



## مروری بر مطالعات در زمینه حرکت ذرات تحت اثر امواج آکوستیکی در سیستم‌های میکروفلوئیدیک

سیدمصطفی زارعی<sup>۱</sup>، مصطفی جمشیدیان<sup>۱\*</sup>، شاهرخ سپهری رهنما<sup>۲</sup>، سعید ضیایی راد<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

<sup>۲</sup> پژوهشگر پسادکتر، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه ملی سنگاپور، سنگاپور

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۸-۲۰

بازنگری: ۱۳۹۸-۰۲-۰۶

پذیرش: ۱۳۹۸-۰۲-۱۵

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۳-۱۱

### کلمات کلیدی:

آکوستوفلوئیدیک

نیروی تابشی آکوستیکی

نیروی اندرکنشی

جریان آکوستیکی

**خلاصه:** استفاده از امواج آکوستیکی برای کنترل و دست‌کاری ذرات معلق در سیال، توجه ویژه‌ای را در دو دهه‌ی اخیر به خود جلب کرده است. انتشار امواج آکوستیکی در محیط سیال، ذرات معلق در آن را عمدتاً به دو صورت می‌تواند تحت تأثیر قرار دهد. اثر اولیه انتشار موج به صورت مستقیم بر ذرات عمل کرده و موجب اعمال نیرویی از طرف سیال بر آن‌ها می‌شود. در سیال ویسکوز با توجه به تضعیف موج و ایجاد گرادیان‌های سرعت ناشی از وجود ویسکوزیته، جریان‌هایی در سیال شکل می‌گیرد که می‌توانند به‌صورت غیرمستقیم بر ذرات اثرگذار باشند. با توجه به کاربرد این تکنولوژی در زمینه‌های پزشکی و بیولوژی و پیچیدگی کارهای تجربی آزمایشگاهی در ابعاد میکرومتر، نیاز مبرمی به مطالعات تحلیلی و بینش تئوری در این موضوع احساس می‌گردد. موضوع مقاله حاضر، مروری بر مطالعات تحلیلی انجام شده در رابطه با مکانیزم‌های مؤثر بر حرکت ذرات تحت تأثیر امواج آکوستیکی انتشاریافته در محیط سیال در ابعاد میکرومتر است. در این مقاله تاریخچه‌ای از نظریه‌های ابتدایی محاسبه نیروهای تابشی آکوستیکی و جریان آکوستیکی و روند پیشرفت این نظریه‌ها تا زمان حاضر ارائه شده است. همچنین، نقدی بر نتایج بدست آمده از پژوهش‌های گذشته، مشکلات و کمبودها و میزان تأثیر پارامترهای مختلف بر برآورد این نتایج ارائه شده است.

### ۱- مقدمه

یکی دیگر از روش‌های دست‌کاری ذرات است که در این بین توجه ویژه‌ای را به‌واسطه قابلیت‌های متفاوت جلب کرده است. برخلاف روش‌های مذکور قبلی، استفاده از امواج آکوستیکی محدودیت خاصی نداشته و می‌تواند همه انواع ذرات را تا زمانی که از لحاظ خواص آکوستیکی با سیال میزبان اختلاف دارند، از سیال جدا کند. همچنین، امواج آکوستیکی تأثیرات منفی که ممکن است میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر ذرات و سلول‌های بیولوژیکی داشته باشند، بر ذرات نداشته و خواص آن‌ها را تغییر نمی‌دهد. از کاربردهای این امواج در حوزه مکانیک سلولی می‌توان به جداسازی سلول‌های سرطانی از خون، و جداسازی سلول‌های چربی از خون اشاره کرد. فرکانس کاری در روش به‌کارگیری امواج آکوستیکی برای دست‌کاری حرکت ذرات می‌تواند محدوده مقادیر مرتبه چند صد کیلوهرتز تا چند مگاهرتز را، با در نظر گرفتن محدوده ریلی<sup>۱</sup> یعنی  $ka \ll 1$  که  $k$  عدد موج و  $a$  اندازه شعاع ذره است، پوشش دهد. به‌سبب همین بازه گسترده

جداسازی و دست‌کاری<sup>۱</sup> ذرات معلق در سیال در ابعاد میکرو<sup>۲</sup> سهم عمده‌ای از تحقیقات اخیر را به خود اختصاص داده و در بسیاری از شاخه‌های کاربردی از جمله بیوتکنولوژی و تشخیص طبی توسعه پیدا کرده است. این دست‌کاری و کنترل حرکت ذرات به روش‌های مختلفی امکان‌پذیر است. از جمله این روش‌ها می‌توان به دست‌کاری حرکت ذرات توسط میدان مغناطیسی<sup>۳</sup>، دست‌کاری حرکت ذرات با میدان الکتریکی<sup>۴</sup>، و دست‌کاری دی‌الکتریکی<sup>۵</sup> ذرات اشاره کرد [۱-۴]. در این روش‌ها نمونه‌های مورد استفاده و ذرات می‌بایست ویژگی‌های الکتریکی و یا مغناطیسی مشخصی داشته باشند تا بتوان به خوبی آن‌ها را کنترل و دست‌کاری کرد. به‌کارگیری نیروهای آکوستیکی نیز

- 1 Particle Manipulation
- 2 Microfluidics
- 3 Magnetophoresis
- 4 Electrophoresis
- 5 Di-Electrophoresis

### 6 Rayleigh-Limit

\* نویسنده‌دار مکاتبات: jamshidian@cc.iut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



تأثیر قرار می‌دهند یکی نیروی تابشی آکوستیکی و دیگری جریان آکوستیکی<sup>۶</sup> است. جریان آکوستیکی همانند نیروی تابشی یک اثر مرتبه دوم<sup>۷</sup> بوده و از جمله‌های غیرخطی معادلات حاکم بر حرکت سیال یعنی معادلات ناویر-استوکس ناشی می‌شود. نیروی تابشی آکوستیکی از انتقال مومنتم توسط موج صوتی به ذره معلق ایجاد شده و باعث حرکت انتقالی ذره نسبت به سیال می‌شود [۵، ۷، ۹]. این در حالی است که جریان آکوستیکی ناشی از انتقال مومنتم توسط موج به سیال بوده و موجب شکل‌گیری یک جریان اضافی مجزا از جریان خارجی در سیال می‌شود. جریان آکوستیکی به صورت غیرمستقیم، توسط نیروی درگ، حرکت ذره را تحت تأثیر قرار می‌دهد. این انتقال مومنتم از موج به سیال می‌تواند توسط جذب و میرایی موج آکوستیکی پیشرو توسط توده سیال باشد که به آن جریان کوارتز گفته می‌شود. همچنین، این انتقال مومنتم می‌تواند توسط اندرکنش بین موج آکوستیکی و سطح جامد ایجاد شود، که به آن جریان آکوستیکی ایجاد شده توسط مرز یا جریان آکوستیکی مرزی گفته می‌شود. در سیستم‌های میکروفلوئیدیک، جریان آکوستیکی عمدتاً به صورت جریان ناشی از مرزهای سیستم است. این جریان از دیواره‌های میکروکانال نشأت گرفته و در واقع ناشی از تنش‌های ویسکوز نسبتاً بزرگ در داخل لایه مرزی آکوستیکی با ضخامت بسیار کوچک اطراف دیواره است [۱۰].

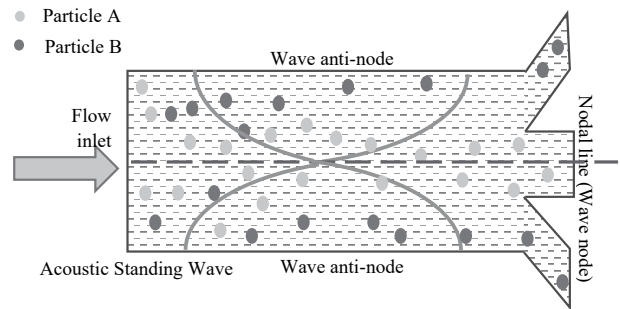
شکل ۲ نمایی از نیروهای وارد بر ذره را تحت اثر انتشار موج ایستای صوتی در مقطع عرضی یک میکروکانال نشان می‌دهد. مطابق شکل، میدان نیروی تابشی آکوستیکی سبب اعمال نیرویی در جهت انتشار موج بر ذره می‌شود. این در صورتی است که جریان آکوستیکی مرزی شکل گرفته در میکروکانال ذره را در جهت عمود بر انتشار موج حرکت می‌دهد.

در ادامه، مروری بر پژوهش‌های انجام گرفته در رابطه با تحلیل سازوکارهای مؤثر در حرکت ذرات معلق در سیال تحت اثر میدان آکوستیکی، فرضیات انجام شده و نتایج به دست آمده ارائه می‌گردد.

## ۲- نیروی تابشی آکوستیکی

هنگامی که یک جسم در معرض امواج صوتی قرار می‌گیرد، موج وارده را از سطح خود پراش می‌دهد و به این سبب نیرویی از طرف

6 Acoustic Streaming  
7 Second-Order Effect



شکل ۱: جداسازی ذرات با استفاده از نیروی تابشی آکوستیکی

Fig. 1: Particle separation using the acoustic radiation force

از فرکانس عملکرد، این روش می‌تواند برای تنوع گوناگونی از ذرات با اندازه‌های مختلف و ویژگی‌های مکانیکی متفاوت قابل اعمال باشد. بنابراین، مطالعه مکانیزم ایجاد نیروهای آکوستیکی، عوامل مؤثر بر آن‌ها و نحوه به‌کارگیری آن‌ها جهت بهره‌گیری از ویژگی‌ها و کنترل پارامترهای آن‌ها در جداسازی، اختلاط<sup>۱</sup>، پاکسازی و دسته‌بندی<sup>۲</sup> ذرات سودمند است. شکل ۱، شماتیکی از کاربرد روش استفاده از نیروی تابشی آکوستیکی را در جداسازی ذرات نشان می‌دهد. در این شکل، ذرات نوع  $A$  با توجه به مشخصات آکوستیکی آن‌ها تحت تأثیر نیروی تابشی آکوستیکی به سمت گره فشاری جذب می‌شوند ولی ذرات نوع  $B$  که از لحاظ آکوستیکی با ذرات  $A$  متفاوت هستند به سمت نقاط پادگره‌ی فشار حرکت می‌کنند.

مطالعه نیروهای آکوستیکی و نحوه انتشار موج در سیال پیشینه‌ای طولانی دارد. این حوزه کلاسیک امروزه جلوه تازه‌ای در فعالیت‌های پژوهشی تحت عنوان آکوستوفورسیس<sup>۳</sup>، به معنی مطالعه حرکت ذرات تحت اثر امواج آکوستیکی فراصوتی، پیدا کرده است. در دست‌کاری آکوستیکی، ذرات با استفاده از نیروی تابشی آکوستیکی<sup>۴</sup> و بهره‌گیری از خواص تراکم‌پذیری و چگالی آن‌ها دست‌کاری می‌شوند. این نیرو که از پراش موج وارده<sup>۵</sup> توسط ذره ایجاد می‌شود ناشی از تفاوت ویژگی‌های ذره با سیال اطراف است [۸-۵]. از جمله عوامل اثرگذار بر این نیرو می‌توان به شکل و اندازه ذره و نیز تراکم‌پذیری و چگالی آن اشاره کرد.

دو اثر عمده‌ای که ذرات را در مواجهه با میدان آکوستیکی تحت

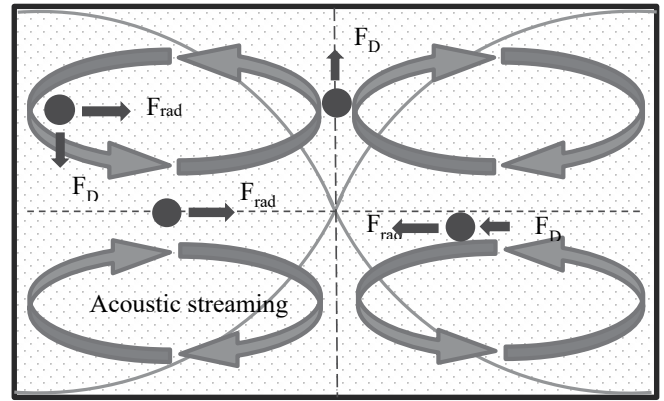
- 1 Particle Mixing
- 2 Particle Sorting
- 3 Acoustophoresis
- 4 Acoustic Radiation Force
- 5 Incident Wave

با حل تقریب مرتبه اول معادلات، میدان‌های مرتبه اول سرعت، چگالی و فشار محاسبه می‌شوند. با این حال، فرض خطی بودن هیچ حرکت خالصی از ذره و یا هیچ گرادیان فشاری برای میدان‌های مرتبه اول به دست نمی‌دهد. لذا با بسط معادلات تا دو مرتبه و حل معادلات مرتبه دوم، تنش مرتبه دوم میانگین زمانی بر روی سطح ذره انتگرال‌گیری می‌شود. در سیال ایده‌آل این فشار مرتبه دوم با توجه به عدم وجود ترم‌های ویسکوز، مستقیماً بر حسب میدان‌های مرتبه اول بدست می‌آید. ولی در سیال ویسکوز، معادلات مرتبه اول و دوم شامل ترم‌های ویسکوز نیز هستند و برای محاسبه فشار مرتبه دوم نیازمند حل معادلات مرتبه دوم یا اصطلاحاً معادلات جریان آکوستیکی و محاسبه‌ی میدان‌های مرتبه دوم هستیم.

محاسبه نیروی تابشی آکوستیکی سابقه‌ای طولانی دارد و اولین مطالعات در رابطه با این موضوع توسط ریلی [۲۳] انجام شد. ریلی معادله‌ای برای فشار تابشی آکوستیکی روی یک دیواره جامد که تمام موج را بازتاب می‌کند به دست آورد. نظریه‌های اولیه در مورد این پدیده بر اساس فرض‌های ساده‌کننده بسیاری بود که علاوه بر اینکه قابلیت‌های این امواج را به تمامی نشان نمی‌داد، بسیاری از نتایج تجربی مشاهده شده را نیز نمی‌توانست به صورت قابل قبولی توجیه نماید [۱۷]. ولی با مطالعات گسترده بعدی نظریه نیروهای تابشی آکوستیکی به صورت چشمگیری پیشرفت کرد که علاوه بر توجیه مشاهدات آزمایشگاهی، که در قالب نظریه‌های اولیه ناممکن بود، امکان پیش‌بینی آثار جدید این پدیده را نیز ممکن ساخته است [۲۴]. با توجه به پژوهش‌های انجام شده، می‌توان نیروی تابشی آکوستیکی وارد بر ذرات را با توجه به سیال میزبان، که محیط انتشار موج صوتی و انتقال‌دهنده انرژی صوت به ذره است، به سه دسته کلی شامل نیروی تابشی وارد بر ذرات غوطه‌ور در سیال ایده‌آل، نیروی تابشی وارد بر ذرات در سیال ویسکوز، و نیروی تابشی وارد بر ذرات در مدل سیال ترموویسکوز طبقه‌بندی کرد. در ادامه مروری بر نظریه‌های موجود برای هر دسته ارائه شده و فرضیات و جزئیات آن‌ها بررسی و تحلیل خواهد شد.

### ۱-۲- نیروی تابشی آکوستیکی در سیال ایده‌آل

در سال ۱۹۳۴، کینگ [۸] اولین مدل تحلیلی را برای نیروی تابشی آکوستیکی وارد بر ذرات ارائه کرد. او نیروی تابشی آکوستیکی



شکل ۲: نمایی از نیروهای وارد بر ذره در اثر انتشار امواج آکوستیک در میکروکانال

Fig. 2: Schematic of the forces act on the particles due to the acoustic wave propagation in the microchannel.

موج تجربه می‌کند که از آن به عنوان نیروی تابشی آکوستیکی یاد می‌شود. این نیرو از ویژگی‌های غیرخطی انتشار موج در محیط ناشی می‌شود و بنابراین یک اثر غیرخطی از میدان صوتی است [۱۱]. محاسبات کلاسیک نیروی تابشی روی یک جسم واقع در میدان صوتی در پژوهش‌های موجود، به دو روش انجام شده‌اند. در روش اول نیروی تابشی به صورت مستقیم با انتگرال‌گیری تنش روی سطح جسم اندازه‌گیری می‌شود [۸-۶، ۱۷-۱۲]. از آنجاکه در این روش محیط اطراف دربرگیرنده ذره برای محاسبه‌ی این نیرو و تحلیل آن مورد توجه است، به آن محاسبه در میدان نزدیک<sup>۱</sup> هم اطلاق می‌شود. در روش دوم نیروی تابشی با انتگرال‌گیری حول یک سطح بسته و دربرگیرنده جسم در محیط دور دست<sup>۲</sup> نسبت به ذره محاسبه می‌شود [۵، ۲۲-۱۸]. در این روش خصوصیات محیط دور دست ذره نیز مورد توجه قرار می‌گیرد.

برای محاسبه تنش روی سطح ذره بایستی معادلات حاکم بر حرکت سیال یعنی معادلات پیوستگی و ناویر استوکس، با در نظر گرفتن شرایط مرزی روی سطح ذره، محاسبه شوند. با توجه به غیرخطی بودن این معادلات، حل تحلیلی مستقیم آن‌ها و محاسبه متغیرهای مربوطه یعنی میدان‌های سرعت، چگالی و فشار کاری دشوار و در اکثر موارد ناممکن است. لذا با فرض کوچک بودن میزان اغتشاشات ایجاد شده ناشی از انتشار موج در سیال، این میدان‌ها نسبت به حالت تعادلی خود بسط داده شده تا معادلات خطی شوند.

- 1 Near-Field Region
- 2 Far-Field Region

این ضریب در تئوری کینگ فقط تابع اختلاف چگالی ذره با سیال است. طبق رابطه (۳) برای  $\frac{\rho_0}{\rho_1} > 2/5$  یعنی برای ذرات سبک، نیروی تابشی ناشی از موج ایستا ذرات را به سمت نقاط گرهی می‌راند درحالی‌که برای  $\frac{\rho_0}{\rho_1} < 2/5$  نیروی تابشی ذرات را به سوی نقاط پادگره‌ی حرکت می‌دهد. از طرفی طبق این رابطه، نیروی وارد به ذره در امواج ایستا بسیار بزرگ‌تر از امواج پیشرو برآورد شده است. کینگ با مقایسه عبارات بدست‌آمده برای نیروهای تابشی در امواج ایستا و پیشرو دریافت که نیروی تابشی وارد بر ذرات کوچک به ویژگی‌های محلی میدان مانند چگالی انرژی بستگی ندارد، بلکه تابع نوع موج منتشرشده در محیط است. زیرا که با تغییر مشخصه‌های محلی، نسبت نیروهای بدست‌آمده در دو میدان موج پیشرو و ایستا تغییری نمی‌کند بلکه تابعی از طبیعت میدان ناشی از موج و مود موج تولید شده است.

در پژوهش‌های بعدی تلاش شد تا مسئله نیروی تابشی برگرفته از تئوری کینگ برای حالت‌های دیگر انتشار موج و با فرضیات متفاوتی حل شود [۲۷-۲۵]. امبلتون نظریه کینگ را گسترش داد و نیروی تابشی وارد بر کره صلب را تحت اثر امواج پیشروی کروی حل کرد [۲۸]. او نشان داد که در فواصل دور از منبع موج نیروی وارد بر کره به صورت دافعه بوده و با نزدیک شدن کره به منبع این دافعه کاهش یافته و به صفر می‌رسد و با کاهش بیشتر این فاصله این نیرو به صورت جاذبه تغییر علامت می‌دهد.

نتایج محاسبات کینگ برای نیروی تابشی آکوستیکی برای ذرات صلب معلق در سیال نایسکوز هم‌خوانی قابل قبولی با مشاهدات تجربی برای ذرات سخت، مانند ذرات فولادی، در آب داشت. این در حالی است که برای ذرات نرم‌تر، اثر تراکم‌پذیری قابل‌چشم‌پوشی نیست. مشاهدات تجربی در امواج صفحه‌ای ایستا در امولسیون‌ها نشان داد که ذرات سبک‌تر از محیط سیال به طرف نقاط گرهی حرکت می‌کنند درحالی‌که ذرات چگال‌تر از سیال به طرف نقاط پادگره‌ی حرکت می‌کنند [۱۷]. این در حالی است که کینگ اندازه بحرانی چگالی نسبی را  $0/4$  به دست آورده بود. بنابراین، یوشیوکا و کاواشیما [۱۷] در سال ۱۹۵۵ تئوری کینگ را برای حالت کلی‌تر ذرات تراکم‌پذیر گسترش دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن انکسار<sup>۴</sup> موج در کره، اثر تراکم‌پذیری را برای کره در نظر گرفتند. آن‌ها همچنین

را روی کره صلب غوطه‌ور در سیال ایده‌آل با انتگرال‌گیری فشار مرتبه دوم میانگین زمانی روی سطح آن محاسبه کرد و فشار مرتبه دوم را توسط حل کردن میدان موج پراش از ذره به دست آورد. او سپس با اعمال شرایط محدوده ریلی فشار تابشی را برای ذرات ریز، در دو حالت امواج صفحه‌ای ایستا و امواج صفحه‌ای پیشرو با نگره‌داشتن فقط ترم‌های دوقطبی و تک‌قطبی که حاصل از بسط دو جمله اول سری میدان فشار آکوستیکی اطراف کره هستند، حل کرد. او نیروی تابشی را برای ذرات معلق در معرض امواج صفحه‌ای پیشرو به صورت رابطه (۱) به دست آورد:

$$F = 2\pi\rho_0 |A|^2 (ka)^6 \bar{\rho} \quad (1)$$

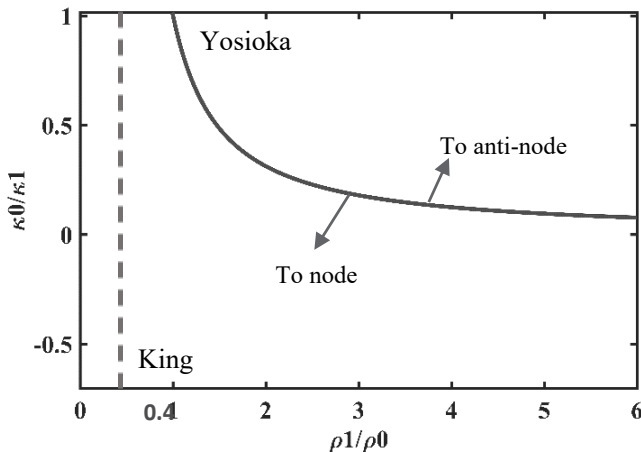
که  $|A|$  دامنه موج وارده،  $a$  شعاع ذره،  $k$  عدد موج،  $\rho_0$  چگالی سیال،  $\rho_1$  چگالی ذره و  $\bar{\rho}$  ضریب چگالی نسبی است. این ضریب به صورت  $0 < \frac{\rho_0}{\rho_1} < \infty$ . همواره مثبت به دست می‌آید که نشان می‌دهد نیروی وارد بر ذرات کروی همواره در جهت انتشار موج است. کینگ نیروی تابشی را برای دو حالت حدی  $\frac{\rho_0}{\rho_1} \rightarrow 0$  و  $\frac{\rho_0}{\rho_1} \rightarrow \infty$  که به ترتیب مربوط به کره صلب بسیار سبک و کره صلب ثابت در سیال می‌شود، محاسبه کرد. او همچنین برای امواج صفحه‌ای ایستا نیروی تابشی را مطابق رابطه (۲) به دست آورد:

$$F = \pi\rho_0 |A|^2 (ka)^3 \phi \sin(2kh) \quad (2)$$

$$\phi = \frac{1 + \frac{2}{3}(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1})}{2 + \frac{\rho_0}{\rho_1}} \quad (3)$$

که  $h$  فاصله ذره از پادگره میدان موج سرعت و  $\phi$  ضریب تضاد آکوستیکی<sup>۱</sup> است. این ضریب میزان اختلاف ذره را با سیال از لحاظ خواص آکوستیکی در میدان موج ایستا مشخص می‌کند. در صورتی که این ضریب صفر باشد، میدان آکوستیکی تفاوتی بین سیال و ذره احساس نکرده و نیرویی به ذره وارد نمی‌شود. ولی در صورتی که این ضریب مثبت یا منفی باشد، نیروی تابشی به ذرات وارد شده و ذرات به سمت نقاط پادگره<sup>۲</sup> یا گرهی<sup>۳</sup> در میدان موج حرکت می‌کنند.

- 
- 1 Acoustic Contrast Factor
  - 2 Wave Antinodes
  - 3 Wave Nodes



شکل ۳: مقدار بحرانی ضریب تضاد آکوستیکی در تئوری‌های کینگ و یوشیوکا

Fig. 3: Critical values of the acoustic contrast factors in King and Yosioka formulations

$$f_1 = 1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_0}, f_2 = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)}{2\rho_1 + \rho_0} \quad (7)$$

در این رابطه  $f_1$  ضریب پراش تک‌قطبی بوده که تابع تراکم‌پذیری نسبی ذره نسبت به سیال ( $\frac{\kappa_1}{\kappa_0}$ ) است و  $f_2$  ضریب پراش دوقطبی بوده که تابع چگالی نسبی ذره نسبت به سیال ( $\rho_1$ ) است. عملگر  $\langle \dots \rangle$  بیانگر میانگین زمانی در یک دوره تناوب کامل از نوسان موج بوده که به صورت انتگرال زمانی متغیر در یک دوره تناوب کامل تقسیم بر زمان دوره تناوب تعریف می‌شود. گورکوف برای به دست آوردن این ثوابت مسئله جریان تراکم‌ناپذیر حول جسم را حل کرد. او همچنین نشان داد که انتگرال‌گیری از نیروی تابشی به دلیل ثابت بودن مومنتم خطی می‌تواند در سطحی با شعاعی بزرگ‌تر از شعاع کره یعنی به صورت انتگرال‌گیری میدان دور انجام شود.

در ادامه پژوهش یوشیوکا و کاواشیما، هاسگاوا [۱۶، ۲۹، ۳۰] نیروی تابشی را برای یک کره جامد الاستیک در سیال ایده‌آل بررسی کرد. او با در نظر گرفتن الاستیسیته درون کره میدان جابجایی درون آن را به پتانسیل‌های اسکالر و برداری، که انتشار امواج فشاری<sup>۱</sup> و برشی<sup>۲</sup> در کره را شامل می‌شدند، تجزیه نمود. او برای بیان نتایج پژوهش خود، کمیت جدیدی به نام تابع نیروی تابشی آکوستیکی<sup>۳</sup> که معرف نیروی تابشی آکوستیکی بر واحد سطح بر واحد انرژی جنبشی است معرفی کرد. او سپس با رسم این کمیت برحسب مقادیر  $ka$

نشان دادند که نیروی تابشی روی کره تراکم‌پذیر را می‌توان به صورت مجموعی از دو جمله، شامل فشار مرتبه دوم میانگین زمانی و یک جمله اضافی اصلاحی که همان شار مومنتم روی سطح کره در موقعیت تعادلی آن است، نوشت. مشابه تحلیل کینگ، یوشیوکا و کاواشیما نیز دو رابطه برای کره تراکم‌پذیر کوچک در محدوده ریلی یکی برای امواج صفحه‌ای ایستا و دیگری برای امواج صفحه‌ای پیشرو به‌دست آوردند. برای امواج ایستا نیروی تابشی به‌صورت رابطه (۴) است:

$$F = 4\pi\rho_0 |A|^2 (ka)^3 \phi \sin(2kh) \quad (4)$$

$$\phi = \frac{\tilde{\rho} + \frac{2(\tilde{\rho}-1)}{3} - \frac{\kappa_1}{3\kappa_0}}{1+2\tilde{\rho}} \quad (5)$$

که  $\tilde{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_0}$ ،  $\kappa$  تراکم‌پذیری و  $\phi$  ضریب تضاد آکوستیکی است. در صورتی که این ضریب مثبت باشد ذرات به سمت نقاط پادگرهی فشار و در صورتی که منفی باشد ذرات به سمت نقاط گرهی فشاری سوق داده می‌شوند. می‌توان مشاهده کرد که برای  $\frac{\kappa_1}{\kappa_0} \rightarrow 0$  رابطه (۵) به همان رابطه کینگ منتهی می‌شود.

شکل ۳ منحنی ضریب تضاد آکوستیکی را در مقدار بحرانی  $\phi = 0$  برای تئوری‌های کینگ و یوشیوکا نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل مشخص است تئوری کینگ با نادیده‌گرفتن اثر تراکم‌پذیری انحراف زیادی در تعیین محدوده تغییر علامت ضریب تضاد آکوستیکی دارد. یوشیوکا و کاواشیما [۱۷] همچنین فرکانس بحرانی را برای حباب گاز غوطه‌ور در مایع بررسی کرده و نیروی تابشی را در این فرکانس محاسبه کردند که بسیار بزرگ‌تر از نیروی کینگ به دست آمد.

در سال ۱۹۶۲، گورکوف [۱۹] حل یوشیوکا و کاواشیما را ساده کرد و به‌صورت ترم‌های چگالی انرژی جنبشی  $\frac{1}{2}\rho_0 \langle v_1 \rangle^2$  و چگالی انرژی پتانسیل  $\frac{1}{2}\kappa_0 \langle p_1 \rangle^2$  در سیال ایده‌آل، از نو فرمول‌بندی کرد. رابطه او بیان دیگری از نیروی تابشی را بر حسب گرادیان انرژی تابشی نشان می‌دهد. او با این فرض که شعاع سیال در همسایگی ذره خیلی کوچک‌تر از طول موج است و در نتیجه با تبدیل معادله موج به معادله یک سیال تراکم‌ناپذیر، نیروی تابشی را مطابق رابطه (۶) به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$F = -\frac{4\pi a^3}{3} \nabla \left[ f_1 \left( \frac{1}{2} \kappa_0 \langle p_1 \rangle^2 \right) - \frac{3}{2} f_2 \left( \frac{1}{2} \rho_0 \langle v_1 \rangle^2 \right) \right] \quad (6)$$

- 1 Compressional Waves
- 2 Shear Waves
- 3 Acoustic Radiation Force Function

در صورتی که فضای خالی بین پوسته‌ها با سیال با چگالی کم مانند هوا پر شود، نیروی تابشی هنگامی که پوسته صوت را جذب می‌کند چندان دستخوش تغییر نمی‌شود. این درحالی است که اگر پوسته‌ها نازک باشند و با سیالی مانند آب پر شوند، به ازای افزایش  $ka$  نیروی تابشی می‌تواند چندین تشدید را تجربه کند.

در فرکانس‌های پایین نوسانات نیروی تابشی آکوستیکی می‌تواند موده‌های الاستیکی ذرات را تحریک کند [۳۸]. بنابراین، گرچه فرم اولیه و معمول ذرات به صورت کروی است ولی هنگامی که ذرات در معرض موج آکوستیکی قرار می‌گیرند شکل آن‌ها می‌تواند دچار تغییر شده و از فرم کروی خارج شود. این موضوع برای استوانه‌های غوطه‌ور در سیال که فرم معمول استوانه‌ای دارند نیز صادق است و هنگامی که آن‌ها در معرض نیروی تابشی آکوستیکی با فرکانس پایین قرار می‌گیرند، به سطح مقطع بیضی‌گون تغییر فرم می‌دهند [۳۹]. از این رو پژوهش‌هایی در رابطه با محاسبه نیروی تابشی وارد بر ذرات غیرکروی<sup>۲</sup> شامل بیضی‌گون و شبه‌کره<sup>۳</sup> و همچنین ذرات استوانه‌ای با مقطع بیضوی نیز انجام شده است [۴۰-۴۴]. نتایج این پژوهش‌ها حاکی از آن است که اندازه نیروی تابشی آکوستیکی برای ذرات غیرکروی، هنگامی که در زاویه تعادلی پایدار خود قرار دارند، بیشتر است [۴۴]. همچنین در زوایای غیرتعادلی در فرکانس‌های کم، نیروی تابشی آکوستیکی مؤلفه مماسی داشته و باعث اعمال گشتاور تابشی به این ذرات می‌شود. به علاوه، با افزایش فرکانس موج وارده میزان انحراف نیروی تابشی کل وارد بر این ذرات با راستای انتشار موج بیشتر می‌شود [۴۰].

پژوهش‌های تحلیلی انجام شده با وجود قابلیت ارائه نتایجی قابل قبول برای محاسبه نیروی تابشی و نحوه تغییرات آن، امکان بررسی همه‌جانبه‌ی این موضوع را با توجه به پیچیدگی هندسه مسئله ندارند. به همین دلیل در سال‌های اخیر بررسی و مدل‌سازی عددی نیروی تابشی مورد توجه برخی از محققان قرار گرفته است. هیل و همکاران [۴۵]، مسیر حرکت ذرات را تحت اثر امواج ایستای آکوستیکی برای یک مدل دوبعدی بررسی کردند. در این مدل میدان نیروی تابشی با استفاده از حل تحلیلی ارائه شده توسط گورکوف محاسبه شده است. فیشر و میلز [۴۶] مدلی دوبعدی برای محاسبه میدان نیروی تابشی با روش المان محدود ارائه کردند. آن‌ها نشان دادند که بررسی‌های

که  $k$  عدد موج و  $a$  اندازه شعاع ذره است و مقایسه با تئوری کینگ نشان داد که با نزدیک شدن فرکانس موج اعمالی به موده‌های ارتعاشی ذرات، نمودار تابع نیروی تابشی آکوستیکی مینیمم‌های موضعی پیدا می‌کند. درحالی که این موضوع در تئوری کینگ دیده نمی‌شود. بنابراین، هاسگاو علت انحرافات منحنی کینگ از داده‌های تجربی را به اثر ارتعاشات الاستیک کره‌ها نسبت داد. با این حال، برای محدوده طول موج بلند یعنی محدوده ریلی نتایج به دست آمده حاکی از آن بود که می‌توان از اثر الاستیسیته ذرات صرف‌نظر کرده و آن‌ها را صلب فرض کرد [۱۶]. سیلوا [۲۲] مدل ذره تراکم‌پذیر را گسترش داد و برای آن قابلیت جذب امواج فشاری در نظر گرفت. او فرض کرد که ضخامت‌های لایه‌های مرزی ویسکوز درون و بیرون ذره در مقایسه با شعاع آن بسیار کوچک بوده و لذا از امواج برشی درون و بیرون کره صرف‌نظر کرد.

مدل ارائه‌شده توسط کینگ سبب جلب توجه پژوهش‌های بسیاری برای محاسبه‌ی نیروی تابشی آکوستیکی بر روی انواع مختلفی از ذرات و اجسام با ساختارهای متفاوت شد. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به بررسی نیروی تابشی روی مدل استوانه‌های با مقطع دایروی و مدل پوسته‌های کروی<sup>۱</sup> اشاره کرد. همانند ذرات کروی، نیروی تابشی در این پژوهش‌ها نیز برای استوانه صلب و تراکم‌پذیر تحت امواج ایستا و پیشرو بررسی شده است [۱۵، ۳۱، ۳۲]. بررسی نیروی تابشی روی استوانه‌های الاستیک و پوسته‌های کروی و استوانه‌ای نشان می‌دهد که وابستگی پوسته‌های استوانه‌ای و کروی به فرکانس بسیار بیشتر از اجسام توپر و الاستیک جامد است. همچنین نیروی وارد بر پوسته‌ها به شدت تابع سرعت‌های برشی و طولی موج منتشرشده و ضخامت پوسته‌ها است [۳۳ و ۳۴]. متری [۳۵-۳۷] مدل ذرات پوسته‌ای کروی را برای حالات پوسته‌ی الاستیک و ویسکوالاستیک تحت اثر امواج آکوستیکی صفحه‌ای ایستا و پیشرو بررسی کرد. او برای محاسبه نیروی تابشی، مدل هاسگاو [۳۴] را برای پوسته‌ی الاستیک و ویسکوالاستیک گسترش داد. متری با استفاده از تئوری پراش خطی، میدان‌های مرتبه اول را محاسبه کرد و نیروی تابشی را به دست آورد. او با استفاده از فرضیات سیال ایده‌آل و پوسته جامد، از اثرات کشش سطحی صرف‌نظر کرد. او نشان داد که تشدید در محدوده  $ka$  کوچک اتفاق می‌افتد. او همچنین نشان داد که برای پوسته‌های نازک

2 Non-Spherical

3 Spheroid

1 Spherical Shells

حالی که با وجود ویسکوزیته، معادلات اغتشاش یافته مرتبه دوم ناویر-استوکس تابع صریحی از میدان‌های مرتبه اول نبوده و بایستی به صورت جداگانه توسط شرایط مرزی مرتبه دوم حل شوند. این نکته لزوم مطالعه اثرات ویسکوزیته برای سیال میزبان را نشان می‌دهد. با توجه به شرط عدم لغزش، جریان‌های ثانویه آکوستیکی در تقریب مرتبه دوم حول ذره ایجاد می‌شوند که مطابق آنچه ذکر شد توسط میدان‌های مرتبه اول قابل بیان نیستند. شکل ۴ شمایی از جریان ایجاد شده حول ذره در میدان موج منتشرشده در سیال ویسکوز را نشان می‌دهد. جریان آکوستیکی توسط تنش رینولدز که به صورت متوسط شار مومنتم آکوستیکی تعریف می‌شود، تولید می‌شود [۵۲]. بنابراین برای محاسبه نیروی تابشی بایستی معادلات میانگین زمانی حرکت سیال را در تقریب مرتبه دوم یا همان معادلات جریان آکوستیکی را حل کرد.

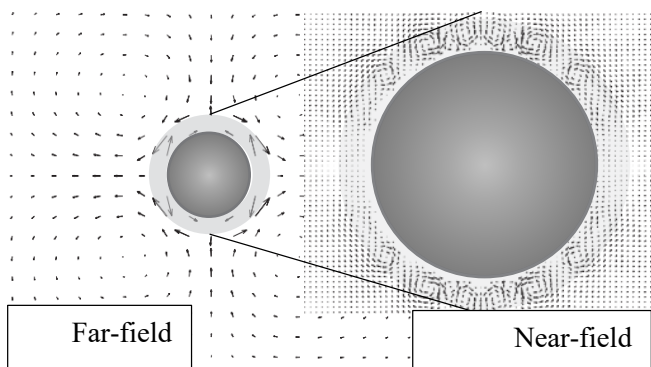
در اواخر سده ۱۹، مطالعاتی در زمینه اثر ویسکوزیته سیال بر نیروی تابشی آکوستیکی آغاز شد [۵۳]. دوپنیکوف [۶ و ۷] نیروی تابشی روی کره صلب و کره تراکم‌پذیر را با فرض ویسکوز و تراکم‌پذیر بودن سیال داخل و خارج کره محاسبه کرد. او نیروی تابشی را با این فرض که کره با شعاع دلخواه در معرض امواج صفحه‌ای پیشرو یا ایستا قرار بگیرد، محاسبه کرد. او نتایج خود را برای دو حالت حدی خاص شامل (الف) حالتی که طول موج بسیار بزرگ‌تر از شعاع ذره و شعاع ذره نیز بسیار بزرگ‌تر از طول موج ویسکوز داخل و خارج کره باشد و (ب) حالتی که طول موج بسیار بزرگ‌تر از طول موج ویسکوز و طول موج ویسکوز داخل و خارج کره نیز بزرگ‌تر از شعاع ذره باشد، بررسی کرد. نتایج او نشان داد که نیروی به‌دست‌آمده در

رایج برای محاسبه نیروی تابشی آکوستیکی بر اساس حل‌های تحلیلی الگوی موج ایستای یک‌بعدی، با توجه به فیزیک واقعی میکروکانال و پیچیدگی‌های ناشی از هندسه آن، کارایی چندانی ندارند.

هیدوک [۴۷] با استفاده از روش لاتیس بولتزمان نیروی تابشی را برای استوانه در سیال ویسکوز محاسبه کرد. کای و همکاران [۴۸] نیروی تابشی وارد بر استوانه در سیال ایده‌آل را برای مدل با شبکه‌بندی دوبعدی با استفاده از روش تفاضل محدود در حوزه زمان<sup>۱</sup> محاسبه کردند. آن‌ها نشان دادند که نتایج این مدل تطابق خوبی با نتایج حل تحلیلی دارد. وانگ و دوئال [۴۹] نیروی تابشی وارد بر استوانه در نزدیکی دیواره تخت را به صورت تحلیلی بررسی کرده و با روش حجم محدود<sup>۲</sup> به صورت عددی محاسبه کردند. بررسی اثر دیواره نشان می‌دهد که ذره تحت موج موازی با دیواره مسیر مستقیمی را تا محل به دام افتادن در گره‌ی موج طی نمی‌کند بلکه به دلیل وجود دیواره جذب آن شده و مسیری منحنی را طی می‌کند. البته این اثر به فاصله ذره نسبت به دیواره نیز وابسته است و در صورتی که ذره از دیواره به اندازه‌ی کافی دور باشد، دیواره تأثیری بر ذره ندارد. گلین‌جونز و همکاران [۵۰] با استفاده از روش المان محدود مدلی برای محاسبه نیروی تابشی وارد بر ذرات جامد الاستیک ارائه کردند. آن‌ها با به‌کارگیری روش یوشیوکا و کوازیما نیروی تابشی را با توجه به میدان پراش موج از ذره محاسبه کردند. آن‌ها با ارائه مدل تقارن محوری نیرو را برای ذرات کروی، بیضوی و استوانه‌ای محاسبه کرده و با حل تحلیلی مقایسه کردند. گاربین و همکاران [۵۱] نیروی تابشی و گشتاور تابشی آکوستیکی وارد بر ذرات دیسک شکل کوچک را به روش عددی محاسبه کرده و نتایج عددی را با حل تحلیلی و نتایج تجربی صحت‌سنجی کردند. آن‌ها نشان دادند که گشتاور تابشی تابع ضخامت ذرات دیسک شکل بوده و به ازای یک مقدار خاص از ضخامت دیسک مقدار بیشینه خود را پیدا می‌کند.

## ۲-۲- نیروی تابشی آکوستیکی در سیال ویسکوز

در سیال ایده‌آل، فشار مرتبه دوم میانگین زمانی که برای محاسبه نیروی تابشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، برحسب میدان‌های مرتبه اول قابل محاسبه است. بنابراین کافی است که مسئله پراش موج از جسم حل شده و میدان‌های پراش مرتبه اول محاسبه شوند. در



شکل ۴: جریان آکوستیکی اطراف ذره در سیال ویسکوز [54]  
**Fig. 4: Acoustic streaming around the particle in viscous fluid [54].**

- 1 Time Domain Finite Difference Method
- 2 Finite Volume Method

محاسبه نیروی تابشی با استفاده از انتگرال گیری میدان دور، روشی برای محاسبه نیروی تابشی وارد بر ذرات کوچک در سیال ویسکوز ارائه کردند. آن‌ها اندازه ضخامت لایه مرزی را نسبت شعاع ذره دلخواه در نظر گرفتند. آن‌ها یک ضریب اصلاحی ویسکوز به صورت رابطه (۸) برای اصلاح معادله گورکوف پیشنهاد کردند، که خود را در ضریب پراش دوقطبی نشان می‌دهد.

$$f_2(\tilde{\rho}, \tilde{\delta}) = \frac{2[1-\gamma(\tilde{\delta})](\tilde{\rho}-1)}{2\tilde{\rho}+1-3\gamma(\tilde{\delta})} \quad (8)$$

در این رابطه  $\gamma\left(\tilde{\delta} = \frac{\delta}{a}\right)$  تابعی از ضخامت لایه مرزی ویسکوز است که ترم انرژی جنبشی را در فرمول گورکوف تحت تأثیر قرار می‌دهد و  $\tilde{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_0}$  نسبت چگالی ذره به چگالی سیال است. ضریب دوقطبی در رابطه (۸) در حقیقت عددی مختلط است که می‌توان آن را به صورت جملات حقیقی و موهومی به صورت رابطه (۹) نوشت.

$$f_2'(\tilde{\rho}, \tilde{\delta}) = \text{Re} \left[ \frac{2[1-\gamma(\tilde{\delta})](\tilde{\rho}-1)}{2\tilde{\rho}+1-3\gamma(\tilde{\delta})} \right], \quad (9)$$

$$f_2^i(\tilde{\rho}, \tilde{\delta}) = \frac{6(1-\tilde{\rho})^2(1+\tilde{\delta})\tilde{\delta}}{(1+2\tilde{\rho})^2+9(1+2\tilde{\rho})\tilde{\delta}+\frac{81}{2}(\tilde{\delta}^2+\tilde{\delta}^3+\frac{1}{2}\tilde{\delta}^4)}$$

در تکمیل نظریه‌های ارائه شده قبلی، آنامالی [۵۵] با استفاده از روش میدان دور رابطه‌ای برای نیروی متوسط وارد بر کره در سیال ویسکوز، در حالتی که اندازه ذره در مقابل طول موج قابل مقایسه باشد، به دست آورد. او نشان داد که ترم‌های تک‌قطبی و دوقطبی برای محاسبه نیروی متوسط کافی هستند ولی علاوه بر اندرکنش مرتبه دوم ترم‌های تک‌قطبی و دوقطبی با موج وارده، بایستی اندرکنش مرتبه دوم بین خود ترم‌های تک‌قطبی و دوقطبی هم در نظر گرفته شود. برخلاف سنتس [۲۱] که نشان داد نیروی وارد به ذره با افزایش شعاع ذره به صورت خطی افزایش می‌یابد، نتایج تحلیل آنامالی نشان می‌دهد که این نیرو با شعاع رابطه یکنواختی ندارد. در پژوهش آنامالی اثرات ویسکوزیته سینماتیکی و بالک و نسبت چگالی بر نیروی متوسط وارد بر ذرات صلب بررسی شدند. او نشان داد که افزایش ویسکوزیته ابتدا باعث افزایش نیروی متوسط می‌شود ولی این نیرو از جایی به بعد کاهش می‌یابد. با این حال ویسکوزیته بالک اثری بر نیروی تابشی ندارد. افزایش نسبت چگالی نیز نیروی تابشی را افزایش می‌دهد به

سیال ویسکوز به طول آشکاری با آنچه در سیال ناویسکوز به دست می‌آید، متفاوت است. به‌طور خاص، فشار تابشی ویسکوز که توسط موج پیشرو صفحه‌ای اعمال می‌شود، سبب حرکت کره در جهت انتشار موج می‌شود. همچنین این فشار، برای حالتی که ذرات حباب گاز داخل مایع غوطه‌ور باشند و فرکانس موج اعمالی بزرگ‌تر از ضریب مشخصی از فرکانس رزونانس حباب گاز باشد، در جهت مخالف انتشار موج اعمال می‌شود. در این حالت ذرات به جای این‌که در جهت انتشار موج شروع به حرکت کنند، به سمت منبع صادرکننده موج صوتی حرکت می‌کنند. این درحالی است که در سیال ایده‌آل نیروی وارد بر کره همیشه در جهت انتشار موج وارد می‌شود [۸]. علاوه بر این دوینیکوف با توجه به اضافه شدن ترم اصلاحی ویسکوز در روابط به دست آمده برای نیروی تابشی، نشان داد که وجود ویسکوزیته باعث اعمال نیرویی اضافه‌تر به جسم در میدان صوتی می‌شود. دوینیکوف نتیجه گرفت که در صورتی که شعاع ذره بسیار بزرگ‌تر از ضخامت لایه مرزی باشد، می‌توان از اثر ویسکوزیته صرف‌نظر کرد و نیروی تابشی بخش عمده نیروی کلی وارد بر ذره را تشکیل می‌دهد. در حالی که اگر ضخامت لایه مرزی هم‌مرتبه و یا بزرگ‌تر از شعاع ذره باشد، اثر ویسکوزیته غیرقابل چشم‌پوشی بوده و سهم عمده‌ای در نیروی وارد بر ذره دارد.

دانیلوف و میرونوف [۹] نیروی میانگین<sup>۱</sup> وارد بر یک ذره صلب کوچک کروی را در سیال ویسکوز تحت میدان آکوستیکی با فرض تراکم‌ناپذیر بودن میدان‌های پراش محاسبه کردند. نیروی مذکور به صورت مجموعی از نیروی درگ ناشی از جریان خارجی موجود در غیاب کره و جملاتی شامل ضرب سرعت‌ها و مشتقات آن‌ها که مربوط به میدان وارده هستند، محاسبه می‌شود. آن‌ها نشان دادند که محاسبات این نیرو می‌تواند با فرض تراکم‌ناپذیر بودن میدان‌های پراش انجام شود. به بیان دیگر، تراکم‌پذیری سیال فقط تا جایی که موجب ایجاد گرادیان‌های سرعت وارده شود لازم است در نظر گرفته شود.

با این‌که دوینیکوف نیروی تابشی را برای کره با اندازه دلخواه محاسبه کرد ولی او نتایج خود را در دو حالت حدی خاص که شعاع ذره قابل مقایسه با طول موج و ضخامت لایه مرزی ویسکوز نبود، ارائه کرد. سنتس و بروس [۲۱] با استفاده از روش گورکوف یعنی

1 Mean Force



می‌کند. آن‌ها تئوری اپستین و کارهات را گسترش داده و میرایی صوت در امولسیون‌های ذرات جامد معلق در سیال را نیز بررسی کردند. نتایج کار آن‌ها نشان می‌دهد که افت حرارتی با مکانیزم انتقال حرارت جابجایی تأثیر چشم‌گیری در افزایش میرایی صوت در امولسیون‌ها دارد. لی و وانگ [۶۰ و ۶۱] نیروی تابشی وارد بر کره گرم‌شده را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که جریان آکوستیکی باعث پخش حرارت در اطراف کره شده و ناپایداری توزیع حرارت اطراف کره را کاهش داده و در نهایت منجر به اعمال نیرویی پایدار به کره خواهد شد.

دوینیکوف در سال ۱۹۹۷ اثرات انتقال حرارت برای کره و سیال را با اضافه کردن معادله انرژی به معادلات حاکم در نظر گرفت و نیروی تابشی آکوستیکی وارد بر کره‌ای که هیچ قیدی بر اندازه آن نسبت به طول موج‌های حرارتی و ویسکوز نیست، محاسبه کرد [۱۲ و ۱۳]. او یک عبارت کلی برای بیان نیروی تابشی ارائه کرد که می‌تواند برای حباب گاز، قطره مایع، کره الاستیک یا صلب و پوسته کروی به کار رود. او در حالت کلی نیروی تابشی را برحسب ثوابت پراش خطی بیان کرد که با استفاده از نوع ذره مورد نظر تعیین می‌شوند. او برای محاسبه میدان‌های مرتبه دوم یعنی میدان‌های جریان آکوستیکی فرض کرد که کره در تقریب مرتبه دوم حرکتی ندارد. او نیروی تابشی را در محدوده طول موج بلند و برای دو حالت زیر محاسبه کرد. در حالت اول اندازه ذره نسبت به ضخامت لایه مرزی ویسکوز و ضخامت لایه مرزی حرارتی بزرگ‌تر است که در این صورت می‌توان از اثرات حرارتی و ویسکوز صرف‌نظر کرد. در حالت دوم اندازه ذره نسبت به ضخامت لایه مرزی ویسکوز و ضخامت لایه مرزی حرارتی کوچک‌تر است که در این صورت اثرات حرارتی و ویسکوز قابل ملاحظه‌ای مشاهده می‌شود. او همچنین مشاهده کرد که ذرات سبک در امواج پیشرو می‌توانند به سمت منبع یا در جهت خلاف حرکت کنند که این رفتار ناشی از نظر گرفتن اثرات حرارتی است.

کارلسن [۲۰] محدودیت حل دوینیکوف مبتنی بر غیرقابل مقایسه بودن اندازه شعاع ذره با ضخامت‌های لایه‌های مرزی حرارتی و ویسکوز را برداشت و اثرات حرارتی را برای ذره کروی در محدوده ریلی بررسی کرد. او نیروی تابشی را از تئوری ستنس [۲۱] و استفاده از بسط موج جزئی تا دو جمله اول و به‌دست آوردن میدان‌های پراش محاسبه کرد. او همچنین اثرات ترموویسکوز بر نیروی تابشی را

صورتی که با نزدیک‌شدن ذره به حد ذره ثابت مقید صلب<sup>۱</sup>، این نیرو اشباع می‌شود.

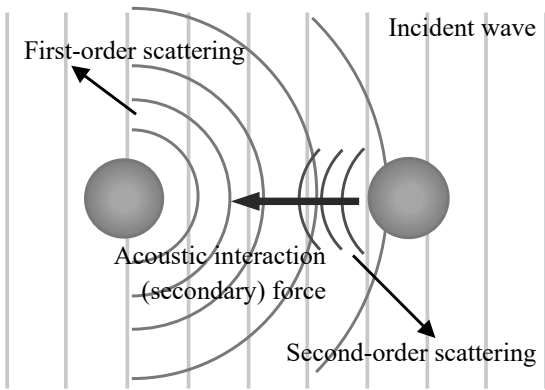
با به‌کارگیری فرض ویسکوزیته برای سیال میزبان و اعمال ترم‌های ویسکوز در فرمول نیروی تابشی آکوستیکی، تغییر علامت و به بیانی تغییر جهت نیروی تابشی به صورت تابعی از قطر ذرات مشاهده می‌شود. رن و سیلور [۵۶] با بررسی تجربی و مقایسه حل‌های تحلیلی ارائه‌شده توسط دوینیکوف، بروس و دانیلوف نشان دادند که یک بازه شعاع بحرانی وجود دارد که برای ذرات کوچک‌تر از آن جهت نیروی تابشی معکوس می‌شود. همچنین محدوده بازه این شعاع بحرانی نسبت به مقدار متناظر آن در حل تحلیلی اختلاف بزرگی دارد.

به‌تازگی سپهری رهنما و همکاران [۵۷] با استفاده از روش استوکس، جریان آکوستیکی حول کره صلب در سیال ویسکوز را به‌صورت نیمه تحلیلی حل کردند. آن‌ها ابتدا با استفاده از روش چندقطبی میدان‌های مرتبه اول را محاسبه و سپس با استفاده از روش استوکس معادلات جریان آکوستیکی را محاسبه کردند. آن‌ها نشان دادند که استفاده از سه ترم اول در سری‌های پتانسیل مرتبه اول کافی است. آن‌ها همچنین نتایج خود را با تئوری دوینیکوف [۶] صحت‌سنجی کرده و نشان دادند نتایج روش استوکس در محدوده خطای ۱٪ با نتایج دوینیکوف مطابقت دارد. مزیت این روش قابلیت افزودن تعداد ذرات بیشتر و بررسی نیروهای بین ذره‌ای است.

### ۳-۲- نیروی تابشی آکوستیکی در سیال با اعمال اثرات ترموویسکوز

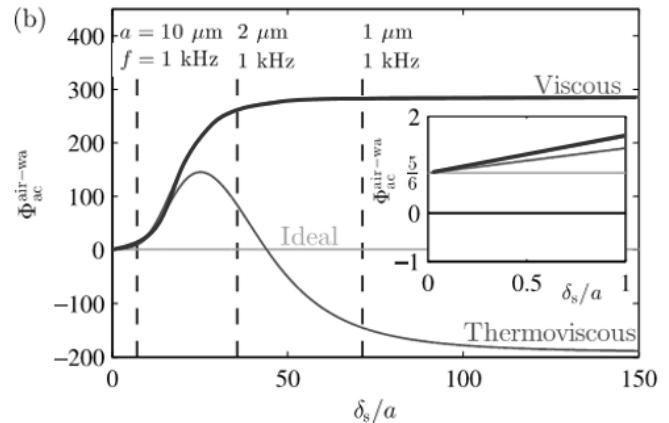
پژوهش‌های ذکر شده در زمینه بررسی اثرات ویسکوزیته بر نیروی تابشی آکوستیکی، گرچه بسیاری از مشاهدات تجربی را تأیید می‌کردند ولی از نقطه‌نظر عمومیت تئوری و دقت نتایج هنوز جای کار داشتند. مطالعه اثرات حرارتی حین انتشار صوت به پژوهش اپستین و کارهات [۵۸] بازمی‌گردد. آن‌ها با تقریب مرتبه دوم میزان میرایی موج را اندازه گرفته و نتایج پژوهش خود را با داده‌های تجربی به دست آمده از جذب صوت در ذرات مه به ازای فرکانس‌های مختلف مقایسه کردند. در ادامه، آلگرا و هاوولی [۵۹] جذب و میرایی صوت را در امولسیون‌ها به صورت تحلیلی و تجربی بررسی کرده و نشان دادند که تئوری اپستین و کارهات به خوبی نتایج تجربی را توصیف

1 Fixed-Rigid Particle



شکل ۶: نحوه تعامل ذرات در میدان آکوستیکی

Fig. 6: Particle interactions in the acoustic field.



شکل ۵: اثر اضافه نمودن اصلاحات ویسکوز و ترموویسکوز بر ضریب تضاد آکوستیکی [20]

Fig. 5: Effect of adding viscous and thermoviscous corrective terms on acoustic contrast factor [20]

است، جهت حرکت ذرات نسبت به نقاط گرهی یا پادگرهی مشخص می‌شود. نیروی اولیه همواره در جهت انتشار موج به ذره وارد می‌شود. نیروی تابشی اولیه عمودی همان‌گونه که از نام آن پیداست، عمود بر جهت انتشار موج است. این نیرو توسط وودساید [۶۲] بررسی شد. او نتیجه گرفت که به دلیل یکنواخت نبودن توزیع چگالی انرژی آکوستیکی، یک نیروی عمودی بر ذرات وارد می‌شود و این نیرو بسیار ضعیف‌تر از نیروی تابشی آکوستیکی (محوری) است.

نیروی تابشی ثانویه یا نیروی اندرکنشی بین ذرات ناشی از پراش امواجی است که خود یک‌بار از ذره پراش شده‌اند [۳۳]. درواقع موج پراش‌یافته از هر ذره به ذرات دیگر تابیده و توسط آن‌ها پراش می‌شود. این امواج باعث جذب ذرات به‌طرف یکدیگر و یا دفع آن‌ها از هم، صرف‌نظر از مکان قرارگیری و جهت‌گیری آن‌ها نسبت به هم، می‌شوند [۳۴]. شکل ۶ شماتیکی از تعامل ذرات توسط میدان موج پراش‌یافته از آن‌ها و نحوه اعمال نیروی اندرکنشی را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، موج خارجی آکوستیکی که در سیال منتشر می‌شود با برخورد به ذره اول یعنی ذره سمت چپ در شکل از سطح آن پراش می‌شود. این پراش اولیه که ناشی از برهم‌کنش موج خارجی با ذره است، سبب اعمال نیروی تابشی اولیه به ذره شده و موجب حرکت آن در سیال می‌شود. موج پراش‌سازنده از سطح ذره اول در سیال منتشر شده و با برخورد به سطح ذره دوم یعنی ذره سمت راست در شکل مجدداً از سطح آن پراش می‌شود. این پراش ثانویه سبب اعمال نیروی ثانویه یا نیروی اندرکنشی از طرف ذره اول به ذره دوم شده و تعامل ذرات در میدان آکوستیکی را در پی دارد. همین سازوکار برای ذره دوم نسبت به ذره اول نیز اتفاق می‌افتد.

در ضریب تضاد آکوستیکی وارد نمود. شکل ۵ اثر اعمال اصلاحات ویسکوز و ترموویسکوز را به‌صورت تغییرات ضریب تضاد آکوستیکی در سه حالت تئوری سیال میزبان ایده‌آل، ویسکوز و ترموویسکوز برای قطرات آب معلق در هوا به ازای افزایش ضخامت لایه مرزی ویسکوز نسبت به شعاع ذره نشان می‌دهد. مطابق شکل ۵، در تئوری سیال ایده‌آل مقدار این ضریب ثابت و برابر  $0.833$  باقی می‌ماند. با اعمال تئوری ویسکوز، افزایش ضخامت لایه مرزی موجب افزایش مقدار این ضریب می‌شود. همچنین اصلاحات ترموویسکوز سبب ایجاد انحراف بیشتری در این ضریب نسبت به دو تئوری قبلی شده و حتی منجر به تغییر علامت این ضریب یعنی تغییر جهت حرکت ذره می‌شود.

### ۳- نیروی اندرکنشی آکوستیکی

آنچه تاکنون گفته شد راجع به مطالعات انجام شده در زمینه نیروهای تابشی اولیه وارد بر ذرات است. به‌طورکلی نیروی تابشی به نیروهای اولیه، نیروهای اولیه عمودی<sup>۱</sup> و نیروهای ثانویه تقسیم می‌شود. نیروی تابشی اولیه که ذرات را به‌تنهایی تحت تأثیر قرار می‌دهد، نیرویی است که به دلیل پراش موج وارده از ذره ایجاد شده و موجب حرکت ذرات به سمت گره‌های فشاری و یا نقاط پادگرهی می‌شود. بسته به میزان تراکم‌پذیری ذرات و چگالی نسبی آن‌ها در مقایسه با سیال میزبان و به‌طورکلی ضریب تضاد آکوستیکی ذرات که معرف میزان تضاد پارامترهای آکوستیکی ذرات با سیال اطراف

1 Transverse Primary Force

بین دو ذره حباب بسیار کوچکتر از اندازه طول موج است درحالی که در امواج فراصوتی فرکانسهای اعمالی بسیار بزرگ حتی تا مرتبههای  $10^9$  هرتز است. این در حالی است که در حوزه کاری این امواج، فاصله بین ذرات نه تنها می‌تواند هم‌مرتبه که حتی می‌تواند مرتبه‌های بالاتری از طول موج را نیز شامل شود. بنابراین مدل در نظر گرفته شده ریلی در حوزه امواج فراصوت چندان کارایی نداشته و معتبر نیست. برای اولین بار، نمسو [۶۶] فرض تراکم‌پذیری سیال میزبان را در محاسبات خود برای بررسی نیروی اندرکنشی بین دو ذره حباب تحت اثر امواج پیشرو در نظر گرفت. او نشان داد که علاوه بر ترمی که در نیروی بیرکنس متناسب با عکس مجذور فاصله بین دو حباب است، ترم دوربرد دیگری<sup>۱</sup> نیز در فرمول نیرو ظاهر می‌شود که با عکس فاصله بین دو ذره متناسب بوده و در راستای خط‌المركزین دو ذره است. همچنین علامت نیروی اندرکنشی بسته به فاصله بین دو ذره می‌تواند تغییر کند. به علاوه بر خلاف فرمول بیرکنس، نیروی اندرکنشی وارد بر ذرات در سیال تراکم‌پذیر به صورت برابر و با علامت معکوس یکدیگر نیستند، چرا که در سیال تراکم‌پذیر بخشی از مومنتم توسط موج پراش شده به بی‌نهایت می‌رود.

دوینیکوف و زاواتراک [۶۷] نشان دادند که در فرمول نیروی اندرکنشی یک ترم دوربرد دیگر نیز وجود دارد که در جهت گرادیان موج وارده است و نمسو این ترم را برآورد نکرده است. آن‌ها همچنین امواج ایستا را بررسی کرده و تحلیل خود را به صورت ساده برای سیال غیر ایده‌آل با افزودن دمپینگ به معادلات، گسترش دادند. علاوه بر این، آن‌ها نتایج خود را به موج با هر هندسه دلخواه (نه فقط صفحه‌ای) تعمیم داده و حرکت نسبی دو ذره حباب را تحت اثر نیروی اندرکنشی بررسی کردند. نتایج بررسی تحلیلی آن‌ها نشان می‌دهد که دو ترم دوربرد ذکر شده تأثیر بسزایی در حرکت نسبی دو ذره دارد. دوینیکوف و زاواتراک [۶۸] همچنین نیروی اندرکنشی میانگین زمانی را برای حالتی که مشخصات دو ذره متفاوت باشند، بین دو ذره جامد صلب و حباب گاز تحت موج ایستا برای فواصل کوچک مابین دو ذره محاسبه کردند. آن‌ها نتایج خود را با معادله بیرکنس، که نیروی بین این دو ذره را در فواصل خیلی بزرگ در مقایسه با شعاع این دو ذره محاسبه کرده بود، مقایسه کرده و نشان دادند که در فواصل کم‌تر بین دو ذره اثرات کاملاً متفاوتی مشاهده می‌شوند.

مطالعه نیروی تابشی بین‌ذره‌ای یا نیروی تابشی ثانویه به بررسی حرکت حباب‌ها در امواج صوتی برمی‌گردد. بیرکنس [۶۳] در سال ۱۹۰۶ این اثر را مطالعه کرد و عبارتی برای نیروی مؤثر بین حباب‌های گاز در حال نوسان مطابق رابطه (۱۰) برآورد کرد.

$$F_{\text{int}} = \frac{2\pi\rho_0 a_1 a_2 |A|^2}{L^2 (1-w_1^2)(1-w_2^2)}, \quad (10)$$

$$w_i = \omega_i / \omega, i = 1, 2$$

که در این رابطه  $a_1$  و  $a_2$  به ترتیب شعاع‌های دو حباب گاز در حالت تعادل و  $L$  فاصله بین مراکز تعادلی آن‌ها است.  $\omega_1$  و  $\omega_2$  فرکانس‌های طبیعی حباب‌ها هستند. طبق رابطه (۱۰) به ازای فرکانس‌های بین این دو فرکانس طبیعی، در صورتی که نیروی بین ذرات مثبت باشد یکدیگر را جذب و در صورتی که منفی باشد همدیگر را دفع می‌کنند. بیرکنس فرض کرد که فاصله بین دو حباب بسیار بزرگ‌تر از شعاع‌های آن‌ها است. او همچنین سیال را ایده‌آل فرض کرد تا بتواند از پراش‌های مرتبه بالاتر چشم‌پوشی کند [۶۳]. با این حال فرضیات او بسیار غیرقابل انعطاف و محدودکننده بودند؛ از جمله این که او فرض کرد که سیال میزبان غیرقابل تراکم باشد، نوسانات حباب‌ها به اندازه‌ای کوچک باشد که بتوان از اثرات غیرخطی صرف‌نظر کرد، و شکل و فرم حباب‌ها در حین این نوسانات دچار تغییر شکل نشود.

کروم [۶۴] نیروهای بیرکنس وارد بر ذرات حباب نوسان‌کننده در معرض امواج ایستا را مطالعه کرد و سرعت نزدیک شدن این ذرات نسبت به هم تحت نیروهای دوطرفه آکوستیکی را به صورت تجربی بررسی نمود. او با این فرض که در سطح تماس ذره با سیال لغزش برقرار است، نشان داد که مشاهدات تجربی سرعت ذرات با حل تحلیلی هم‌خوانی مناسبی دارد. امبلتون [۶۵] نیروی اندرکنشی وارد بر ذرات کروی در معرض امواج پیشرو را در حالتی که خط‌المركزین دو ذره موازی با راستای موج باشد، به صورت تحلیلی با حل میدان‌های پراش ذرات محاسبه کرد. او نتیجه گرفت که این نیروی اندرکنشی می‌تواند تا چند مرتبه بزرگتر از نیروی تابشی ناشی از موج وارده بر هریک از ذرات، درحالتی که هرکدام به‌تنهایی در معرض موج وارده قرار بگیرند، باشد.

فرض تراکم‌ناپذیری سیال از نظر فیزیکی بدین معناست که فاصله

حل کرد. گرچه هزینه محاسباتی این روش در مقایسه با روش قبل بیشتر است ولی با توجه به حل همزمان پراش موج روی ذرات، دقت این روش بیشتر است. دوینیکوف [۷۰] با استفاده از این روش، یک حل تحلیلی برای نیروهای وارد بر ذرات در یک سیستم  $N$  ذره‌ای ارائه کرد. او ذرات را تراکم‌پذیر در نظر گرفت و نتایج خود را برای نیروی بین دو ذره حباب گاز غوطه‌ور در آب ارائه کرد. بررسی او نشان داد که نیروهای بین ذره‌ای مکانیزم پیچیده‌تری، نسبت به آنچه محققان قبلی ارائه کرده بودند، دارند. با این حال روش ارائه شده توسط دوینیکوف، با توجه به شرایط مرزی کوپل برای ذرات، نیازمند حل عددی است و با وجود آن که می‌تواند برای تحلیل تعداد ذرات بیشتری به کار رود، ارائه حل تحلیلی برای آن دشوار است.

سپهری رهنما و همکاران [۷۱] بر اساس روش دوینیکوف نیروی بین‌ذره‌ای را برای ذرات صلب به صورت عددی محاسبه کردند. آن‌ها اهمیت اضافه کردن ترم‌های مرتبه بالاتر را در محاسبه نیروهای ثانویه و افزایش دقت آن نشان دادند. آن‌ها همچنین نشان دادند که در نزدیکی گره‌های فشاری نیروهای بین‌ذره‌ای غالب شده و حرکات و جهت‌گیری ذرات را تحت کنترل خود قرار می‌دهند [۷۱]. مزیت روش ارائه شده توسط سپهری رهنما و همکاران قابلیت افزودن ذرات بیشتر در مدل است. لویز و همکاران [۷۲] با استفاده از روش تحلیل همزمان چندذره‌ای، گشتاور اندرکنشی وارد بر ذرات تراکم‌پذیر معلق در سیال ایده‌آل را درحالی‌که اندازه آن‌ها قابل مقایسه با طول موج باشد محاسبه کردند. آن‌ها نشان دادند که حتی اگر موج وارده مومنتم زاویه‌ای نداشته باشد، باز هم گشتاور اندرکنشی آکوستیکی، در صورتی‌که الگوی تداخلی موج حاصله از برهم‌نهی موج وارده و موج پراش نامتقارن باشد یا به بیانی دیگر الگوی پراکندگی ذرات نسبت به موج وارده نامتقارن باشد، به ذرات جاذب صوت وارد می‌شود.

در پژوهش‌های مرور شده تا اینجا، نیروهای اندرکنشی با فرض ناویسکوز یا ایده‌آل بودن سیال میزبان محاسبه شده‌اند. در نظر گرفتن اثرات ویسکوزیته، علاوه بر تضعیف امواج پراش بین ذرات می‌تواند باعث ایجاد امواج برشی در لایه مرزی ویسکوز اطراف ذرات و تغییر نیروهای اندرکنشی بین ذرات شود. سپهری رهنما و همکاران [۷۳] با فرض وجود ویسکوزیته برای سیال، معادلات جریان آکوستیکی برای مدل چند ذره‌ای را به روش عددی محاسبه کرده و نیروی درگ اضافی ناشی از وجود دیگر ذرات را بر روی هر ذره تحلیل کردند. آن‌ها برای

نتایج پژوهش آن‌ها حاکی از آن است که نیروی وارد بر ذره با چگالی بیشتر با افزایش فرکانس و گذر از فرکانس‌های تشدید رزونانس حباب از جاذبه به دافعه تغییر علامت می‌دهد. این درحالی است که ذره با چگالی کمتر، در صورتی‌که چگالی آن از سیال میزبان و یا اندازه آن از حباب کوچک‌تر نباشد، همواره نیروی جاذبه را تجربه می‌کند.

در تکمیل پژوهش‌های انجام‌شده، ژنگ و اپفل [۶۹] نیروی اندرکنشی بین دو ذره را تحت امواج صوتی بدون در نظر گرفتن محدودیت برای اندازه طول موج نسبت به فاصله بین دو ذره محاسبه کرده و کار خود را با تئوری بیرکنس صحت‌سنجی کردند. آن‌ها نتایج خود را برای حالتی ارائه کردند که مسئله متقارن باشد یعنی خط‌المرکزین ذرات موازی با راستای انتشار موج باشد و همچنین یکی از ذرات در محدوده ریلی بوده و اندازه ذره دوم هیچ قیدی نداشته باشد. آن‌ها نشان دادند که نیرو با حجم ذره کوچک متناسب است ولی وابستگی نیرو به مشخصات آکوستیکی ذره بزرگتر یعنی ذره بدون قید پیچیده است. سیلوا و بروس [۲۲] برای چند ذره ریز در محدوده ریلی میدان پتانسیل نیرو را ارائه کرده و نیروی اندرکنشی وارد بر ذرات ناشی از پتانسیل پراش ثانویه در سیال ایده‌آل را محاسبه کردند.

در پژوهش‌های ارائه شده تا اینجا برای محاسبه نیروی اندرکنشی، موج پراش شده از سطح ذره که به واسطه اثر موج وارده بر ذره ایجاد شده است به عنوان موج وارده بر روی ذره دیگر اعمال شده و با انتگرال‌گیری فشار وارده از این موج بر سطح ذره، نیروی اندرکنشی محاسبه می‌گردد. نیروی اندرکنشی محاسبه شده توسط این روش، بخصوص برای زمانی‌که فاصله بین ذرات خیلی کوچک باشد، دقت کافی ندارد. چرا که موج پراش شده از سطح ذره اول (پراش مرتبه اول) پس از برخورد به ذره دوم از سطح آن دوباره پراش می‌شود (پراش مرتبه دوم) و این موج دوباره به ذره اول برخورد کرده و این فرآیند ادامه می‌یابد. در صورتی‌که فاصله بین ذرات کم باشد، تأثیر این پراش‌های مرتبه‌های بالاتر غیرقابل چشم‌پوشی است. همچنین با توجه به مطالب گفته شده، این روش برای تحلیل ذرات بیشتر از دو عدد و افزایش میدان‌های پراش ذرات چندان مناسب نیست.

نیروی اندرکنشی را به روشی دیگر نیز می‌توان محاسبه کرد و آن این‌که مسئله پراش موج از سطح ذرات را با محاسبه همزمان تأثیر پراش موج وارده و پراش‌های مرتبه‌های بالاتر روی سطح دو ذره

لایه مرزی آکوستیکی ناشی شده و حرکت جریان سیال را در خارج از این لایه مرزی توصیف می‌کند و به همین سبب جریان خارجی و یا جریان ناشی از مرز نامیده می‌شود. حرکت جریان داخل لایه مرزی یا جریان داخلی برای اولین بار توسط شلیچینگ [۷۶] مورد بررسی قرار گرفت و به همین دلیل به جریان شلیچینگ معروف است. شکل ۷ شماتیکی از جریان‌های آکوستیکی ناشی از مرز را نشان می‌دهد.

دسته دوم که سازوکار تولید آن متفاوت از دسته اول بوده و توسط میرایی امواج صوتی تولید شده با دامنه‌های زیاد در توده سیال<sup>۳</sup> ایجاد می‌شود، جریان اکارت نام دارد. به بیان دقیق‌تر، انتقال مومنتم موج به سیال باعث تضعیف موج شده و در نتیجه تبدیل این انرژی نوعی جریان پایدار در سیال شکل می‌گیرد که از آن به عنوان جریان ناشی از اتلاف توده سیال<sup>۴</sup> نیز نام برده می‌شود [۷۷]. شکل ۸ شماتیکی از نحوه ایجاد این نوع جریان‌ها را نشان می‌دهد. جریان اکارت برای امواج ایستا، کوچک و قابل چشم‌پوشی است و بیشتر خود را با انتشار امواج پیشرو نشان می‌دهد [۷۳].

لازم به ذکر است که در سیال ویسکوز، جریان آکوستیکی در لایه مرزی اطراف ذره به صورت جریان‌های چرخشی بوده که اثر این جریان‌ها در محاسبه نیروی تابشی آکوستیکی لحاظ شده [۶، ۷، ۹، ۱۴-۱۲، ۵۷، ۷۳] و در مطالعات با نگرش میدان نزدیک ذره نیز بررسی شده است [۵۴، ۵۷، ۷۳]. منظور از جریان آکوستیکی در این بخش، جریان آکوستیکی ایجاد شده ناشی از انتشار صوت در محیط توده سیال است که باعث ایجاد یک جریان خارجی مستقل از ذره شده و ذره را توسط نیروی درگ تحت تأثیر قرار می‌دهد.

جریان آکوستیکی ناشی از مرز برای اولین بار به صورت تحلیلی توسط ریلی بررسی شد [۷۵]. او سیال را به صورت هم‌دما در نظر گرفت و جریان آکوستیکی مرزی را برای دو صفحه بی‌نهایت موازی محاسبه کرد. در این تحلیل، فاصله بین دو صفحه بسیار کوچک‌تر از طول موج ایستای اعمال شده موازی با صفحات بوده و همچنین ضخامت لایه مرزی آکوستیکی کوچک‌تر از فاصله بین صفحات است. این در حالی است که در بیشتر کاربردهای عملی، محدودیت‌های مسئله خارج از فرضیات در نظر گرفته شده توسط ریلی است. از جمله این‌که فاصله بین صفحات معمولاً با طول موج هم‌مرتبه است و یا این‌که اندازه صفحات محدود بوده و شرایط هم‌دما برقرار نیست.

بررسی اثر ویسکوزیته و جریان آکوستیکی، نیروی اندرکنشی را بین دو ذره صلب در راستای موج حساب کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که جریان آکوستیکی سهم عمده‌ای در اندازه نیروی اندرکنشی وارد بر ذرات دارد و این عامل می‌تواند تا سه مرتبه نسبت به حالت سیال ایده‌آل نیروی اندرکنشی بزرگتری را بر ذرات وارد کند. اخیراً ویجایا و همکاران [۷۴] با استفاده از روش المان مرزی<sup>۱</sup>، نیروی اندرکنشی بین ذرات غیرکروی بیضوی شکل را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج بررسی آن‌ها نشان می‌دهد که نیروی اندرکنشی بین ذرات بیضوی نیز شبیه ذرات کروی با نزدیک شدن به گره موج افزایش یافته و حتی از نیروی اولیه نیز بیشتر می‌شود ولی بر خلاف حالت تک ذره، میدان پراش غیر متقارن سبب ایستادن با مقداری زاویه نسبت به حالت تعادل در گره موج می‌شود.

آنچه تاکنون بیان شد، راجع به نیروهای آکوستیکی اولیه و ثانویه ناشی از تعامل مستقیم موج با ذره بود. علاوه بر این نیروها، نیروی دیگری نیز می‌تواند در حین انتشار امواج آکوستیکی به ذرات اعمال شود. این نیرو به صورت غیرمستقیم از طریق اعمال نیروی درگ ناشی از جریان تحمیل شده در سیال به واسطه انتشار موج یعنی جریان آکوستیکی حرکت ذرات را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در ادامه مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه جریان آکوستیکی ارائه می‌شود.

#### ۴- جریان آکوستیکی

جریان آکوستیکی در واقع یک میدان جریان پایدار است که مازاد بر حرکت نوسانی موج منتشر شده در سیال به وجود می‌آید. این جریان یک اثر غیرخطی است که بر اثر وجود مرزهای محیط انتشار صوت و یا میرایی موج<sup>۲</sup> ایجاد می‌شود و بنابراین نمی‌توان آن را با تئوری آکوستیک خطی بررسی نمود.

جریان آکوستیکی را می‌توان به دو دسته عمده تقسیم‌بندی کرد. دسته اول، جریان‌های آکوستیکی ناشی از مرز شامل جریان‌های ریلی و شلیچینگ است. جریان ریلی [۷۵] که عمده توجه پژوهش‌های اخیر را به واسطه عمومیت و کاربرد بیشتر در کاربردهای تجربی جلب کرده است، ناشی از سرعت نسبی سیال نوسان‌کننده نسبت به مرزهای محیط است. این جریان در واقع از گرادپان شدید سرعت در

3 Bulk Fluid

4 Bulk Dissipation Driven Streaming

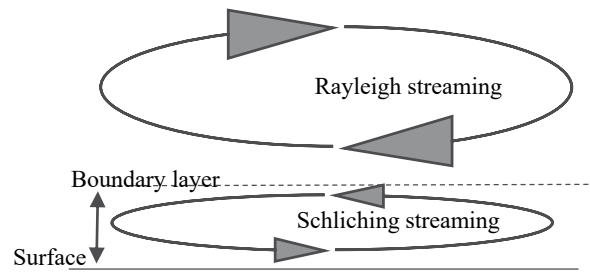
1 Boundary Element Method

2 Wave Attenuation

می‌شد. کی [۸۱] جریان آکوستیکی را با اعمال تراکم‌پذیری بررسی کرد و نشان داد که به حساب آوردن تراکم‌پذیری منجر به افزایش اندازه سرعت این جریان‌ها در خارج از لایه مرزی می‌شود.

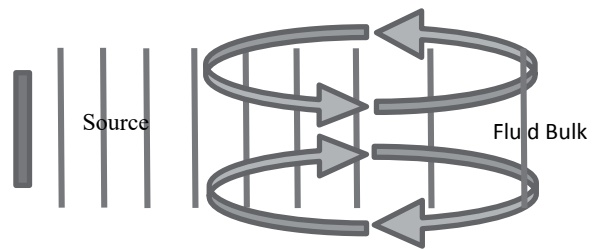
در ادامه، همیلتون و همکاران [۸۲]، جریان‌های داخلی و خارجی ناشی از انتشار امواج ایستا بین دو صفحه موازی را بررسی کردند. آن‌ها تئوری ریلی را گسترش داده و مشاهده کردند که با کاهش فاصله بین صفحات، اندازه جریان‌های چرخشی داخلی نسبت به جریان‌های خارجی بیشتر شده و برای صفحات با فاصله بسیار کم، جریان‌های خارجی ناپدید شده و فقط جریان‌های داخلی تشکیل می‌شوند. هیدوک و یئومانس [۵۴] نیز با استفاده از روش لاتیس بولتزمان جریان آکوستیکی ناشی از تعامل موج با دیواره را شبیه‌سازی کرده و نتایج کار خود را با حل تحلیلی ریلی و نایبورگ بررسی و صحت‌سنجی کردند. نتایج این شبیه‌سازی نشان می‌دهند که در صورتی که ابعاد میکروکانال از مقادیر فرض‌شده در تئوری ریلی فاصله بگیرند، اندازه دامنه جریان‌های خارجی (ریلی) و داخلی (شلیچینگ)، به خصوص جریان‌های خارجی، نسبت به مقادیر حل تحلیلی کاهش می‌یابند. پژوهش‌ها و بررسی‌های عددی مرور شده تا اینجا [۸۲-۷۵]، بدون توجه به هندسه واقعی میکروکانال‌های با سطح مقطع مستطیلی مورد استفاده در کاربردهای تجربی، اثرات دیواره‌های جانبی را بر جریان آکوستیکی بررسی نکردند.

اکتس و فاروک [۸۳] جریان آکوستیکی داخل محفظه مستطیلی را به صورت دوبعدی به روش حجم محدود شبیه‌سازی کرده و اثر تغییر ابعاد هندسی محفظه و سیال داخل آن را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که حرکت جریان آکوستیکی تشکیل شده داخل محفظه شدیداً تابع دامنه فشار موج اعمالی بوده و با افزایش اندازه فشار، الگوی این جریان‌ها نیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد. مولر و همکاران [۸۴] یک مدل عددی المان محدود برای حل معادلات جریان آکوستیکی به صورت مستقیم ارائه کرده و حرکت ذرات تحت اثر نیروهای تابشی و نیروهای درگ ناشی از این جریان‌ها را شبیه‌سازی کردند. پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که می‌توان با تغییر نسبت ابعادی میکروکانال و یا تغییر ویسکوزیته سیال میزبان، بسته به قطر ذرات، اثرات جریان‌های آکوستیکی را برای دست‌کاری ذرات کاهش و یا افزایش داد. مولر و همکاران [۸۵] همچنین یک حل تحلیلی برای جریان آکوستیکی با در نظر گرفتن اثرات دیواره‌های عمودی جانبی



شکل ۷: شمایی از جریان‌های ریلی و شلیچینگ.

Fig. 7: Schematic of Rayleigh and Schlichting streamings



شکل ۸: شمایی از جریان‌های ایجاد شده توسط میرایی توده سیال (جریان اکارت)

Fig. 8: Schematic of the bulk dissipation driven streaming

وسترولت [۷۸] یک معادله کلی برای چرخش سیال و روشی برای محاسبه جریان آکوستیکی با استفاده از معادله موج در فرم مرتبه اول ارائه نمود. در ادامه، نایبورگ [۷۹] حل ریلی را تعمیم داد و جریان آکوستیکی را برای موج پیشرو گذرنده از میان دو صفحه در مدل استوانه‌ای با طول بی‌نهایت حل کرد. او همچنین یک حل تقریبی برای محاسبه جریان ایجاد شده در نزدیکی مرز سیال با جامد ارائه کرد [۸۰]. او نشان داد که سرعت میانگین زمانی یا سرعت جریان آکوستیکی داخل لایه مرزی آکوستیکی می‌تواند توسط سرعت غیرچرخشی مرتبه اول خطی یعنی سرعت ناشی از حل معادلات مرتبه اول آکوستیکی تقریب زده شده و سپس با استفاده از این سرعت به عنوان شرایط مرزی، سرعت جریان آکوستیکی خارجی خارج از لایه مرزی آکوستیکی را محاسبه کرد. در این پژوهش‌ها، یک فرض ناسازگار وجود داشت و آن این‌که فرض تراکم‌پذیری که لازمه انتشار موج در سیال بوده و در معادلات مرتبه اول محاسبه میدان‌های مرتبه اول ناشی از انتشار موج در سیال از آن استفاده می‌شود، در معادلات مرتبه دوم آکوستیکی برای تحلیل جریان آکوستیکی نادیده گرفته شده و سیال تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته

می‌دهد شامل نیروهای تابشی اولیه یعنی نیروهای ناشی از اثر میدان موج وارده بر ذرات و نیروهای ثانویه یعنی نیروهای ناشی از حضور و تعامل ذرات در میدان موج منتشر شده است. نیروهای اولیه بسته به خصوصیات ذرات، سبب حرکت آن‌ها به سمت نقاط گرهی و یا پادگرهی فشاری می‌شوند. نیروهای ثانویه از تعامل ذرات در میدان موج ایجاد شده و بسته به جهت گیری و زاویه ذرات با راستای انتشار موج، می‌توانند موجب جذب و یا دفع ذرات نسبت به یکدیگر شوند. وجود ویسکوزیته و یا گرادیان‌های حرارتی می‌تواند مقدار و حتی جهت این نیروها را تحت تأثیر قرار دهد. بخش دوم مربوط به اثر غیرمستقیم امواج آکوستیکی در سیال است. انتشار امواج سبب ایجاد جریان‌های ثانویه‌ای در سیال می‌شود که توسط درگ حرکت ذرات را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در این حالت بسته به اندازه ذرات و سرعت این جریان‌ها، میزان نیروی وارده بر ذرات متغیر است.

مقاله مروری حاضر می‌تواند راهنمای مناسبی برای مطالعات آتی در زمینه مدل‌سازی حرکت ذره تحت اثر نیروی تابشی آکوستیکی و تحلیل پژوهش‌های تجربی باشد. به منظور بررسی و مطالعه اثرات ناشی از امواج آکوستیک منتشرشده در سیستم‌های میکروفلوئیدیک بایستی اندازه ذره نسبت به طول موج اعمالی، جهت برآورد میزان تقریب دقت روابط و مقدار انحراف از محدوده ریلی، در نظر گرفته شود. همچنین، مشخصات سیال مورد بررسی از جمله ویسکوزیته، سرعت انتشار صوت و پارامترهای حرارتی آن می‌بایست استخراج شده تا اولاً خطای تقریب مدل سیال مشخص شود و ثانیاً با مقایسه اندازه‌های لایه‌مرزی با ابعاد ذرات، تحلیل مناسبی برای مسئله اتخاذ گردد. به علاوه، ابعاد میکروکانال جهت برآورد محدوده متأثر از جریانات آکوستیکی و بررسی ایجاد جریان‌های توده‌ای و اثردهی آن‌ها در محاسبات حائز اهمیت است. این ابعاد، ضمن مشخص کردن محدوده مجاز برای ساماندهی ذرات، لزوم افزودن نیروهای اندرکنشی در محاسبات را نیز تعیین می‌کنند. لذا با توجه به اندازه و مشخصات ذرات و خصوصیات سیال و ابعاد میکروکانال، می‌توان مدل مناسب را انتخاب کرده و نیروهای وارد بر ذرات را با تقریب خوبی برآورد کرد. همچنین این مقاله می‌تواند زمینه‌ای برای آشنایی محققان با عوامل مؤثر بر حرکت ذرات در میدان آکوستیکی فراهم کرده و آن‌ها را در پیش‌برد مطالعات آینده مرتبط با این موضوع از جمله بررسی اثرات حرارتی در نیروهای اندرکنشی، بررسی اثرات همزمان جریان‌های

میکروکانال ارائه کردند که برخلاف پژوهش‌های قبلی، فیزیک جریان آکوستیکی در میکروکانال‌های واقعی را به صورت سه‌بعدی پوشش می‌داد. در مدل آن‌ها ارتفاع میکروکانال و طول موج بسیار بزرگتر از ضخامت لایه مرزی آکوستیکی فرض شده است که بنابراین نتایج مدل ریلی را تکمیل می‌کرد. در ادامه، مولر و همکاران [۸۶] اثرات ترموویسکوز را در جریان آکوستیکی به صورت عددی بررسی کردند. آن‌ها مدل عددی اولیه خود را برای بررسی اثرات انتقال حرارت سیال گسترش دادند و علاوه بر اعمال این اثرات در معادلات جریان مرتبه دوم، وابستگی میدان‌های مرتبه اول را از طریق ویسکوزیته متغیر با دما در نظر گرفتند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که دامنه جریان آکوستیکی شدیداً تابع ارتفاع میکروکانال در راستای عمود بر راستای انتشار موج در میکروکانال است. همچنین، بررسی اثرات حرارتی در جریان آکوستیکی نشان می‌دهد که اثرات حرارتی تأثیر ناچیزی در شرایط کاری و یا کاربردهای بیولوژیکی دارند. به تازگی، دوینیکوف و همکاران [۸۷] جریان آکوستیکی ایجاد شده ناشی از اثر همزمان اعمال دو میدان موج عمود بر یکدیگر در میکروکانال را مورد بررسی قرار داده و حل تحلیلی کاملی برای آن ارائه دادند. آن‌ها فرض کردند که دو موج به صورت هم فرکانس ولی با فازهای متفاوت و همچنین دو دامنه موج مختلف باشند. نتایج تحلیل آن‌ها نشان می‌دهد که این اختلاف فاز سبب ایجاد گردابه‌هایی در صفحه انتشار دو موج می‌شود که می‌تواند ذرات را به چرخش درآورده و سبب حرکت آن‌ها در راستای عمود بر صفحه دو موج شود. مطالعات اخیر کیو و همکاران [۸۸-۸۹] نشان می‌دهد که ناهمگن بودن خصوصیات سیال از جمله چگالی و تراکم‌پذیری آن، سبب ایجاد یک نیروی بدنی آکوستیکی اضافی می‌شود که در برابر جریان آکوستیکی ناشی از مرز در توده سیال ممانعت ایجاد کرده و آن را تضعیف می‌کند. این چگالی نیرو در واقع برای پایدار کردن و یکنواخت کردن ناهمگنی ایجاد شده در سیال ایجاد می‌شود.

## ۵- جمع‌بندی

به‌طور کلی سازوکارهای مؤثر بر حرکت ذرات معلق در سیال که تحت تأثیر انتشار امواج آکوستیکی قرار گرفته اند را می‌توان به دو بخش کلی تقسیم نمود. بخش اول که ناشی از تأثیر مستقیم موج بر ذرات است و به‌صورت عمده حرکت ذرات را تحت تأثیر قرار

آکوستیکی خارجی و جریان آکوستیکی اطراف ذرات و تحلیل تغییر شکل ذرات بر نیروهای اندرکنشی یاری کند.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

$A$	دامنه موج وارده، $m^2/s$
$a$	شعاع ذره، $m$
$F$	نیروی تابشی، $N$
$f$	ضریب پراش، $l$
$h$	فاصله ذره تا پادگره، $m$
$k$	عدد موج، $l$
$L$	فاصله تعادلی بین دو ذره، $m$
$p$	میدان فشار، $Pa$
$v$	میدان سرعت، $m/s$
$w$	سرعت زاویه نسبی، $l$

#### علائم یونانی

$\rho$	چگالی، $kg/m^3$
$\varphi$	ضریب تضاد آکوستیکی، $l$
$K$	تراکم‌پذیری، $Pa^{-1}$
$\delta$	ضخامت لایه مرزی، $m$
$\omega$	سرعت زاویه‌ای، $rad/s$
$\nabla$	اپراتور گرادیان، $l/s$

#### زیرنویس

$0$	سیال
$l$	ذره

#### بالانویس

$\sim$  نسبت متغیر

### مراجع

- [3] N. Pamme, Magnetism and microfluidics, *Lab on a Chip*, 6(1) (2006) 24-38.
- [4] T. Simonova, V. Shilov, O. Shramko, Low-frequency dielectrophoresis and the polarization interaction of uncharged spherical particles with an induced Debye atmosphere of arbitrary thickness, *Colloid Journal*, 63(1) (2001) 108-115.
- [5] D.N. Ankrett, D. Carugo, J. Lei, P. Glynne-Jones, P.A. Townsend, X. Zhang, M. Hill, The effect of ultrasound-related stimuli on cell viability in microfluidic channels, *Journal of nanobiotechnology*, 11(1) (2013) 20.
- [6] A. Doinikov, Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 447(1931) (1994) 447-466.
- [7] A.A. Doinikov, Acoustic radiation pressure on a compressible sphere in a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 267 (1994) 1-22.
- [8] L.V. King, On the acoustic radiation pressure on spheres, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 147(861) (1934) 212-240.
- [9] S. Danilov, M. Mironov, Mean force on a small sphere in a sound field in a viscous fluid, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(1) (2000) 143-153.
- [10] R. Barnkob, P. Augustsson, T. Laurell, H. Bruus, Acoustic radiation-and streaming-induced microparticle velocities determined by microparticle image velocimetry in an ultrasound symmetry plane, *Physical Review E*, 86(5) (2012) 056307.
- [11] X. Zheng, R.E. Apfel, Acoustic interaction forces between two fluid spheres in an acoustic field, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4) (1995) 2218-2226.
- [12] A.A. Doinikov, Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. I. General formula, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2) (1997) 713-721.

- [1] M.Z. Bazant, T.M. Squires, Induced-charge electrokinetic phenomena: theory and microfluidic applications, *Physical Review Letters*, 92(6) (2004) 066101.
- [2] M.Z. Bazant, K. Thornton, A. Ajdari, Diffuse-charge dynamics in electrochemical systems, *Physical review E*, 70(2) (2004) 021506.



- Acoustics*, 1 (2003) 39-67.
- [25] T. Embleton, Mean force on a sphere in a spherical sound field. II.(Experimental), *The Journal of the Acoustical Society of America*, 26(1) (1954) 46-50.
- [26] T. Embleton, The radiation force on a spherical obstacle in a cylindrical sound field, *Canadian Journal of Physics*, 34(3) (1956) 276-287.
- [27] W.L. Nyborg, Radiation pressure on a small rigid sphere, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 42(5) (1967) 947-952.
- [28] T. Embleton, Mean force on a sphere in a spherical sound field. I.(Analytical), *The Journal of the Acoustical Society of America*, 26(1) (1954) 45-40.
- [29] T. Hasegawa, Comparison of two solutions for acoustic radiation pressure on a sphere, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(6) (1977) 1445-1448.
- [30] T. Hasegawa, Acoustic radiation force on a sphere in a quasistationary wave field-experiment, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 65(1) (1979) 41-44.
- [31] W. Wei, D. B. Thiessen, P. L. Marston, Acoustic radiation force on a compressible cylinder in a standing wave, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(1) (2004) 201-208.
- [32] J. Wu, G. Du, S. S. Work, D. M. Warshaw, Acoustic radiation pressure on a rigid cylinder: An analytical theory and experiments, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(2) (1990) 581-586.
- [33] G. Gaunard, M. Werby, Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(5) (1991) 2536-2550.
- [34] T. Hasegawa, Y. Hino, A. Annou, H. Noda, M. Kato, N. Inoue, Acoustic radiation pressure acting on spherical and cylindrical shells, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(1) (1993) 154-161.
- [35] F. Mitri, Acoustic radiation force acting on elastic and viscoelastic spherical shells placed in a plane standing wave field, *Ultrasonics*, 43(8) (2005) 681-691.
- [13] A.A. Doinikov, Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. III. Force on a liquid drop, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2) (1997) 731-740.
- [14] A.A. Doinikov, Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. II. Force on a rigid sphere, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2) (1997) 722-730.
- [15] T. Hasegawa, K. Saka, N. Inoue, K. Matsuzawa, Acoustic radiation force experienced by a solid cylinder in a plane progressive sound field, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(5) (1988) 1770-1775.
- [16] T. Hasegawa, K. Yosioka, Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 46(5B) (1969) 1139-1143.
- [17] K. Yosioka, Y. Kawasima, Acoustic radiation pressure on a compressible sphere, *Acta Acustica united with Acustica*, 5(3) (1955) 167-173.
- [18] H. Bruus, Acoustofluidics 7: The acoustic radiation force on small particles, *Lab on a Chip*, 12(6) (2012) 1014-1021.
- [19] L. Gor'kov, On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid, in: *Sov. Phys. Dokl.*, 1962, pp. 773-775.
- [20] J.T. Karlsen, H. Bruus, Forces acting on a small particle in an acoustical field in a thermoviscous fluid, *Physical Review E*, 92(4) (2015) 043010.
- [21] M. Settnes, H. Bruus, Forces acting on a small particle in an acoustical field in a viscous fluid, *Physical Review E*, 85(1) (2012) 016327.
- [22] G.T. Silva, H. Bruus, Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid, *Physical Review E*, 90(6) (2014) 063007.
- [23] L. Rayleigh, XXXIV. On the pressure of vibrations, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 3(15) (1902) 338-346.
- [24] A.A. Doinikov, Acoustic radiation forces: Classical theory and recent advances, *Recent Res Devel*

- Time-Averaged Forces on a Cylinder in a Sound Field, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(15) (2005) 32-65.
- [48] F. Cai, L. Meng, C. Jiang, Y. Pan, H. Zheng, Computation of the Acoustic Radiation Force Using the Finite-Difference Time-Domain Method, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(4) (2010) 1617-22.
- [49] J. Wang, J. Dual, Theoretical and numerical calculation of the acoustic radiation force acting on a circular rigid cylinder near a flat wall in a standing wave excitation in an ideal fluid, *Ultrasonics*, 52(3) (2012) 325-332.
- [50] P. Glynne-Jones, P. P. Mishra, R. J. Boltryk, M. Hill, Efficient Finite Element Modeling of Radiation Forces on Elastic Particles of Arbitrary Size and Geometry, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(4) (2013) 1885-1893.
- [51] A. Garbin, I. Leibacher, P. Hahn, H. Le Ferrand, A. Studart, J. DualJDM, Acoustophoresis of disk-shaped microparticles: A numerical and experimental study of acoustic radiation forces and torques, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(3) (1978) 391-418.
- [52] J. Lighthill, Acoustic streaming, *Journal of sound and vibration*, 61(3) (1978) 391-418.
- [53] P. J. Westervelt, The theory of steady forces caused by sound waves, *Journal of sound and vibration*, 61(3) (1978) 391-418.
- [54] D. Haydock, J. M. Yeomans, Lattice Boltzmann simulations of acoustic streaming, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(25) (2001) 5201-5213.
- [55] S. Annamalai, S. Balachandar, M. K. Parmar, Mean force on a finite-sized spherical particle due to an acoustic field in a viscous compressible medium, *Physical Review E*, 89(5) (2014) 053008.
- [56] W. Ran, J. R. Saylor, The directional sensitivity of the acoustic radiation force to particle diameter, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(6) (2015) 3511-3519.
- [36] F. Mitri, Acoustic radiation force acting on absorbing spherical shells, *Wave Motion*, 43, (1) (2005) 12-19.
- [37] F. Mitri, Calculation of the acoustic radiation force on coated spherical shells in progressive and standing plane waves, *Ultrasonics*, 44(3) (2006) 244-258.
- [38] P. L. Marston, D. B. Thiessen, Manipulation of fluid objects with acoustic radiation pressure, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1027(1) (2004) 414-434.
- [39] M. J. Marr-Lyon, D. B. Thiessen, P. L. Marston, Passive stabilization of capillary bridges in air with acoustic radiation pressure, *Physical review letters*, 86(11) (2001) 2293.
- [40] S. M. Hasheminejad, R. Sanaei, Acoustic radiation force and torque on a solid elliptic cylinder, *Journal of Computational Acoustics*, 15(03) (2007) 377-399.
- [41] K. M. Lim, S. Sepehrirahnama, Multipole expansion method for calculation of acoustic radiation force on non-spherical objects, *Acoustofluidics conference*, 2013.
- [42] P. L. Marston, W. Wei, D. B. Thiessen, Acoustic radiation force on elliptical cylinders and spheroidal objects in low frequency standing waves, *AIP Conference Proceedings*, 838(1) (2006) 495-499.
- [43] F. Mitri, Acoustic radiation force on a rigid elliptical cylinder in plane (quasi) standing waves, *Journal of Applied Physics*, 118(21) (2015) 214903.
- [44] F. B. Wijaya, K. M. Lim, Numerical calculation of acoustic radiation force and torque acting on rigid non-spherical particles, *Acta Acustica united with Acustica*, 101(3) (2015) 531-542.
- [45] M. Hill, R. J. Townsend, N. R. Harris, Modelling for the robust design of layered resonators for ultrasonic particle manipulation, *Ultrasonics*, 48(6-7) (2008) 521-528.
- [46] K. A. Fisher, R. Miles, Modeling the acoustic radiation force in microfluidic chambers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) (2008) 1862-1865.
- [47] D. Haydock, Lattice Boltzmann Simulations of the

- particle in a sound field, *Ultrasonics*, 34(8) (1996) 807-815.
- [69] X. Zheng, R. E. Apfel, Acoustic interaction forces between two fluid spheres in an acoustic field, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 97(4) (1995) 2218-2226.
- [70] A. A. Doinikov, Acoustic radiation interparticle forces in a compressible fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 444 (2001) 1-21.
- [71] S. Sepehrirahnama, K. M. Lim, F. S. Chao, Numerical study of interparticle radiation force acting on rigid spheres in a standing wave, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(5), (2015) 2614-2622.
- [72] J. H. Lopes, M. Azarpeyvand, G. T. Silva, Acoustic Interaction Forces and Torques Acting on Suspended Spheres in an Ideal Fluid, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 63(1) (2016) 186-197.
- [73] S. Sepehrirahnama, F. S. Chau, K. M. Lim, Effects of viscosity and acoustic streaming on the interparticle radiation force between rigid spheres in a standing wave, *Physical Review E*, 93(2) (2016) 023307.
- [74] F. B. Wijaya, S. Sepehrirahnama, K. M. Lim, Interparticle force and torque on rigid spheroidal particles in acoustophoresis, *Wave Motion*, 81 (2018) 28-45.
- [75] L. Rayleigh, On the Circulation of Air Observed in Kundt's Tubes, and on some Allied Acoustical Problems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 175(3) (1884) 1-21.
- [76] H. Schlichting, Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen (Calculation of Plane Periodic Boundary Layer Streaming), *Physikalische Zeitschrift*, 33(8) (1932) 327-335.
- [77] S. Boluriaan, P. J. Morris, Acoustic streaming: from Rayleigh to today, *International Journal of aeroacoustics*, 2(3) (2003) 255-292.
- [78] P. J. Westervelt, The Theory of Steady Rotational Flow Generated by a Sound Field, *The Journal of Acoustical Society of America*, 25(1) (1953) 60-67.
- (2015) 3288-3298.
- [57] S. Sepehrirahnama, F. S. Chau, K. M. Lim, Numerical calculation of acoustic radiation forces acting on a sphere in a viscous fluid, *Physical Review E*, 92(6) (2015) 063309.
- [58] J. Lighthill, The Absorption of Sound in Suspensions and Emulsions. I. Water Fog in Air, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 61(3) (1953) 553-565.
- [59] J. R. Allegra, S. A. Hawley, Attenuation of Sound in Suspensions and Emulsions: Theory and Experiments, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 51(5) (1971) 1545-1564.
- [60] C. P. Lee, T. G. Wang, Acoustic radiation force on a heated sphere including effects of heat transfer and acoustic streaming, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 83(4) (1988) 1324-1331.
- [61] C. P. Lee, T. G. Wang, The Acoustic Radiation Force on a Heated (or Cooled) Rigid Sphere-Theory, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 75(1) (1984) 88-96.
- [62] S. M. Woodside, B. D. Bowen, J. M. Piret, Measurement of ultrasonic forces for particle-liquid separations, *AIChE journal*, 43(7) (1997) 1727-1736.
- [63] V. Bjerknes, Fields of force, General Books, 1906.
- [64] L. A. Crume, Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 57(6) (1975) 1727-1736.
- [65] T. F. W. Embelton, Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(11) (1962) 1714-1720.
- [66] B. E. Nemtsov, Effects of the radiation interaction of bubbles in a fluid, *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.*, 9 (1983) 858-861.
- [67] A. A. Doinikov, S. T. Zavtrak, Radiation forces between two bubbles in a compressible liquid, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 102(3) (1997) 1424-1431.
- [68] A. A. Doinikov, S. T. Zavtrak, Bubble and a solid

- 4617-4627.
- [85] P. B. Muller, M. Rossi, A. G. Marin, R. Barnkob, P. Augustsson, T. Laurell, C. J. Kähler, H. Bruus, Ultrasound-induced acoustophoretic motion of microparticles in three dimensions, *Physical Review E*, 88(2) (2013) 023006.
- [86] P. B. Muller, H. Bruus, Numerical study of thermoviscous effects in ultrasound-induced acoustic streaming in microchannels, *Physical Review E*, 90(4) (2014) 043016.
- [87] A. A. Doinikov, P. Thibault, P. Marmottant, Acoustic streaming induced by two orthogonal ultrasound standing waves in a microfluidic channel, *Ultrasonics*, 87 (2018) 7-19.
- [88] W. Qiu, J. T. Karlsen, H. Bruus, P. Augustsson, Characterization of Acoustic Streaming in Gradients of Density and Compressibility, *arXiv preprint* (2018) 1810.07142.
- [89] J. T. Karlsen, W. Qiu, P. Augustsson, H. Bruus, Acoustic streaming and its suppression in inhomogeneous fluids, *Physical review letters*, 120(5) (2018) 054501.
- [79] W. L. M. Nyborg, Acoustic streaming, *Physical Acoustics*, 2 (1965) 265-331.
- [80] W. L. Nyborg, Acoustic streaming near a boundary, *The Journal of Acoustical Society of America*, 30(4) (1958) 329-339.
- [81] Q. Qi, The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave, *The Journal of Acoustical Society of America*, 94 (2) (1993) 1090-1098.
- [82] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, E. A. Zabolotskaya, Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width, *The Journal of Acoustical Society of America*, 113(1) (2003) 153-160.
- [83] M. K. Aktas, B. Farouk, Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure, *The Journal of Acoustical Society of America*, 116(5) (2004) 2822-2831.
- [84] P. B. Muller, R. Barnkob, M. J. H. Jensen, H. Bruus, A numerical study of microparticle acoustophoresis driven by acoustic radiation forces and streaming-induced drag forces, *Lab on a Chip*, 12(22) (2012)