

بررسی انتقال حرارت سیالات غیرنیوتونی شبه پلاستیک در مبدل‌های حرارتی متخلخل

امین‌رضا نقره‌آبادی، کسری ایوبی ایوبلو، رضا باهوش کازرونی، محمد قلم‌باز*

دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۱۰-۰۸
بازنگری: ۱۳۹۷-۱۲-۰۵
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۱-۲۵
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۳-۰۷

کلمات کلیدی:

انتقال حرارت رایلی-بنارد
سیال غیرنیوتونی
شبه پلاستیک
مبدل حرارتی
لایه متخلخل

خلاصه: در این مقاله انتقال حرارت جابجایی طبیعی رایلی-بنارد سیالات غیرنیوتونی شبه پلاستیک در مبدل حرارتی لوله‌ای که دیواره‌ی سمت چپ آن از لایه‌ی متخلخل مشخص با ضخامت مشخص پوشیده شده است برای حالت ناپایدار و آرام به صورت عددی بررسی شده است. دیواره‌ی پایینی در دمای ثابت T_h و دیواره‌ی بالایی در دمای T_c که $(T_h > T_c)$ قرار دارد. دیواره‌ی سمت چپ و راست عایق هستند. معادلات حاکم بر مسئله پس از بی‌بعد شدن، به روش المان محدود به صورت همزمان حل شده است و سپس صحت نتایج در مقایسه با پژوهش‌های پیشین ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهند که در رایلی‌های بزرگ ($Ra=10^5$) به دلیل غالب بودن انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی نسبت به انتقال حرارت هدایت، ناسلت متوسط با سرعت قابل توجهی افزایش می‌یابد. همچنین در اعداد داری کوچک ($Da=10^{-4}$) میزان نفوذپذیری جریان بسیار کم است و ماهیت جریان به گونه‌ای تغییر می‌کند که باعث کاهش عملکرد حرارتی جریان جابجایی طبیعی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که با کاهش شاخص پاورلا دمای بی‌بعد کاهش یافته و کمترین دمای بی‌بعد برای کمترین شاخص پاورلا به دست می‌آید. از سوی دیگر، با افزایش شاخص پاورلا در یک رایلی ثابت و گذشت زمان، افزایش انتقال حرارت طبیعی اتفاق می‌افتد. همچنین عدد رایلی برای شروع جابه‌جایی طبیعی با افزایش شاخص پاورلا کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

فرآیند انتقال حرارت سیالات غیرنیوتونی در داخل لوله‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. این اهمیت در صنایع شیمیایی، پتروشیمی، پلیمر، صنایع غذایی، دارویی و غیره به وضوح دیده می‌شود. اهمیت این موضوع زمانی مشهود است که هدف ما طراحی مبدل‌های حرارتی باشد. در بسیاری از فرآیندهای شیمیایی در محدوده‌ی وسیعی از تجهیزات به کار رفته، انتقال حرارت به و یا از سیالات صورت می‌گیرد. به عنوان مثال می‌توان از مبدل‌های پوسته لوله و همچنین مخزن‌های همزن‌دار که به وسیله یک لوله مارپیچ یا یک حمام حرارتی سرد یا گرم می‌شوند، نام برد. در برخی موارد،

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.ghalambaz@iaud.ac.ir

مانند: دستگاه تزریق که در صنایع پلیمر و صنایع غذایی کاربرد دارند، در طی فرآیند حرارت تولید می‌شود در این گونه موارد بسته به نوع فرآیند لازم می‌باشد که از هدر رفتن حرارت و بالعکس از تجمع حرارت درون سیستم جلوگیری نمائیم. در مواردی نیز که سیستم موردنظر نسبت به دما حساس باشد (مانند مواد غذایی و دارویی) اصلاح از چگونگی توزیع دما و همچنین حداکثر دمای سیال موردنیاز می‌باشد [۱].

با توجه به موارد مذکور و مثال‌های متعدد دیگر می‌توان به اهمیت اطلاع از رفتار حرارتی سیال جهت طراحی سیستم‌های انتقال حرارت پی‌برد. از آنجا که در بسیاری از فرآیندهای شیمیایی به خصوص در زمینه مواد پلیمری و غذایی سیالات از نوع غیرنیوتونی می‌باشند

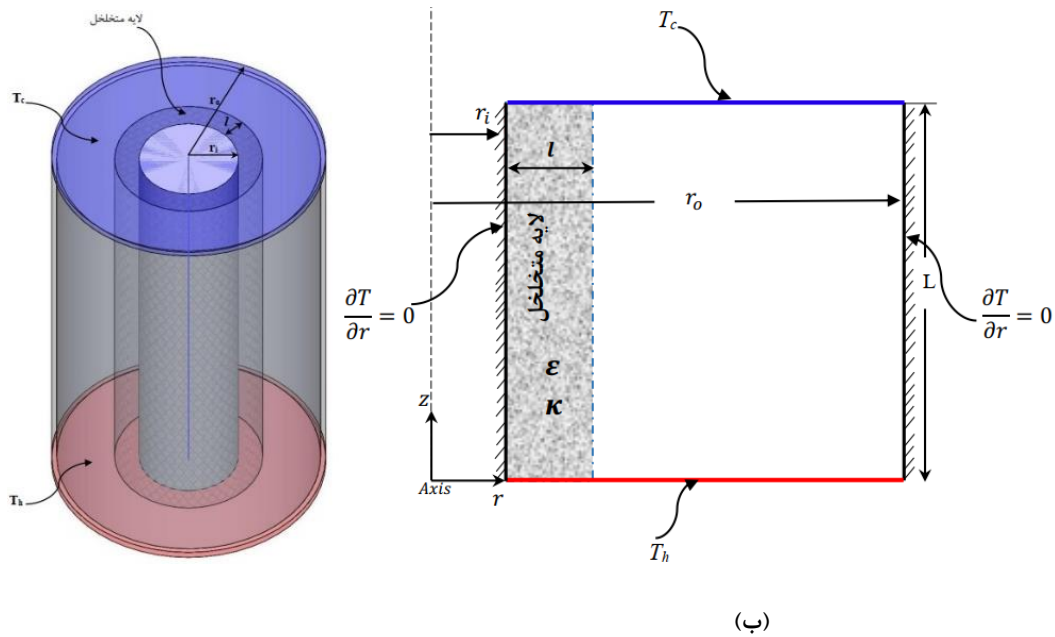


ضرورت مطالعه و بررسی رفتار حرارتی و چگونگی نحوه تغییرات ضریب انتقال حرارت اینگونه سیالات کاملاً مشهود است. به علت گرانی زیاد سیالات غیرنیوتونی، این مواد در بیشتر موارد تحت شرایط جریان آرام می‌باشند. به علاوه تنش برشی این سیالات معمولاً زیاد است به طوری که اتلاف حرارتی را به ندرت می‌توان نادیده گرفت و وابستگی دمایی خواص رئولوژیکی نیز به پیچیدگی معادلات موازنه انرژی، ممنتوم و جرم اضافه می‌کند [۲].

کیم و همکاران [۳] جابه جایی طبیعی گذرا را برای سیالات غیرنیوتونی با خاصیت توانی و برای n های کوچکتر از ۱ در یک محفظه مربعی که دیواره‌های عمودی آن دارای دماهای ثابت متفاوت بود بررسی کردند. مطالعه آنها برای محدوده‌ای از رایلی از 10^5 تا 10^7 برای عددهای پرناتل بزرگ حاکی از آن بود که میانگین عدد ناسلت با کاهش توان n برای مقادیر مشخص رایلی و پرناتل، افزایش پیدا می‌کند. راجاگوپال [۴] جابجایی آزاد سیال غیرنیوتونی بین دو صفحه عمودی که دو صفحه در دو دمای مختلف قرار دارند را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داد. بارلتا [۵] به روش تحلیلی جابجایی ترکیبی توسعه یافته یک سیال غیرنیوتونی بین دو صفحه با دماهای متفاوت را به منظور یافتن شرایط لازم برای ایجاد جریان برگشتی مورد بررسی قرار داد. دگان و واسور [۶] جابجایی ترکیبی سیال داخل کانال متخلخل را مورد بررسی قرار دادند. لورنزی و بیسارنی [۷] جابجایی ترکیبی سیال غیرنیوتونی بین دو صفحه عمودی با دو دمای یکسان که دماها به صورت خطی تغییر کرده و نیز سرعت ورودی به صورت سهموی می‌باشد به روش عددی (تابع جریان) مورد بررسی قرار دادند. فتحی کامیش [۸] جابجایی اجباری سیال غیرنیوتونی بین دو صفحه افقی متخلخل با دهش و دمش برابر در حالی که صفحه بالایی متحرک می‌باشد را به صورت تحلیلی حل نمود. در این کار جریان به صورت یک بعدی در نظر گرفته شد.

در مورد انتقال حرارت سیالات غیرنیوتونی در حالت جریان آرام در لوله‌ها مطالعات تحقیقاتی اولیه را برد و لیچه [۹] انجام داده‌اند. در این بررسی مشخص شده است که تغییرات منحنی دما در لوله نسبت به شعاع لوله (r/R) با افزایش یافتن توان مدل پاورلا سریع‌تر می‌گردد. متزنر [۱۰] با تغییرات اساسی و لازم روی معادله حاصل از حل عمومی معادله انرژی برای سیال پاورلا معادله‌ای استخراج کرد. در حالتی که شار حرارتی ثابتی به دیواره لوله اعمال می‌شود، پوپوسکار

و ویلیکینسون [۱۱] مطالعات تجربی روی سیالات شبه‌پلاستیک انجام داده‌اند. مطالعات و بررسی تجربی انتقال حرارت روی سیالات ویسکوز در جریان آرام داخل لوله مدور را می‌توان در بسیاری از مقالات منتشر شده مشاهده کرد [۱۶-۱۲]. جوشی و برگلس [۱۷] برای سیال کاملاً توسعه یافته و یا در حال توسعه یافتگی مطالعات تجربی انجام داده‌اند. لاوال و موممدار [۱۸] نیز با استفاده از محلول سی.ام.سی و رب گوجه فرنگی مطالعات تجربی بر روی انتقال حرارت سیالات غیرنیوتونی انجام داده‌اند. مک کیلوپ [۱۹] مطالعه‌ی تئوری روی انتقال حرارت غیرنیوتونی برای دو شرط مرزی انجام داد. معادلات مربوط به انرژی در این مطالعه به صورت عددی حل شده است. در این بررسی مقادیر ناسلت برای سیال نیوتونی ($n=1$) و جریان پلاگ ($n=0$) با مقادیر تحلیلی مربوط به مطالعات سیجل، اسپارا و هولمن [۲۰] (برای $n=1$) و راهسنو [۲۱] (برای $n=0$) مقایسه شده که این نتایج توافق خوبی را نشان می‌دهد. ال سومیلی و همکاران [۲۲] اثرات اندازه ذرات تخلخل را روی انتقال حرارت جابجایی اجباری از یک استوانه دایروی با فرض عدم تعادل حرارتی به صورت عددی بررسی کردند. لایقی و نوری بروجردی [۲۳] انتقال حرارت جابجایی اجباری آرایشی از استوانه‌های مدور تحت شرط مرزی دما ثابت که در تماس مستقیم با یک سیال تراکم‌ناپذیر قرار گرفته است، تحت جریان آرام مورد مطالعه و تحقیق قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن حضور و عدم حضور محیط متخلخل و استفاده از معادلات ناویر استوکس برای تحلیل جریان سیال و انتقال حرارت و به کار بردن مدل‌های داری و داری-برینکمن برای تحلیل جریان سیال و انتقال حرارت در محیط متخلخل به این نتیجه رسیدند که حضور یک ناحیه متخلخل بسیار رسانا، افزایش انتقال حرارت بیش از ۸۰ درصد را سبب می‌شود و محیط متخلخل افت فشار کلی سیستم را افزایش می‌دهد. رشیدی و همکاران [۲۴] جریان سیال و جابجایی اجباری در اطراف یک استوانه صلب، پیچیده شده با یک حلقه متخلخل تحت رژیم جریان آرام را به صورت عددی مطالعه کردند. آن‌ها با بررسی اثرات پارامترهای مختلف مانند ضخامت لایه متخلخل، نفوذپذیری و همچنین بررسی اعداد داری و رینولدز به این نتیجه رسیدند که در حضور یک لایه متخلخل اطراف سیلندر، با کاهش عدد داری (در حالی که شعاع بحرانی عایق افزایش می‌یابد) طول گردابه زیاد می‌شود. هنگ هی سون و همکاران [۲۵]، انتقال حرارت رایلی-بنارد سیال غیرنیوتونی آب Al_2O_3 - پیرو قانون توانی در یک محفظه‌ی مربعی را به صورت



(الف)

شکل ۱. شماتیک حاکم بر مسئله در حالت (الف) سه بعدی (ب) دوبعدی
Fig. 1. Schematic view of the model in (a) 3D (b2) 2D

میزان انرژی رسیده از خورشید را جذب و ذخیره نماید. ولی اجسام با دریافت انرژی گرم شده و دمای سطح آن‌ها بالا می‌رود و در نتیجه انرژی جذب شده را با توان چهار دمای سطحشان به اطراف خود باز پس می‌فرستند. بنابراین برای دریافت حداکثر انرژی لازم هست که دمای سطح جاذب تا حد امکان پایین نگه داشته شود. استفاده از مواد تغییرفازدهنده غیرنیوتونی در محیط متخلخل در کلکتورهای خورشیدی یکی از این راهکارها است.

۲- مدل فیزیکی و معادلات حاکم

مطابق شکل ۱ هندسه مطرح شده شامل یک لوله عمودی با ارتفاع L و با شعاع‌های $r_i = 0.5$ و $r_o = 1.5$ می‌باشد. سطوح لوله بیرونی در سمت چپ و راست عایق حرارت می‌باشند. لایه متخلخل بر روی سطح لوله سمت چپ به ضخامت مشخص و ثابت 0.1 قرار گرفته شده است. سطح بالایی لوله در دمای سرد ثابت T_c و سطح پایینی لوله در دمای گرم ثابت T_h قرار دارند. فضای بین لوله با سیال غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک پر شده است. هدف بررسی تأثیر محیط متخلخل و غیرنیوتونی بودن سیال بر روی انتقال حرارت جابجایی طبیعی می‌باشد. برای مدل‌سازی نیروی شناوری از مدل بوزینسک

عددی مورد مطالعه قرار دادند. موخرجی و همکاران [۲۶] اثرات ضریب غیرنیوتونی پاورلا و ویسکوزیته پلاستیکی بینگهام بر جریان انتقال حرارت آرام عبوری از میان کانال‌های غیردایروی را مورد بررسی قرار دادند. ژانگ و همکاران [۲۷] انتقال حرارت سیال غیرنیوتونی پاورلا در لوله‌ها با عرض‌های عبوری مختلف را مورد مطالعه قرار داده و به این نتیجه رسیدند که انتقال حرارت سیال غیرنیوتونی به ضریب پاورلا و عدد پکلت بستگی دارد.

وجود لایه متخلخل می‌تواند الگوی حرارت هدایت و جابجایی را تغییر دهد و در نتیجه تأثیر بسزایی در افزایش انتقال حرارت ایفا کند. مطالعات پیشین نشان می‌دهد که انتقال حرارت سیالات شبه‌پلاستیک غیرنیوتونی در محفظه‌های بدون محیط متخلخل یا در حضور محیط متخلخل مورد مطالعه قرار گرفته است، ولی انتقال حرارت رایلی-بنارد سیالات شبه‌پلاستیک غیرنیوتونی در محفظه‌ی لوله‌ای در حالت وجود لایه متخلخل مورد مطالعه قرار نگرفته است. نوآوری پژوهش حاضر، مطالعه تأثیر وجود لایه محیط متخلخل بر انتقال حرارت جابجایی طبیعی رایلی-بنارد مواد تغییرفازدهنده غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک در فضای بین دو لوله مدور عمودی می‌باشد. در ساخت کلکتورهای خورشیدی هدف اصلی طراحی سیستمی است که بتواند بیشترین

در معادله‌ی (۳) عبارت‌های $n, m, \dot{\gamma}, \nabla \bar{u}, [\dot{\gamma}], \mu(\dot{\gamma})$ به ترتیب لزجت مؤثر سیال، تانسور نرخ کرنش در سیال، تانسور گرادیان میدان سرعت، بزرگی تانسور نرخ کرنش، شاخص پایداری جریان، شاخص رفتار جریان سیال را بیان می‌کنند. $\dot{\gamma}_{\min}$ نرخ برش مینیمم را نشان می‌دهد. هنگامی که $n > 1$ باشد، سیال رفتار غیرنیوتونی از خود نشان می‌دهد و اگر $n = 1$ باشد، رفتار سیال نیوتونی می‌باشد در حالی که اگر $n < 1$ باشد، سیال رفتار غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک از خود نشان می‌دهد. قانون داریسی مختلفی برای سیالات غیرنیوتنی ارائه شده است.

$$(\rho c_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_{bf} \bar{u} \cdot \nabla^* T = \nabla^* \cdot (k_{eff} \nabla^* T) \quad (4)$$

همچنین روابط خواص به صورت زیر می‌باشند [۲۸]:

$$\begin{cases} (\rho c_p)_{eff} = (1 - \varepsilon)(\rho c_p)_p + \varepsilon(\rho c_p)_{bf} \\ k_{eff} = (1 - \varepsilon)k_p + \varepsilon k_{bf} \end{cases} \quad (5)$$

۲-۲- شرایط مرزی و اولیه

از جمله شرط‌های مرزی حاکم بر مسئله می‌توان به دمای T_h در دیوار پایینی و T_c در دیواره‌ی بالایی اشاره نمود. از طرفی دو دیواره‌ی چپ و راست عایق حرارتی می‌باشند. با توجه به شرایط مرزی ذکر شده، شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله، به صورت زیر ارائه شده است:

$$r, z = 0, t \rightarrow \bar{u} = 0, T = T_h \quad (6)$$

$$r, z = L, t \rightarrow \bar{u} = 0, T = T_c \quad (7)$$

$$r_i, z, t \rightarrow \bar{u} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$r_o, z, t \rightarrow \bar{u} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

شرط اولیه مسئله هم به صورت رابطه‌ی (۱۰) تعریف می‌شود.

$$r, z, t = 0 \rightarrow \bar{u} = 0, T = T_0 \quad (10)$$

۳-۲- بی‌بعدسازی معادلات حاکم

در روش‌های حل معادلات حاکم بر سیالات، برای دسترسی

استفاده شده است. مسأله به صورت اکسیمیتریک و ناپایا در نظر گرفته شده است و انتقال حرارت به روش جابه‌جایی طبیعی همراه با جریان آرام خواهد بود. اثر پارامترهای بی‌بعدی همچون اعداد ریلی، داریسی و ضریب توانی غیرنیوتونی بر روی میدان جریان و انتقال حرارت در قالب کانتورهای خطوط هم‌دما و جریان، نمودار عدد ناسلت میانگین روی سطوح مشاهده خواهد شد. دیواره‌ی داخلی پوشیده از ماده متخلخل است. با در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و اختلاف دمای ایجاد شده درون مبدل حرارتی، انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در این مدل فیزیکی رخ داده و باعث تغییر میزان انتقال حرارت شده که در ادامه به بررسی این تغییرات و چگونگی اثر آن بر مبدل حرارتی پرداخته خواهد شد. شکل ۱ شماتیک هندسه مورد مطالعه را در دو حالت (الف) سه‌بعدی و (ب) دوبعدی نشان می‌دهد.

۲-۱- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مدل به طور کلی شامل معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی بوده و در کنار شرایط مرزی و اولیه، قابل حل خواهند بود. روابط (۱) تا (۳) معادلات حاکم بر مسئله به ترتیب معادله پیوستگی، مومنتوم و انرژی می‌باشند، در ادامه نیز شرایط مرزی ارائه گردیده است [۲۸].

$$\rho \nabla^* \cdot (\bar{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \rho \cdot (\bar{u} \cdot \nabla^*) \bar{u} = \nabla^* \cdot \left[-pI + \frac{\mu}{\varepsilon} (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T) \right] - \frac{\mu}{K} \bar{u} + \rho \bar{g} \beta \Delta T \quad (2)$$

در معادله‌ی بالا $\mu, \rho, K, \varepsilon$ به ترتیب میزان تخلخل محیط متخلخل، ویسکوزیته‌ی دینامیکی، چگالی سیال، بردار سرعت، قابلیت نفوذپذیری محیط متخلخل هستند [۲۸]. برای لحاظ کردن رفتار غیرنیوتونی سیال از قانون استفاده می‌گردد، بر مبنای این مدل می‌توان نوشت [۱].

$$\mu(\dot{\gamma}) = m \mu_a \rightarrow \begin{cases} \mu_a = (\dot{\gamma})^{n-1} \\ \dot{\gamma} = \max \left(\sqrt{[D'] : [D']}, \dot{\gamma}_{\min} \right) \\ D' = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T) \end{cases} \quad (3)$$

انرژی:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{(\rho c_p)_{bf}}{(\rho c_p)_{eff}} (\vec{U} \cdot \nabla \theta) = \frac{1}{(\rho c_p)_{eff}} (\nabla \cdot (k_{eff} \nabla \theta)) \quad (17)$$

شرایط مرزی بی‌بعد نیز به صورت زیر خواهند بود:

$$R, Z = 0, \tau \rightarrow \vec{U} = 0, \theta = 1 \quad (18)$$

$$R, Z = L, \tau \rightarrow \vec{U} = 0, \theta = 0 \quad (19)$$

$$R = R_i, Z, \tau \rightarrow \vec{U} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad (20)$$

$$R = R_o, Z, \tau \rightarrow \vec{U} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad (21)$$

$$R, Z, \tau = 0 \rightarrow \vec{U} = 0, \theta_0 = \frac{T_0 - T_c}{T_h - T_c} \quad (22)$$

۲-۴- تعیین عدد ناسلت

از مهم‌ترین و تعیین‌کننده‌ترین پارامترها در مسائل مربوط به انتقال حرارت، می‌توان به عدد بی‌بعد ناسلت اشاره کرد. تعریف عدد ناسلت در یک لوله به صورت رابطه‌ی (۲۳) است [۲۹].

$$Nu = \frac{hD}{K} \quad (23)$$

که D قطر لوله، K ضریب هدایت و h ضریب انتقال حرارت جابجایی است و از تساوی قرار دادن انتقال حرارت جابجایی و هدایت بر روی دیواره‌ی لوله، حاصل می‌گردد [۲۹]. انتقال حرارت از سمت دیواره‌ی گرم پایینی به دیواره‌ی سرد بالایی می‌باشد.

$$q_{conv}'' = q_{cond}'' \longrightarrow h(T - T_\infty) = q_{cond}'' \Rightarrow h = \frac{q_{cond}''}{(T - T_\infty)} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۴) در رابطه‌ی (۲۳) عدد ناسلت برای لوله به دست می‌آید.

$$Nu = \frac{q_{cond}'' D}{K(T - T_\infty)} \quad (25)$$

به روابط ساده‌تر و همچنین مقایسه بهتر نتایج حل، بی‌بعدسازی معادلات حاکم بسیار کارآمد خواهد بود. از این رو برای بی‌بعدسازی معادلات جهت رسیدن به پارامترهای بی‌بعد معنادار در مباحث مهندسی، فرضیاتی منطقی و مناسبی باید اتخاذ گردد. در اینجا با توجه به معادلات حاکم و تعریف اعداد بی‌بعد به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته می‌شود. روابط (۱۱) تا (۱۴) متغیرها و پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده در معادلات و ارائه نتایج را نشان می‌دهند.

$$R = \frac{r}{L}, Z = \frac{z}{L}, \vec{U} = \frac{\vec{u}L}{\alpha_{bf,l}}, \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \tau = \frac{t\alpha_{bf,l}}{L^2}, P = \frac{\rho L^2}{\rho \alpha_{bf,l}^2}, Da = \frac{\kappa}{L^2}, \alpha_{bf,l} = \frac{k_{bf,l}}{(\rho c_p)_{bf,l}} \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_{eff}}, k_{bf(s/l)} = \frac{k_{bf,s}}{k_{bf,l}}, k_{p/l} = \frac{k_p}{k_{bf,l}}, \quad (12)$$

$$k_{s/l} = \frac{k_{bf,s}}{k_{bf,l}}, \rho c_{bf,l} = \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_{bf,l}}, (\rho c_p)_{s/l} = \frac{(\rho c_p)_{bf,s}}{(\rho c_p)_{bf,l}}$$

$$Pr = \frac{m}{\rho \alpha_{bf,l}} \left(\frac{\alpha_{bf,l}}{L^2} \right)^{n-1} = \frac{m}{\rho} \frac{\alpha_{bf,l}^{n-2}}{L^{2n-2}} \quad (13)$$

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_h - T_c) L^{2n+1}}{m \alpha_{bf,l}^n} \quad (14)$$

که Ra عدد رایلی، Ste عدد استفان، Pr عدد پرانتل و Da عدد دارسی است. با جایگذاری روابط بی‌بعد (۱۱) تا (۱۴) در معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت:

پیوستگی:

$$\rho(\nabla \cdot \vec{U}) = 0 \quad (15)$$

ممنتوم:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nabla \cdot \left[-Pl + \frac{Pr \dot{G}^{n-1}}{\varepsilon} (\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T) \right] - \frac{Pr}{Da} \dot{G}^{n-1} \vec{U} + Pr Ra \theta_z \quad (16)$$

است. از این رو، این قید، برای معادله پیوستگی به عنوان یک پارامتر جریمه (χ) در معادلات مومنتوم، در نظر گرفته شده است. بنابراین ترم فشار در معادله مومنتوم را می‌توان به شکل زیر نوشت [۳۱].

$$P = -\chi \left(\frac{\partial U_r}{\partial R} + \frac{\partial U_z}{\partial Z} \right) \quad (28)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲۸) در معادلات مومنتوم، معادله پیوستگی برای مقادیر بسیار زیاد پارامتر جریمه ($\chi = 10^v$) ارضا می‌شود. اکنون سرعت‌های شعاعی و محوری و همچنین دما را می‌توان با استاندارد به سری $\{\Phi_n\}_{n=1}^N$ به شکل زیر در بازه‌های $0 < R < 1, 0 < Z < 1$ بسط داد. توابع پایه برای سرعت و دما یکسان است و بنابراین مجموع تعداد گره‌های متغیرها برابر N می‌باشد. پس باقی‌مانده‌های غیرخطی برای معادلات سرعت و انرژی، در گره‌های درونی برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} U_r &\approx \sum_{n=1}^N (U_r)_n \Phi_n(R, Z), \\ U_z &\approx \sum_{n=1}^N (U_z)_n \Phi_n(R, Z), \\ \theta &\approx \sum_{n=1}^N \theta_n \Phi_n(R, Z) \end{aligned} \quad (29)$$

گفتن این نکته دارای اهمیت است که توابع پایه برای سرعت‌ها و دما یکسان است و بنابراین مجموع تعداد گره‌ها متغیرها برابر N می‌باشد. با استاندارد و رجوع به روش المان محدود باقی‌مانده‌های غیرخطی برای معادلات مومنتوم و انرژی در گره‌های درونی به صورت روابط ارائه شده در زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^N (U_r)_n \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \Phi_i dRdZ + \\ &\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^N (U_r)_n \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{n=1}^N (U_r)_n \Phi_n \right) \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \left(\sum_{n=1}^N (U_z)_n \Phi_n \right) \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \right] \Phi_i dRdZ + \\ &\gamma \sum_{n=1}^N (U_r)_n \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \int_{\Omega} R \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} \right] dRdZ + \\ &\gamma \sum_{n=1}^N (U_z)_n \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} dRdZ + \\ &\frac{1}{\varepsilon} Pr \sum_{n=1}^N (U_r)_n \int_{\Omega} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \right] dRdZ - \\ &\frac{Pr}{Da} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^N (U_r)_n \Phi_n \right) \Phi_i dRdZ + \end{aligned} \quad (30)$$

با بی‌بعد سازی رابطه‌ی (۲۵) با توجه به پارامترهای تعریف شده در قسمت‌های قبل، عدد ناسلت بی‌بعد برای لوله به صورت رابطه‌ی (۲۶) حاصل می‌گردد.

$$Nu_R = \left. \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right|_{Z=Z_i} \quad (26)$$

همچنین با انتگرال‌گیری بر روی دیواره گرم افقی، عدد ناسلت متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Nu_{Avg.} = \int_0^1 Nu_R dR \quad (27)$$

۳- روش حل و اعتبارسنجی

همان‌طور که در قسمت قبل بیان شد، ساختار اصلی و کلی معادلات حاکم در پژوهش حاضر از سه معادله پیوستگی، مومنتوم و انرژی تشکیل شده‌اند، که این معادلات به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای^۱ نمایش داده شده‌اند. به منظور حل چنین معادلاتی از روش‌های معتبر دینامیک سیالات محاسباتی، استفاده می‌شود که روش‌های تفاضل محدود^۲ و المان محدود^۳ از رایج‌ترین و معتبرترین این روش‌ها، به شمار می‌آیند. با توجه به اینکه در مسئله حاضر، از هندسه استوانه‌ای استفاده می‌شود و از سوی دیگر جریان انتقال حرارت جابه‌جایی سیالات غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک در محیط متخلخل، مورد بررسی قرار خواهد گرفت؛ از این رو در مسئله حاضر از روش المان محدود به کمک برنامه‌ی کامپیوتری بهره برده می‌شود.

۳-۱- روش حل

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، معادلات (۱۵) تا (۱۷) و شرایط مرزی متناظر با آن‌ها (۱۸) تا (۲۲)، که معادلاتی غیرخطی و کوپل شده با یکدیگر هستند، به صورت عددی و به روش المان محدود حل شده‌اند. بر اساس این روش، معادلات به صورت شکل ضعیف^۴ فرمول بندی شده و در نهایت به صورت عددی حل می‌گردد [۳۰]. معادله پیوستگی به صورت یک قید برای ارضای قانون بقای جرم به کار رفته

1 - Partial Differential Equations
2 - finite difference
3 - finite element
4 - Weak form

در رابطه بالا n شاخص تکرارشونده است. $J(a^n)$ ، ماتریس ژاکوبین است که U_{zj} ، U_{rj} و θ_j اجزای آن را تشکیل می‌دهند. ضمن اینکه بردار باقی‌مانده‌ها است.

با توجه به تعداد باقی‌مانده‌ها، می‌توان المان‌های درجه دومی را تعریف نمود. همچنین برای اینکه یک محفظه با ابعاد واحد مورد بررسی قرار گیرد می‌بایست دامنه حل مورد نظر از $r-z$ به $n-m$ انتقال یابد. از این‌رو برای هر گره می‌توان نوشت:

$$r = \sum_{i=1}^9 r_i \zeta_i(n, m) \quad (35)$$

$$z = \sum_{i=1}^9 z_i \zeta_i(n, m) \quad (36)$$

که در رابطه بالا $\zeta_i(n, m)$ بیانی از توابع پایه درجه دوم موضعی در دامنه حل $n-m$ است. با استفاده از رابطه زیر می‌توان انتگرال‌های موجود در معادلات باقی‌مانده‌ها را ارزیابی نمود [۳۱]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_i}{\partial r} \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial n} & -\frac{\partial z}{\partial m} \\ -\frac{\partial r}{\partial n} & \frac{\partial r}{\partial m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial m} \end{bmatrix} \quad (37)$$

و پس از آن:

$$drdz = Jdn dm \quad (38)$$

که در رابطه بالا:

$$J = \frac{\partial(r, z)}{\partial(n, m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial n} & \frac{\partial r}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial n} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{vmatrix} \quad (39)$$

محاسبات در هر مرحله زمانی، با بهره‌گیری از روش تکرار نیوتن تا هنگامی که دقت پاسخ کمتر از 10^{-7} شود، ادامه یافته است. جزئیات بیشتر در مورد کد عددی استفاده شده در مرجع [۳۲] موجود می‌باشد. فرآیند حل در قالب یک کد دینامیک محاسباتی می‌باشد که معادلات حاکم بر مسئله به روش المان محدود با استفاده از کدهای

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} = & \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^N (U_z)_n \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \Phi_i dRdZ + \\ & \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^N (U_z)_n \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{n=1}^N (U_r)_n \Phi_n \right) \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \left(\sum_{n=1}^N (U_z)_n \Phi_n \right) \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \right] \Phi_i dRdZ + \\ & \gamma \sum_{n=1}^N (U_r)_n \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} + \int_{\Omega} R \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} \right] dRdZ + \\ & \gamma \sum_{n=1}^N (U_z)_n \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} dRdZ + \\ & \frac{1}{\varepsilon} Pr \sum_{n=1}^N (U_z)_n \int_{\Omega} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} \frac{\partial \Phi_i}{\partial R} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} \right] dRdZ - \\ & \frac{Pr}{Da} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^N ((U_z)_n \Phi_n) \Phi_i \right) dRdZ + \\ & Ra Pr \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^N \theta_n \Phi_n \right) \Phi_i dRdZ \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} R_i^{(3)} = & \sum_{n=1}^N \theta_n \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \Phi_i dRdZ + \\ & \left(\frac{(\rho c_p)_l}{(\rho c_p)_{eff,l}} \right) \sum_{n=1}^N \theta_n \int_{\Omega} \left[\sum_{n=1}^N ((U_r)_n \Phi_n) \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \sum_{n=1}^N ((U_z)_n \Phi_n) \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \right] \Phi_i dRdZ + \\ & \left(\frac{k_{eff,l}}{k_l} \right) \left[\sum_{n=1}^N \theta_n \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + R \frac{\partial \Phi_i}{\partial R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \right) dRdZ \right] \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} R_i^{(4)} = & \sum_{n=1}^N \theta_n \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \Phi_i dRdZ + \\ & \left(\frac{k_{eff,s}}{k_s} \right) \left[\sum_{n=1}^N \theta_n \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + R \frac{\partial \Phi_i}{\partial R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial R} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial Z} \right) dRdZ \right] \end{aligned} \quad (43)$$

سیس از چند جمله‌ای‌های درجه سه و روش گاوس سه نقطه برای محاسبه باقی‌مانده‌ها استفاده گردید. برای کاهش باقی‌مانده‌ها و رسیدن به همگرایی مناسب از روش تکرار نیوتن-رافسون استفاده شد. از این‌رو در هر تکرار، یک سیستم خطی سه در سه $(N \times N \times 3)$ ایجاد می‌شود:

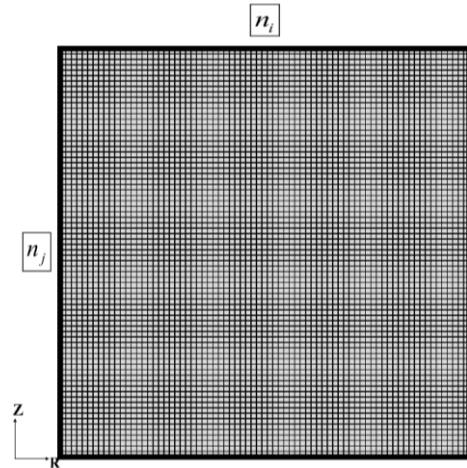
$$J(a^n) [a^n - a^{n+1}] = R(a^n) \quad (44)$$

است. مش‌بندی به صورت منظم (مربعی) در نظر گرفته شد. عدد ناسلت دیواره گرم در زمان بی‌بعد $1/5$ ، برای سایزهای متفاوت شبکه در جدول ۱ نشان داده شده است. با توجه به جدول ۱ همگرایی از سایز شبکه 250×250 و با مدت زمان محاسبات مشخص، ایجاد شده است. این سایز شبکه به عنوان شبکه مناسب انتخاب شده است. نتایج کار حاضر، با سایز شبکه 250×250 انجام گرفت.

۴- اعتبارسنجی نتایج

به منظور تعیین صحت نتایج حاصل شده در کار حاضر، ابتدا می‌بایست مقایساتی با نتایج پژوهش‌ها و مطالعات معتبر پیشین صورت پذیرد. این امر به نتایج حاصل شده در کار حاضر اعتبار می‌بخشد. برای اعتبارسنجی در حوزه مواد متخلخل، باساک و همکاران^۳ [۳۳] جریان همرفت طبیعی در یک محفظه متخلخل دوزنقه‌ای با زوایای مختلف $\phi = 0^\circ$ ، $\phi = 30^\circ$ و $\phi = 45^\circ$ درجه را مورد بررسی قرار دادند. باساک و همکاران [۳۳] با استفاده از تجزیه و تحلیل المان محدود به بررسی تأثیر حرارت یکنواخت و غیریکنواخت دیوار پایین و کناری محفظه دوزنقه‌ای پرداختند. نتایج نشان داده شده، توافق بسیار خوبی را میان نتایج حل عددی حاضر و نتایج گزارش داده شده در مقاله باساک و همکاران بیان می‌کند. شکل ۳، عدد ناسلت محلی براساس فاصله برای ماده نمک و آب با $Pr = 0.7$ ، $Da = 10$ و $Ra = 10^6$ برای دیوار پایین با حرارت یکنواخت در $\phi = 0^\circ$ درجه نشان می‌دهد.

در اعتبارسنجی دیگری، نتایج ناسلت به دست آمده از پژوهش حاضر با نتایجی که برای انتقال حرارت بین استوانه‌های هم‌دمای که به صورت عمودی و هم‌محور، توسط کومار و همکاران^۴ [۳۴] ارائه گردیده، مقایسه شده است. کومار و همکاران [۳۴] در بررسی نتایج عددی خود، دیواره‌های بالا و پایین استوانه را عایق و دیواره سمت چپ را در دمای گرم و دیواره سمت راست را در دمای سرد قرار دادند. کومار و همکاران [۳۴] عدد پرانتل را برابر 0.7 در نظر گرفتند و میزان انتقال حرارت با توجه به تغییرات رایلی ارائه کردند. کومار و همکاران با استفاده از روش ضمنی با جهت متغیر به بررسی میزان انتقال حرارت به ازای عدد رایلی‌های مختلف پرداختند. مقایسه میزان انتقال حرارت به ازای عدد رایلی‌های مختلف در شکل ۴ نشان داده



شکل ۲. تصویری از شبکه مربعی ایجاد شده در هندسه‌ی حاضر
Fig. 2. Illustration of the structured grid in present geometry

کامسول مولتی فیزیکس^۱ تحت نرم‌افزار متلب^۲ استفاده شده است.

۳-۲- برنامه‌ی کامپیوتری

با توجه به این که معادلات حاکم بی‌بعد ممنتوم و انرژی، هر یک می‌بایست با هم کوپل و به طور هم‌زمان مورد حل قرار گیرند، از نرم افزار کامسول برای حل استفاده شده است. شکل ۲ بیانگر شبکه ایجاد شده در هندسه‌ی حاکم بر مسئله است. ابعاد این شکل (به صورت بدون بعد) 1×1 بوده و همان‌طور که مشاهده می‌شود شبکه ایجاد شده به صورت یکنواخت می‌باشد. n_i تعداد شبکه‌های در جهت x و n_j تعداد شبکه‌های در جهت z را نشان می‌دهد.

۳-۳- بررسی استقلال از شبکه

مسأله‌ی بسیار مهم در شبیه‌سازی‌های عددی اطمینان از کافی بودن تعداد شبکه می‌باشد. برای دستیابی به تعداد شبکه‌ی مناسب و کافی در عمل، محاسبات را با یک شبکه‌ی مناسب شروع کرده سپس تعداد شبکه‌ها را به تدریج افزایش می‌دهیم. برای بررسی استقلال حل از اندازه شبکه محاسباتی در حالت مش‌بندی سازمان یافته (منظم)، چندین سایز متفاوت شبکه با در نظر گرفتن اعداد بی‌بعد $Pr = 10$ ، $Da = 10^4$ ، $Ste = 0.12$ و $Da = 10$ متناسب با سیال اصلی مورد بررسی قرار گرفت که جزئیات سایزهای مختلف شبکه و زمان محاسبات برای بررسی استقلال حل از اندازه شبکه در جدول ۱ آمده

3 -Basak et. al.

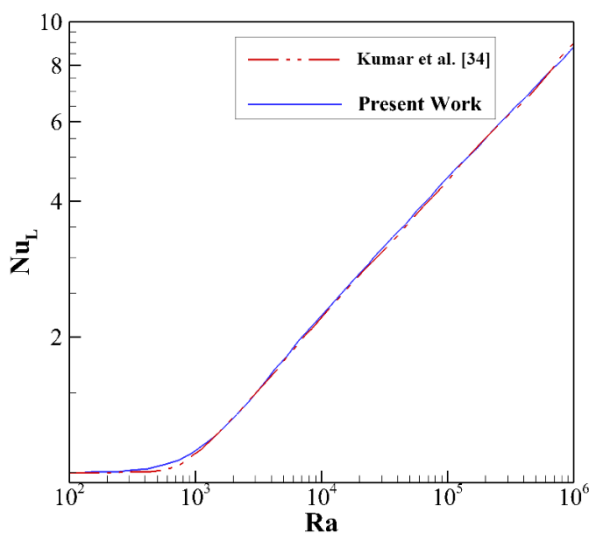
4 Kumar et. al.

1 COMSOL Multiphysics 5.3a

2 Matlab

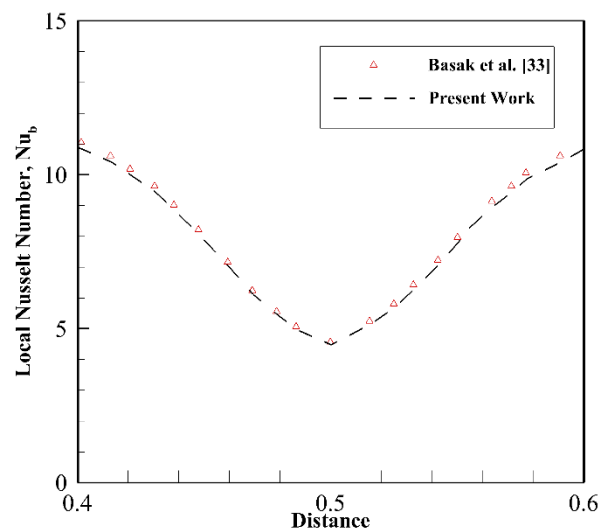
جدول ۱. تغییرات عدد ناسلت برای سایزهای مختلف شبکه
Table 1. Variation of Nusselt number for different grid sizes

اندازه شبکه	زمان محاسبات	عدد ناسلت	درصد خطا
۷۵×۷۵	۱ ساعت و ۲۰ دقیقه	۱۵,۴۰۴	۰,۲۵
۱۰۰×۱۰۰	۳ ساعت و ۸ دقیقه	۱۵,۴۴۸	۰,۰۳
۱۵۰×۱۵۰	۵ ساعت و ۲۷ دقیقه	۱۵,۴۴۷	۰,۰۲۶
۱۷۵×۱۷۵	۷ ساعت و ۱۲ دقیقه	۱۵,۴۳۵	۰,۰۵۲
۲۰۰×۲۰۰	۱۰ ساعت و ۳۴ دقیقه	۱۵,۴۴۵	۰,۰۱۳
۲۵۰×۲۵۰	۱۲ ساعت و ۱۶ دقیقه	۱۵,۴۴۳	۰
۳۰۰×۳۰۰	۱۶ ساعت و ۷ دقیقه	۱۵,۴۴۳	۰



شکل ۴. اعتبارسنجی عدد ناسلت برای استوانه‌های هم‌دمای هم‌محور با حل کومار و همکاران [۳۴]

Fig 4. Validation of the Nusselt number for coaxial temperature cylinders by results of Kumar et al. [34]



شکل ۳. اعتبارسنجی عدد ناسلت محلی براساس فاصله برای ماده نمک و آب با حل باساک و همکاران [۳۳]

Fig. 3. Validation of local Nusselt number based on distance for salt and water by the solution of Basak et al. [33]

حجم محدود براساس مرتبه دو پیشرو با استفاده از الگوریتم سیمپل حل کردند. شکل ۵ تغییرات عدد ناسلت دیواره‌ی گرم به ازای ضرایب غیرنیوتونی مختلف با نتایج کار حاضر را نشان می‌دهد. با توجه به شکل توافق خوبی بین پیشینه تحقیق با مطالعه حاضر وجود دارد.

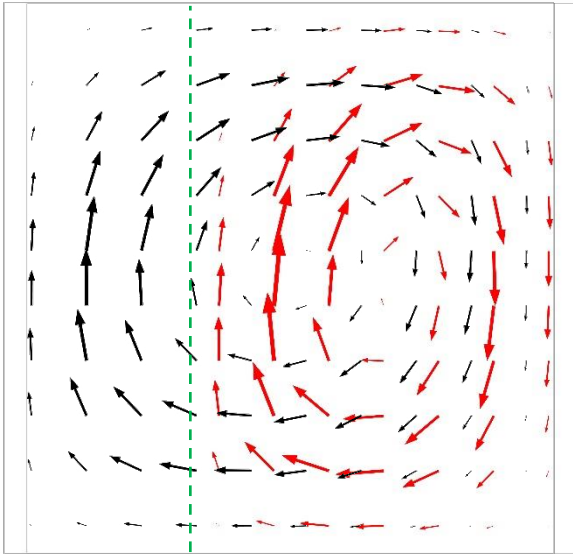
به عنوان اعتبارسنجی دیگر، اوئرتاتانی و همکاران [۳۶] بر روی شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت دو بعدی رایلی-بنارد درون یک محفظه‌ی مربعی بر مبنای روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها خطوط جریان و دما ثابت را برای اعداد رایلی بین 10^4 تا 10^6 را در مطالعه‌ی عددی خود، مورد بررسی قرار دادند. اوئرتاتانی و همکاران [۳۶] با استفاده از روش حجم محدود معادلات خود را

شده است. در شکل ۴، خطوط آبی ممتد کار حاضر و خطوط قرمز خط‌چین، نتایج کار کومار و همکاران [۳۴] را مشخص نموده است. همان‌طور که از شکل ۴ مشخص است بین نتایج پژوهش حاضر با نتایج مطالعه کومار تطابق خوبی مشاهده می‌گردد.

انتقال حرارت طبیعی سیال غیرنیوتونی به صورت پایا و در حالت دو بعدی میان دو لوله‌ی افقی هم‌محور با دماهای دیواره‌های متفاوت توسط متین^۱ و خان^۲ [۳۵] برای حالتی که $Pr=10$ و $Ra=10^3$ مورد مطالعه قرار گرفته است. متین و خان [۳۵] معادلات خود را به روش

1 Meisam Habibi Matin

2 Waqar Ahmed Khan



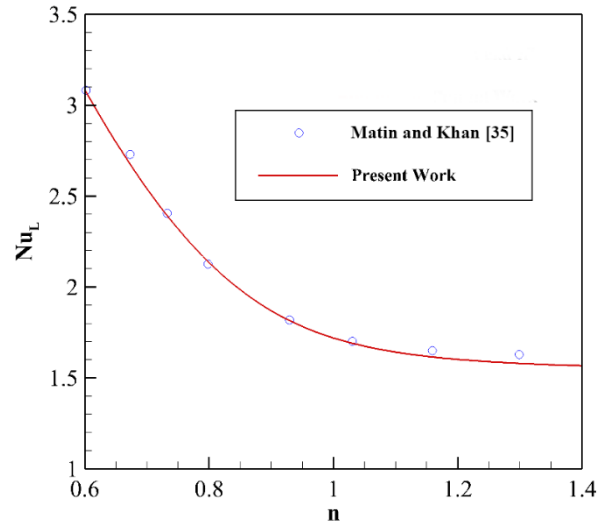
شکل ۷. اثر وجود یا عدم وجود لایه متخلخل بر انتقال حرارت
 Fig. 7. The effect of the presence or absence of a porous layer on heat transfer

عددی اوئرتاتانی و همکاران [۳۶] بیان می‌کند.

۵- نتایج و بحث

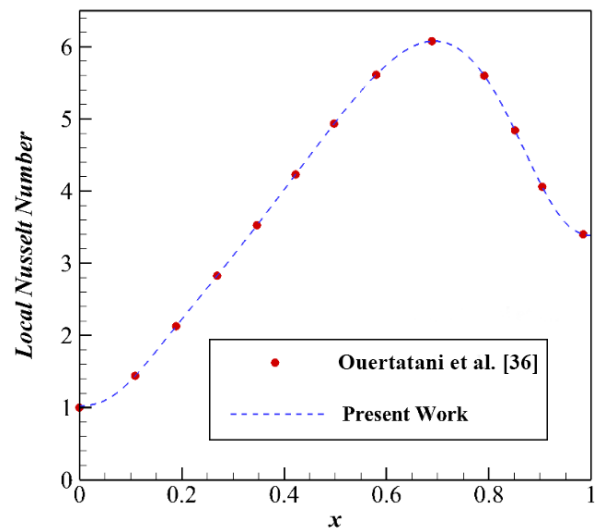
در این بخش به ارائه نتایج مربوط به شبیه‌سازی هندسه‌های مطرح شده در بخش بیان مسئله طی اشکال و جداول مختلف پرداخته شده است. هدف بررسی تأثیر پارامترهای مؤثر از قبیل عدد رایلی، ضریب تخلخل محیط متخلخل و عدد دارسی بر روی ماهیت و عملکرد جریان جابجایی طبیعی بر روی انتقال حرارت این جریان می‌باشد. به عنوان اولین بررسی، تأثیر وجود لایه متخلخل و عدم وجود لایه متخلخل مورد بحث قرار گرفته است. شکل ۷ بردارهای سرعت در حالت وجود لایه متخلخل به ضخامت معلوم 0.3 (بردارهای قرمز) که با خط سبز رنگ تیره نسبت به حالت عدم وجود لایه متخلخل (بردارهای سیاه رنگ) متمایز شده را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۷ پیداست گردابه‌های چرخشی تشکیل شده به سمت بالا رشد می‌کنند و این موضوع سبب انتقال حرارت بیشتر در حالت وجود لایه متخلخل نسبت به حالت عدم وجود لایه متخلخل می‌گردد.

اثر توان نمایی مدل پاولا (n) بر روی سرعت جریان در هندسه‌ی حاکم مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۸ توزیع سرعت در راستای محوری و شعاعی سیال غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک در خط مرکزی



شکل ۵. اعتبارسنجی انتقال حرارت سیال غیرنیوتونی در حالت دو بعدی میان دو لوله‌ی افقی هم‌محور با حل متین و خان [۳۵]

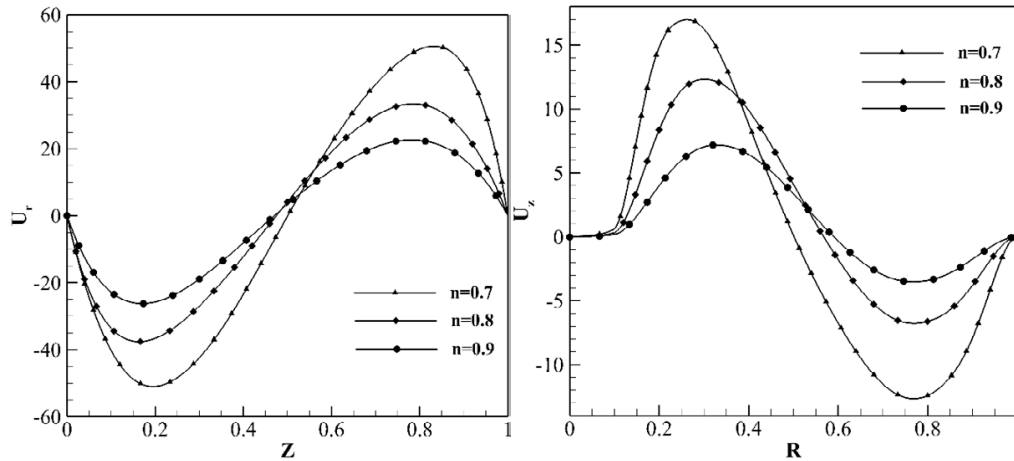
Fig5 .. Validation of the two dimensional heat transfer of a Non-Newtonian fluid between two coaxial horizontal pipes with the results of Matin and Khan [35]



شکل ۶. اعتبارسنجی انتقال حرارت دو بعدی رایلی-بنارد درون یک محفظه‌ی مربعی با حل اوئرتاتانی و همکاران [۳۶]

Fig.6 . Validation of two-dimensional Rayleigh-Benard heat transfer inside a square enclosure with the results of Ouertatani et al. [36]

گسسته‌سازی کردند. شکل ۶ عدد ناسلت به ازای تغییرات مکانی دیواره‌ی گرم برای $10^5 Ra$ و $0.71 Pr$ را برای شبیه‌سازی عددی اوئرتاتانی و همکاران [۳۶] و کار حاضر، نشان می‌دهد. نتایج نشان داده شده توافقی بسیار خوبی را میان نتایج حل عددی حاضر و نتایج



شکل ۸. توزیع سرعت در $Z=0.5$ و $R=0.5$ به ازای ضرایب شاخص جریان
 Fig. 8. Speed distribution at $Z=0.5$ and $R=0.5$ for the flow index coefficients

جدول ۲. تأثیرات عدد رایلی و دارسی مختلف بر عدد ناسلت میانگین
 Table 2: Effects of different Rayleigh and Darcy numbers on average Nusselt number

عدد ناسلت میانگین		عدد دارسی	عدد رایلی
دیواره‌ی گرم	دیواره‌ی سرد		
۶,۲۸۳	۲,۴۲	10^{-4}	10^3
۶,۲۵	۲,۵۳	10^{-2}	
۱۵,۴۴۷	۱۱,۶۰۹	10^{-4}	10^4
۱۵,۵۷۸	۱۱,۶۵۳	10^{-2}	
۳۱,۳۱۸	۲۳,۲۴۴	10^{-4}	10^5
۳۲,۹۹۲	۲۴,۳۴۹	10^{-2}	

کاهش، طبق تعریف عدد دارسی تناسب مستقیمی بین عدد دارسی با نفوذپذیری در محیط متخلخل همگن برقرار می‌باشد. بنابراین، با کاهش عدد دارسی بطور حتم نفوذپذیری در محیط متخلخل همگن کاهش می‌یابد و ماهیت جریان به گونه‌ای تغییر می‌کند که باعث کاهش عملکرد حرارتی جریان جابجایی طبیعی می‌شود. پس به طور کلی می‌توان گفت، در اعداد دارسی کم میزان نفوذپذیری جریان بسیار کم است.

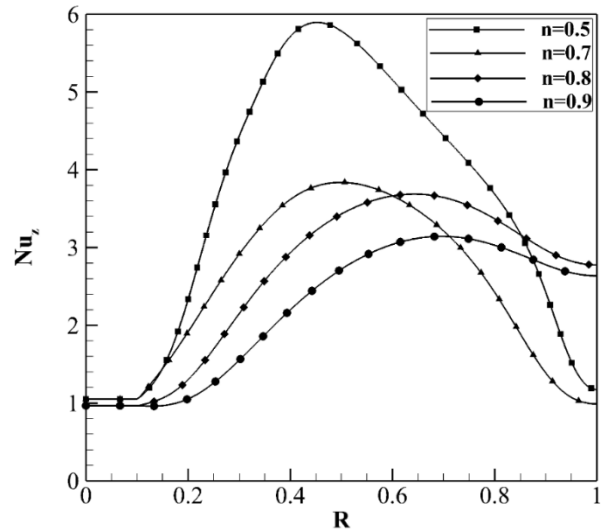
تغییرات عدد ناسلت به ازای ضرایب شاخص جریان برای دیواره‌ی گرم برای حالتی که $Ra=10^4$ ، $Da=10$ ، $Ste=0.12$ ، $\epsilon=1$ و $\epsilon=0.2$ در شکل ۹ رسم شده‌اند. با توجه به شکل، در ابتدای فرآیند انتقال حرارت، به دلیل نزدیک بودن خطوط جریان به دیواره‌ی گرم و همچنین توجه به این نکته که هرچه پارامتر توانی کوچکتر باشد، جریان جابجایی سریعتر ایجاد می‌گردد، عدد ناسلت افزایش می‌یابد و

افقی ($R=0.5$) و عمودی ($Z=0.5$) برای حالتی که $Pr=0.6$ ، $Ra=10^4$ ، $Da=10$ ، $\epsilon=1$ ، $\epsilon=0.2$ و $Ste=0.12$ را نشان می‌دهد. با توجه به ثابت بودن دبی، سرعت در کنار دیواره با کاهش توان نمای n ، افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر شاخص جریان مقدار سرعت به دلیلی افزایش گرادیان سرعت، افزایش می‌یابد و به حرکت سیال شتاب می‌دهد و مطابق آن توزیع سرعت به دلیل کمک کردن به شدت جذب گرمایی سیال بیشتر می‌شود.

جدول ۲ نشان دهنده تأثیر اعداد رایلی و عدد دارسی مختلف، ضریب تخلخل، عدد پرانتل و عدد استفان ثابت بر روی عدد ناسلت میانگین دیواره سرد و گرم مبدل می‌باشد. با افزایش عدد رایلی، هر دو عدد ناسلت میانگین افزایش می‌یابد. در عدد رایلی، ضریب تخلخل، عدد پرانتل، عدد استفان و ضریب شاخص $n=0.9$ ثابت با کاهش عدد دارسی، هر دو عدد ناسلت میانگین کاهش می‌یابد. دلیل این

ناشی از کاهش n قابل ملاحظه است. به طور کلی در نزدیکی دیواره‌ها دما با شیب بیشتری تغییر می‌کند که به علت شدت بیشتر جریان و سریعتر شدن انتقال حرارت است. آشفتنی بیشتر خطوط همدمای در این حالت نشان‌دهنده تأثیر غالب انتقال حرارت جابه‌جایی است که در میانه لوله به خوبی مشاهده می‌شود. واضح است که در نزدیک دیواره‌ی گرم، گرادیان دما افزایش یافته و در نتیجه انتقال حرارت جابه‌جایی نیز افزایش می‌یابد و خطوط جریان در این قسمت نیز متراکم‌تر هستند.

از بررسی شکل ۱۱ (خطوط جریان) مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص پاورلا در یک رایلی ثابت و گذشت زمان، افزایش انتقال حرارت جابه‌جایی در لوله اتفاق می‌افتد، زیرا با توجه به رابطه‌ای که برای ویسکوزیته ظاهری در سیال پاورلا داریم (رابطه‌ی ۳) برای حالت شبه‌پلاستیک ($n < 1$) به دلیل اینکه $\dot{\gamma}$ به توان عددی منفی می‌رسد ویسکوزیته ظاهری بزرگتر خواهد شد و به دلیل افزایش لزجت ظاهری جابه‌جایی طبیعی تضعیف می‌شود. به عبارتی در یک نرخ برش ثابت با کاهش شاخص پاورلا ویسکوزیته ظاهری افزایش یافته و در نتیجه قدرت نیروهای شناوری درون لوله کاهش می‌یابد و خطوط جریان متراکم‌تر می‌شوند. تغییرات سرعت نیز در این حالت نیز کمتر است. اما در مقابل در یک نرخ برش ثابت با افزایش شاخص سیال پاورلا ویسکوزیته ظاهری کاهش خواهد یافت و انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی شدت می‌یابد. به همین جهت مشاهده می‌شود در یک رایلی ثابت با کاهش شاخص پاورلا و گذشت زمان حضور گردابه‌ها در گوشه‌های لوله ضعیف‌تر می‌شوند. جهت هر کدام از گردابه‌های به وجود آمده بر اثر تغییرات شاخص پاورلا در شکل مشخص شده است. با توجه به شکل ۱۲ مشخص است که هندسه می‌توانند رفتار متفاوتی از لحاظ تغییرات دمایی با توجه به تغییرات عدد رایلی و شاخص n داشته باشند. با تغییر شاخص پاورلا در یک رایلی ثابت $Da=10^4$ ، تغییرات درجه حرارت بی‌بعد نسبت به خط $R=0.5$ دارای رفتار متفاوتی هستند. در شاخص $n=0.5$ لزجت ظاهری سیال بالا بوده و بنابراین جابه‌جایی هدایت اهمیت می‌یابد؛ بنابراین با کاهش شاخص پاورلا در یک عدد رایلی ثابت، سرعت سیال در کنار دیواره‌های سرد و گرم کمتر شده و همانطور که مشاهده می‌شود گرادیان دما در این نواحی کاهش می‌یابد. به طور کلی می‌توان گفت که با کاهش شاخص پاورلا دمایی بی‌بعد کاهش یافته است و کمترین دمایی بی‌بعد

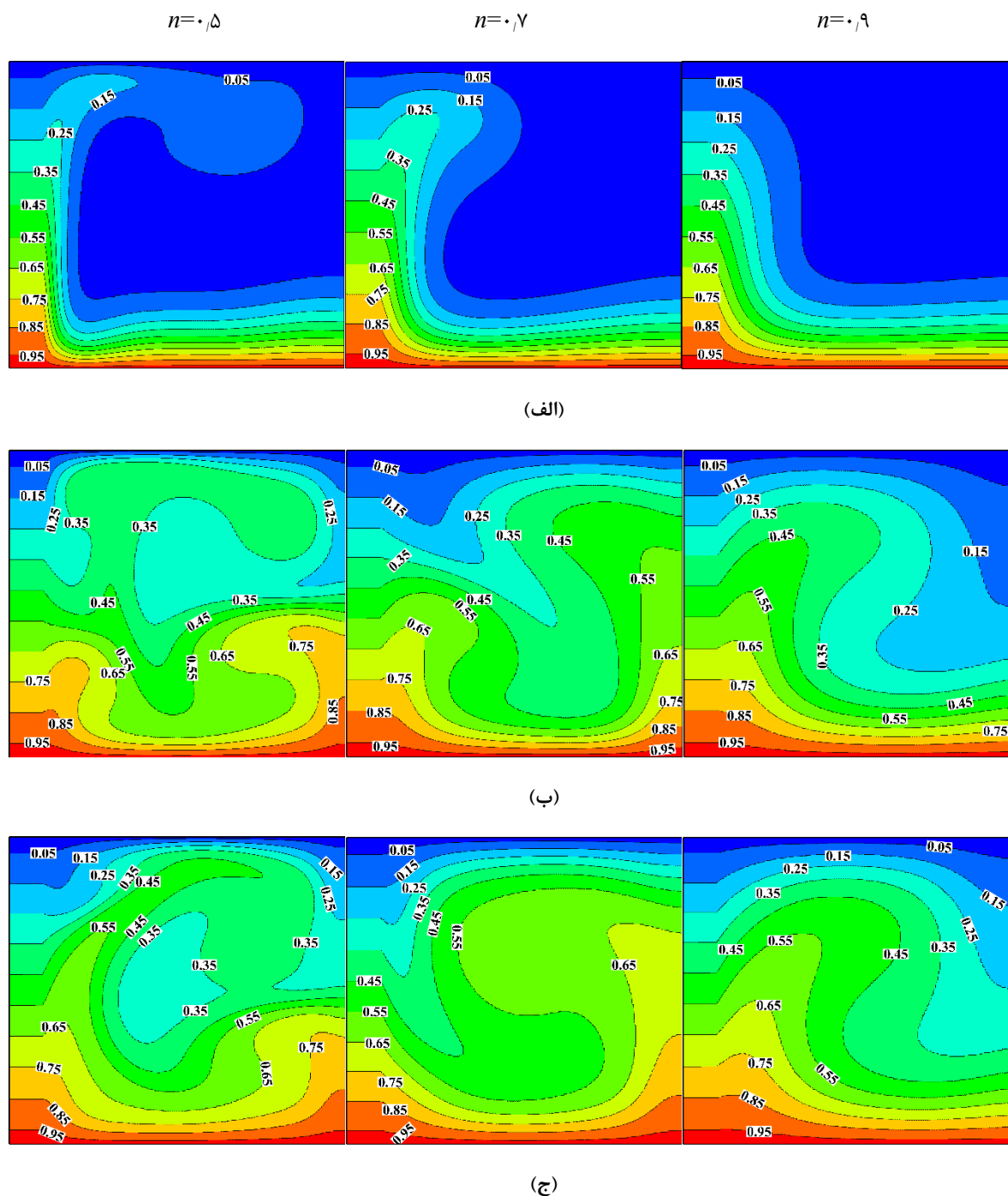


شکل ۹. تغییرات عدد ناسلت به ازای ضرایب پاورلا برای دیواره‌ی گرم برای حالتی که $\varepsilon=0.2$ و $l=0.1$ ، $Ste=0.012$ ، $Da=10^4$ ، $Ra=10^4$ ، $l=0.1$ and $\varepsilon=0.2$

سپس کاهش می‌یابد. این کاهش عدد ناسلت به دلیل اینکه افزایش شاخص جریان باعث کاهش رشد دمایی سطح و اختلاف دمایی بین سیال و سطح می‌شود، بنابراین مطابق آن عدد ناسلت نیز کاهش می‌یابد. روند کاهش عدد ناسلت تا زمان غلبه نیروی شناوری بر نیروی لختی و برقراری جریان جابجایی طبیعی ادامه می‌یابد.

شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب کانتورهای دما ثابت (شکل ۱۰) و خطوط جریان (شکل ۱۱) را برای زمان‌های مختلف و ضرایب شاخص جریان مختلف به ازای مقادیر ثابت $Da=10^4$ ، $Ra=10^4$ ، $Ste=0.012$ ، $l=0.1$ و $\varepsilon=0.2$ را نشان می‌دهد.

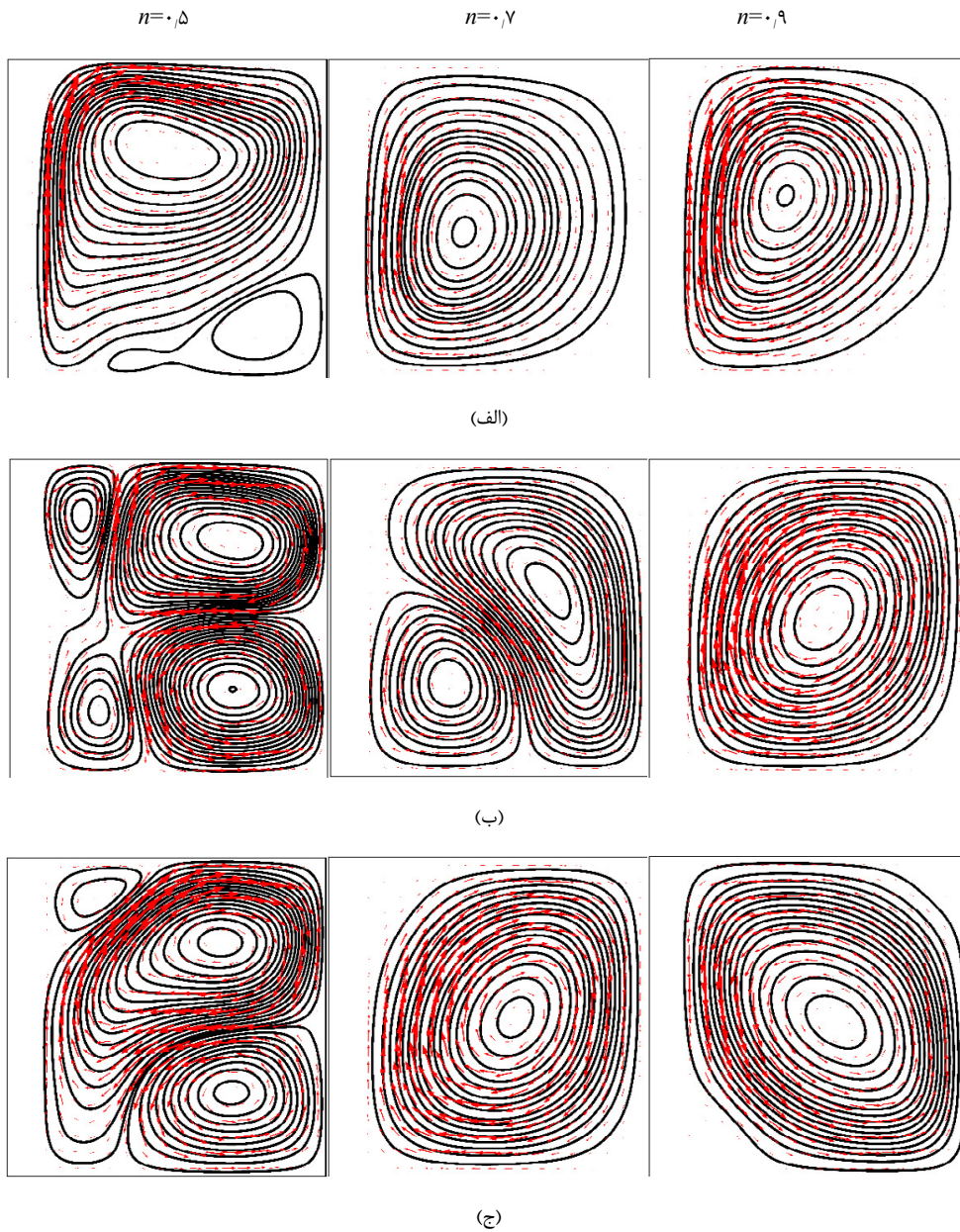
با توجه به شکل ۱۰، با کاهش شاخص جریان، ویسکوزیته سیال کاهش می‌یابد، این کاهش سبب گرانی‌تری کمتر و در نتیجه افزایش سرعت سیال عبوری می‌گردد. هر چه شاخص جریان کاهش یابد، افزایش سرعت خود را نمایان‌تر می‌کند. افزایش سرعت در شاخص جریان کمتر باعث افزایش انتقال حرارت بیشتر در شاخص‌های جریان کم می‌شود. از طرف دیگر با افزایش تراکم خطوط در کنار دیواره‌ها که ناشی از تقویت انتقال حرارت جابجایی طبیعی رایلی-بنارد است، نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد. با توجه به خطوط همدمای تقویت انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد ناشی از عدد رایلی ثابت در مقادیر کوچکتر شاخص پاورلا چشم‌گیرتر است و همچنین تضعیف جابه‌جایی آزاد



شکل ۱۰. کانتورهای دما برای زمان‌های (الف) $\tau=0.12$ ، (ب) $\tau=0.2$ ، (ج) $\tau=0.5$ برای $Ra=10^4$ ، $Da=10^{-4}$ ، $Ste=0.012$ ، $l=0.1$ و $\varepsilon=0.2$

تغییر عدد رایلی از 10^4 تا 10^5 است. دلیل این امر را می‌توان این‌طور توضیح داد که چون در رایلی‌های 10^4 و 10^5 انتقال حرارت جابه‌جایی ضعیف و هدایت مکانیزم اصلی انتقال حرارت است. با افزایش یافتن عدد رایلی ($Ra=10^5$) به دلیل قدرت گرفتن انتقال حرارت جابه‌جایی

برای کمترین شاخص پاورلا به دست می‌آید. ناسلت متوسط معیار مناسبی برای نمایش نرخ انتقال حرارت است. از شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که برای $n=0.7$ و $n=0.8$ افزایش ناسلت متوسط در تغییر عدد رایلی از 10^4 تا 10^5 کمتر از افزایش آن در



شکل ۱۱. مقایسه خطوط جریان در سه زمان بی‌بعد مختلف (الف) $\tau=12/0$ (ب) $\tau=2/0$ (ج) $\tau=5/0$ برای $Ra=104$, $Da=10-4$, $Ste=0.012$, $l=0.1$ و $\epsilon=0.2$

عدد ناسلت که نسبت انتقال حرارت جابجایی به انتقال حرارت هدایت با افزایش ضریب n کاهش می‌یابد و شیب این تغییرات با افزایش ضریب n کمتر شده است.

۶- نتیجه‌گیری

انتقال حرارت جابجایی طبیعی رایلی-بنارد سیالات غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک در مبدل‌های حرارتی پوشیده شده از ماده متخلخل مورد ارزیابی قرار گرفت. با هدف بررسی تأثیر محیط متخلخل و

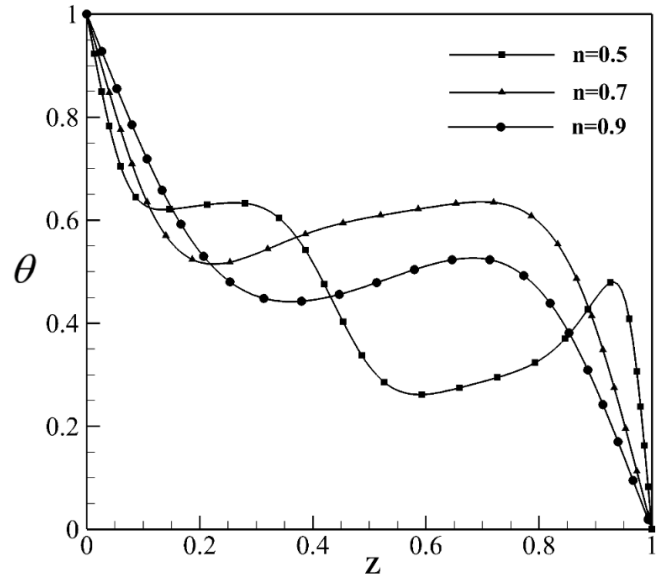
طبیعی، ناسلت متوسط با سرعت قابل توجهی افزایش می‌یابد. به عنوان نتیجه‌ی دیگری از شکل ۱۲ می‌توان گفت که، به دلیل اینکه افزایش شاخص جریان باعث کاهش رشد دمای سطح و اختلاف دمای بین سیال و سطح می‌شود، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. همچنین عدد رایلی برای شروع جابه‌جایی طبیعی در مبدل با افزایش شاخص پاورلا کاهش می‌یابد. از طرف دیگر با افزایش ضریب n ویسکوزیته‌ی سیال افزایش پیدا می‌کند. افزایش ویسکوزیته باعث کاهش سرعت حرکت سیال و در نتیجه کاهش انتقال حرارت می‌شود. به همین دلیل میزان

ضرایب شاخص جریان در گام زمانی مشخص، به ازای اعداد رایلی و شاخص جریان مختلف مورد ارزیابی قرار گرفتند. مهم‌ترین نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد که:

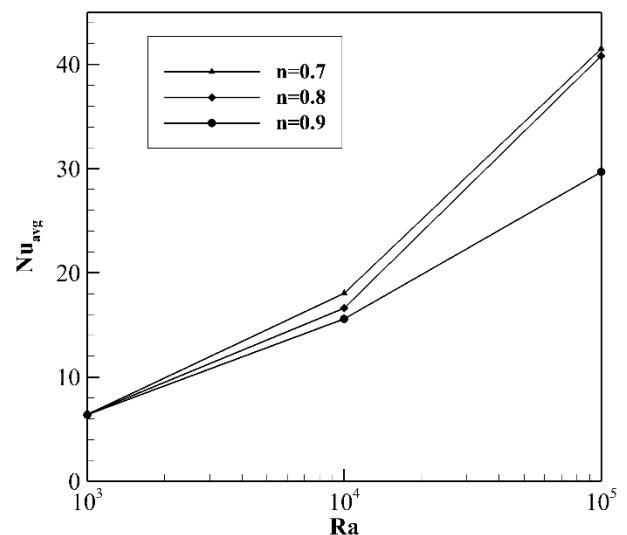
۱. با اضافه کردن لایه‌ی متخلخل به دلیل رشد سریع بردارهای چرخشی انتقال حرارت رایلی-بنارد زودتر اتفاق می‌افتد.
۲. سرعت در کنار دیواره با کاهش توان نمایی n ، افزایش می‌یابد.
۳. در اعداد دارسی کم میزان نفوذپذیری جریان بسیار کم است.
۴. افزایش شاخص جریان باعث کاهش رشد دمای سطح و اختلاف دمای بین سیال و سطح می‌شود، بنابراین مطابق آن عدد ناسلت نیز کاهش می‌یابد.
۵. با افزایش شاخص پاورلا در یک رایلی ثابت و گذشت زمان، افزایش انتقال حرارت جابه‌جایی در لوله اتفاق می‌افتد.
۶. با کاهش شاخص پاورلا دمای بی‌بعد کاهش یافته است و کمترین دمای بی‌بعد برای کمترین شاخص پاورلا به دست می‌آید.
۷. در رایلی‌های کوچک به دلیل اینکه جابه‌جایی طبیعی ضعیف و هدایت مکانیزم اصلی انتقال حرارت است عدد ناسلت چندان تحت تأثیر تغییرات شاخص پاورلا قرار نمی‌گیرد، اما در رایلی‌های بزرگ‌تر به دلیل قدرت گرفتن انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی، ناسلت متوسط با سرعت قابل توجهی افزایش می‌یابد.
۸. عدد رایلی برای شروع جابه‌جایی طبیعی در مبدل با افزایش شاخص پاورلا کاهش می‌یابد.

فهرست علائم

g	نیروی جاذبه، m/s^2
h	ضریب انتقال حرارت جابجایی، $W/m^2.K$
K	ضریب انتقال حرارت رسانش، $W/m.K$
n	شاخص جریان، شاخص پاورلا، ضریب غیرنیوتونی
m	ثابت شاخص جریان
l	ضخامت لایه‌ی متخلخل، cm
L	ارتفاع لوله، cm
r	شعاع لوله، cm
r_z	مختصات استوانه‌ای، cm
R, Z	مختصات بی‌بعد
Nu	عدد ناسلت
T	دما، K
P	فشار، $kgm^{-1}s^{-2}$
C_p	گرمای ویژه، $Jkg^{-1}K^{-1}$



شکل ۱۲. تغییرات دمایی بی‌بعد به ازای شاخص پاورلا مختلف
Fig. 12. Temperature variations for different Power-Law indexes



شکل ۱۳. تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب عدد رایلی برای شاخص‌های مختلف پاورلا
Fig.13 . Average Nusselt number in terms of Rayleigh number for different Power-Law indexes

غیرنیوتونی بودن سیال بر روی انتقال حرارت جابجایی طبیعی معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با آنها ابتدا استخراج شده، سپس به شکل بی‌بعد خود انتقال یافتند و در نهایت با استفاده از روش المان محدود حل شدند. توزیع سرعت به ازای شاخص جریان پاورلا، خطوط جریان و کانتورهای دما ثابت در گام‌های زمانی مشخص، تغییرات عدد ناسلت به ازای اعداد رایلی و دارسی مختلف، به ازای

vertical tubes, American Institute of Chemical Engineers, 1953.

- [3] G.B. Kim, J.M. Hyun, H.S. Kwak, Transient buoyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(46) (2003) 3617-3605.
- [4] K.R. Rajagopal, T.-Y. Na, Natural convection flow of a non-Newtonian fluid between two vertical flat plates, *Acta Mechanica*, 4(3)54 (1985) 246-239.
- [5] A. Barletta, On fully-developed mixed convection and flow reversal of a power-law fluid in a vertical channel, *International communications in heat and mass transfer*, 8(26) (1999) 1137-1127.
- [6] G. Degan, P. Vasseur, Aiding mixed convection through a vertical anisotropic porous channel with oblique principal axes, *International journal of engineering science*, 2(40) (2002) 209-193.
- [7] G. Lorenzini, C. Biserni, Numerical investigation on mixed convection in a non-Newtonian fluid inside a vertical duct, *International journal of thermal sciences*, 12(43) (2004) 1160-1153.
- [8] F. Kamışlı, Laminar flow of a non-Newtonian fluid in channels with wall suction or injection, *International journal of engineering science*, 10(44) (2006) 661-650.
- [9] B.C. Lyche, R.B. Bird, The Graetz-Nusselt problem for a power-law non-Newtonian fluid, *Chemical Engineering Science*, 1(6) (1956) 41-35.
- [10] A. Metzner, R. Vaughn, G. Houghton, Heat transfer to non-newtonian fluids, *AIChE Journal*, 1(3) (1957) 100-92.
- [11] F. Popovska, W. Wilkinson, Laminar heat transfer to Newtonian and non-Newtonian fluids in tubes, *Chemical Engineering Science*, 10(32) (1977) 1164-1155.
- [12] S.D. Joshi, A. Bergles, Experimental study of laminar heat transfer to in-tube flow of non-Newtonian fluids, *Journal of heat transfer*, 3(102) (1980) 401-397.
- [13] I. Filkova, A. Lawal, B. Koziskova, A. Mujumdar, Heat transfer to a power-law fluid in tube flow: Numerical and experimental studies, *Journal of food engineering*, 2(6) (1987) 151-143.
- [14] J.E. Porter, Heat transfer at low Reynolds number, Institution of Chemical Engineers, 1971.
- [15] Y.I. Cho, J.P. Harnett, Non-Newtonian fluids in circular pipe flow, in: *Advances in heat transfer*, Elsevier, 1982, pp.

عدد پراتل	Pr
عدد رایلی	Ra
زمان، s	t
مؤلفه‌های با بعد سرعت، m/s	u_r, u_z
مؤلفه‌های بی‌بعد سرعت	U_r, U_z
عدد دارسی	Da
عدد استفان	Ste
اندازه نرخ تانسور کرنش	D'

علائم یونانی

چگالی، kg/m^3	ρ
زمان بی‌بعد	τ
دمای بی‌بعد	θ
لزجت دینامیکی، $kgm^{-1}s^{-1}$	μ
لزجت مؤثر، $kgm^{-1}s^{-1}$	μ_a
نرخ تانسور کرنش، Nm^{-2}	$\dot{\gamma}$
نفوذپذیری ماده متخلخل، m^2	κ
ضریب پخش حرارتی، m^2s^{-1}	α
ضریب انبساط حجمی، K^{-1}	β
تخلخل	ε
تغییرات	Δ

زیرنویس

مؤثر	eff
میانگین	Avg
گرم	h
سرد	c
متخلخل	p
مایع	l
جامد	s
سرد	c
متخلخل	p
لوله‌ی داخلی	i
لوله‌ی خارجی	o

بالانویس

کمیت بعددار	*
-------------	---

منابع

- [1] R.P. Chhabra, J.F. Richardson, Non-Newtonian flow in the process industries: fundamentals and engineering applications, Butterworth-Heinemann, 1999.
- [2] R.L. Pigford, Non-isothermal flow and heat transfer inside

- convection in power-law and Bingham plastic fluids in ducts of semi-circular and other cross-sections, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 104 (2017) 141-112.
- [27] H. Zhang, Y. Kang, T. Xu, Study on Heat Transfer of Non-Newtonian Power Law Fluid in Pipes with Different Cross Sections, *Procedia Engineering*, 205 (2017) 3388-3381.
- [28] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in porous media*, Springer, 2006.
- [29] F. P. Incropera, et al. *Introduction to heat transfer*, John Wiley & Sons, 2011.
- [30] J.N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, New York, 1993.
- [31] T. Basak, S. Roy, A. Balakrishnan, Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24-23)49) (2006) 4535-4525.
- [32] F. Sun, *Investigations of smoothed particle hydrodynamics method for fluid-rigid body interactions*, University of Southampton, 2013.
- [33] T. Basak, S. Roy, A. Singh, A. Balakrishnan, Natural convection flows in porous trapezoidal enclosures with various inclination angles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20-19)52) (2009) 4623-4612.
- [34] R. Kumar, M. Kalam, Laminar thermal convection between vertical coaxial isothermal cylinders, *International journal of heat and mass transfer*, 2)34) (1991) 524-513.
- [35] M.H. Matin, W.A. Khan, Laminar natural convection of non-Newtonian power-law fluids between concentric circular cylinders, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 43 (2013) 121-112.
- [36] N. Ouertatani, N.B. Cheikh, B.B. Beya, T. Lili, Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh-Bénard convection in an enclosure, *Comptes Rendus Mécanique*, 5)336) (2008) 470-464.
- 141-59.
- [16] T.F.Jr. Irvine, and J. Karni, *Handbook of single phase convective heat transfer*, John Wiley, New York, (1987).
- [17] S. Kakaç, R.K. Shah, W. Aung, *Handbook of single-phase convective heat transfer*, (1987).
- [18] J.P. Hartnett, Y.I. Cho, G.A. Greene, T.F. Irvine, *Advances in heat transfer*, Academic Press, 2000.
- [19] A. McKillop, Heat transfer for laminar flow of non-Newtonian fluids in entrance region of a tube, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8)7) (1964) 862-853.
- [20] R. Siegel, E. Sparrow, T. Hallman, Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux, *Applied Scientific Research, Section A*, 5)7) (1958) -386 392.
- [21] W.M. Rohsenow, H.Y. Choi, *Heat, mass, and momentum transfer*, Prentice hall, 1961.
- [22] G.F. Al-Sumaily, A. Nakayama, J. Sheridan, M.C. Thompson, The effect of porous media particle size on forced convection from a circular cylinder without assuming local thermal equilibrium between phases, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 14-13)55) (2012) 3378-3366.
- [23] M. Layeghi, A. Nouri-Borujerdi, Fluid flow and heat transfer around circular cylinders in the presence and non-presence of porous media, *Journal of Porous Media*, 3)7) (2004).
- [24] S. Rashidi, A. Tamayol, M.S. Valipour, N. Shokri, Fluid flow and forced convection heat transfer around a solid cylinder wrapped with a porous ring, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 63 (2013) 100-91.
- [25] M.-H. Sun, G.-B. Wang, X.-R. Zhang, Rayleigh-Bénard convection of non-Newtonian nanofluids considering Brownian motion and thermophoresis, *International Journal of Thermal Sciences*, 139 (2019) 325-312.
- [26] S. Mukherjee, A. Gupta, R. Chhabra, Laminar forced

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Noghrehabadi, K. Ayoubi Ayoubloo, R. Bahoosh kazerooni, M. Ghalambaz, *Investigation of the heat transfer of Non-Newtonian pseudo-plastic fluids in porous heat exchangers*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(1) (2021) 241-258.

DOI: [10.22060/mej.2019.15536.6153](https://doi.org/10.22060/mej.2019.15536.6153)



