{mn},\overline{XZ}_{j}^{mn},\overline{YZ}_{j}^{mn},\overline{XZ}_{jc}^{mn},\overline{YZ}_{jc}^{mn},\overline{ZZ}_{jc}^{mn},\overline{ZZ'}_{jc}^{mn}\}\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

جایی‌که $\{X\}$ بردار ثوابت شکل‌مود، $[K]$ماتریس سفتی و $[M]$ ماتریس جرم می‌باشند. در نتیجه معادله مقدار ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K-\lambda_{mn}M]\{X\}=\{0\}. \qquad (۳۰)$$

جایی‌که $\lambda_{mn}=\omega_{mn}^{۲}$ می‌باشد. کدنویسی معادلات و حل معادله مقادیر ویژه به دست آمده در نرم‌افزار MATLAB 2013R انجام شده است.

جدول ۱ : مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پنل همسانگرد دوانحنایه

$(a/b=1, \nu=0/3, R_x=R_y=5a.)$

Table 1. Comparing dimensionless fundamental natural frequency of the doubly curved isotropic panel

a/h	روش حاضر	[۲۱] FEM	[۲۲] HSDT-2D
۵	۰/۰۳۴۴۴	_	۰/۰۳۴۷۰
۱۰	۰/۰۹۸۰۱	۰/۰۹۸۲۲	۰/۰۹۸۲۶
۲۰	۰/۰۲۸۶۷	۰/۰۲۸۷۳	۰/۰۲۸۷۲

۴- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات پنل‌های دوانحنایه مرکب ساندویچی ارائه خواهد شد.

۱-۳- اعتبارسنجی نتایج

به منظور اعتبارسنجی روش ارائه شده، نتایج حاصله از تحلیل ارتعاشات پنل ساندویچی تخت و انحنادار با استفاده از تئوری حاضر با نتایج تحلیلی و عددی ارائه شده در چندین مرجع مختلف مقایسه می‌شوند.

۱-۱-۴- تحلیل ارتعاش آزاد پنل همسانگرد دوانحنایه

در این بخش، تحلیل ارتعاش آزاد پنل همسانگرد دوانحنایه با شرایط مرزی ساده بررسی می‌شود. در جدول ۱، فرکانس طبیعی اول بی‌بعد($\bar{\omega}=\omega h(\rho/G)^{1/2}$) به دست آمده از تئوری حاضر با نتایج به دست آمده از مدل المان محدود[۱] [۲۱] و تئوری مرتبه بالای دوبعدی[۲] [۲۲] برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت پنل ($a/h=5,10,20$) مقایسه شده است. جدول ۱ نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده از تئوری حاضر انطباق خوبی با نتایج به دست آمده از مدل المان محدود [۲۱] و تئوری مرتبه بالای دو بعدی [۲۲]دارد.

۲-۱-۴ تحلیل ارتعاش آزاد پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه

در این بخش، تحلیل ارتعاش آزاد پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه با شرایط مرزی ساده بررسی می‌شود. خواص مواد بکار رفته برای رویه‌های مرکب و هسته فوم در جدول ۲ آورده شده است. لایه‌چینی پنل ساندویچی به صورت لایه متعامد [۰/۹۰/هسته/۰/۹۰] و متقارن می‌باشد. در جدول ۳، فرکانس طبیعی اول بی‌بعد ($\bar{\omega}=\omega a^2(\rho_t/E_{2t})^{1/2}/h$) به دست آمده از تئوری حاضر با نتایج به دست آمده از تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی[۳] [۸] مقایسه شده است. جدول ۳ نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده از تئوری حاضر انطباق خوبی با نتایج به دست آمده از تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی دارد. این انطباق برای پنل‌های نازک بهتر است، و برای پنل‌های ضخیم اندکی اختلاف بین نتایج مشاهده می‌شود. این اختلاف بخاطر این است که در تئوری حاضر انعطاف‌پذیری هسته به صورت بهتری مدل شده است و در تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی از تنش عرضی در رویه‌ها و تنش‌های صفحه‌ای در هسته صرف‌نظر شده است.

۲-۴- بررسی اثر تغییر خواص مواد رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه

شکل ۲ نشان می‌دهد با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها از یک تا دوازده، فرکانس طبیعی بی‌بعد برای هر سه نوع لایه‌چینی کاهش می‌یابد که این رفتار قابل انتظار بود، چرا که در این مثال با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها و ثابت در نظر گرفتن مدول الاستیسیته رویه بالایی، مدول الاستیسیته در راستای الیاف رویه پایینی کاهش پیدا می‌کند، در نتیجه سفتی پنل و به تبع آن فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. به علاوه شکل ۲ نشان می‌دهد که نرخ کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها برای پنل با لایه‌چینی زاویه‌ای بیشتر از دو نوع لایه‌چینی دیگر است. نکته قابل مشاهده دیگر شکل ۲ این است که برای مدول الاستیسیته رویه‌های بالا، فرکانس طبیعی بی‌بعد تقریباً مستقل از نوع لایه‌چینی است. هم‌چنین شکل ۲ نشان می‌دهد که پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه با لایه‌چینی زاویه‌ای برای همه‌ی نسبت‌های مدول الاستیسیته رویه‌ها دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد و بهترین رفتار دینامیکی است.

۳-۴- بررسی اثر نسبت طول به عرض پنل بر روی فرکانس طبیعی پنل مرکب ساندویچی دوانحنایه

در این بخش، اثر نسبت طول به عرض پنل (a/b) بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد ($\omega=\bar{\omega}a^2(\rho_t/E_{2t})^{1/2}/h$) پنل

1 Finite Element Method (FEM)
2 Higher order Shear. Deformation Theory (HSDT)-2D
3 High-order Sandwich Panel Theory (HSAPT)

جدول ۲ : خواص مواد به کار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی[۳]

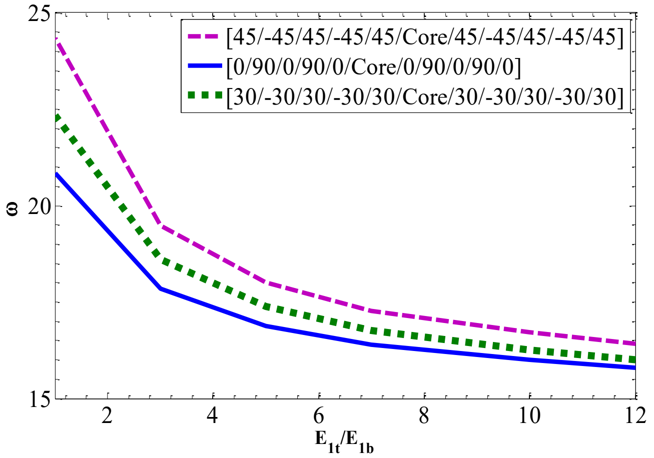
Table 2. Material properties of a composite sandwich panel [3]

هسته	$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89\,\text{MPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45\,\text{MPa}, \nu = 0,\ \rho = 97\,\text{kg}/\text{m}^3.$
رویه‌ها	$E_1 = 131\ \text{GPa},\ E_2 = E_3 = 10.34\,\text{GPa}, G_{12} = G_{13} = 6.895\,\text{GPa}, G_{13} = 6.205\,\text{GPa},$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22,\ \nu_{23} = 0.49,\ \rho = 1627\ \text{kg}/\text{m}^3.$

جدول ۳ : مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه با لایه‌چینی متعامد

Table 3. Comparing dimensionless fundamental natural frequency of the doubly curved composite sandwich panel with Cross ply lay-up.

h/a	۰/۱		۰/۰۱	
R/a	روش حاضر	[۳] HSAPT	روش حاضر	[۳] HSAPT
۱	۱۱/۲۰۵	۱۲/۳۱۶	۱۱۶/۸۱۹	۱۲۳/۶۳۳
۲	۵/۹۷۸	۶/۷۲۶	۶۲/۶۱۰	۶۵/۹۰۶
۳	۴/۴۸۶	۴/۷۳۷	۴۳/۲۵۵	۴۵/۲۷۴
۴	۳/۵۱۱	۳/۷۷۲	۳۱/۸۹۸	۳۴/۹۹۸
۵	۲/۹۶۹	۳/۲۲۲	۲۷/۶۴۸	۲۸/۹۶۷
۱۰	۲/۱۷۴	۲/۲۸۳	۱۷/۴۸۵	۱۷/۹۰۹
۲۰	۱/۷۷۸	۱/۹۷۸	۱۳/۴۸۰	۱۳/۸۰۰



شکل ۲ : اثر نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد

Fig. 2. The effect of elastic modulus ratio of the face sheets on the dimensionless fundamental natural frequency

جدول ۴ : مشخصات هندسی و خواص مواد بکار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه

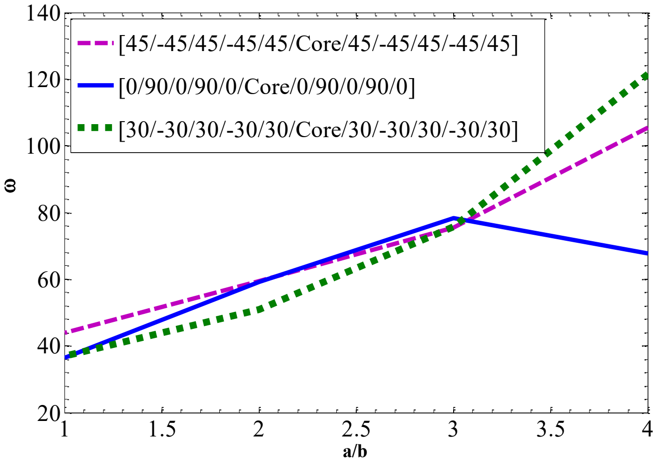
Table 4. Mechanical and geometrical properties of a doubly curved composite sandwich panel

هسته	$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89\,\text{MPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45\,\text{MPa}, \nu = 0.25, \rho = 130\ \ \text{kg}/\text{m}^3.$
رویه‌ها	$E_1 = 131\ \text{GPa},\ E_2 = E_3 = 10.34\,\text{GPa}, G_{12} = G_{13} = 6.895\,\text{GPa}, G_{13} = 6.205\,\text{GPa},$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22,\ \nu_{23} = 0.49,\ \rho = 1627\ \text{kg}/\text{m}^3.$
هندسه	$h_c/h = 0.7,\ \ a = 10h,\ R_{xt} = R_{xb} = R_{yt} = R_{yb} = R = a.$

مرکب ساندویچی دوانحنایه برای سه نوع لایه‌چینی مختلف متعامد [۰/۹۰/۰/هسته/۰/۹۰/۰]، لایه زاویه‌ای [۴۵/۴۵-/۴۵/هسته/۴۵/۴۵-/۴۵]، و [۳۰/۳۰-/۳۰/هسته/۳۰/۳۰-/۳۰] بررسی می‌شود. مشخصات هندسی و خواص مواد به کار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه در جدول ۴ آورده شده است. در شکل ۳، اثر نسبت طول به عرض پنل بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل مرکب ساندویچی دوانحنایه نشان داده شده است. همانطور که شکل ۳ نشان می‌دهد با افزایش نسبت طول به عرض پنل از یک تا سه فرکانس طبیعی بی‌بعد به سرعت افزایش پیدا می‌کند. هم‌چنین شکل ۳ نشان می‌دهد که برای نسبت‌های پایین طول به عرض پنل(نسبت طول به عرض پنل از یک تا سه)، فرکانس طبیعی بی‌بعد برای هر سه نوع لایه‌چینی نزدیک به هم است، ولی با افزایش بیشتر این نسبت، اختلاف بین نتایج لایه‌چینی‌های مختلف بشدت افزایش پیدا می‌کند. برای نسبت طول به عرض پنل بزرگ‌تر از سه، فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل با لایه‌چینی متعامد بر خلاف دو لایه‌چینی دیگر کاهش می‌یابد.

۴-۴- بررسی اثر نسبت ضخامت‌های رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی پنل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر

در این بخش اثر نسبت ضخامت‌های رویه بالایی به رویه پایینی (h_t/h_b)بر روی پاسخ ارتعاش آزاد پنل ساندویچی دوانحنایه با



شکل ۳ : اثر نسبت طول به عرض پنل بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد
Fig. 3. The effect of the panel length to width ratio on the dimensionless fundamental natural frequency

ضخامت متغیر با رویه‌های با جنس‌های مختلف مطالعه می‌شود. در این مثال سه پنل ساندویچی با رویه‌های بالایی و پایینی با جنس‌های مختلف آلومینیومی، فولادی و مرکب در نظر گرفته شده است. خواص مواد رویه‌ها و هسته مطابق جدول ۵ می‌باشد. همانطور که در ردیف آخر جدول ۵ مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن شعاع انحناهای منفی و مثبت برای رویه‌های بالایی و پایینی پنل ساندویچی، ضخامت هسته در هر نقطه متفاوت است.

در شکل ۴، اثر نسبت ضخامت‌های رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد ($\omega=\bar{\omega}a^{2}(\rho_t/E_{2t})^{1/2}/h$)پنل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر با جنس‌های مختلف آلومینیومی، فولادی و مرکب نشان داده شده است. همانطور که شکل ۴ نشان می‌دهد با افزایش نسبت ضخامت‌های رویه‌ها برای هر سه نوع پنل، فرکانس طبیعی بی‌بعد تغییرات محسوسی ندارد. واضح است که با افزایش ضخامت رویه بالایی، سفتی پنل به نسبت افزایش وزن پنل، بیشتر افزایش می‌یابد و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند، اما دلیل تغییرات ناچیز فرکانس طبیعی بی‌بعد را باید در نحوه بی‌بعدسازی جستجو کرد، چرا که با افزایش ضخامت رویه، ضخامت کل(h) نیز افزایش می‌یابد و با توجه به اینکه h در مخرج کسر بی‌بعدسازی قرار دارد، باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. در نتیجه فرکانس طبیعی بی‌بعد تغییرات محسوسی ندارد. هم‌چنین شکل ۴ نشان می‌دهد که پنل ساندویچی با رویه‌های مرکب دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد برای همه‌ی نسبت ضخامت‌های رویه‌ها است و دارای بهترین رفتار دینامیکی می‌باشد و پس از آن، پنل ساندویچی با رویه‌های آلومینیومی دارای رفتار دینامیکی بهتری نسبت به پنل ساندویچی با رویه‌های فولادی است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب و همسانگرد با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی ارتقا یافته انجام شد. می‌توان ادعا نمود که در این تحقیق یک تئوری جدید مرتبه بالا برای تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر ارائه شده است.

پس از بررسی و جمع‌بندی نتایج عددی حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های ساندویچی مرکب و همسانگرد با ضخامت متغیر، می‌توان موارد زیر را نتیجه‌گیری نمود:

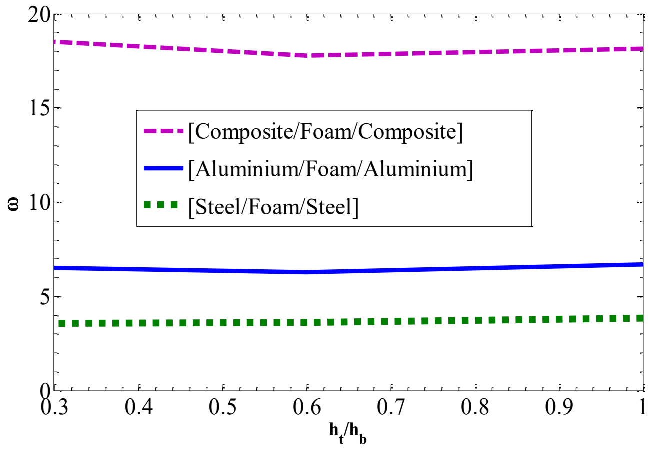
- تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی جدید مورد استفاده در این مقاله می‌تواند با دقت خوبی رفتار دینامیکی پنل‌های ساندویچی انحنادار را پیش‌بینی کند.
- با افزایش نسبت طول به عرض پنل دوانحنایه ساندویچی مرکب، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش پیدا می‌کند.
- با افزایش نسبت ضخامت‌های رویه‌ها، فرکانس طبیعی بی‌بعد برای پنل ساندویچی با رویه‌های مرکب، آلومینیومی و فولادی تغییرات محسوسی ندارد. پنل ساندویچی با رویه‌های مرکب دارای بهترین رفتار دینامیکی می‌باشد و پس از آن، پنل ساندویچی با رویه‌های آلومینیومی دارای رفتار دینامیکی بهتری نسبت به پنل ساندویچی با رویه‌های فولادی است.
- با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد و بیشینه نرخ کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها مربوط به پنل با لایه‌چینی زاویه‌ای می‌باشد.
- پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه با لایه‌چینی زاویه‌ای برای همه‌ی نسبت‌های مدول الاستیسیته رویه‌ها، دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد و بهترین رفتار دینامیکی است.

به منظور کامل‌تر شدن و کاربردی‌تر شدن پژوهش حاضر، تحقیقات زیر پیشنهاد می‌شود:

جدول ۵ : مشخصات هندسی و خواص مواد به کار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر

Table 5. Mechanical and geometrical properties of a doubly curved composite sandwich panel with variable thickness

$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89\,\text{MPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45\,\text{MPa}, \nu = 0.25, \rho = 130\ \text{kg/m}^3.$	هسته
$E_1 = 131\ \text{GPa},\ E_2 = E_3 = 10.34\,\text{GPa}, G_{12} = G_{13} = 6.895\,\text{GPa}, G_{13} = 6.205\,\text{GPa},$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22,\ \nu_{23} = 0.49,\ \rho = 1627\ \text{kg/m}^3.$	رویه مرکب
$E_1 = E_2 = E_3 = 70\ \text{GPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 26\ \text{GPa},\ \nu = 0.3,\ \rho = 2700\ \text{kg/m}^3.$	رویه آلومینیومی
$E_1 = E_2 = E_3 = 210\ \text{GPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 77\ \text{GPa},\ \nu = 0.3,\ \rho = 7800\ \text{kg/m}^3.$	رویه فولادی
$R_{xt} = R_{yt} = 4a, R_{xb} = R_{yb} = -4a.$	هندسه



شکل ۴ : اثر نسبت ضخامت‌های رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر

Fig. 4. The effect of the thickness ratio of the face sheets on the dimensionless fundamental natural frequency of the doubly curved composite sandwich panel

- تحلیل ضربه پنل‌های مرکب ساندویچی دوانحنایه با استفاده از تئوری جدید.

- تحلیل کمانش و ضربه پنل‌های مرکب ساندویچی مخروطی شکل با استفاده از تئوری جدید.

- تحلیل کمانش و ضربه پنل‌های دوانحنایه ساخته شده از مواد هدفمند و مواد مرکب با لایه‌های فلزی با استفاده از تئوری جدید.

- تحلیل پس‌کمانش پنل‌های ساندویچی با استفاده از تئوری جدید.

- بهینه‌سازی آیروالاستیک پنل‌های مرکب ساندویچی دوانحنایه.

مراجع

[1] H.G. Allen, CHAPTER 1 - INTRODUCTION, in: H.G. Allen (Ed.) Analysis and Design of Structural Sandwich Panels, Pergamon, 1969, pp. 1-7.

[2] W. Zhen, C. Wanji, A C0-type higher-order theory for bending analysis of laminated composite and sandwich plates, Composite Structures, 92(3) (2010) 653-661.

[3] H. Biglari, A.A. Jafari, High-order free vibrations of doubly-curved sandwich panels with flexible core based on a refined three-layered theory, Composite Structures, 92(11) (2010) 2685-2694.

[4] G. Giunta, F. Biscani, S. Belouettar, E. Carrera, Hierarchical modelling of doubly curved laminated composite shells under distributed and localised loadings, Composites Part B: Engineering, 42(4) (2011) 682-691.

[5] A.S. Oktem, C. Guedes Soares, Boundary discontinuous Fourier solution for plates and doubly curved panels using a higher order theory, Composites Part B: Engineering, 42(4) (2011) 842-850.

[6] M.S. Qatu, Effect of inplane edge constraints on natural frequencies of simply supported doubly curved shallow shells, Thin-Walled Structures, 49(7) (2011) 797-803.

[7] F. Alijani, M. Amabili, K. Karagiozis, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells, Journal of Sound and Vibration, 330(7) (2011) 1432-1454.

[8] K.M. Fard, A. Sayyidmousavi, Z. Fawaz, H. Bougherara, Finite element buckling analysis of laminated composite sandwich panels with

107 (2014) 675-697.

[16] M. Livani, K. MalekzadehFard, S. Shokrollahi, Higher order flutter analysis of doubly curved sandwich panels with variable thicknesses under aerothermoelastic loading, Structural Engineering and Mechanics, 60(1) (2016) 1-19.

[17] A. Shoshtari, R. Montashlo, Linear and Nonlinear free vibration of functionally graded magneto-electroelastic rectangular plate based on the third order shear deformation theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering (In Persian), 49(4) (2018) 743-758

[18] Y. Frostig, O.T. Thomsen, High-order free vibrations of sandwich panels with a flexible core, International Journal of Solids Structures, 41 (2004) 1697-1724.

[19] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plate and Shells, CRC Press, Texas, USA, 2006.

[20] A. Sankar, S. Natarajan, T.B. Zineb, M. Ganapathi, Investigation of supersonic flutter of thick doubly curved sandwich panels with CNT reinforced facesheets using higher-order structural theory, Composite Structures, 127 (2015) 340-355.

[21] L.R. Kumar, P.K. Datta, D.L. Prabhakara, Dynamic instability characteristics of doubly curved panels subjected to partially distributed follower edge loading with damping, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 218(1) (2004) 67-81.

[22] H. Matsunaga, Vibration and stability of thick simply supported shallow shells subjected to in-plane stresses, Journal of Sound and Vibration, 225(1) (1999) 41-60.

transversely flexible core carrying attached elastic strip, Journal of Sandwich Structures & Materials, 14(6) (2012) 715-733.

[9] E. Viola, F. Tornabene, N. Fantuzzi, General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels, Composite Structures, 95 (2013) 639-666.

[10] L. He, Y.-S. Cheng, J. Liu, Precise bending stress analysis of corrugated-core, honeycomb-core and X-core sandwich panels, Composite Structures, 94(5) (2012) 1656-1668.

[11] M. Yaqoob Yasin, S. Kapuria, An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells, Composite Structures, 98 (2013) 202-214.

[12] E. Ghavanloo, S.A. Fazelzadeh, Free vibration analysis of orthotropic doubly-curved shallow shells based on the gradient elasticity, Composites Part B: Engineering, 45(1) (2013) 1448-1457.

[13] D.A. Maturi, A.J.M. Ferreira, A.M. Zenkour, D.S. Mashat, Analysis of sandwich plates with a new layerwise formulation, Composites Part B: Engineering, 56 (2014) 484-489.

[14] X. Wang, G. Shi, A simple and accurate sandwich plate theory accounting for transverse normal strain and interfacial stress continuity, Composite Structures, 107 (2014) 620-628.

[15] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, E. Carrera, Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method, Composite Structures,