



## بررسی ارتعاشات آزاد صفحه‌های FGM دارای بازشو و سخت‌کننده

مجتبی شهرکی<sup>۱</sup>، فرزاد شهابیان<sup>۲\*</sup>، رضا جمعه منطری<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد عمران گرایش سازه، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران  
<sup>۲</sup> استاد گروه مهندسی عمران گرایش سازه، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران،  
<sup>۳</sup> کارشناس ارشد عمران گرایش سازه، فارغ‌التحصیل دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۱۱-۲۷  
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۱-۰۱  
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۱-۱۵  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۲۱

### کلمات کلیدی:

صفحه‌ی FGM  
شاخص توان حجمی  
ارتعاشات آزاد  
بازشو  
سخت‌کننده

**خلاصه:** مواد هدفمند (FGM) گونه‌ای از مواد مرکب هستند که به واسطه‌ی پیوستگی ترکیب مواد تشکیل‌دهنده به صورت هدفمند، خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد مرکب چندلایه دارا می‌باشند. بیش‌ترین کاربرد این مواد در سازه‌های جدار نازک نظیر صفحه‌ها و پوسته‌ها می‌باشد. همچنین به دلیل بعضی مسایل اجرایی، ایجاد بازشو و سخت‌کننده در ورق‌ها ضرورت می‌یابد لذا در این مقاله به بررسی پارامترهای تاثیرگذار بر روی ارتعاشات آزاد صفحه‌های هدفمند دارای بازشو و سخت‌کننده پرداخته شده است. برای این کار، با استفاده از نرم‌افزار آباکوس در ابتدا، اثر پارامترهای مهم نظیر شاخص توان حجمی، ابعاد هندسی و شرایط تکیه‌گاهی صفحه مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که ضخامت و شاخص توان حجمی به ترتیب دارای بیش‌ترین و کم‌ترین میزان تأثیر بر روی فرکانس‌های طبیعی هر یک از مدهای صفحه‌ی FGM می‌باشند و با افزایش شرایط تکیه‌گاهی ساده در لبه‌های صفحه (کاهش گیرداری تکیه‌گاهی) مقدار فرکانس‌های طبیعی صفحه کاهش یافته است. در ادامه، تأثیر بازشو و سخت‌کننده بر روی فرکانس‌های طبیعی صفحه صورت گرفته است که ملاحظه شد بازشوی دایره‌ای تأثیر بیش‌تری بر روی فرکانس طبیعی صفحه نسبت به بازشوی مربعی دارد و همچنین، ضخامت سخت‌کننده نسبت به ارتفاع آن دارای اثر بیش‌تری بر روی فرکانس طبیعی صفحه‌ی FGM می‌باشد.

### ۱- مقدمه

امروزه مواد هدفمند به‌عنوان موادی با مقاومت حرارتی بالا و تنش‌های حرارتی پایین شهرت یافته‌اند. کاربرد این مواد در سازه‌هایی که در معرض محیط‌هایی با شوک‌های حرارتی قرار می‌گیرند، مانند سازه‌های فضایی، مرسوم است. گرچه این مواد در ابتدا به‌منظور استفاده در سازه‌های فضاپیما و راکتورهای هسته‌ای طراحی شدند؛ ولی در سال‌های اخیر کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به اجزای موتورهای انفجاری، وسایل مغناطیسی، ابزار برش و پوشش محافظه‌ی احتراق پیشران موشک نام برد [۱]. این مواد که جزء مواد مرکب جدید دسته‌بندی می‌شوند، اولین بار توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی [۲، ۳] در سال ۱۹۸۴ تولید شد. شکل معمول مواد هدفمند، از سرامیک و فولاد تشکیل شده است. سرامیک توانایی

ارتعاشات آزاد یک سیستم در اثر اعمال نیروهای ذاتی و لاینفک خود تحت یک تحریک اولیه بدون تأثیر نیروی خارجی نوسان می‌کند. یک سیستم تحت ارتعاش آزاد با یک یا چند فرکانس طبیعی خود منتشر می‌شود، اما در ارتعاشات اجباری که تحت تأثیر نیروهای خارجی صورت می‌پذیرد، اگر فرکانس نیروی محرک بر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم منطبق شود حالت تشدید (رزونانس) اتفاق می‌افتد. در این صورت نوسانی با دامنه‌ی بزرگ که می‌تواند سبب شکست سازه‌های عظیم نظیر پل‌ها و بال هواپیما شود، به‌وجود می‌آید.

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: shahabf@um.ac.ir



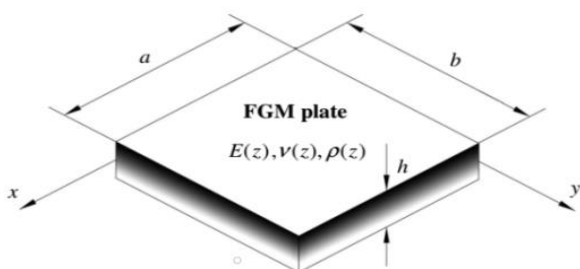
ردی<sup>۱۱</sup> و فان<sup>۱۰</sup> [۱۰] پایداری و ارتعاش صفحه‌های ایزوتروپیک، ارتوتروپیک و صفحه‌های لایه‌ای را با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه بالا به روش دقیق تحلیل کردند. اسکویا<sup>۱۱</sup> [۱۱] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، نظریه‌ی کلاسیک صفحه‌های لایه‌ای (نظریه‌ی کیرشپف) و نظریه‌ی برشی تیموشینکو - میندلین به حل دقیق صفحه‌های ارتوتروپیک، با استفاده از سه ضریب تصحیح برش پرداخت و ارتعاش، خمش و کمانش این صفحه‌ها با تکیه‌گاه‌های مفصلی را بررسی کرد. فریرا<sup>۱۲</sup> و همکاران [۱۲] بسامدهای طبیعی صفحه‌ی مربعی شکل ساخته‌شده از مواد هدفمند را برای شرایط مرزی مختلف به دست آوردند. حسینی‌هاشمی و همکاران [۱۳، ۱۴] ارتعاشات آزاد صفحه‌ی مستطیلی شکل هدفمند را به ازای شرایط مرزی مختلف بررسی نموده و پاسخ تحلیلی برای آن به دست آوردند. ارتعاشات غیرخطی صفحه‌های هدفمند نیز موضوع تحقیق‌های بسیاری از پژوهشگران بوده است [۱۵، ۱۶]. علی‌بیگلو [۱۷] ارتعاشات آزاد صفحه‌ها را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی توسعه داد و با استفاده از مکانیک محیط پیوسته غیرمحمولی و روش فضا - حالت و بسط سری فوریه، یک فرم حل بسته برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه کرد. ستوده و ملک زاده [۱۸] ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحه‌ی گرافن ارتوتروپیک را با استفاده از نظریه‌ی صفحه‌ی غیرمحمولی میندلین بررسی کردند و با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به دستگاه معادلات مقدار ویژه‌ی جبری غیرخطی کاهش دادند و برای حالات مختلف شرایط مرزی پاسخ خود را ارائه کردند. اصغری‌فرد شریانی و حائری‌یزدی [۱۹]. ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته‌شده از مواد هدفمند را با در نظر گرفتن اثرات سطحی و مدل تیر اولر - برنولی و فرضیات غیرخطی هندسی فون کارمن مورد بررسی قرار دادند. طالبی‌توتی و همکاران [۲۰] ارتعاشات آزاد مخروط مرکب با سخت‌کننده‌های طولی و محیطی را مورد مطالعه قرار دادند و از روش المان مجزا برای معادل‌سازی سخت‌کننده‌ها و انرژی برای تحلیل ارتعاشات استفاده کردند. به این نتیجه رسیدند که در سرعت پایین، حضور سخت‌کننده باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. کیدانه<sup>۱۴</sup>

مقاومت در مقابل بارهای حرارتی شدید در محیط‌هایی با درجه‌ی گرمای بالا را دارد؛ در طرف مقابل فولاد توانایی کاهش تنش‌های کششی ایجادشده در مراحل اولیه‌ی خنک‌شدن سرامیک را دارا می‌باشد. به‌دلیل تغییرات تدریجی و پیوسته خواص مواد از یک سطح به سطح دیگر، مواد هدفمند، مشکلات مواد مرکب لایه‌ای نظیر ترک‌ها و حفره‌های ایجادشده در مرز مشترک لایه‌ها را برطرف کرده است و تغییرات تنش در ضخامت بدون شکستگی و به‌صورت هموار اتفاق می‌افتد. با توجه به کاربرد فراوان این مواد، حل دقیق معادلات دیفرانسیل حاکم بر آن، اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده؛ ولی حل دقیق این معادلات به‌دلیل پیچیدگی آن‌ها، تنها در مسایل خاص از نظر شکل هندسی صفحه، شرایط مرزی، توزیع نیروهای درون‌صفحه‌ای وارده و همسانی ماده موجود است و در اکثر مسایل، الزاما باید از روش‌های عددی همچون روش‌های ریتز<sup>۱</sup>، گلرکین<sup>۲</sup>، سری‌های ریاضی، اجزای محدود، نوار محدود و تفاضل‌های محدود استفاده کرد.

سرینیواز<sup>۳</sup> و همکاران [۴] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی خطی به تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های مستطیلی ضخیم همگن و لایه‌ای با شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداختند. همچنین وی [۵]، با استفاده از همین نظریه، خمش، ارتعاش و کمانش صفحه‌های ضخیم ارتوتروپیک با شرایط تکیه‌گاهی ساده را مورد مطالعه قرار دادند. لوینسون<sup>۴</sup> [۶] به بررسی ارتعاش آزاد صفحه‌ی مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی ساده و با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی برای صفحه‌ای با ضخامت متغیر پرداخت. نور<sup>۵</sup> و بورتو<sup>۶</sup> [۷] به بررسی تنش و ارتعاش آزاد صفحه‌های مرکب لایه‌ای نامتقارن با لایه‌های زاویه‌دار و متعامد با بهره جویی از روش دقیق الاستیسیته‌ی سه‌بعدی پرداختند. لین<sup>۷</sup> و کینگ<sup>۸</sup> [۸] با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک صفحه، به بررسی ارتعاش آزاد صفحه‌های نامتقارن لایه‌ای پرداختند و به روش دقیق، فرکانس ارتعاش آزاد صفحه‌های نامتقارن لایه‌ای زاویه‌دار و متعامد را به‌دست آوردند. گورمن<sup>۹</sup> [۹] تحلیل دقیق ارتعاش آزاد صفحه‌های مستطیلی با تکیه‌گاه‌های مختلط نظیر ساده و گیردار را ارائه کرد.

- 1 Ritz
- 2 Galerkin
- 3 Srinivas
- 4 Levinson
- 5 Noor
- 6 Burto
- 7 Lin
- 8 King
- 9 Gorman

- 10 Reddy
- 11 Phan
- 12 Sciuva
- 13 Ferreira
- 14 Kidane



شکل ۱: هندسه و مختصات کارتزین صفحه‌ی FGM [۲۴].  
Fig. 1. Cartesian geometry and coordinates of FGM plate [24].

می‌شود که صفحه‌ی هدفمند ساخته‌شده از فازهای سرامیک و فلز، دارای تغییری تدریجی و پیوسته از خواص مواد در راستای ضخامت خود باشد. با استفاده از قانون اختلاط، خواص مواد هم‌چون ضریب کشسانی، چگالی و نسبت پواسون در سراسر ضخامت متغیر است. این تغییر خواص به‌صورت رابطه‌ی (۱) تعریف می‌شود.

$$P(z, T) = P_c(T)V_c(z) + P_m(T)V_m(z) \quad (1)$$

که در آن،  $P_c(T)$  و  $P_m(T)$  به‌ترتیب بیانگر خواص مواد وابسته به دمای فازهای سرامیکی و فلزی صفحه‌ی هدفمند می‌باشد و به‌عنوان تابعی از دما به‌صورت رابطه‌ی (۲) بیان می‌شود [۲۵، ۲۶].

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2)$$

در این رابطه،  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  ضریب‌های دمایی مواد تشکیل‌دهنده هستند.  $V_m(z)$  و  $V_c(z)$  به‌ترتیب تابع حجمی سرامیک و فلز می‌باشند که رابطه‌ی (۳) را برآورده می‌کنند.

$$V_c(z) + V_m(z) = 1 \quad (3)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳)، رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$P(z, T) = [P_c(T) - P_m(T)]V_c(z) + P_m(T) \quad (4)$$

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} P(z, T) = P_m(T) & \text{for } V_c(z) = 0 \\ P(z, T) = P_c(T) & \text{for } V_c(z) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

و همکاران [۲۱] با استفاده از روش معادل‌سازی سخت‌کننده‌ها، به بررسی رفتار کمانشی پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با آرایش ضربدری و افقی پرداختند. آن‌ها از روش انرژی برای به‌دست آوردن بار کمانش استفاده کردند و تست تجربی کمانش را بر روی پوسته‌های استوانه‌ای انجام دادند و نتایج حاصل از آن را با نتایج تحلیل مقایسه کردند. مصطفی و علی [۲۲] تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای دارای سخت‌کننده‌های طولی و محیطی را با استفاده از روش انرژی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها ابتدا انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی سخت‌کننده‌ها را به صورت مجزا محاسبه کردند و به‌منظور دستیابی به معادله‌ی انرژی کل ترم‌های مربوط به هر کدام را با هم جمع نموده و با استفاده از روش ریلی‌ریتز معادله‌ی فرکانسی را استخراج کردند. در این پژوهش با بررسی مطالعات پیشین سعی بر آن شد تا مواردی که از دید تحلیل‌گران کم رنگ بوده مورد ارزیابی قرار گیرد. در ابتدا به طراحی و مدلسازی ماده FGM با بیان کامل‌تر پرداخته شد سپس تمام عوامل اثرگذار شامل مشخصات هندسی و مکانیکی صفحه‌ی FGM بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد تحلیل و مقایسه قرار گرفت. در مرحله‌ی بعد اثر بازشو بر روی فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی FGM مطالعه شد و علاوه بر درصد بازشوها، شکل‌های متداول در بحث اجرایی (مربعی و دایره‌ای) مورد بررسی قرار گرفت و میزان اثرگذاری آنها بر فرکانس‌های پنج مد اول محاسبه گردید. در گام آخر با توجه به مشاهدات صورت گرفته در بحث صفحه‌های FGM دارای سخت‌کننده، به بررسی اثر مشخصات سخت‌کننده (ارتفاع و ضخامت) بر روی فرکانس‌های پنج مد اول صفحه‌ی FGM پرداخته شد و میزان اثرگذاری آنها بر روی فرکانس‌ها مورد ارزیابی قرار گرفته شد.

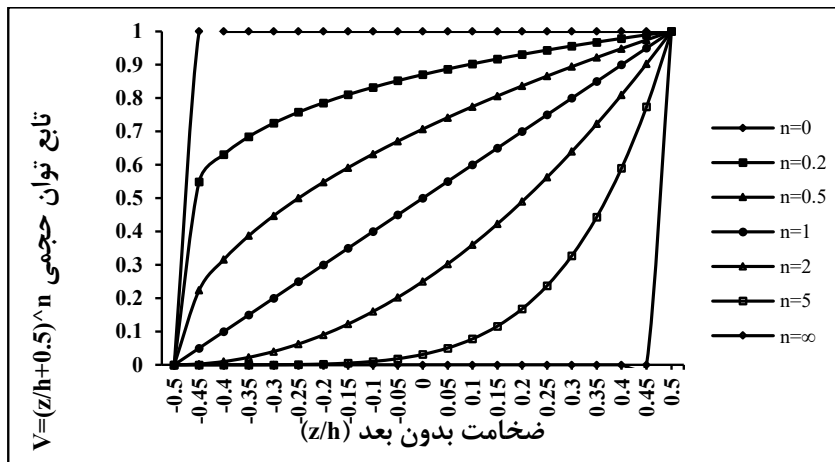
## ۲- مبانی و مفاهیم پایه

سیستم مختصات کارتزین  $(x, y, z)$  صفحه‌ی FGM (شکل ۱) در سطح میانی صفحه قرار می‌گیرد. محور  $z$  در راستای ضخامت صفحه  $(-h/2 \leq z \leq h/2)$  و رو به سمت بالا مثبت در نظر گرفته می‌شود و محور  $y$  عمود بر محور  $x$  در سطح میانی صفحه قرار می‌گیرد.

نظریه‌ی کشسان غیرخطی صفحه‌های هدفمند با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک تغییرشکل صفحه، توسعه یافته است [۲۳]. فرض



شکل ۲: نمای شماتیک صفحه‌ی FGM و موقعیت محور مختصات در صفحه .  
Fig. 2. Schematic of the FGM plate and coordinate axis position on the plate.



شکل ۳: تغییرات تابع توان حجمی  $(z/h + 0.5)^n$ .  
Fig. 3. Changes in the volume fraction index  $(z/h + 0.5)^n$ .

$$[E(z, T), \rho(z, T), \nu(z, T)] = [E_{cm}(T), \rho_{cm}(T), \nu_{cm}(T)] \quad (7)$$

$$\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n + [E_m(T), \rho_m(T), \nu_m(T)]$$

در این رابطه،  $\tilde{\delta}_{m1} = \tilde{\delta}_c - \tilde{\delta}_m$ ،  $\tilde{n}_{m1} = \tilde{n}_c - \tilde{n}_m$ ،  $E_{m1} = E_c - E_m$  و  $n$  شاخص توان حجمی نامیده می‌شود که بر نحوه‌ی تغییر مواد در راستای ضخامت صفحه‌ی هدفمند دلالت دارد. در پژوهش حاضر، در فرآیند تحلیل هفت مقدار مختلف برای شاخص توان حجمی  $(n = 0.0, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, \infty)$  در نظر گرفته شده است که دو مقدار صفر و بی‌نهایت به ترتیب به صفحه‌ی کاملاً سرامیکی و صفحه‌ی کاملاً فلزی مربوط می‌شود. تغییرات تابع توان حجمی  $(z/h + 0.5)^n$ ، در راستای ضخامت صفحه  $(h)$  برای مقدارهای مختلف  $n$  در شکل ۳ نشان داده شده است.

بر اساس شکل ۲ می‌توان گفت که نسبت حجمی ماده‌ی سرامیکی به صورت رابطه‌ی (۶) است:

$$V_c = \left(\frac{z + \alpha}{h}\right)^n \quad (6)$$

در این رابطه‌ی،  $n$  شاخص توان حجمی،  $h$  ضخامت صفحه و  $\alpha$  فاصله‌ی لبه‌ی فوقانی صفحه تا مرکز مختصات است که هم جهت با محور عمودی صفحه  $(z)$  مثبت و خلاف جهت محور  $z$  منفی می‌باشد. به‌عنوان مثال اگر در شکل ۲ مبدأ مختصات بر روی لبه‌ی فوقانی صفحه [۲۷] و یا مرکز صفحه [۲۸] قرار داشته باشد، مقدار  $\alpha$  به ترتیب ۰ و  $0.5h$  می‌باشد. درجه‌بندی دو فاز اساسی سرامیک و فلز در راستای ضخامت صفحه به صورت رابطه‌ی (۷) بیان می‌شود.

جدول ۱: خواص مکانیکی مواد FGM  
Table 1. Mechanical properties of FGM

نسبت پواسون	چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )	ضریب کشسانی (GPa)	نوع مواد
۰/۳۲۶۲	۸۱۶۶	۲۰۱/۰۴	استاینلس استیل (فلز)
۰/۲۳	۲۳۷۰	۳۴۸/۴۳	سیلیکون نیتريد (سرامیک)

جدول ۲: خواص هندسی صفحه‌های FGM  
Table 2. Geometric properties of FGM plate

شماره‌ی صفحه	طول صفحه (mm)	عرض صفحه (mm)	نسبت ابعاد صفحه ( $a/b$ )	ضخامت صفحه (mm)
۱	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱	۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲
۲	۱۳۳۳	۱۰۰۰	۱/۳۳	۶
۳	۱۵۰۰	۱۰۰۰	۱/۵	۶
۴	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۲	۶
۵	۲۵۰۰	۱۰۰۰	۲/۵	۶

### ۳- مدل‌سازی عددی

رویه‌های بالا و پایین صفحه‌ها به ترتیب سرامیک و فلز بوده است. همان‌طور که در بخش دوم بیان شد، توزیع خواص مکانیکی مواد در راستای ضخامت صفحه بر اساس رابطه‌ی توزیع قانون توانی (رابطه‌ی (۷)) صورت گرفته است.

در پژوهش حاضر، برای مدل‌سازی صفحه‌های ساخته شده از مواد هدفمند در نرم‌افزار آباکوس از جزء پوسته‌ای<sup>۱</sup> سه بعدی چهاروجهی چهارگره‌ی (S4R) و برای مدل‌سازی مواد هدفمند از روش چندلایه‌ی معادل استفاده گردیده است [۲۹] [۲۷]. به منظور ارزیابی پاسخ ارتعاش آزاد صفحه‌های FGM، صفحه‌هایی با نسبت ابعاد  $a/b = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$  و اندازه‌ی شبکه‌بندی  $20 \times 20$  میلی‌متر مورد بررسی قرار گرفته شده است [۳۰]. پارامترهای مورد بررسی در صفحه‌ها، شاخص توان حجمی ( $n$ )، نسبت ابعاد صفحه ( $a/b$ )، ضخامت صفحه ( $h$ )، شرایط مرزی، بازشو و سخت‌کننده بوده است.

### ۳-۲- مشخصات مصالح مصرفی

مشخصات هندسی صفحه‌های هدفمند ۱ تا ۴ با نسبت ابعاد مختلف نظیر طول ( $a$ )، عرض ( $b$ ) و ضخامت ( $h$ ) در جدول ۲ آورده شده است.

### ۳-۱- مشخصات مصالح مصرفی

در پژوهش حاضر، به منظور راستی‌آزمایی تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌ی FGM، صفحه‌ای مستطیلی که به صورت تحلیل اجزای محدود توسط رامو<sup>۴</sup> و موهانتی<sup>۵</sup> [۳۱] انجام شده بود، در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی و تحلیل گردید.

نوع اختلاط مواد FGM به صورت فلز - سرامیک و استاینلس استیل<sup>۲</sup> - سیلیکون نیتريد<sup>۳</sup> انتخاب شده است. خواص مکانیکی این مواد نظیر ضریب کشسانی، چگالی و نسبت پواسون بر اساس آیین‌نامه‌ی ASTM-C20 در جدول ۱ آورده شده است.

رامو و موهانتی به تعیین فرکانس‌های طبیعی یک صفحه‌ی نازک همگن با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند. نتایج کار خود

1 Shell  
2 Stainless Steel (SUS304)  
3 Silicon Nitride ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ )

4 Ramu  
5 Mohanty

جدول ۳: مقایسه‌ی مقادیر ۱۰ فرکانس طبیعی صفحه با ضخامت ۰/۶۲۵ میلی‌متری حاصل از مدل‌سازی با نرم‌افزار آباکوس و مرجع [۳۱].

Table 3. Comparison of values of 10 natural frequencies of the plate with a thickness of 0.625 mm obtained from Abaqus and reference [21]

شماره‌ی فرکانس	نرم‌افزار آباکوس	روش دقیق لوی	درصد خطا (%)	مرجع [۳۱]	درصد خطا (%)
۱	۱۳۶/۰۶	۱۳۶/۵	۰/۳۲	۱۳۵/۸	-۰/۱۹
۲	۲۶۱/۷۵	۲۶۲/۶	۰/۳۲	۲۵۹/۹	-۰/۷۱
۳	۴۱۹/۸	۴۲۰/۱	۰/۰۷	۴۱۷/۶	-۰/۵۲
۴	۴۷۲/۸۱	۴۷۲/۷	-۰/۰۲	۴۶۶/۸	-۱/۲۸
۵	۵۴۴/۰۶	۵۴۶/۲	۰/۳۹	۵۳۵/۹	-۱/۵۲
۶	۷۵۳/۱	۷۵۶/۳۵	۰/۴۲	۷۳۳/۷	-۲/۶۴
۷	۷۷۰/۵۷	۷۶۶/۸۵	۰/۴۸	۷۵۷/۱	-۱/۷۷
۸	۸۹۴/۱۵	۸۹۲/۹	۰/۱۴	۸۸۸/۳	-۰/۶۵
۹	۱۰۱۷	۱۰۱۸/۹	۰/۱۸	۹۹۷/۸	-۱/۹۲
۱۰	۱۰۴۸/۶	۱۰۵۰/۴	۰/۱۷	۱۰۱۲/۱	-۳/۶۱

جدول ۴: مقایسه‌ی مقادیر ۱۰ فرکانس طبیعی صفحه با ضخامت ۱۲/۵ میلی‌متری حاصل از مدل‌سازی با نرم‌افزار آباکوس و مرجع [۳۱].

Table 4. Comparison of values of 10 natural frequencies of the plate with a thickness of 12.5 mm obtained from Abaqus and reference [21]

شماره‌ی فرکانس	نرم‌افزار آباکوس	روش دقیق لوی	درصد خطا (%)	مرجع [۳۱]	درصد خطا (%)
۱	۲۷۱/۸۲	۲۷۳/۱	۰/۴۶	۲۷۱/۷	-۰/۰۴
۲	۵۲۵/۸۱	۵۲۵/۲	-۰/۱۱	۵۱۹/۸	-۱/۱۵
۳	۸۴۶/۸۸	۸۴۰/۳	-۰/۷۸	۸۳۵/۲	-۱/۳۹
۴	۹۶۷/۶۱	۹۴۵/۴	-۲/۳۴	۹۳۳/۷	-۳/۶۳
۵	۱۰۹۱/۱	۱۰۹۲/۵	۰/۱۲	۱۰۷۱/۹	-۱/۷۹
۶	۱۵۱۷/۳	۱۵۱۲/۷	-۰/۳۰	۱۴۶۷/۵	-۳/۳۹
۷	۱۶۲۳	۱۵۳۳/۷	-۵/۸۲	۱۵۱۴/۴	-۷/۱۷
۸	۱۸۳۴/۷	۱۷۸۵/۸	-۲/۷۳	۱۷۷۶/۶	-۳/۲۷
۹	۲۰۶۵/۸	۲۰۳۷/۹	-۱/۳۶	۲۰۲۴/۲	-۲/۰۵
۱۰	۲۱۵۲/۲	۲۱۰۰/۹	-۲/۴۴	۲۲۶۳/۴	۴/۹۱

و شبکه‌بندی ۱۲×۸ میلی‌متر با ضخامت‌های مختلف که با هر دو روش دقیق لوی و روش اجزای محدود مدل‌سازی شده بود، نتایج حاصل از بررسی ارتعاش آزاد صفحه با استفاده از نرم‌افزار آباکوس راستی‌آزمایی گردید. در جدول‌های ۳ تا ۶ مقادیر ۱۰ فرکانس طبیعی صفحه برای ضخامت‌های ۰/۶۲۵، ۱۲/۵، ۲۵ و ۵۰ میلی‌متر نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس دارای دقت قابل قبولی در مقایسه با مرجع مورد نظر می‌باشد.

را با روش دقیق لوی<sup>۱</sup> مقایسه کردند. پارامترهای هندسی و خواص مکانیکی مواد استفاده‌شده در مرجع [۳۱] به شرح زیر بود.

$$a = 0.6 \text{ m}, b = 0.4 \text{ m}, E = 70 \text{ GPa},$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.3$$

در مرجع [۳۱]، صفحه‌ای مستطیلی به ابعاد ۶۰۰×۴۰۰ میلی‌متر

1 Levy

جدول ۵: مقایسه‌ی مقادیر ۱۰ فرکانس طبیعی صفحه با ضخامت ۲۵ میلی‌متری حاصل از مدل‌سازی با نرم‌افزار آباکوس و مرجع [۳۱].

Table 5. Comparison of values of 10 natural frequencies of the plate with a thickness of 25 mm obtained from Abaqus and reference [21]

شماره‌ی فرکانس	نرم‌افزار آباکوس	روش دقیق لوی	درصد خطا (%)	مرجع [۳۱]	درصد خطا (%)
۱	۵۳۴/۱۹	۵۴۶/۲	۲/۱۹	۵۴۳/۵	۱/۷۱
۲	۱۰۲۵/۶	۱۰۵۰/۴	۲/۳۶	۱۰۳۹/۷	۱/۳۵
۳	۱۶۴۸/۷	۱۶۸۰/۷	۱/۹۰	۱۶۷۰/۵	۱/۳۰
۴	۱۸۷۲	۱۸۹۰/۸	۰/۹۹	۱۸۶۷/۵	-۰/۲۴
۵	۲۰۹۹/۲	۲۱۸۵	۳/۹۲	۲۱۴۳/۷	۲/۰۷
۶	۲۸۸۴	۳۰۲۵/۴	۴/۶۷	۲۹۳۵/۱	۱/۷۴
۷	۳۰۹۵	۳۰۶۷/۴	-۰/۸۹	۳۰۲۸/۷	-۲/۱۸
۸	۳۴۹۱/۴	۳۵۷۱/۶	۲/۲۴	۳۵۵۳/۳	۱/۷۴
۹	۳۸۹۵/۱	۴۰۷۵/۹	۴/۴۳	۴۰۴۸/۳	۳/۷۸
۱۰	۴۰۳۳/۱	۴۲۰۱/۹	۴/۰۱	۴۵۲۶/۹	۱۰/۹۰

جدول ۶: مقایسه‌ی مقادیر ۱۰ فرکانس طبیعی صفحه با ضخامت ۵۰ میلی‌متری حاصل از مدل‌سازی با نرم‌افزار آباکوس و مرجع [۳۱].

Table 6. Comparison of values of 10 natural frequencies of the plate with a thickness of 50 mm obtained from Abaqus and reference [21]

شماره‌ی فرکانس	نرم‌افزار آباکوس	روش دقیق لوی	درصد خطا (%)	مرجع [۳۱]	درصد خطا (%)
۱	۱۰۲۶/۷	۱۰۹۲/۵	۶/۰۲	۱۰۸۷	۵/۵۴
۲	۱۹۴۴/۱	۲۱۰۰/۹	۷/۴۶	۲۰۷۹/۴	۶/۵۰
۳	۳۰۸۹	۳۳۶۱/۵	۸/۱۰	۳۳۴۱	۷/۵۴
۴	۳۵۳۴/۵	۳۷۸۱/۷	۶/۵۳	۳۷۳۵	۵/۳۶
۵	۳۸۱۶/۸	۴۳۷۰/۱	۱۲/۶	۴۲۷۸/۴	۱۰/۷۸
۶	۵۱۳۲/۹	۶۰۵۰/۸	۱۵/۱۶	۵۸۷۰/۲	۱۲/۵۶
۷	۵۸۱۲/۳	۶۱۳۴/۸	۵/۲۵	۶۰۵۷/۵	۴/۰۴
۸	۵۸۷۸/۳	۷۱۴۳/۳	۱۷/۷۰	۷۱۰۶/۵	۱۷/۲۸
۹	۶۲۸۵/۸	۸۱۵۱/۸۲	۲۲/۸۹	۷۹۸۲/۴	۲۱/۲۵
۱۰	۶۸۲۶/۹	۸۴۰۳/۹	۱۸/۷۶	۸۰۹۶/۷	۱۵/۶۸

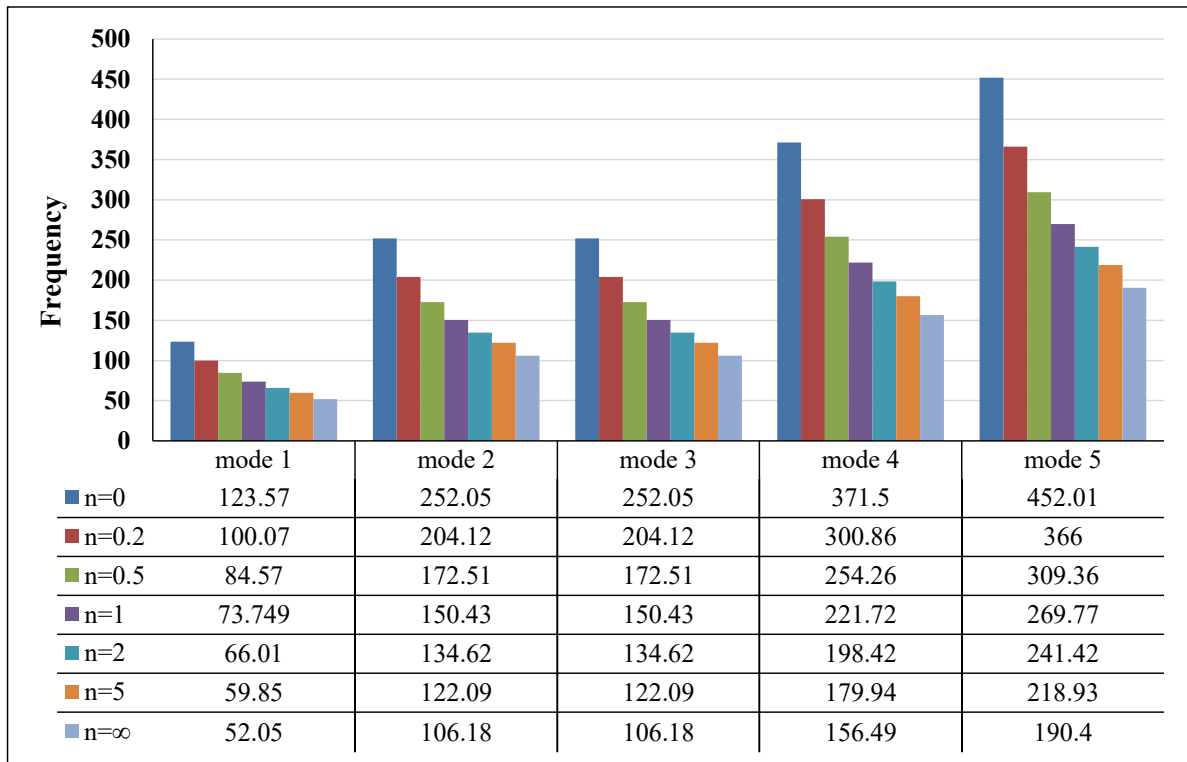
#### ۳-۴- پارامترهای مورد بررسی

اثر شاخص توان حجمی، نسبت ابعاد صفحه، ضخامت صفحه، شرایط مرزی، بازشو و سخت‌کننده مورد توجه قرار گرفته است.

در پژوهش حاضر، به‌منظور ارزیابی پاسخ ارتعاش آزاد صفحه‌های FGM از نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus استفاده شده است. پس از اطمینان از روش مدل‌سازی صفحه‌های هدفمند، نخست، خواص هر لایه با استفاده از رابطه‌های حاکم بر مواد FGM محاسبه شد و سپس، صفحه‌ها با استفاده از روش چندلایه‌ی معادل در ۲۰ لایه با شرایط مرزی گیردار و ساده مدل‌سازی گردید [۳۲]. برای این کار،

#### ۳-۴-۱- اثر شاخص توان حجمی (n)

به‌منظور تأثیر شاخص توان حجمی بر فرکانس طبیعی صفحه‌های FGM، هفت مقدار ۰، ۰/۲، ۰/۵، ۱، ۲، ۵، ∞ برای شاخص توان حجمی در نظر گرفته شده است. صفحه‌های مورد بررسی دارای



شکل ۴: تغییرات فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌ی FGM با مقادیرهای مختلف توان شاخص حجمی.

Fig. 4. Changes in the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate with different amounts of volume fraction index

مختلف ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ میلی‌متر، ابعاد  $a=b=1\text{m}$ ، شاخص توان حجمی ۱ و شرایط تکیه‌گاهی گیردار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده است. پس از بررسی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌ها براساس شکل ۶ ملاحظه می‌شود که با افزایش ضخامت صفحه مقدار فرکانس‌های طبیعی مدها کاهش می‌یابد، به طوری که در  $n=0$  دارای بیش‌ترین مقدار و در  $n=\infty$  دارای کم‌ترین مقدار می‌باشد.

ضخامت ۶ میلی‌متر، ابعاد  $a=b=1\text{m}$  و شرایط تکیه‌گاهی گیردار می‌باشند. پس از بررسی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌ها که در شکل ۴ مشاهده می‌شود با افزایش شاخص توان حجمی مقدار فرکانس‌های طبیعی مدها کاهش می‌یابد، به طوری که در  $n=0$  دارای بیش‌ترین مقدار و در  $n=\infty$  دارای کم‌ترین مقدار می‌باشد.

#### ۳-۴-۴- اثر شرایط مرزی صفحه (BC)

به منظور بررسی اثر شرایط تکیه‌گاهی، صفحه‌های FGM با پنج حالت مختلف از نوع شرایط مرزی، ابعاد  $a=b=1\text{m}$ ، شاخص توان حجمی ۱ و ضخامت ۶ میلی‌متر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده است. به منظور شناخت بهتر از نوع شرایط تکیه‌گاهی لبه‌های صفحه، شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده به ترتیب با نمادهای CL و SI نمایش داده شده است و عدد قرار گرفته مقابل این نمادها نشان‌دهنده‌ی تعداد این نوع لبه‌ها در صفحه می‌باشد. به عنوان مثال CL3-SI1 بدین معناست که سه لبه از لبه‌های صفحه دارای شرایط مرزی گیردار و یک لبه دارای شرایط مرزی ساده می‌باشد. با توجه

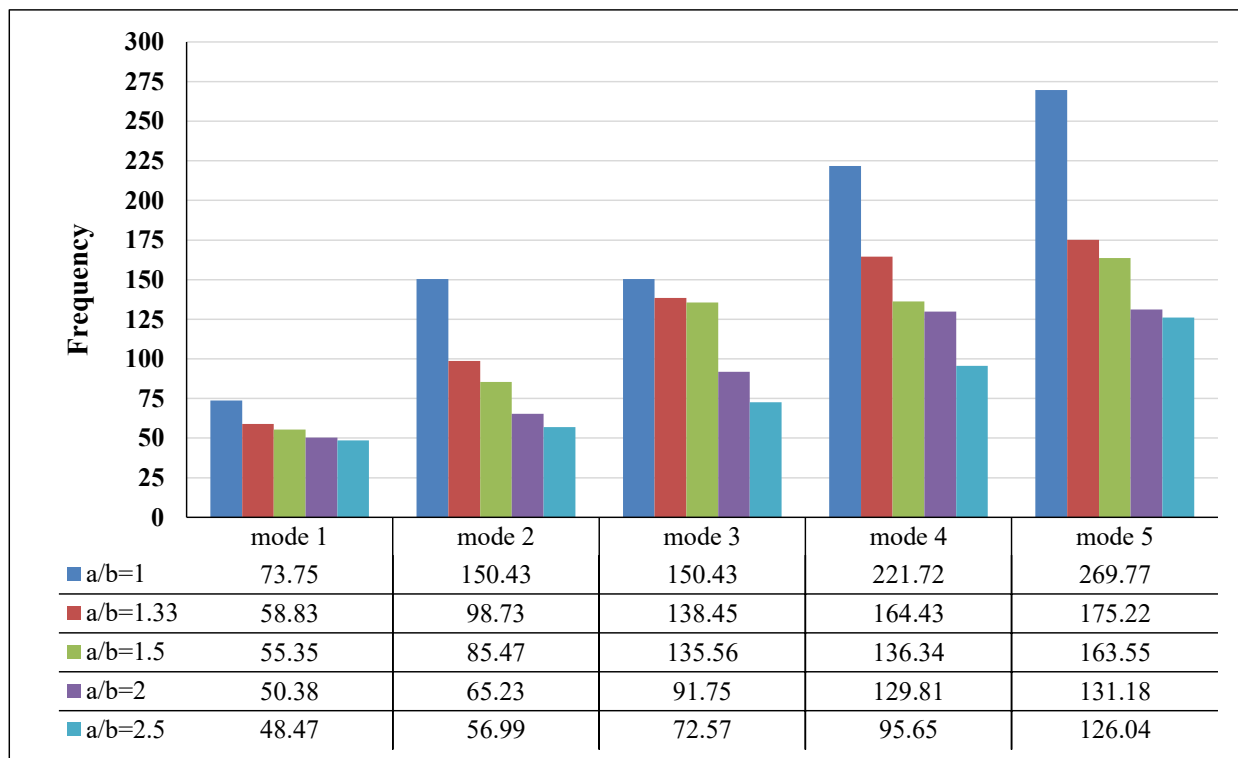
#### ۳-۴-۲- اثر نسبت ابعاد صفحه ( $a/b$ )

به منظور بررسی تأثیر نسبت ابعاد، صفحه‌هایی با پنج نسبت ابعاد ۱، ۱/۳۳، ۱/۵، ۲ و ۲/۵، ضخامت ۶ میلی‌متر، شاخص توان حجمی ۱ و شرایط تکیه‌گاهی گیردار تجزیه و تحلیل گردیده است. پس از بررسی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌ها (شکل ۵)، همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش نسبت ابعاد مقدار فرکانس‌های طبیعی مدها کاهش می‌یابد.

#### ۳-۴-۳- اثر ضخامت صفحه ( $h$ )

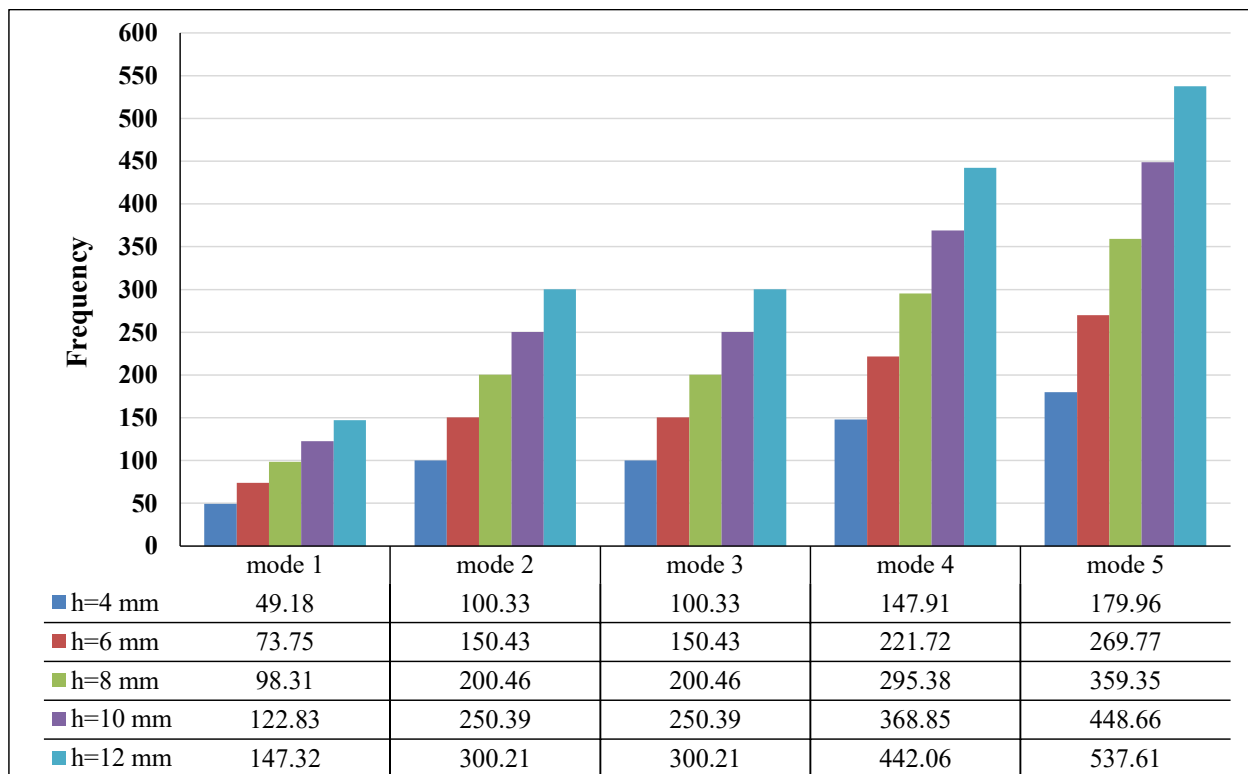
با هدف بررسی اثر ضخامت، صفحه‌هایی FGM با پنج ضخامت





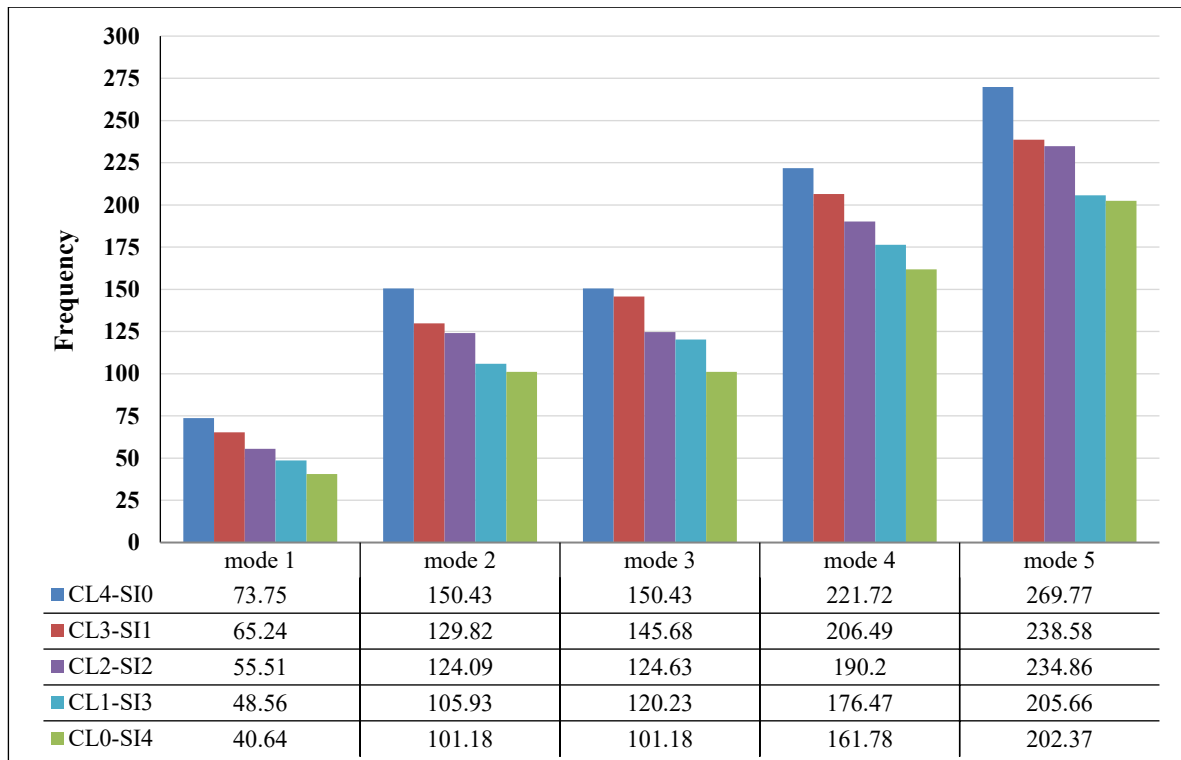
شکل ۵: تغییرات فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌های FGM با مقادارهای مختلف نسبت ابعاد صفحه.

Fig. 5.Changes in the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate with different amounts of aspect ratio



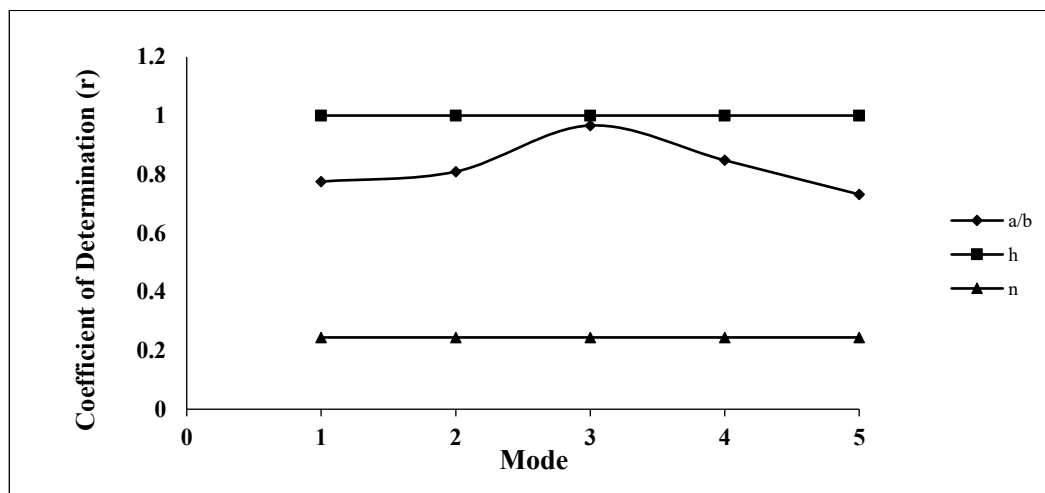
شکل ۶: تغییرات فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌های FGM با مقادارهای مختلف ضخامت صفحه.

Fig. 6.Changes in the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate with different amounts of plate thickness



شکل ۷: تغییرات فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌های FGM با شرایط تکیه‌گاهی مختلف.

Fig. 7. Changes in the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate with different amounts of different support conditions

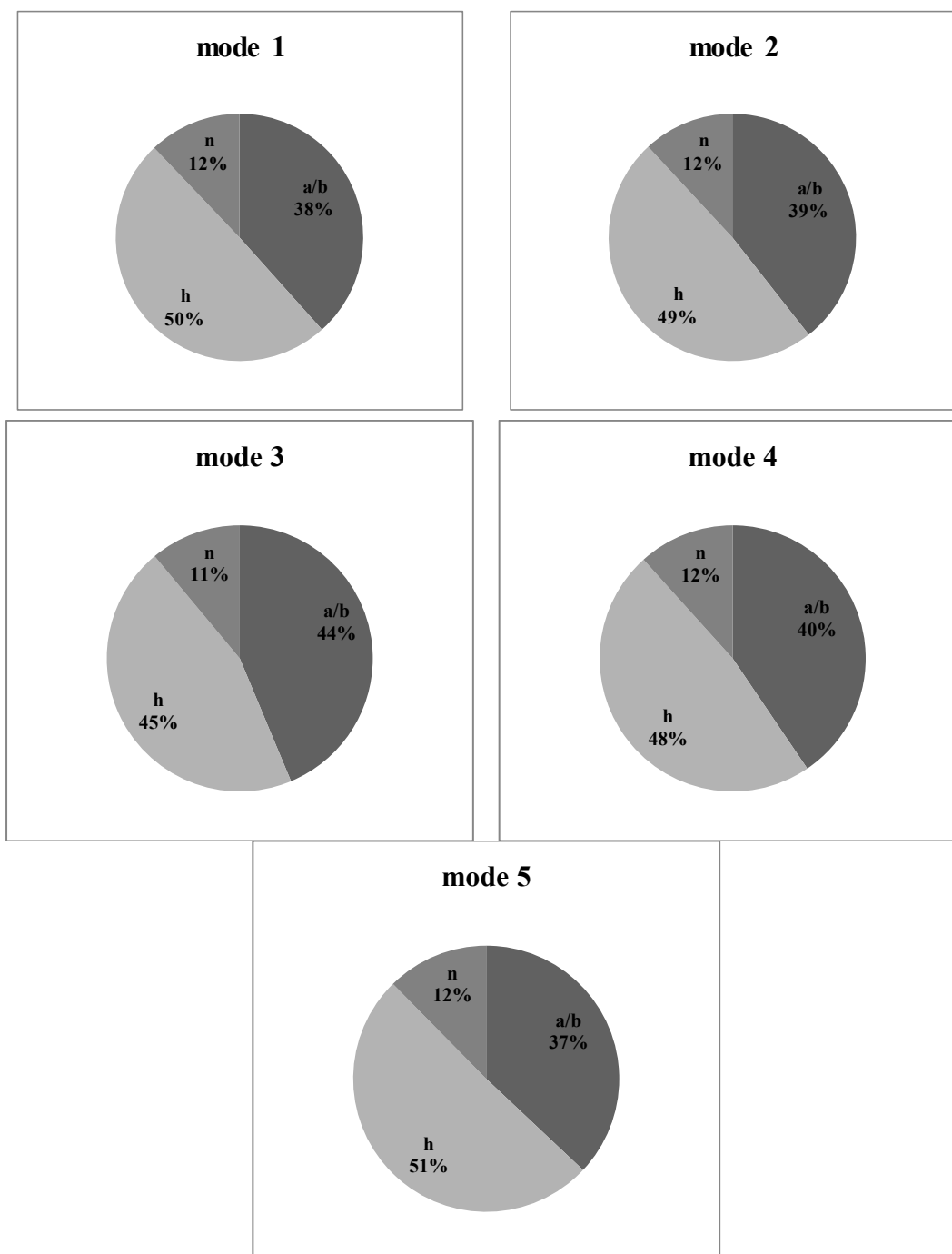


شکل ۸: ضرایب تعیین هر یک از پارامترها بر روی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌های FGM.

Fig. 8. Coefficients of determination, each of the parameters on the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate

۵-۳- میزان تأثیر هر یک از پارامترهای هندسی بر فرکانس طبیعی به‌منظور بررسی میزان تأثیر هر یک از پارامترهای بحث شده (شاخص توان حجمی، نسبت ابعاد، ضخامت و شرایط تکیه‌گاهی)

به بررسی‌های انجام‌شده (شکل ۷) می‌توان بیان کرد که با افزایش شرایط تکیه‌گاهی ساده در لبه‌های صفحه (کاهش لبه‌های گیرداری صفحه) مقدار فرکانس‌های طبیعی صفحه‌های FGM کاهش می‌یابد.



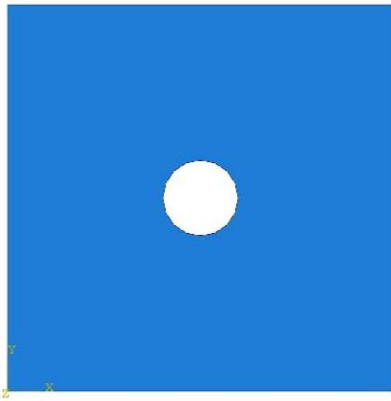
شکل ۹: میزان تأثیر هر یک از پارامترهای هندسی و مکانیکی بر فرکانس طبیعی پنج مد اول صفحه‌ی FGM.  
 Fig. 9. The effect of each of the geometric and mechanical parameters on the natural frequency of the first five modes of the FGM plate.

که مجذور ضریب همبستگی  $(\hat{\rho}_{xy})^2$  می‌باشد، نیاز است تا مقدارهای میانگین  $(\bar{x}, \bar{y})$ ، انحراف از معیار  $(s_x, s_y)$  و ضریب همبستگی  $(\hat{\rho}_{xy})$  به ترتیب با استفاده از رابطه‌های (۸) تا (۱۳) به دست آورده

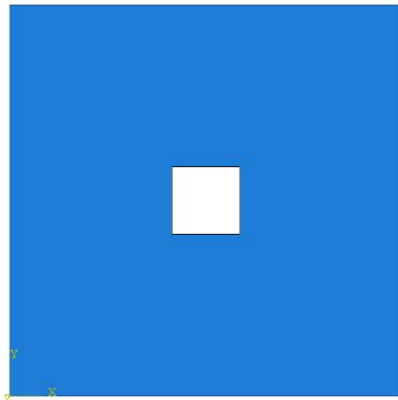
بر روی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌ی FGM، از ضریب تعیین  $(r)$  استفاده شده است. به عنوان مثال اگر  $r=0.75$  باشد بدین معناست که ۷۵ درصد از تغییرات  $y$  را توسط تغییرات پارامتر  $x$  می‌توان توضیح داد. بدین منظور برای محاسبه‌ی ضریب تعیین  $(r)$

2 Correlation Coefficient  
 3 Mean  
 4 standard deviation

1 Coefficient of Determination



شکل ۱۰: نمایش شماتیک صفحه‌ی هدفمند دارای بازشوی دایره‌ای  
Fig. 10. Schematic of FGM plate with a circular opening



شکل ۱۱: نمایش شماتیک صفحه‌ی هدفمند دارای بازشوی مربعی  
Fig. 11. Schematic of FGM plate with a square opening

نوع بازشوی مربعی و دایره‌ای با درصد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درصد استفاده شده است که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ شماتیکی از این نوع صفحه‌ها نشان داده شده است.

$$\text{Opening Ratio} = \frac{A_{\text{opening}}}{A_{\text{Plate}}} \times 100 \quad (14)$$

در این رابطه،  $A_{\text{opening}}$  مساحت بازشو و  $A_{\text{Plate}}$  مساحت کل صفحه می‌باشد.

در جدول ۷ مقادیر و میزان تغییرات فرکانس‌های طبیعی هر یک از مدهای صفحه‌های دارای بازشو قابل مشاهده است. با توجه به جدول ۸ ملاحظه می‌شود که با افزایش درصد بازشو، مقدار فرکانس طبیعی در مد اول افزایش و در مدهای ۲ تا ۵ کاهش یافته است.

شود [۳۳].

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (9)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2) - n(\bar{x})^2}{n-1}} \quad (10)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^n y_i^2) - n(\bar{y})^2}{n-1}} \quad (11)$$

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}}{s_x s_y} \quad (12)$$

$$r = \hat{\rho}_{xy}^2 \quad (13)$$

در این رابطه‌ها،  $x_i$  پارامترهای هندسی اثرگذار (شاخص توان حجمی، نسبت ابعاد و ضخامت) بر روی فرکانس‌های طبیعی صفحه می‌باشند که فرکانس‌های پنج مد اول صفحه براساس شکل مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. با توجه به شکل ۸ میزان اثرگذاری و ضریب تعیین هر یک از پارامترهای شاخص توان حجمی، نسبت ابعاد و ضخامت بر فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی FGM نشان داده شده است که ملاحظه می‌شود که ضخامت و شاخص توان حجمی به ترتیب دارای بیش‌ترین ( $r=0.99$ ) و کم‌ترین ( $r=0.24$ ) میزان تأثیر بر روی فرکانس طبیعی هر یک از مدهای صفحه‌ی FGM می‌باشند. همچنین، در شکل ۹ میزان تأثیر هر یک از پارامترها بر فرکانس‌های طبیعی به نمایش درآورده شده است.

### ۳-۶- صفحه‌های دارای بازشو

به‌منظور بررسی اثر بازشوها بر روی رفتار فرکانسی صفحه‌های FGM، نوع بازشو ( $OT^1$ ) و درصد بازشو ( $OR^2$ ) مورد توجه قرار گرفته است. درصد بازشو بر حسب نسبت مساحت بازشو به مساحت صفحه به‌صورت رابطه‌ی (۱۴) بیان می‌شود. برای بررسی اثر بازشو صفحه‌هایی با شاخص توان حجمی ۱، شرایط تکیه‌گاهی گیردار و دو

1 Opening Type  
2 Opening Ratio

جدول ۷: فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌های FGM دارای بازشو مربعی و دایره‌ای (+) افزایش و (-) کاهش.

Table 7. Natural Frequencies The first five modes of FGM plates with square and circular opening increase (+) and decrease (-)

OT	$Or_N$	$Or_{r=1}$	$Or_{r=2}$	$Or_{r=3}$	$Or_{r=4}$	$Or_{r=5}$
مربع	Mode ۱	۷۳.۲۸	۷۳.۵۹	۷۳.۳۶	۷۵.۴۴	۷۶.۷۶
	Precent Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	۰.۴۲۸	۱.۰۳۶	۱.۴۵	۱.۷۵
	Mode ۲	۱۴۹.۵۲	۱۴۷.۹۸	۱۴۵.۶۹	۱۴۳.۲۳	۱۴۰.۸۴
	Precent Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۱.۳	-۱.۵۵	-۱.۶۹	-۱.۶۷
	Mode ۳	۱۴۹.۵۲	۱۴۷.۹۸	۱۴۵.۶۹	۱۴۳.۲۳	۱۴۰.۸۴
	Precent Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۱.۳	-۱.۵۵	-۱.۶۹	-۱.۶۷
	Mode ۴	۲۱۹.۲۷	۲۱۷.۰۵	۲۱۴.۹۹	۲۱۳.۰۵	۲۱۱.۲۶
	Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۱.۰۱۲	-۰.۹۵	-۰.۹	-۰.۸۴
	Mode ۵	۲۶۶.۴۳	۲۶۴.۱۶	۲۶۲.۲۲	۲۶۰.۱۹	۲۵۷.۷۹
دایره	Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۰.۸۵	-۰.۷۳	-۰.۷۷	-۰.۹۲
	Mode ۱	۷۳.۴۸	۷۳.۹۳	۷۴.۸۰	۷۵.۹۸	۷۷.۴۰
	Change $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	۰.۶۱	۱.۱۸	۱.۵۷	۱.۸۶
	Mode ۲	۱۴۹.۸۸	۱۴۸.۵۶	۱۴۶.۸۳	۱۴۴.۹۵	۱۴۳.۱۵
	Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۰.۸۸	-۱.۱۶	-۱.۲۸	-۱.۲۴
	Mode ۳	۱۴۹.۸۸	۱۴۸.۵۸	۱۴۶.۸۳	۱۴۴.۹۶	۱۴۳.۱۵
	Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۰.۸۷	-۱.۱۷	-۱.۲۷	-۱.۲۵
	Mode ۴	۲۱۹.۵۵	۲۱۷.۷۷	۲۱۶.۱۷	۲۱۴.۶۸	۲۱۳.۲۶
	Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۰.۸۱	-۰.۷۳	-۰.۶۹	-۰.۶۶
	Mode ۵	۲۶۶.۵۱	۲۶۳.۸۸	۲۶۱.۵۵	۲۵۹.۳۷	۲۵۷.۲۵
	Change( $Or_N$ to $Or_{N+1}$ )	-	-۰.۹۸	-۰.۸۸	-۰.۸۳	-۰.۸۲

جدول ۸: درصد تغییرات فرکانس‌های طبیعی با تبدیل بازشوی مربعی به دایره‌ای.

Table 8. Percentage change of natural frequencies by converting a square opening to a circle

OT	Mode Number	$Or_{r=1}$	$Or_{r=2}$	$Or_{r=3}$	$Or_{r=4}$	$Or_{r=5}$
مربع به دایره	Mode ۱	۰.۲۷	۰.۲۴	۰.۲۴	۰.۱۲۷	۰.۰۳
	Mode ۲	۰.۴۵۱	۰.۳۹۱	۰.۴۰۵	۰.۳۳۱	-۰.۱۰۶
	Mode ۳	۰.۵۹۴	۰.۷۸۲	۰.۷۸۲	۰.۵۴۸	-۰.۲۵۵
	Mode ۴	۰.۷۱۸	۱.۲	۱.۲۰۷	۰.۷۶	-۰.۲۰۹
	Mode ۵	۰.۸۳	۱.۶۴	۱.۶۴	۰.۹۴۷	-۰.۳۱۵

۴ و ۴ به ۵ فرکانس طبیعی مد اول به ترتیب ۰/۴۲۸، ۱/۰۳۶، ۱/۰۴۵ و ۱/۷۵ درصد افزایش خواهد یافت. با توجه به جدول ۷ مشاهده می‌شود که در مدهای ۱ تا ۴ بازشوی مربعی دارای فرکانس طبیعی

همچنین، شیب تغییرات فرکانس‌ها با افزایش یکنواخت بازشوها افزایش پیدا کرده است. به‌عنوان مثال در بازشوی مربعی با اضافه کردن یک درصد بازشو به درصد بازشوی قبلی ۱ به ۲، ۲ به ۳، ۳ به

جدول ۹: اثر ضخامت سخت‌کننده بر فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه FGM دارای سخت‌کننده.

Table 9. Effect of stiffener thickness on the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate

t(mm)	Mode <sup>۱</sup>	Mode <sup>۲</sup>	Mode <sup>۳</sup>	Mode <sup>۴</sup>	Mode <sup>۵</sup>
۲	۷۴.۹۹۵	۱۰۱.۰۴	۱۶۱.۵۸	۱۷۸.۰۹	۲۰۸.۰۹
۴	۹۱.۰۳۹	۱۰۱.۱	۱۶۱.۹۲	۱۸۵.۴۱	۲۱۲.۹۸
۶	۱۰۰.۸۱	۱۰۱.۵۱	۱۶۳.۰۶	۱۸۷.۹۹	۲۱۷.۱۴
۸	۱۰۲.۳۳	۱۰۷.۴۱	۱۶۵.۰۷	۱۸۹.۳	۲۲۰.۶۵
۱۰	۱۰۳.۵۴	۱۱۲.۱۶	۱۶۷.۶۹	۱۹۰.۱	۲۲۳.۶

جدول ۱۰: اثر ارتفاع سخت‌کننده بر فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه FGM دارای سخت‌کننده.

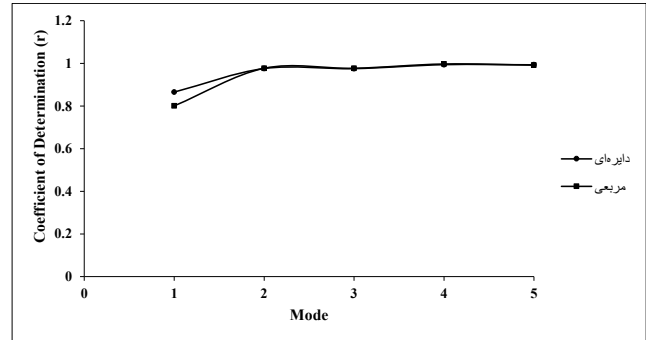
Table 10. Effect of stiffener height on the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate

h(mm)	Mode <sup>۱</sup>	Mode <sup>۲</sup>	Mode <sup>۳</sup>	Mode <sup>۴</sup>	Mode <sup>۵</sup>
۲۰	۴۷.۲۱	۱۰۱.۴۷	۱۳۵.۴۸	۱۶۲.۵۲	۱۹۸.۳
۴۰	۷۲.۴۶۸	۱۰۱.۶۱	۱۶۲.۹۸	۱۷۷.۶۴	۲۰۱.۶۵
۶۰	۱۰۰.۸۱	۱۰۱.۵۱	۱۶۳.۰۶	۱۸۷.۹۹	۲۱۷.۱۴
۸۰	۱۰۱.۰۷	۱۱۹.۷۹	۱۶۲.۶۴	۱۹۰.۹	۲۴۴.۴۳
۱۰۰	۱۰۰.۱۷	۱۲۹.۴۶۷	۱۶۱.۵۲	۱۹۲.۰۲	۲۶۱.۷۷

شاخص توان حجمی برابر ۱ ( $n=1$ ) مدل‌سازی شد (شکل ۱۳). به منظور بررسی اثر ضخامت، سخت‌کننده‌هایی با ضخامت‌های ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ میلی‌متر و ارتفاع ۶۰ میلی‌متر مدل‌سازی گردید. همچنین برای بررسی اثر ارتفاع، سخت‌کننده‌هایی با ارتفاع‌های ۲۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ میلی‌متر، ضخامت ۶ میلی‌متر نیز مدل‌سازی گردید. جنس سخت‌کننده‌ها از فلز و صفحه‌های FGM دارای سخت‌کننده دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده می‌باشند. با بررسی نتایج (جدول‌های ۹ و ۱۰) و استفاده از رابطه‌های (۸) تا (۱۳) می‌توان میزان تأثیر ضخامت و ارتفاع سخت‌کننده را بر فرکانس طبیعی صفحه بدست آورد. با توجه به شکل ۱۴ ملاحظه می‌شود که ضخامت نسبت به ارتفاع سخت‌کننده دارای اثر بیش‌تری بر روی فرکانس طبیعی صفحه FGM دارد.

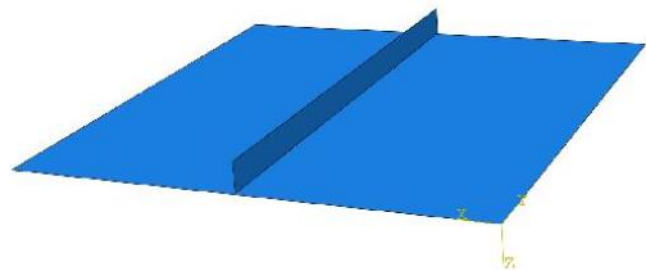
#### ۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، به منظور ارزیابی تأثیر پارامترهای هندسی، انواع بازشو و سخت‌کننده بر روی رفتار فرکانسی صفحه‌های FGM از نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus استفاده شد. پس از اطمینان از روش مدل‌سازی صفحه‌های هدفمند، اثر شاخص توان حجمی، نسبت



شکل ۱۲: ضرایب تعیین بازشوی دایره‌ای و مربعی بر روی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه FGM.

Fig. 12. Determination coefficients, circular and square openings on the natural frequencies of the first five modes of the FGM plate



شکل ۱۳: نمایش شماتیک صفحه FGM دارای سخت‌کننده.

Fig. 13 Schematic of FGM plate with stiffener

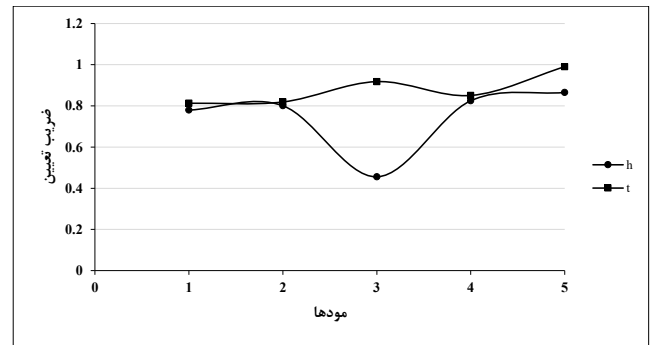
بیش‌تری نسبت به بازشوی دایره‌ای می‌باشد، این در صورتی است که در مد ۵ بالعکس می‌شود.

بر اساس رابطه‌های (۸) تا (۱۳) و جدول ۷ می‌توان مقدار اثر بازشوی دایره‌ای و مربعی را بر فرکانس‌های طبیعی هر یک از مدها به دست آورد که در شکل ۱۲ قابل مشاهده است. همان‌طور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، ایجاد بازشو در صفحه باعث تأثیراتی بر روی فرکانس طبیعی هر یک از مدهای صفحه می‌شود که کم‌ترین و بیش‌ترین اثر بازشو به ترتیب بر روی مد اول و مدهای بالاتر می‌باشد. همچنین، بازشوی دایره‌ای تأثیر بیش‌تری بر روی فرکانس طبیعی صفحه نسبت به بازشوی مربعی دارد.

#### ۷-۳- صفحه‌های دارای سخت‌کننده

به منظور بررسی اثر سخت‌کننده بر روی فرکانس طبیعی صفحه FGM، سخت‌کننده‌هایی با ضخامت‌ها و ارتفاع‌های مختلف با

- در صفحه‌های هدفمند دارای سخت‌کننده نیز مشاهده شد که ضخامت نسبت به ارتفاع سخت‌کننده دارای اثر بیش‌تری بر روی فرکانس طبیعی صفحه‌ی FGM دارد. به‌طوری‌که مقدار ضریب تعیین مدهای ۱ تا ۵ صفحه‌ی هدفمند در مدل‌های بررسی‌شده برای ضخامت به‌ترتیب ۰/۸۱، ۰/۸۲، ۰/۹۱، ۰/۸۵ و ۰/۹۸ و برای ارتفاع ۰/۷۷، ۰/۸۰، ۰/۴۵، ۰/۸۲ و ۰/۸۶ می‌باشد.



شکل ۱۴: ضرایب تعیین ضخامت و ارتفاع سخت‌کننده بر روی فرکانس‌های طبیعی پنج مد اول صفحه‌ی FGM.

Fig. 14. Determination coefficients, thickness and height of stiffener on natural frequencies of the first five modes of the FGM plate

#### ۵- فهرست علائم

طول صفحه در راستای محور $x$ , mm	$a$
عرض صفحه در راستای محور $y$ , mm	$b$
ضریب کشسانی، $N/m^2$	$E$
ضخامت صفحه در راستای محور $z$ , mm	$h$
شاخص توان حجمی	$n$
توزیع خواص مواد	$P(z)$
ضریب‌های دمایی مواد تشکیل‌دهنده‌ی فازهای سرامیک - فلز	$P_0, P_1, P_{-1}, P_2, P_3$
بیانگر خواص مواد سرامیکی	$P_c$
بیانگر خواص مواد فلزی	$P_m$
ضریب تعیین	$r$
ضریب همبستگی	$\hat{\rho}_{xy}$
مقدارهای میانگین	$\bar{X}, \bar{Y}$
انحراف از معیار	$s_x, s_y$
تابع حجمی سرامیک	$V_c$
تابع حجمی فلز	$V_m$
تغییر مکان در راستای محور $z$ , mm	$w$
چگالی، $kg/m^3$	$\rho$
نسبت پواسون	$\delta$

#### ۶- مراجع

- [1] Miyamoto, Y. A., Kaysser, W., Rabin, B. H., Kawasaki, A., and Ford, R. G., Functionally Graded Material: Design, Processing and Applications, United States, 1999.
- [2] M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai, and I. Shiota, "FGM-90," in Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materilas, FGM Forum, Tokyo, Japan, 1990.
- [3] Koizumi, M., "The Concept of FGM", Ceramic

ابعاد، ضخامت، شرایط تکیه‌گاهی و انواع بازشو و سخت‌کننده مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از مقایسه و ارزیابی رفتار فرکانسی صفحه‌ها به‌طور خلاصه در ادامه بیان شده است.

- نتایج بررسی فرکانس مدهای صفحه‌های FGM حاکی از این است که با افزایش پارامتر اثرگذار ماده‌ی هدفمند (شاخص توان حجمی)، مقدار فرکانس‌های طبیعی مدها کاهش پیدا کرده است، به‌طوری‌که بیشینه‌ی فرکانس در صفحه‌ی تمام فلزی ( $n = \infty$ ) و کمینه‌ی فرکانس در صفحه‌ی تمام سرامیکی ( $n = 0$ ) اتفاق افتاده است و فرکانس صفحه‌های دیگر بین این دو حالت بیشینه و کمینه قرار گرفته است. همچنین، با افزایش هر یک از پارامترهای هندسی صفحه شامل نسبت ابعاد و ضخامت مقدار فرکانس‌های طبیعی مدها به‌ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

- با بررسی میزان اثرگذاری خواص مکانیکی و هندسی صفحه‌های هدفمند ملاحظه شد که ضخامت و شاخص توان حجمی به‌ترتیب دارای بیش‌ترین ( $r=0.99$ ) و کم‌ترین ( $r=0.24$ ) میزان تأثیر بر روی فرکانس طبیعی هر یک از مدهای صفحه‌ی FGM می‌باشند.

- با توجه به بررسی‌های انجام‌شده می‌توان بیان کرد که با افزایش شرایط تکیه‌گاهی ساده در لبه‌های صفحه (کاهش لبه‌های گیردار صفحه) مقدار فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی FGM کاهش می‌یابد.

- در صفحه‌های هدفمند دارای بازشوی مربعی و دایره‌ای، فرکانس طبیعی مدهای ۱ تا ۴ صفحه دارای بازشوی مربعی بیش‌تر از صفحه‌ی دارای بازشوی دایره‌ای می‌باشد، این در صورتی است که در مد ۵ بالعکس می‌شود. همچنین، بازشوی دایره‌ای تأثیر بیش‌تری بر روی فرکانس طبیعی صفحه نسبت به بازشوی مربعی دارد.

- [15] A. Allahverdizadeh, R. Oftadeh, M. Mahjoob, and M. J. A. M. S. S. Naei, "Homotopy perturbation solution and periodicity analysis of nonlinear vibration of thin rectangular functionally graded plates," vol. 27, no. 2, pp. 210-220, 2014.
- [16] P. Malekzadeh, A. J. M. o. A. M. Alibeygi Beni, and Structures, "Nonlinear free vibration of in-plane functionally graded rectangular plates," vol. 22, no. 8, pp. 633-640, 2015.
- [17] A. J. A. M. Alibeigloo, "Free vibration analysis of nano-plate using three-dimensional theory of elasticity," vol. 222, no. 1-2, p. 149, 2011.
- [18] A. Setoodeh, P. Malekzadeh, and A. J. P. o. t. I. o. M. E. Vosoughi, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, "Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal Mindlin plate theory," vol. 226, no. 7, pp. 1896-1906, 2012.
- [19] P. A. Sharabiani and M. R. H. J. C. P. B. E. Yazdi, "Nonlinear free vibrations of functionally graded nanobeams with surface effects," vol. 45, no. 1, pp. 581-586, 2013.
- [20] M. Talebitooti, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, and R. J. A. o. A. M. Talebitooti, "Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners," vol. 80, no. 3, pp. 201-215, 2010.
- [21] S. Kidane, G. Li, J. Helms, S.-S. Pang, and E. J. C. P. B. E. Woldeesenbet, "Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders," vol. 34, no. 1, pp. 1-9, 2003.
- [22] B. Mustafa, R. J. C. Ali, and structures, "An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells," vol. 32, no. 2, pp. 355-363, 1989.
- [23] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2004.
- [24] W.-Y. Jung and S.-C. J. A. M. M. Han, "Static and eigenvalue problems of sigmoid functionally graded materials (S-FGM) micro-scale plates using the modified couple stress theory," vol. 39, no. 12, pp. 3506-3524, 2015.
- [25] X.-L. Huang, H.-S. J. I. J. o. S. Shen, and Structures, "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments," vol. 41, no. 9-10, pp. 2403-2427, 2004.
- [26] H.-S. Shen, *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press, 2016.
- [27] R. Gunes, M. Aydin, M. K. Apalak, and J. J. C. S. Reddy, *Transactions, Functionally Gradient Materials*, Vol. 34, pp. 3-10, 1993.
- [4] S. Srinivas, C. J. Rao, A. J. J. o. s. Rao, and vibration, "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates," vol. 12, no. 2, pp. 187-199, 1970.
- [5] S. Srinivas, A. J. I. J. o. S. Rao, and Structures, "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates," vol. 6, no. 11, pp. 1463-1481, 1970.
- [6] M. J. J. o. S. Levinson and Vibration, "Free vibrations of a simply supported, rectangular plate: an exact elasticity solution," vol. 98, no. 2, pp. 289-298, 1985.
- [7] A. K. Noor and W. S. J. J. o. A. M. Burton, "Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates," vol. 57, no. 1, pp. 182-188, 1990.
- [8] C.-C. Lin and W. J. J. o. S. V. King, "Free transverse vibrations of rectangular unsymmetrically laminated plates," vol. 36, pp. 91-103, 1974.
- [9] D. J. J. o. s. Gorman and vibration, "An exact analytical approach to the free vibration analysis of rectangular plates with mixed boundary conditions," vol. 93, no. 2, pp. 235-247, 1984.
- [10] J. Reddy, N. J. J. o. s. Phan, and vibration, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," vol. 98, no. 2, pp. 157-170, 1985.
- [11] M. J. J. o. S. Di Sciuva and Vibration, "Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model," vol. 105, no. 3, pp. 425-442, 1986.
- [12] A. Ferreira, R. Batra, C. Roque, L. Qian, and R. J. C. S. Jorge, "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method," vol. 75, no. 1-4, pp. 593-600, 2006.
- [13] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, and S. R. J. I. J. o. M. S. Atashipour, "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates," vol. 53, no. 1, pp. 11-22, 2011.
- [14] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, and S. R. J. C. S. Atashipour, "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure," vol. 93, no. 2, pp. 722-735, 2011.



- Construction Engineering, [online] vol. 5, pages 16, 2018, (in Persian).
- [31] Ramu, I. and Mohanty, S.C., 2012. Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method. *Procedia engineering*, 38, pp.2758-2766
- [32] C. Aksoylar, A. Ömercikoğlu, Z. Mecitoğlu, and M. H. J. C. S. Omurtag, "Nonlinear transient analysis of FGM and FML plates under blast loads by experimental and mixed FE methods," vol. 94, no. 2, pp. 731-744, 2012.
- [33] A. S. Nowak and K. R. Collins, *Reliability of structures*. CRC Press, 2012.
- "The elasto-plastic impact analysis of functionally graded circular plates under low-velocities," vol. 93, no. 2, pp. 860-869, 2011.
- [28] T. J. I. J. o. I. E. Hause, "Advanced functionally graded plate-type structures impacted by blast loading," vol. 38, no. 5, pp. 314-321, 2011.
- [29] *Abaqus Analysis User's Manual Version 6.14*. Dassault Systemes Simulia Crop.: Providence, RI, USA, 2014.
- [30] R. Jome Manzari and F. Shahabian, "The Geometrically nonlinear dynamic response of metal-ceramic FGM plates under the blast loading", *Journal of Structural and*

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

*M. Shahraki, F. Shahabian, R. Jome Manzari, Free vibration analysis of FGM plates with opening and stiffener, Amirkabir J. Civil Eng., 52(8) (2020) 2025-2042.*

DOI: [10.22060/ceej.2019.15832.6047](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.15832.6047)



