Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(8) (2020) 541-544
DOI: 10.22060/mej.2019.15499.6158

Nonlinear Vibration and Stability Analysis of Thermally Postbuckled Double-Layered Graphene Sheet

G.A. Varzandian, S. Ziaee*, M. Farid, A. Niknejad

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran

ABSTRACT: In the present research, the vibration behavior is presented for a thermally postbuckled double layered graphene sheet. For this purpose, the graphene sheet is modeled as a non-classical orthotropic plate. The formulations are based on the Kirchhoff's plate theory, and the von Karman-type nonlinearity is considered in the strain-displacement relations. Eringen's nonlocal elasticity theory is employed to incorporate the size effects. The thermal effects, van der Waals forces between layers and chirality are also included and the material properties are assumed to be temperature-dependent. A semi analytical solution is obtained using multiple time scales method. The effects of variation of the small scale parameter to the natural frequencies, deflections and response curve of double layered graphene sheet are analyzed and the numerical results are obtained from the nonlocal plate model. Numerical results are compared with those of similar researches. Effects of various parameters on the postbuckled vibration of graphene sheet in thermal environments such as the scale parameter, length, and thermal load are presented. The stability of vibration modes around a buckled configuration is investigated. The results show that the scale parameter and thermal changes have very important roles on the nonlinear vibrational behavior of the nano scale buckled structures.

Review History:

Received: 2019/01/01
Revised: 2019/05/24
Accepted: 2019/06/16
Available Online: 2019/06/24

Keywords:

Double layered graphene sheet
Thermal postbuckling
Nonlocal plate model
Multiple time scales methods

1- Introduction

Graphene structures with different shapes and configurations have superior properties and they are introduced as one of the fundamental carbon forms and graphene is the base of many other configurations such as graphite, carbon nanotubes, and fullerenes; therefore, studying single and double layer graphene sheets is very important in nanoscale studies [1].

In nanoscale plate problems, solutions due to classical theories such as Kirchhoff's plate theory and shear deformation plate theory usually have remarkable errors because in these theories, the relation between stress and strain is point wise and the size effects are not considered [2]. In nonlocal elasticity theory, the stress at a reference point is assumed to be a function of the strain field at every point in the body and the effects of scale are considered by a new quantity called scale parameter [3]. Based on nonlocal elasticity theory, size effects are taken into account by the integration of a scale parameter into classical continuum models [2, 3].

The thermal effect has one of the most important roles on the vibration behaviors of structures in macro and also nanoscales such as nanotubes and nanoplates. If the temperature of the plate is raised or lowered it expands or contracts, respectively. Within a certain temperature change, such expansion or contraction, for most structural materials, is directly proportional to the change in temperature. When a free plate made of homogeneous isotropic material is heated uniformly, there appear normal strains but no thermal stresses [4]. But for the case of graphene, considering thermal effects is very important. Researchers showed that the thermal effects on the mechanical behaviors of the carbon nanotubes are obvious [5].

In the present research, a nonlocal plate model to study the nonlinear vibration behavior of postbuckled Double-Layered Graphene Sheet (DLGS) is proposed. The governing equations are based on classical thin plate theory with a von Karman-type of nonlinearity and containing small scale effects. The thermal effects are also included and the material properties are assumed to be orthotropic and temperature-dependent. The effects of various parameters to the natural frequencies, deflections and also chirality of postbuckled DLGS are analyzed, and the numerical results are obtained from the nonlocal plate model. The numerical illustrations show nonlinear vibration response of postbuckled DLGS under fully clamped and different sets of thermal and environmental conditions. Also the stability of vibration modes around a buckled configuration is investigated.

2- Methodology

In this research, the vibration response of postbuckled DLGS has been investigated on the basis of a nonlocal plate model for fully clamped boundary condition. The major difference between present model and previous ones in literature is that the present solution includes the vibration and deflection

*Corresponding author's email: ziaee@yu.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://mej.aut.ac.ir/article_3479.html.

caused by thermal loading. For solving the postbuckling problem, Galerkin method is applied to the compatibility and equilibrium equations with the aid of airy stress function. Then, the system is solved by Newton-Raphson method. The complete derivation of nonlinear vibration of postbuckled DLGS is presented and the solution is introduced by solving a system of ordinary differential equations of order 2 by means of multiple time scale method. The efficiency and accuracy of the method are demonstrated by comparing the developed result with those available in literature. The effects of various parameters on the nonlinear vibrations of postbuckled DLGS are presented. Also the static stability is investigated using a method suggested by Nayfeh and Emam [6].

3- Results and Discussion

Effects of various physical parameters on the nonlinear vibration of postbuckled DLGS such as scale parameter, chirality, van der Waals (vdW) and temperature rise are investigated. Some of the numerical results are represented in the following Figures:

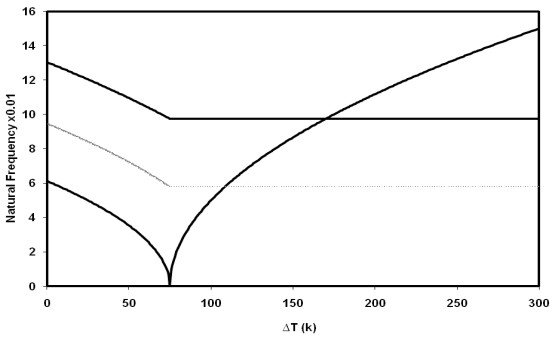


Fig. 1. Variation of the natural frequencies of vibration around the 1st buckled configuration of all sides clamped zigzag DLGS

In Fig. 1, the variation of the vibration frequencies around the first buckling mode with the temperature is presented. Solid lines show odd vibration modes and dotted lines indicate even ones.

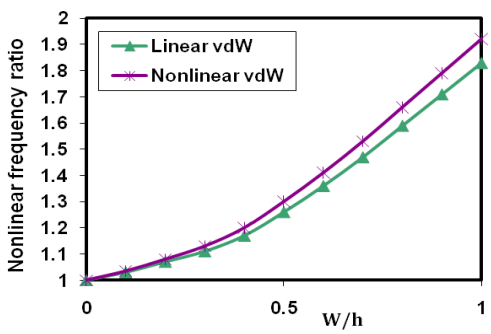


Fig. 2. The response curve for zigzag DLGS with linear and nonlinear vdW interaction

Effect of nonlinear vdW forces coefficient is shown in Fig. 2. It can be seen that the effect of nonlinear coefficient e_{ij} is higher as the nonlinear frequency ratio is increased.

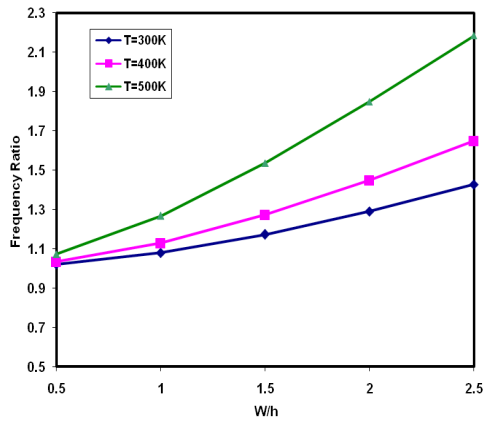


Fig. 3. Effect of temperature change on the frequency–amplitude curves of zigzag DLGS

The effect of temperature change on the response curves of DLGS under different thermal conditions is shown in Fig. 3. Results show that the increasing temperature reduces the natural frequencies by reducing the stiffness of nanoplate but increases the nonlinear to linear frequency ratios.

4- Conclusions

In this research, the vibration response of postbuckled DLGS has been investigated on the basis of a nonlocal plate model for fully clamped boundary condition. The main difference between present model and previous ones in literature is that the present solution includes the deflection and vibration caused by thermal effects. The solution of the problem is posed into two phases, one is the thermal postbuckling (static problem) and another one is the vibrations of large amplitude around the static response. In thermal postbuckling analysis, critical buckling temperature is calculated and stability of postbuckled modes is investigated by using linear vibration analysis. The complete derivation of nonlinear vibration of DLGS is presented and the solution is introduced by solving a system of ordinary differential equations of order 2 by means of multiple time scale method. The effect of chirality on the buckling temperature and vibration behavior of DLGS under similar thermal environmental and dimensional condition by considering two types of zigzag and armchair is analyzed. The numerical results showed that effect of chirality on vibration behavior is remarkable. Also results show that the armchair sheets will have lower natural frequencies than those of zigzag sheets when the two sheets have the same dimensional properties and thermal environmental condition. The stability analysis reveals that the first buckling mode is a stable mode; whereas, buckled configurations beyond the first buckling mode are found to be unstable. Effect of scale parameter on the different quantities such as natural frequency, critical temperature, and response curve is investigated. It is seen that as a result of employing the nonlocal theory, the beginning of instability is transferred to a lower temperature; consequently, taking into account the length scale parameter decreases the

flexural stiffness of the system. Also, increasing nonlocal parameter increases the nondimensional deflection of the plate. By increasing temperature, the natural frequencies have two opposing behaviors; decreasing before buckling state and increasing after buckling state. The results show that scale parameter and temperature change have a significant role in nonlinear vibration of postbuckled nanostructures.

5- References

[1] A.R. Setoodeh, P. Malekzadeh, A.R. Vosoughi, Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal mindlin plate theory, Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J Mech. Eng. Sci., 226(7) (2011) 1896-1906.

[2] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, J. Appl. Phys., 54 (1983) 4703–4710.

[3] A.C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, New York, 2002.

[4] E. Ventsel, T. Krauthammer, Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications, Marcell Dekker Inc, 2001.

[5] H.-S. Shen, X.-Q. He, D.-Q. Yang, Vibration of thermally postbuckled carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations, International Journal of Non-Linear Mechanics, 91 (2017) 69-75.

[6] A.H. Nayfeh, S.A. Emam, Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams, Nonlinear Dynamics, 54 (2008) 395–408.

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۸، سال ۱۳۹۹، صفحات ۲۱۷۷ تا ۲۱۹۴
DOI: 10.22060/mej.2019.15499.6158

بررسی ارتعاشات غیرخطی بعد از کمانش ناشی از بار حرارتی و تحلیل پایداری نانو ورق گرافن دو لایه

غلامعلی ورزندیان، سیما ضیایی*، مهرداد فرید، عباس نیک نژاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

خلاصه: در این تحقیق رفتار ارتعاش بعد از کمانش یک نانو ورق گرافن دولایه تحت بار حرارتی بررسی شده است. بدین منظور، نانو ورق گرافن به صورت یک ورق اورتوتروپیک غیرکلاسیک مدل شده است که در آن اثر مقیاس کوچک لحاظ شده است. فرمول بندی مسئله بر اساس تئوری ورق کیرشهف انجام شده که فرضیات غیرخطی فون کارمن در روابط کرنش – جابجایی در نظر گرفته شده است و از تئوری الاستیسیته غیر محلی ایرینگن برای اعمال اثر اندازه بهره گرفته شده است. اثرات حرارتی، نیروهای واندروالس بین لایه‌ای و کایرالیتی نیز در نظر گرفته شده و خواص مواد وابسته به دما فرض شده است. به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه یک پاسخ نیمه تحلیلی به دست آمده است. اثر تغییر مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طبیعی، جابجایی و منحنی پاسخ بررسی و نتایج عددی با استفاده از مدل نانو ورق غیرمحلی استخراج شده است. نتایج عددی با نتایج تحقیقات مشابه مقایسه شده است. تأثیر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات بعد از کمانش نانو ورق گرافن دولایه در محیط حرارتی از جمله پارامتر مقیاس، ابعاد، و بار حرارتی ارائه شده است. پایداری مودهای ارتعاشی حول یک وضعیت کمانشی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس و تغییر دما نقش مهمی در رفتار ارتعاش غیرخطی نانوساختارهای کمانش کرده دارند.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷-۱۰-۱۱
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۳-۰۳
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۳-۲۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۴-۰۳

کلمات کلیدی:
نانو ورق گرافن دولایه
بعد از کمانش حرارتی
مدل ورق غیرمحلی
روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

۱- مقدمه

در عصر امروز تحلیل دقیق رفتار مکانیکی به منظور طراحی و افزایش قابلیت اعتماد نانوابزارها امری ضروری است [۱و۳].ارتعاشات نانوسازه‌ها مانند نانو ورق‌ها از اهمیتی فوق‌العاده برخوردار است چرا که خواص دینامیکی سیستم با تعیین روابط دامنه – فرکانس و مودهای ارتعاشی حاصل می‌گردد. در این راستا تئوری‌ها و روش‌های متعددی جهت توضیح پارامتر مقیاس بر رفتار ارتعاشی نانو ورق‌ها توسعه داده شده است [۴و۶] .از این میان تئوری غیرمحلی ارینگن [۷]از بقیه مشهورتر و کاربردی‌تر است. وی در سال ۱۹۸۳ با ارائه یک معادله دیفرانسیل جزئی انتگرالی تئوری ورق غیرمحلی را معرفی کرد که مبنای بسیاری از پژوهش‌های چند دهه اخیر در حوزه نانو قرار گرفته است. در این تئوری رفتار ارتعاشی نانو ورق با استفاده از مدل‌های محیط پیوسته غیرمحلی بررسی و توسعه داده شده است [۷و۸] .وی اثر مقیاس کوچک را با معرفی یک پارامتر جدید که آن را پارامتر مقیاس نامگذاری کرد، لحاظ نمود. پرادان و فادیکار [۹]تئوری الاستیسیته غیرمحلی را برپایه تئوری غیرمحلی ارینگن برای ارتعاشات نانو ورق ارائه کرده‌اند. ورزندیان و ضیایی [۱۰]ر اساس تئوری غیرمحلی، یک روش تحلیلی جهت حل ارتعاشات آزاد غیرخطی نانو ورق نازک مستطیلی با شرایط مرزی مختلف به کمک توابع بیضوی ژاکوبی پیشنهاد کرده‌اند.

در زمینه ارتعاشات بعد از کمانش ورق‌های مقیاس بزرگ تحقیقات محدودی انجام شده است [۱۱و۱۲] .انصاری و غلامی [۱۳]ارتعاشات آزاد خطی و بعد از کمانش یک نانو ورق مستطیلی را با استفاده از مدل مرتبه سه تغییر شکل برشی و براساس تئوری الاستیسیته سطوح گورتین – مورداک مورد بررسی قرار داده و نشان داده‌اند که اثرات سطحی دارای اهمیت هستند. تحلیل کمانش و بعد از کمانش نانو ورق‌های پیزوالکتریک توسط چن و همکاران [۱۴]انجام شده و تأثیر افزایش حرارت یکنواخت، ولتاژ الکتریکی و پارامتر مقیاس بر رفتار استاتیکی نانو ورق مورد بررسی قرار گرفته است. استخراج معادلات فون کارمن اصلاح شده با در نظر گرفتن کشش سطحی و الاستیسیته سطوح توسط یو و همکاران [۱۵]انجام شده و تأثیر

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ziaee@yu.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

تنش‌های سطحی بر رفتار بعد از کمانش و فرکانس ارتعاشات آزاد نانو ورق بررسی گردیده است. غلامی و همکاران [۱۶]تأثیر عوامل محیطی مغناطیس، رطوبت و حرارت بر رفتار خمش، کمانش و ارتعاش نانو ورق مستطیلی را با در نظر گرفتن تأثیر اینرسی دورانی و تنش‌های برشی برای نانو ورق با تکیه گاه ساده بررسی نموده‌اند. ستوده و همکاران [۱]ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق گرافن ارتوتروپیک را با استفاده از تئوری ورق غیرمحلی میندلین بررسی نموده و با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به دستگاه معادلات مقدار ویژه جبری غیرخطی کاهش داده و برای حالات مختلف شرایط مرزی پاسخ خود را ارائه کرده‌اند. با مراجعه به نتایج مقاله اخیر و مقالات مشابه دیگر بر پایه تئوری غیرمحلی ارینگن ملاحظه می‌گردد که بر خلاف تئوری تنش کوپل اصلاح شده، پارامتر مقیاس در فرمول بندی ارینگن فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد و ظاهراً یک ناهمگونی بین نتایج این دو تئوری دیده می‌شود که جای بررسی دارد. لازم به ذکر است که در مورد تئوری ارینگن، نتایج تحلیل با شبیه سازی‌های دینامیک مولکولی سازگاری و تطابق بهتری را نشان می‌دهد .[۱۸و۱۷] اثر انرژی سطحی بر رفتار غیرخطی بعد از کمانش نانو ورق توسط برادران وانگ [۲]ارائه شده و تأثیر پارامتر مقیاس مورد مطالعه قرار گرفته است. در زمینه ارتعاشات بعد از کمانش برخلاف نانو ورق ۲ بعدی، در مورد مدل یک بعدی نانوتیرها و نانولوله‌ها تحقیقات بیشتری انجام شده است. اخیراً شن و همکاران [۱۹]ارتعاشات بعد از کمانش حرارتی نانولوله‌های کربنی قرار گرفته بر بستر الاستیک را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی تیر مرتبه بالا بررسی نموده‌اند. لستاری و هاناگود [۲۰]با استفاده از توابع بیضوی ژاکوبی برخی حل‌های تحلیلی ارتعاشات تیر کمانش کرده را با شرایط مرزی مختلف ارائه کرده‌اند. بررسی رفتار بعد از کمانش نانوتیر با در نظر گرفتن همزمان دو اثر کشش سطحی و اثرات غیرمحلی توسط مایترا و بوز [۳]صورت گرفته و نتایج نشان می‌دهد که اثرات سطحی فرآیند کمانش را به تأخیر می‌اندازد؛ در حالی که، اثرات غیرمحلی ناپایداری را بیشتر می‌سازد.

نانوتیرها و نانو ورق‌ها عموماً به فرم سازه‌های چند لایه یافت می‌شوند که در آن‌ها دو یا چند لایه تیر/ورق توسط برهم کنش واندروالس به هم متصل شده‌اند. مدلسازی برهم کنش واندروالس یک گام کلیدی در مدلسازی محیط پیوسته نانوتیرها/ورق‌ها می‌باشد و توسط افراد مختلفی بررسی شده است .[۲۱و۲۴]در میان این مدل‌ها مدل بنیادی نوع وینکلر برای نیروهای واندروالس بیش از بقیه مورد استفاده قرار گرفته است. کیتایپورنچای و همکاران [۲۴و۲۵]مدل نیروهای واندروالس را جهت مطالعه رفتار ارتعاشی ورق‌های گرافن توسعه داده‌اند. آن‌ها ورق‌های گرافن را به صورت ورق‌های نازک چندلایه در نظر گرفته‌اند. رفتار بعد از کمانش ورق‌های گرافن چندلایه تحت فشار دو محوره غیر یکنواخت توسط فرج پور و همکاران [۲۶]ارائه گردیده و اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ورق گرافن چندلایه بررسی شده است. براتی [۲۷] تأثیر سه عامل محیطی مغناطیس، رطوبت و حرارت را بر رفتار ارتعاشی نانو ورق‌های دو لایه ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لحاظ کردن اثرات غیرمحلی وگرادیان کرنش مورد بررسی قرار داده است. با بررسی دقیق مطالعات فوق و بسیاری مقالات مشابه دیگر در زمینه سازه‌ها و ساختارهای نانو مشخص می‌شود که در اکثر مطالعات، تأثیر کایرالیتی در لایه‌ها منظور نشده و بنابراین خواص ماده در هر لایه یکسان فرض گردیده است. این در حالی است که خواص مواد نانومقیاس تابع اندازه و اثرات حرارتی می‌باشد [۱۷و۲۸]بنابراین، محاسبات مربوط به خواص ارتعاشی نانو ورق‌های گرافن بدون منظور نمودن اثرات فوق بعضاً غیرصحیح و یا دارای خطا خواهد بود.

در زمینه ارتعاشات غیرخطی نانوصفحات گرافن چندلایه تحقیقات محدودی انجام شده است. جمعه‌زاده و سعیدی [۲۹]با استفاده از روش توازن هارمونیک و با در نظر گرفتن تئوری ارینگن، ارتعاش دامنه بزرگ صفحات گرافن چندلایه را با در نظر گرفتن اثر کایرالیتی بررسی نموده‌اند. تأثیر نیروهای واندروالس بر ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحات گرافن چندلایه بررسی شده است .[۲۵و۳۰]شن و همکاران [۱۸]ارتعاشات عرضی نانوصفحات گرافن دولایه را در محیط حرارتی بررسی و به کمک تکنیک اغتشاش دو مرحله‌ای، پاسخ غیرخطی را ارائه نموده‌اند.

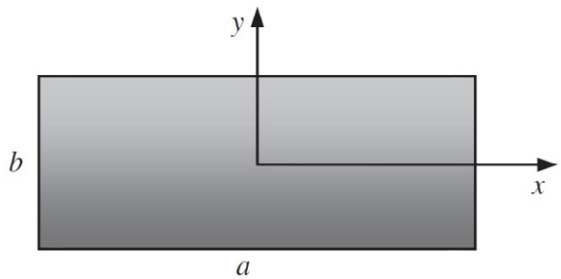
با بررسی موارد کاربردهای نانوصفحات گرافن در صنایع مختلف مشخص می‌گردد که در برخی موارد کاربرد، امکان کمانش تحت بار حرارتی و سپس ارتعاش وجود دارد. از جمله این موارد می‌توان به نمایشگرهای لمسی انعطاف پذیر، نانو رزوناتورها و شناساگرهای بسیار حساس جرم اشاره کرد. از دیگر ریزساختارهایی که در آن‌ها از صفحات گرافن چندلایه استفاده شده و رخداد کمانش حرارتی و ارتعاش در آن‌ها وجود دارد، می‌توان به حسگرهای زیستی نانومکانیکی و انواع نانوحسگرها مانند نانوحسگرهای فشار و نیرو اشاره کرد. با توجه به

مرور تحقیقات انجام شده فوق، با بررسی دقیق مقالات و پژوهش‌های انجام شده مشخص می‌گردد که علیرغم اینکه کارهای زیادی در زمینه تحلیل کمانش[۴۱و۴۲]، بعد از کمانش [۲۶و۴۰]و ارتعاشات ورق‌ها و نانو ورق‌ها [۲۱و۴۲]انجام شده، اما پژوهش‌های محدودی به ارتعاشات غیرخطی نانو ورق کمانش کرده پرداخته‌اند؛ همچنین، تحلیل ارتعاشات بعد از کمانش حرارتی در ورق‌های بزرگ مقیاس مورد توجه پژوهشگران بوده اما در مقیاس کوچک مانند نانوتیر و نانو ورق کمتر صورت گرفته است و حل تحلیلی یا نیمه تحلیلی برای ارتعاشات غیرخطی تاکنون گزارش نشده است و امکان پرداختن به این موضوع با توجه به اهمیت آن در رفتار نانوساختارها وجود دارد. هدف از انجام این پژوهش بررسی ارتعاشات بعد از کمانش نانو ورق گرافن دو لایه تحت بار حرارتی با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن می‌باشد. معادلات حاکم بر اساس تئوری ورق‌های نازک و از نوع غیرخطی فون کارمن محاسبه شده است. اثرات حرارتی بر فرمول بندی مسئله لحاظ شده و خواص مواد بر اساس ماده اورتوتروپیک و تابعی از حرارت در نظر گرفته شده است. همچنین تحلیل پایداری حول فرم کمانش کرده نانو ورق انجام شده و یک حل نیمه تحلیلی جهت ارتعاشات غیرخطی حول مودهای کمانشی به دست آمده است. در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف مانند پارامتر مقیاس، کایرالیتی و ... بر رفتار بعد از کمانش نانو ورق بررسی شده است.

۲- فرمول‌بندی مسئله

به منظور مدل سازی نانو ورق مطابق شکل ۱ ، یک مستطیل با ابعاد $a\times b$ در نظر گرفته شده و مبدأ مختصات در نقطه میانی مستطیل قرار داده شده است.

اگر u، v و w مؤلفه‌های بردار جابجایی نقاط در صفحه میانی ورق به ترتیب در جهت‌های x، y و z در نظر گرفته شوند، بر اساس فرضیات



شکل ۱: هندسه نانو ورق گرافن

Fig. 1. Geometry of Graphene nanoplate

کیرشهف، میدان جابجایی وابسته به زمان برای ورق به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &U(x,y,z,t)=u(x,y,t)\\ &+u_0(x,y)-z\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\\ &V(x,y,z,t)=v(x,y,t)\\ &+v_0(x,y)-z\frac{\partial(w+w_0)}{\partial y}\\ &W(x,y,z,t)=w(x,y,t)\\ &+w_0(x,y)=W(x,y,t)\end{aligned} \tag{۱}$$

که u_0، v_0 و w_0 مؤلفه‌های جابجایی اولیه ناشی از کمانش در صفحه میانی ورق و u، v و w مؤلفه‌های جابجایی یک نقطه مادی در صفحه میانی ورق یعنی موقعیت $(x,y,0)$ ناشی از ارتعاشات ورق می‌باشند. همچنین حروف بزرگ بیانگر جابجایی کلی هر یک از مؤلفه‌ها می‌باشد.

مؤلفه‌های کرنش غیرخطی در کتب مرجع بیان شده است [۳۲]. در تحقیق حاضر این مؤلفه‌ها در صفحه میانی ورق عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx}^0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2;\\ &\varepsilon_{yy}^0=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2;\\ &\gamma_{xy}^0=\frac{\partial(u+u_0)}{\partial y}+\frac{\partial(v+v_0)}{\partial x}+\\ &\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial(w+w_0)}{\partial y}\end{aligned} \tag{۲}$$

یک نانولوله کربنی تک دیواره را می‌توان به صورت یک ورق گرافن تک لایه دو بعدی تصور کرد که در داخل یک لوله غلتانده (نورد) شده است. با توجه به جهت غلتانیده شدن ورق گرافن، نانولوله‌های کربن را می‌توان به دو گروه زیگزاگ و آرمچر تقسیم بندی کرد. در نتیجه تفاوت در ساختار اتمی، برخی خواص مکانیکی و رفتار الاستیک این دو گروه با هم متفاوت است. به عنوان نمونه مطالعات انجام شده بر روی انواع مختلف زیگزاگ و آرمچر نشان می‌دهد که ورق‌های با ساختار صندلی دارای فرکانس تشدید بزرگتری نسبت به ورق‌های با ساختار زیگزاگ و با ابعاد مشابه است که این موضوع بخصوص برای

ورق‌های کوچکتر بیشتر خود را نشان می‌دهد. به منظور وارد نمودن اثرات کایرالیتی بر فرمول‌بندی کلی مسئله، نیروها و گشتاورهای حرارتی ناشی از شرایط دمایی به شکل زیر تعریف می‌شوند :[۱۸]

$$\begin{bmatrix} N_{xx}^T & M_{xx}^T \\ N_{yy}^T & M_{yy}^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} A_{xx}(T) \\ A_{yy}(T) \\ A_{xy}(T) \end{bmatrix} (1, z)\theta dz \tag{۳}$$

و :[۳۱]

$$\begin{bmatrix} A_{xx}(T) \\ A_{yy}(T) \\ A_{xy}(T) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ s^2 & c^2 \\ 2cs & -2cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(T) \\ \alpha_2(T) \end{bmatrix} \tag{۴}$$

که $\bar{E}_{ij}$ ثابت‌های الاستیک تبدیل یافته بوده و با روابط زیر تعریف می‌شوند:]31[

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{12} \\ \bar{E}_{22} \\ \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 2c^2s^2 & s^4 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^4+s^4 & c^2s^2 & -4c^2s^2 \\ s^4 & 2c^2s^2 & c^4 & 4c^2s^2 \\ c^3s & cs^3-c^3s & -cs^3 & -2cs\left(c^2-s^2\right) \\ cs^3 & c^3s-cs^3 & -c^3s & 2cs\left(c^2-s^2\right) \\ c^2s^2 & -2c^2s^2 & c^2s^2 & \left(c^2-s^2\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix} \tag{۵}$$

در این رابطه $c=\cos\theta,\quad s=\sin\theta$ و $\bar{E}_{ij}$ زاویه انحراف نسبت به محور x ورق است. هنگامی‌که $\theta=0^\circ$ ، نوع ورق گرافن آرمچر (یا صندلی) خوانده می‌شود و برای $\theta=90^\circ$ ، نوع ورق زیگزاگ خواهد بود.

استخراج معادلات حرکت ورق‌ها و نانو ورق‌های دو بعدی در مراجع مختلف بررسی شده است [۹و۳۲و۳۳]راجو و همکاران [۳۴] با محاسبه نسبت پریود نوسانات غیرخطی به نوسانات خطی $\frac{T_{NL}}{T_L}$ با و بدون در نظر گرفتن اثرات اینرسی و مقایسه نتایج نشان داده‌اند که اثرات درون صفحه همواره تأثیر غیرخطی را کاهش داده و اینرسی درون صفحه‌ای اثر بسیار ناچیزی بر ارتعاشات دامنه بزرگ ورق نازک خواهد گذاشت؛ بنابراین، با صرفنظر نمودن از گشتاور اینرسی مرتبه یک ورق نازک، در نظر گرفتن مشخصات ورق گرافن و مدل نمودن آن به صورت یک ورق اورتوتروپ، افزودن تأثیر نیروهای واندروالس بین دولایه [۲۵]و ساده سازی برای iامین لایه، معادله حرکت اولیه در جهت zبه فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & D_1\left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^4}\right)+ \\ & D_2\left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial y^4}\right) \\ & +2D_3\left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^2\partial y^2}\right)= \\ & \left(1-\mu^2\nabla^2\right)\times \\ & \left(\begin{array}{l} I_2\left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^2\partial t^2}\right)+ \\ \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\left(\begin{array}{l}\left(w_i+w_0^i\right)- \\ \left(w_j+w_0^j\right)\end{array}\right)+ \\ \sum_{j=1}^{N} e_{ij}\left(\begin{array}{l}\left(w_i+w_0^i\right)- \\ \left(w_j+w_0^j\right)\end{array}\right)^3+ \\ N_{xx}^i\frac{\partial^2\left(w_i+w_0^i\right)}{\partial x^2}+ \\ N_{yy}^i\frac{\partial^2\left(w_i+w_0^i\right)}{\partial y^2} \\ +2N_{xy}^i\frac{\partial^2\left(w_i+w_0^i\right)}{\partial x\partial y} \end{array}\right) \end{aligned} \tag{۶}$$

که D_iها سفتی‌های خمشی، μ پارامتر مقیاس غیرمحلی، I_2 ممان اینرسی جرم، N_{ij}ها نیروهای داخلی و c_{ij} و e_{ij} به ترتیب ضریب قسمت خطی و غیرخطی نیروی واندروالس هستند.

۲-۱- مسئله بعد از کمانش

با توجه به اینکه کمانش ورق یک مسئله استاتیکی است، جهت محاسبه جابجایی اولیه ناشی از بعد از کمانش، با قرار دادن مشتقات کمیت‌ها نسبت به زمان برابر با صفر در معادلات حرکت، حل مسئله دنبال می‌شود؛ در این حالت، با تعریف تابع تنش ایری Φ به صورت:

$$N_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad N_{y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad N_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{۷}$$

و لحاظ کردن معادله سازگاری [۳۲]، معادلات حاکم بر بعد از کمانش نانو ورق گرافن چندلایه برای iامین لایه به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\left(1-\mu^2\nabla^2\right)\left(\frac{1}{E_1}\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial y^4}+\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial x^4}+\left(\frac{2\nu_{12}}{E_1}+\frac{1}{G_{12}}\right)\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial x^2\partial y^2}\right)=\\&\left(\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2},\\&D_1\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^4}+D_2\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial y^4}+\\&2D_3\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^2\partial y^2}\\&+\frac{\partial^2 M_{xx}^T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}^T}{\partial y^2}+\\&\left(\mu^2\nabla^2-1\right)\times\\&\left[\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\left(w_0^i-w_0^j\right)+\sum_{j=1}^{N}e_{ij}\left(w_0^i-w_0^j\right)^3+\\\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2}-\\2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x\partial y}\end{array}\right]=0\end{aligned} \tag{۸}$$

در رابطه بالا اولین رابطه، معادله سازگاری و رابطه دوم معادله تعادل در جهت z است. با توجه به معادلات بالا ملاحظه می‌شود که برای یک نانو ورق گرافن N لایه، دستگاهی شامل $۲N$ معادله دیفرانسیل غیرخطی که با یکدیگر کوپل شده‌اند حاصل می‌گردد.

حل دقیق معادلات حاکم بر بعد از کمانش معمولاً سخت و یا غیر ممکن است. به همین دلیل روش‌های عددی مثل گالرکین و ریتز برای حل تقریبی این نوع مسائل استفاده می‌شوند. روش گالرکین نسبت به روش ریتز عمومی‌تر است زیرا به فانکشنال درجه ۲ یا اصل کار مجازی نیازی ندارد. اگر معادلات حاکم از اصل حساب تغییرات قابل استخراج باشد، روش گالرکین به روش ریتز کاهش پیدا کرده و یک مجموعه از معادلات جبری خطی که توسط روش ریتز تولید شده حاصل می‌گردد .[۳۲]گاهی اوقات روش گالرکین ترجیح داده می‌شود زیرا کار با معادلات دیفرانسیل حاکم راحتتر از فانکشنال انرژی است. علاوه بر این، ارضاء اصل تغییرات و فرمول بندی مسئله بر این اساس دارای مشکلاتی خواهد بود اما مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم همواره در دسترس می‌باشد. لذا کاربرد روش گالرکین نسبت به روش ریتز عمومی‌تر و ساده‌تر است و نیازی به اصول تغییراتی ندارد. لذا در کار حاضر از روش گالرکین استفاده خواهد شد. برای مسائل غیر زمان‌مند نتیجه حاصل از اعمال روش گالرکین یک دسته معادلات جبری غیرخطی خواهد بود.

بکارگیری روش گالرکین، نیازمند یک فرم مجاز جابجایی عمودی سازگار با شرایط مرزی است. بررسی کاربردهای نانو ورق‌های گرافن نشان می‌دهد که آن‌ها به طور گسترده در ابزارها و سنسورهای بسیار حساس مانند رزوناتورها و آشکارکننده‌های جرم به کار رفته و معمولاً به صورت تکیه گاه ثابت نصب می‌شوند [۳۷و۳۸]و در پژوهش حاضر نیز این نوع تکیه‌گاه مورد بررسی قرار گرفته است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ثابت در ۴ گوشه نانو ورق، یک فرم مجاز جابجایی عمودی عبارت است از :[۱۰]

$$w_0^i(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}w_{0kl}^i\cos^2\left(\frac{(2k-1)\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right) \tag{۹}$$

که مشخصات اندیس‌ها به شرح زیر می‌باشد:

i: شماره لایه نانو ورق

k,l: اندیس‌های مکرر

m: درجه آزادی در راستای محور x

n: درجه آزادی در راستای محور y

همچنین توزیع حرارت به صورت یکنواخت فرض می‌گردد. جایگذاری رابطه (۹) در معادله سازگاری نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \left(w_{0kl}^i\right)^2 [A_1 \cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2 + \\ &A_2 \cos 2\theta_1 + A_3 \cos 2\theta_2 + \\ &A_4 \cos 4\theta_1 + A_5 \cos 4\theta_2 + \\ &A_6 \cos 2\theta_1 \cos 4\theta_2 + \\ &A_7 \cos 4\theta_1 \cos 2\theta_2] - \\ &\frac{1}{2}\left(N_{yy}^T x^2 + N_{xx}^T y^2\right) \\ &,\theta_1 = \frac{(2k-1)\pi x}{a} \quad , \\ &\theta_2 = \frac{(2l-1)\pi y}{b}\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که A_i ها مقادیر ثابتی بوده و با محاسبه سمت چپ معادله سازگاری و مقایسه ضرایب سمت چپ و راست معادله مذکور قابل محاسبه می‌باشند. فرمول گالرکین عبارت است از: [۳۲]

$$\begin{aligned}&\int_0^b\int_0^a \Gamma_{mn}\left[u_i, \Psi_i(x,y)\right]\Psi_j \\ &(x,y)\,dxdy = 0 \qquad ,i,j = 1,2,3\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که Γ_m سمت چپ معادله حرکت، u_i نشان دهنده مؤلفه‌های جابجایی و Ψ تابع پایه است. با اعمال روش گالرکین بر معادله حرکت در جهت z نتیجه می‌شود:

$$\int_0^b\int_0^a \left[\begin{aligned}&D_1\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^4} + D_2\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial y^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^2\partial y^2} \\ &+\frac{\partial^2 M_{xx}^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^T}{\partial y^2} + \\ &\left(\mu^2\nabla^2 - 1\right)\times \\ &\left[\begin{aligned}&\sum_{j=1}^N c_{ij}\left(w_0^i - w_0^j\right) + \sum_{j=1}^N e_{ij}\left(w_0^i - w_0^j\right)^3 \\ &+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2} \\ &+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right]\end{aligned}\right] f_{kl}\,dxdy = 0 \tag{۱۲}$$

و تابع پایه عبارت است از

$$f_{kl} = \cos^2\left(\frac{(2k-1)\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right) \tag{۱۳}$$

رابطه (۱۲) دستگاهی متشکل از $m\times n$ معادله جبری غیرخطی است. با اعمال روش نیوتن رافسون چند متغیره، مؤلفه‌های جابجایی و نیز تابع تنش ایری برای هر لایه به دست می‌آید. (معادله جبری استخراج شده از رابطه (۱۲) در پیوست ۲ آمده است.)

۲-۲- تحلیل ارتعاشات غیرخطی

به منظور استخراج معادله ارتعاشات غیرخطی بعد از کمانش، با حذف جابجایی‌های استاتیکی ازمعادله اولیه (۶) و تفاضل معادله بعد از کمانش (۸) به کمک رابطه (۷) از معادله حاصل شده و با وجود نیروهای گسترده میراگر ناشی از عوامل محیطی با ضریب میرایی C_1 نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&D_1\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + D_2\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2\partial y^2} = \\ &\left(1-\mu^2\nabla^2\right)\left(\begin{aligned}&I_2\left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^2\partial t^2}\right) + \\ &\sum_{j=1}^N c_{ij}\left(w_i - w_j\right) + \\ &\sum_{j=1}^N e_{ij}\left[\begin{aligned}&\left(\sqrt{3}\left(w_0^i - w_0^j\right)\right)^2 \\ &\left(w_i - w_j\right) + \\ &3\left(w_0^i - w_0^j\right) \\ &\left(w_i - w_j\right)^2 + \\ &\left(w_i - w_j\right)^3\end{aligned}\right] + \\ &N_{xx}^i\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + N_{yy}^i\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \\ &2N_{xy}^i\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\partial y} + C_1\frac{\partial w_i}{\partial t}\end{aligned}\right)\end{aligned} \tag{۱۴}$$

با توجه به شرایط مرزی تکیه گاه ثابت، یک فرم مجاز جابجایی جانبی عبارت است از: [۱۰]

$$w_i(x,y,t) = \sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^n w_i^{kl}(t)\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 \quad ,\theta_1 = \frac{(2k-1)\pi x}{a} \quad ,\theta_2 = \frac{(2l-1)\pi y}{b} \tag{۱۵}$$

با اعمال روش گالرکین بر معادلات (۱۴) پس از انتگرال گیری و ساده سازی برای ورق ۲ لایه، فرم اندیسی معادله حرکت به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&c_{ikl}^{1M}\ddot{w}_i^{kl}+c_{ikl}^{2M}w_i^{kl}+c_{ikl}^{3M}w_j^{kl}+\\&c_{ikl}^{4M}w_i^{kl}c_{jpq}^{5M}w_j^{pq}+c_{ikl}^{6M}w_i^{kl}c_{ipq}^{7M}w_i^{pq}+\\&c_{jkl}^{8M}w_j^{kl}c_{jpq}^{9M}w_j^{pq}+\\&c_{ikl}^{10M}w_i^{kl}c_{ipq}^{11M}w_i^{pq}c_{jrs}^{12M}w_j^{rs}+\\&c_{ikl}^{13M}w_i^{kl}c_{jpq}^{14M}w_j^{pq}c_{jrs}^{15M}w_j^{rs}+\\&c_{ikl}^{16M}w_i^{kl}c_{ipq}^{17M}w_i^{pq}c_{irs}^{18M}w_i^{rs}+\\&c_{jkl}^{19M}w_j^{kl}c_{jpq}^{20M}w_j^{pq}c_{jrs}^{21M}w_j^{rs}+\\&c_{ikl}^{22M}\dot{w}_i^{kl}=0\end{aligned} \tag{۱۶}$$

که c_{ij}^{k}ها مقادیر ثابت هستند. لازم به توضیح است که در رابطه بالا k,l,p,q,r,s اندیس‌های مکرر بوده و M به تعداد درجات آزادی یعنی $M=m\times n$ است. رابطه (۱۶) یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی[1] کوپل مرتبه ۲ خطی با ضرایب ثابت است. جهت پرهیز از حل همزمان دستگاه معادلات سعی می‌شود که مسئله دی کوپل گردد. فرم ماتریسی معادلات (۱۶) عبارت است از:

$$M\ddot{X}+C\dot{X}+K^{L}X+K^{NL}X=0 \tag{۱۷}$$

که M، K^{L} و K^{NL} به ترتیب ماتریس‌های جرم، سختی خطی و سختی غیرخطی معادل مجموعه هستند. با تغییر متغیر $X=PY$ که P ماتریس مودال می‌باشد و پیش ضرب معادله در P^{T}، فرم دی کوپل شده عبارت است از:

$$\begin{aligned}&P^{T}MP\ddot{Y}+P^{T}CP\dot{Y}+\\&P^{T}K^{L}PY+P^{T}K^{NL}PY=0\end{aligned} \tag{۱۸}$$

برای قسمت همگن معادله (بخش خطی) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}m_i^1&0&\dots&0\\0&m_i^2&\dots&0\\0&\dots&\dots&0\\0&\dots&\dots&m_i^M\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_i^1\\\ddot{y}_i^2\\\dots\\\ddot{y}_i^M\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}c_i^1&0&\dots&0\\0&c_i^2&\dots&0\\0&\dots&\dots&0\\0&\dots&\dots&c_i^M\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{y}_i^1\\\dot{y}_i^2\\\dots\\\dot{y}_i^M\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_i^1&0&\dots&0\\0&k_i^2&\dots&0\\0&\dots&\dots&0\\0&\dots&\dots&k_i^M\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i^1\\y_i^2\\\dots\\y_i^M\end{Bmatrix}=\{0\} \tag{۱۹}$$

حل معادله j ام عبارت است از:

$$\begin{aligned}&y_i^j=A_i^j e^{\frac{-c_i^j}{2m_i^j}}e^{i\omega_j^d t}+cc,\\&\omega_j^d=\frac{\sqrt{4k_i^j m_i^j-\left(c_i^j\right)^2}}{2m_i^j}\\&,x_i^r=\sum_{s=1}^{2j}p_{rs}y_i^s\end{aligned} \tag{۲۰}$$

که منظور از cc مزدوج مختلط جملات قبلی است و p_{rs} مؤلفه‌های ماتریس مودال می‌باشد.

۲-۳- حل به روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

در این روش مؤلفه‌های جابجایی برای ورق دو لایه عبارتند از:

$$\begin{aligned}&w_i^{kl}=\varepsilon w_{kl}^{i1}\left(T_0,T_1,T_2\right)+\\&\varepsilon^2 w_{kl}^{i2}\left(T_0,T_1,T_2\right)+\\&\varepsilon^3 w_{kl}^{i3}\left(T_0,T_1,T_2\right)+\dots,\qquad i=1,2\end{aligned} \tag{۲۱}$$

و یا در مختصات جدید:

$$\begin{aligned}&y_{ji}=\varepsilon y_{ji}^{1}\left(T_0,T_1,T_2\right)+\\&\varepsilon^2 y_{ji}^{2}\left(T_0,T_1,T_2\right)+\\&\varepsilon^3 y_{ji}^{3}\left(T_0,T_1,T_2\right)+\dots,\end{aligned} \tag{۲۲}$$

جایگذاری و دسته بندی معادلات حرکت نتیجه می‌دهد:

$O(\varepsilon^1)$:

1 Ordinary Differential Equation (ODE)

$$m_{(k)}^{(i)}\frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0^2}+k_{(k)}^{(i)}y_{ki}^1=0,\quad k=1,2,...,M \tag{۲۳}$$

$$O(\varepsilon^2):$$

$$2m_{(k)}^{(i)}\frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0\partial T_1}+m_{(k)}^{(i)}\frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0^2}+c_{(k)}^{(i)}\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_1}+k_{(k)}^{(i)}y_{ki}^2+c_{bq}^{1a}p_{ak}p_{qs}p_{bc}y_{si}^1y_{ci}^1=0 \tag{۲۴}$$

$$O(\varepsilon^3):$$

$$m_{(k)}^{(i)}\begin{pmatrix}2\frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0\partial T_2}+\frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_1^2}+\\ 2\frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0\partial T_1}+\frac{\partial^2 y_{ki}^3}{\partial T_0^2}\end{pmatrix}+c_{(k)}^{(i)}\left(\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_2}+\frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_1}+\frac{\partial y_{ki}^3}{\partial T_0}\right)+k_{(k)}^{(i)}y_{ki}^3+c_{bq}^{1a}p_{ak}p_{qs}p_{bc}\left(y_{si}^1y_{ci}^2+y_{si}^2y_{ci}^1\right)+c_{bqr}^{2a}p_{ak}p_{qs}p_{rt}p_{bc}y_{si}^1y_{ti}^1y_{ci}^1=0 \tag{۲۵}$$

حل معادله (۲۳) عبارت است از:

$$y_{ki}^1=A_{ki}^1(T_1,T_2)e^{i\omega_kT_0}+cc,\quad k=1,2,...,M \tag{۲۶}$$

با توجه به معادلات (۲۴) می‌توان نوشت:

$$m_{(k)}^{(i)}\frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0^2}+k_{(k)}^{(i)}y_{ki}^2=-2m_{(k)}^{(i)}i\,\omega_k\frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1}e^{i\omega_kT_0}-c_{(k)}^{(i)}\frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1}e^{i\omega_kT_0}-c_{bq}^{11a}p_{ak}p_{qs}p_{bc}\left(A_{si}^1A_{ci}^1e^{i(\omega_s+\omega_c)T_0}+A_{si}^1\bar{A}_{ci}^1e^{i(\omega_s-\omega_c)T_0}\right)+cc \tag{۲۷}$$

جهت حذف ترم سکولار بایستی: $\frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1}=0$ بنابراین حل (۲۷) عبارت است از:

$$y_{ki}^2=\frac{\left(-c_{bq}^{1a}p_{ak}p_{qs}p_{bc}\right)A_{ki}^1A_{ki}^1}{k_{(k)}^{(i)}-m_{(k)}^{(i)}\left(\omega_s+\omega_c\right)^2}e^{2i\omega_kT_0}+\frac{\left(-c_{bq}^{1a}p_{ak}p_{qs}p_{bc}\right)A_{ki}^1\bar{A}_{ki}^1}{k_{(k)}^{(i)}-m_{(k)}^{(i)}\left(\omega_s-\omega_c\right)^2}+cc \tag{۲۸}$$

با توجه به معادلات (۲۵) نتیجه می‌شود:

$$m_{(k)}^{(i)}\frac{\partial^2 y_{ki}^3}{\partial T_0^2}+k_{(k)}^{(i)}y_{ki}^3=-m_{(k)}^{(i)}\left(2\frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0\partial T_2}+\frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0\partial T_1}\right)-c_{(k)}^{(i)}\left(\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_2}+\frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_1}\right)-\left(c_{bq}^{1a}p_{ak}p_{qs}p_{bc}\right)\left(y_{si}^1y_{ci}^2+y_{si}^2y_{ci}^1\right)+c_{bqr}^{2a}p_{ak}p_{qs}p_{rt}p_{bc}y_{si}^1y_{ti}^1y_{ci}^1 \tag{۲۹}$$

اما $\frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_1}=0$ و $\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_2}=\frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_2}e^{i\omega_kT_0}$ جهت حذف ترم سکولار A_k را به فرم قطبی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A_k=\frac{1}{2}a_{(k)}(T_2)\exp\left(i\beta_{(k)}(T_2)\right) \tag{۳۰}$$

که a_k و β_k توابعی حقیقی هستند. جایگذاری رابطه (۳۰) در رابطه (۲۹) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و مختلط نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} m_{(k)}^{(j)}\omega_ka_k'+\frac{1}{2}c_{(k)}^{(j)}\omega_ka_k=0\\ m_{(k)}^{(j)}a_k\omega_k\beta_k'-\frac{1}{2}c_{(k)}^{(j)}\omega_ka_k-\frac{1}{4}\left(c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc}\right)\\ \times\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}\left(\omega_s+\omega_c\right)^2}a_k^3-\\ \frac{1}{4}\left(c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc}\right)\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}\left(\omega_s-\omega_c\right)^2}a_k^3=0\end{cases} \tag{۳۱}$$

که علامت $(\ )'$ بیانگر مشتق نسبت به T_2 می‌باشد. فرم کلی دستگاه به طور خلاصه عبارت است از:

$$\begin{cases} n_1a_k'+n_2a_k=0\\ n_1a_k\beta'+n_2a_k+n_3a_k^3=0\end{cases}\qquad k=1,2,...,M,\qquad n_i=cte \tag{۳۲}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \frac{a_k'}{a_k}=-\frac{n_2}{n_1}\\ \beta'=-\frac{n_2+n_3a_k^2}{n_1}\end{cases} \tag{۳۳}$$

حل معادلات بالا به ترتیب عبارت است از:

$$a_k = c_i^k e^{-\frac{c_{(k)}^{(j)}}{2m_{(k)}^{(j)}}T_2}, \qquad c_i^k = cte \tag{۳۴}$$

و

$$\beta_k = \frac{c_{(k)}^{(j)}}{2m_{(k)}^{(j)}}T_2 + \frac{1}{4c_{(k)}^{(j)}\omega_k}[(c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc})\times \left(\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s+\omega_c)^2}+\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s-\omega_c)^2}\right)]a_k^2+\beta_{0k} \tag{۳۵}$$

$$,\beta_{0k} = cte.$$

بنابراین

$$\begin{cases} a_k = c_i^k e^{-\frac{c_{(k)}^{(j)}}{2m_{(k)}^{(j)}}T_2} \\ \beta_k = \frac{c_{(k)}^{(j)}}{2m_{(k)}^{(j)}}T_2 + \frac{1}{4c_{(k)}^{(j)}\omega_k}[(c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc})\times \left(\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s+\omega_c)^2}+\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s-\omega_c)^2}\right)]a_k^2+\beta_{0k} \end{cases} \tag{۳۶}$$

پس می‌توان نوشت:

$$A_k = \frac{1}{2}c_i^k e^{-\frac{c_{(k)}^{(j)}}{2m_{(k)}^{(j)}}T_2}\exp\left| i\left(\frac{c_{(k)}^{(j)}}{2m_{(k)}^{(j)}}T_2 + \frac{1}{4c_{(k)}^{(j)}\omega_k}[(c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc})\times \left(\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s+\omega_c)^2}+\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s-\omega_c)^2}\right)]a_k^2+\beta_{0k}\right)\right. \tag{۳۷}$$

جایگذاری y_i^1 و y_i^2 در رابطه (۲۲) و استفاده از رابطه (۳۷) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} y_{ji} &= \varepsilon a_j e^{-\frac{c_j}{2m_j}\varepsilon^2 t}\cos(\omega t+\beta_{0j}) \\ &+\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_j^2 e^{-\frac{c_j}{2m_j}\varepsilon^2 t}(-c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc})\times \\ &\left(\frac{1}{2\left(k_{(i)}^{(j)}-m_{(i)}^{(j)}(\omega_s-\omega_c)^2\right)}+\frac{1}{k_{(i)}^{(j)}-m_{(i)}^{(j)}(\omega_s+\omega_c)^2}\right) \\ &\cos\left(2\omega t-\frac{m_i^{(j)}\omega_k\varepsilon^2}{c_i^{(j)}}a_j^2+2\beta_{0j}\right)+O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{۳۸}$$

که

$$\begin{aligned} &\omega = \omega_k + k_k a_k^2 \varepsilon^2, \\ &k_k = \frac{1}{4c_{(k)}^{(j)}\omega_k}(c_{bq}^{1a}p_{aj}p_{qs}p_{bc})\times \\ &\left(\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s+\omega_c)^2}+\frac{-c_{tu}^{1r}p_{rj}p_{us}p_{tc}}{k_{(k)}^{(j)}-m_{(k)}^{(j)}(\omega_s-\omega_c)^2}\right) \end{aligned} \tag{۳۹}$$

۳- نتایج

در این بخش، ابتدا جهت ارزیابی روش برخی نتایج با مراجع در دسترس مقایسه و سپس به نتایج حاصل از تحلیل غیرخطی به تفکیک و به صورت مشروح پرداخته شده است.

۳-۱- صحه گذاری مسئله بعد از کمانش

در ابتدا به منظور بررسی نرخ همگرایی روش حاضر، نتایج حاصل از روش گالرکین جهت محاسبه بار کمانش حرارتی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس و تعداد توابع پایه در جدول ۱ آمده و یک نرخ همگرایی سریع را بازاء کلیه مقادیر پارامتر مقیاس نشان می‌دهد.

جهت بررسی بیشتر، تأثیر تغییرات حرارتی بر روی جابجایی عرضی ورق مستطیلی بررسی و با مرجع [۳۶]مقایسه شده است. در جدول ۲ خواص مواد مورد استفاده جهت فرایند صحه گذاری آمده است.

در شکل ۲ جابجایی نقطه مرکزی ورق مربعی با تکیه گاه‌های ثابت بازاء تغییرات درجه حرارت آمده است و نزدیکی خوبی را با پاسخ‌های

جدول ۱: مطالعه همگرایی روش گالرکین

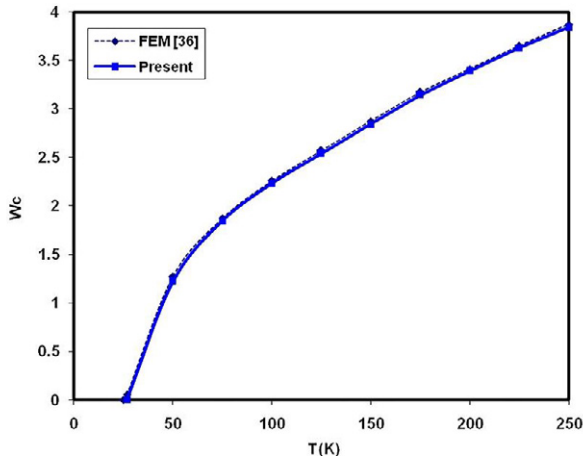
Table 1. Convergence study of Galerkin Method

پارامتر مقیاس (e_0a)	تعداد توابع پایه به کار گرفته شده جهت محاسبه دمای کمانش بحرانی				
	1	2	3	4	5
0/0	335/49	331/76	329/75	329/74	329/74
0/5	308/12	304/71	302/33	302/33	302/33
1/0	293/33	290/87	287/24	287/24	287/24
1/5	275/46	272/74	269/32	269/31	269/31
2/0	261/08	258/67	254/64	254/64	254/64

جدول ۲: خواص مواد ورق مربعی نیکل [۳۶]

Table 2. Material properties of square Nickel plate [36]

مدول یانگ (GPa)	199/5
نسبت پواسون	0/30
ضریب انبساط حرارتی ($^{o}C\times10^{-6}$)	13/3



شکل ۲: رفتار بعد از کمانش حرارتی ورق مربعی تحت افزایش حرارت یکنواخت

Fig. 2. Thermal postbuckling behavior of square plate under uniform temperature rise

جدول ۳: مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی نانو ورق گرافن (THz)

Table 3. Comparison between natural frequencies of NPGS (THz)

کایرالیتی	ω_{L1}		ω_{L2}	
	تحقیق حاضر	مرجع [29]	تحقیق حاضر	مرجع [29]
آرمچر	0/1131	0/1126	2/6001	2/5999
زیگزاگ	0/1169	0/1166	2/5999	2/5988

مرجع [۳۶]نشان می‌دهد.

۳-۲- صحه گذاری مسئله ارتعاشات

به منظور بررسی دقت محاسبات و فرمول بندی حاضر، فرکانس طبیعی نانو ورق گرافن مستطیلی دولایه زیگزاگ و آرمچر با تکیه‌گاه‌های ثابت محاسبه و با مرجع [۲۹]مقایسه شده و در جدول ۳ آمده است و دقت مناسبی را نشان می‌دهد.

به منظور بررسی صحت تحلیل‌های غیرخطی و محاسبات فرکانسی

جدول ۴: نسبت پریود مود اول ارتعاشات دامنه بزرگ ورق با تکیه گاه ثابت

Table 4. First mode period ratio of large domain vibrations of fixed plate

W/h	نسبت پریود غیرخطی	
	تحقیق حاضر	مرجع [39]
0/4	0/973	0/970
0/8	0/915	0/913
1/2	0/837	0/835
1/6	0/744	0/742
2/0	0/634	0/633

نسبت پریود غیرخطی ارتعاشات دامنه بزرگ ورق با تکیه‌گاه‌های ثابت محاسبه و با مرجع [۳۹]مقایسه شده که بر اساس جدول ۴ پاسخ‌ها دارای نزدیکی مناسبی می‌باشند.

۳-۳- نتایج عددی

به منظور انجام محاسبات عددی، یک ورق گرافن ۲ لایه با خواص مواد تابع حرارت طبق جدول ۵ مورد استفاده قرار گرفته و نیز خواص هر دو لایه یکسان فرض می‌گردد.

با توجه به اینکه خواص ماده گرافن به صورت نقطه‌ای داده شده و رفتار خواص با تغییرات حرارت به صورت یک تابع صریح از دما مشخص نیست، از روش درون‌یابی جهت حدس تابعیت خواص به صورت توابع چندجمله‌ای استفاده و در فرآیند حل در تحقیق حاضر لحاظ شده است.

۳-۳-۱- مسئله بعد از کمانش

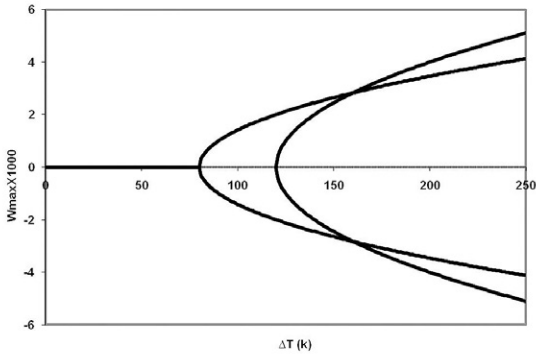
با جایگذاری w و ϕ در رابطه (۱۲) و حل معادله حاصل برحسب دما، نمودار شاخه‌ای نانو ورق گرافن که نشان دهنده دامنه کمانش نقطه مرکزی ورق به عنوان تابعی از گرادیان حرارت می‌باشد، به دست می‌آید که نتایج آن در شکل ۳ نشان داده شده است.

در شکل ۴ نمودار شاخه‌ای حاصل از تئوری‌های محلی و غیرمحلی با یکدیگر مقایسه شده است. بر اساس این شکل ملاحظه می‌گردد که با در نظر گرفتن تأثیر پارامتر مقیاس، شروع نقطه شاخه‌ای در دمای پایین‌تری اتفاق می‌افتد؛ در نتیجه، در نظر گرفتن پارامتر مقیاس سختی خمشی مجموعه را کاهش داده و شروع شاخه‌ای شدن

جدول ۵: خواص مواد نانو ورق گرافن در محیط حرارتی[۳۱]

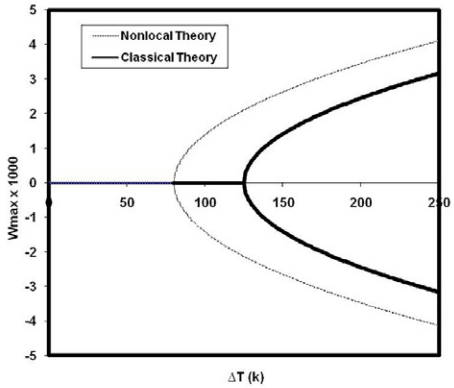
Table 5. Material properties of NPGS in thermal environment [31]

$\alpha_2(10^{-6}/K)$	$\alpha_1(10^{-6}/K)$	$G_{12}(TPa)$	$E_2(TPa)$	$E_1(TPa)$	$T(K)$	
2/1	2/3	0/923	2/168	2/154	300	ورق آرمچر
2/1	2/0	0/937	2/140	2/133	500	
1/7	1/8	0/958	2/119	2/112	700	
1/6	1/8	0/913	2/054	2/067	300	ورق زیگزاگ
2/0	1/8	0/926	2/027	2/040	500	
1/9	1/7	0/933	2/007	2/013	700	



شکل ۳: دیاگرام شاخه‌ای شدن نانو ورق گرافن ۲ لایه زیگزاگ با افزایش دما به ازاء پارامتر مقیاس واحد

Fig. 3. Bifurcation diagram of DLZGS with temperature rise for $(\mu = 1)$

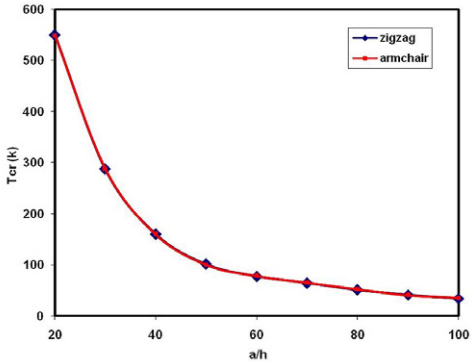


شکل۴: مقایسه بین دیاگرام شاخه‌ای شدن نانو ورق گرافن زیگزاگ با تئوری غیرمحلی $(\mu = ۱)$ و تئوری محلی $(\mu = ۰)$

Fig. 4. Comparison between bifurcation diagram of DLZGS for nonlocal $(\mu = 1)$ and local theory $(\mu = 0)$

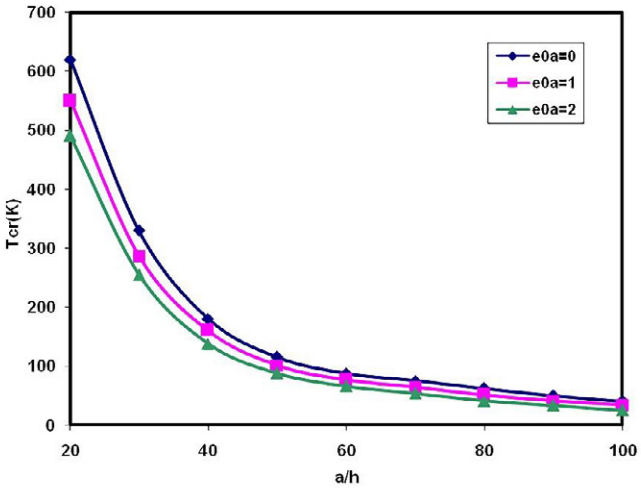
نمودار را تسریع می‌بخشد و اهمیت لحاظ کردن تئوری غیرمحلی در مدل‌سازی نانو ورق را نشان می‌دهد.

در شکل ۵ با در نظر گرفتن دو ورق گرافن با ابعاد مشابه، تأثیر



شکل ۵: تأثیر کایرالیتی بر نمودار تغییرات دمای کمانش بحرانی با نسبت منظری تحت بار حرارتی یکنواخت و پارامتر مقیاس واحد

Fig. 5. Effect of chirality on the critical buckling temperature vs. aspect ratio under uniform temperature rise and $(\mu = 1)$

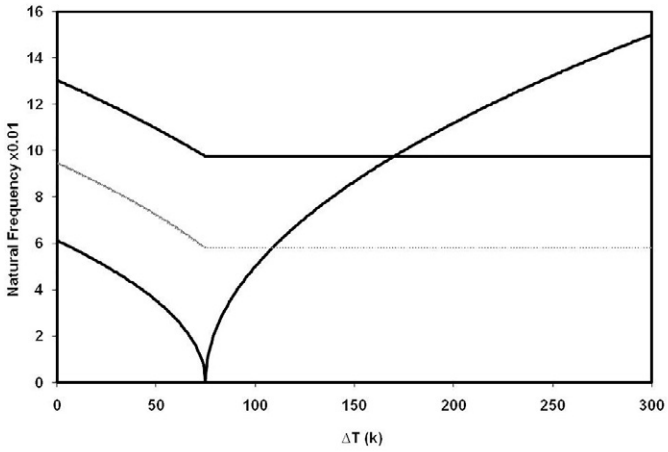


شکل ۶: گرادیان دمای بحرانی نانو ورق گرافن زیگزاگ نسبت به *a/h* تحت افزایش حرارت یکنواخت

Fig. 6. Critical temperature gradient of DLZGS vs. *a/h* under uniform temperature rise

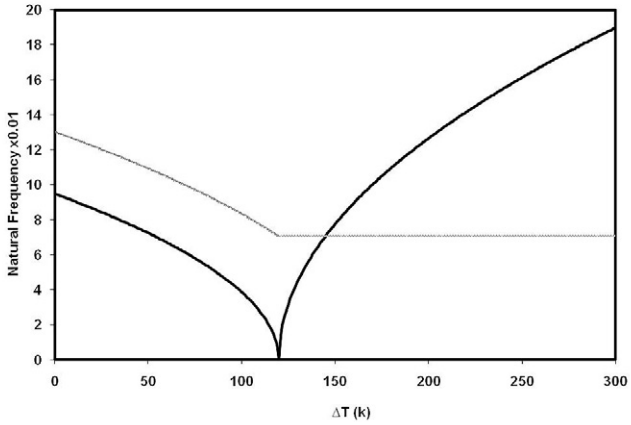
کایرالیتی بر درجه حرارت بحرانی بررسی شده و نتایج نشان می‌دهد که کایرالیتی تأثیر ناچیزی بر دمای کمانش بحرانی خواهد داشت.

شکل ۶ تغییرات گرادیان حرارت بحرانی را برای نانو ورق گرافن دولایه با تکیه‌گاه‌های ثابت تحت افزایش حرارت یکنواخت بازاء مقادیر مختلف پارامتر مقیاس نشان می‌دهد. با مراجعه به معادله حاکم بر مسئله ملاحظه می‌شود که این پارامتر به صورت یک عامل مجذور در معادلات ظاهر می‌گردد. بر این اساس و مطابق نمودار با افزایش پارامتر مقیاس، دمای بحرانی کاهش یافته و نسبت شدت کاهش این دما برای ورق‌های کوچکتر، بیشتر است.



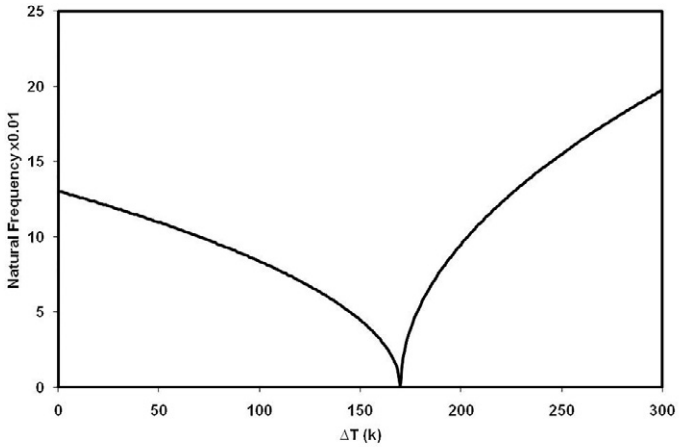
a)Variation of the natural frequencies of vibration around the first buckled nanoplate configurations of fixed support

الف) تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات حول اولین مود کمانشی نانو ورق با تکیه گاه ثابت



b) Variation of the natural frequencies of vibration around the second buckled nanoplate configurations of fixed support

ب) تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات حول دومین مود کمانشی نانو ورق با تکیه گاه ثابت



c) Variation of the natural frequencies of vibration around the third buckled nanoplate configurations of fixed support

ج) تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات حول سومین مود کمانشی نانو ورق با تکیه گاه ثابت

شکل ۷: تغییرات فرکانس طبیعی نانو ورق گرافن ۲ لایه زیگزاگ با افزایش دما قبل و بعد از کمانش

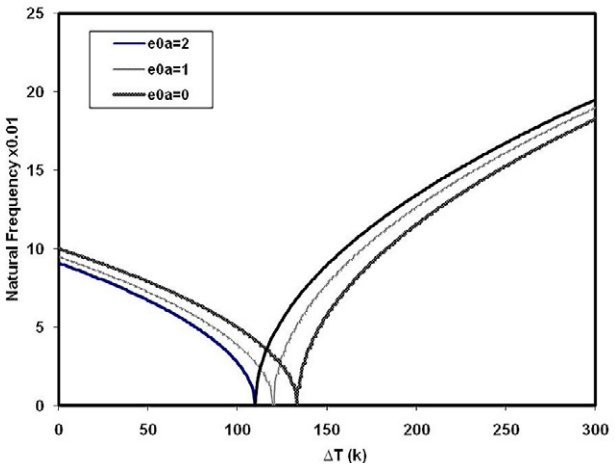
Fig. 7. Variation of the natural frequencies of DLZGS with temperature rise befor and after buckling

۳-۳-۲- مسئله ارتعاشات و تحلیل پایداری

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات غیرخطی بعد از کمانش ارائه و تأثیر پارامترهای مختلف بر آن بررسی شده است. پیش از ارائه نتایج، ابتدا شاخه‌های پایدار مودهای کمانشی باید تعیین گردد. پایداری غیرخطی نانو ورق گرافن اورتوتروپ تک لایه با تکیه‌گاه‌های ساده بررسی و اهمیت در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی بر رفتار پایداری غیرخطی نشان داده شده است [۴۰]. پایداری مودهای کمانشی نانوساختارها با بررسی نوسانات کوچک حول مودهای کمانش کرده امکان پذیر است [۳۵]. به عبارت دیگر، یک تحلیل ارتعاش خطی حول حالت بعد از کمانش باید انجام پذیرد. جهت انجام این کار، با حذف جملات غیرخطی معادله حرکت و اعمال روش گالرکین بر جملات باقیمانده، یک مسئله مقدار ویژه بر حسب ω حاصل می‌شود. برای یک ترکیب حالت کمانش پایدار، ω^2 باید مثبت باشد و بنابراین ω عددی حقیقی است. جهت بررسی پایداری فرم‌های کمانش کرده براساس مرجع [35] فرض می‌شود q_x^T کمی بزرگتر از بار کمانش بحرانی (مثلاً $q_x^T = 1.01 q_{xcr}^T$) باشد و با بررسی شکل مود فیزیکی مربوطه، موقعیت‌های پایدار و ناپایدار مشخص می‌گردد. بررسی این موضوع در ۲ گام (مرحله) انجام می‌پذیرد؛ در گام اول مسئله مقدار ویژه حل و مقدار ω^2 در دو ناحیه مثبت و منفی ارزیابی می‌شود. در ناحیه $\omega^2 > 0$ اگر شکل مود متناظر، مطابق با شکل مود فیزیکی مربوطه بود، شرط اول پایداری برآورده می‌شود؛ از طرفی، در ناحیه $\omega^2 \leq 0$ اگر شکل مود متناظر، یک شکل مود غیرفیزیکی باشد، شرط دوم پایداری برآورده شده و در نتیجه آن مود، یک مود تعادل پایدار است. اما اگر هر یک از این دو شرط برآورده نشود، آن مود ناپایدار خواهد بود. برای مثال برای اولین مود کمانش، کلیه ریشه‌های مثبت مطابق با شکل‌های مودهای فیزیکی است؛ در نتیجه، اولین مود کمانش یک موقعیت تعادل پایدار است. بررسی بیشتر نشان می‌دهد که مودهای کمانشی بالاتر از مود ۲ تا مود ۵ دارای موقعیت تعادل ناپایدار می‌باشند.

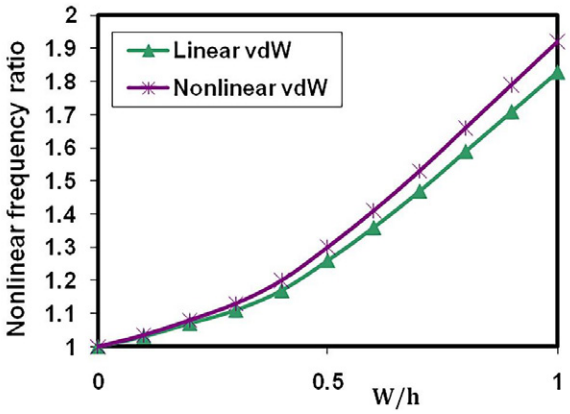
در شکل ۷ تغییرات فرکانس حول سه مود کمانشی اول نشان داده شده است. خطوط تیره بیانگر مودهای ارتعاشی فرد و خطوط خط چین نشان دهنده مودهای زوج می‌باشد.

در شکل ۸ تأثیر پارامتر مقیاس بر تغییرات ارتعاشات خطی نانو ورق گرافن نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که تأثیر این



شکل ۸: تأثیر پارامتر مقیاس بر فرکانس طبیعی نانو ورق گرافن زیگزاگ با افزایش دما قبل و بعد از کمانش برای مود دوم.

Fig. 8. Effect of scale parameter on natural frequencies of DLZGS with temperature rise befor and after buckling for mode 2

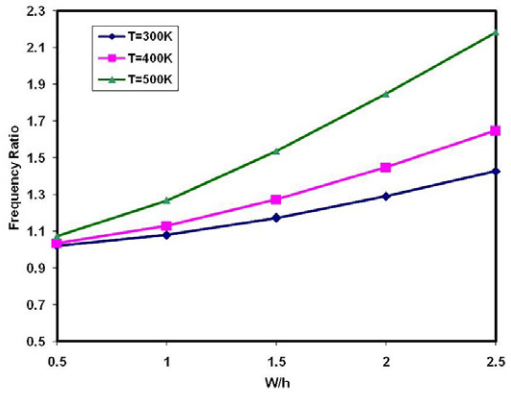


شکل ۹: منحنی پاسخ بعد از کمانش نانو ورق گرافن زیگزاگ دولایه با اندرکنش واندروالس خطی و غیرخطی

Fig. 9. Response curve of postbuckled DLZGS with linear and nonlinear van der Waals interactions

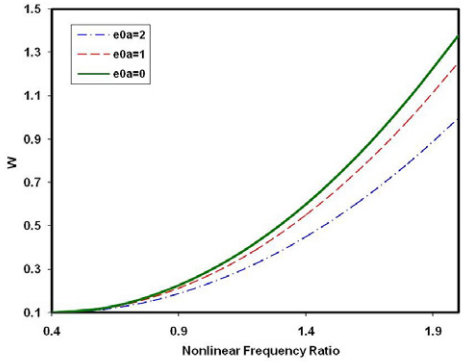
پارامتر قبل و بعد از فرایند کمانش کاملاً برعکس یکدیگر می‌باشد که علت آن تفاوت معادله حاکم بر ارتعاشات قبل و بعد از کمانش است.

پس از تحلیل ارتعاشات خطی و بررسی پایداری، نتایج تحلیل ارتعاشات غیرخطی حول مود کمانش پایدار (مود ۱) انجام شده و نتایج در ادامه آمده است. تأثیر ضریب غیرخطی نیروهای واندروالس در شکل ۹ نشان داده شده است. مراجعه به معادلات دینامیکی حاکم بر مسئله نشان می‌دهد که ضریب مذکور در ترم‌های غیرخطی معادله خود را آشکار نموده و بر این اساس ملاحظه می‌شود که تأثیر ضریب غیرخطی واندروالس e_{ij} در دامنه‌های بالاتر بیشتر بوده و برای دامنه‌های بالا بایستی در نظر گرفته شود.



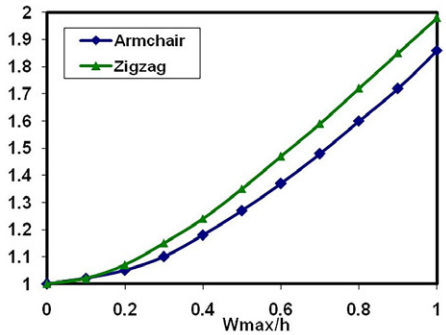
شکل ۱۰: اثر تغییر دما بر منحنی دامنه- فرکانس بعد از کمانش نانو ورق گرافن زیگزاگ دولایه

Fig. 10. Effect of temperature variation on domain-frequency curve of postbuckled DLZGS



شکل ۱۱: اثر پارامتر مقیاس بر منحنی پاسخ نانو ورق گرافن آرمچر دولایه

Fig. 11. Effect of scale parameter on response curve of DLAGS



شکل ۱۲: تأثیر کایرالیتی بر منحنی پاسخ بعد از کمانش نانو ورق گرافن دولایه با تکیه گاه ثابت و $\Delta T = ۴۵۰\mathrm{K}$

Fig. 12. Effect of Chirality on response curve of postbuckled DLGS with fixed support and $\Delta T = 450\mathrm{K}$

تأثیر تغییرات درجه حرارت بر منحنی فرکانس – دامنه نانو ورق گرافن ۲ لایه کمانش کرده حول مود کمانش پایدار (مود اول) در شکل ۱۰ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش حرارت با کاهش میزان سختی نانو ورق، فرکانس طبیعی را کاهش داده اما نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی را افزایش می‌دهد.

همچنین منحنی پاسخ نانو ورق گرافن دولایه در شکل ۱۱ ترسیم شده و تأثیر پارامتر مقیاس بر نمودار مذکور مورد بررسی قرار گرفته است. با مراجعه به معادلات دینامیکی حاکم ملاحظه می‌شود که تأثیر پارامتر مذکور بر ترم‌های غیرخطی یک تأثیر افزاینده است و نتایج نیز نشان می‌دهد که بازاء یک جابجایی عمودی ثابت، پارامتر مذکور دارای اثر افزاینده بر نسبت فرکانس غیرخطی خواهد بود.

تأثیر کایرالیتی بر رفتار فیزیکی نانو ورق گرافن دو لایه با تکیه‌گاه‌های ثابت در شکل ۱۲ نشان داده شده است. براساس شکل مذکور، ورق زیگزاگ دارای مقدار عددی بالاتری از نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی در مقایسه با ورق آرمچر است که این موضوع به دلیل تفاوت کایرالیتی و ساختار متفاوت دو ورق مذکور می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش پاسخ ارتعاشی نانو ورق گرافن دولایه کمانش کرده براساس مدل ورق غیرمحلی برای شرایط مرزی تکیه گاه ثابت بررسی شده است. تفاوت اصلی بین مدل حاضر با مدل‌های قبلی این است که حل مسئله حاضر شامل جابجایی تحت تأثیر بعد از کمانش حرارتی است. حل مسئله در دو فاز بررسی شده است؛ فاز اول شامل تعادل حرارتی (مسئله استاتیک) و دیگری ارتعاشات دامنه بزرگ حول پاسخ استاتیک. در تحلیل بعد از کمانش حرارتی، یک رفتار کمانش شاخه‌ای شدن مشاهده شده و یک مسیر تعادل بعد از کمانش حرارتی به دست آمده است. معادله حرکت ارتعاشات غیرخطی نانو ورق گرافن دولایه استخراج و پس از تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه ۲، حل به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه ارائه شده است. همچنین با استفاده از تحلیل ارتعاش خطی و تشکیل مسئله مقدار ویژه، یک تحلیل پایداری انجام شده است. تأثیر کایرالیتی بر دمای کمانش بحرانی و رفتار ارتعاشی نانو ورق دولایه با در نظر گرفتن شرایط مشابه دمایی و ابعادی بررسی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که اگرچه کایرالیتی تأثیر ناچیزی بر دمای کمانش بحرانی دارد، اما تأثیر آن بر رفتار ارتعاشی قابل توجه خواهد بود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که برای مشخصات ابعادی و شرایط دمایی مشابه، ورق آرمچر فرکانس طبیعی کمتری نسبت به ورق زیگزاگ خواهد داشت. تحلیل

پایداری نشان می‌دهد که مود کمانش اول یک موقعیت تعادل پایدار دارد؛ در حالی که، مودهای بالاتر دارای موقعیت تعادل ناپایدار هستند. تأثیر پارامتر مقیاس بر کمیت‌های مختلف از جمله فرکانس طبیعی، دمای بحرانی و منحنی پاسخ بررسی شده است. ملاحظه می‌شود که با به کار گرفتن تئوری غیرمحلی، شروع نقطه شاخه‌ای شدن در یک دمای پایین‌تر اتفاق می‌افتد و درنتیجه لحاظ کردن پارامتر مقیاس سختی خمشی را کاهش داده و شروع فرآیند شاخه‌ای شدن و نیز ناپایداری را تسریع می‌کند. همچنین، با افزایش پارامتر مقیاس میزان جابجایی افزایش می‌یابد. با افزایش دما فرکانس‌های طبیعی دو رفتار متفاوت را نشان می‌دهند؛ کاهش قبل از شروع کمانش و افزایش بعد از وقوع کمانش. همچنین لحاظ کردن پارامتر مقیاس دو تأثیر متفاوت برجا می‌گذارد؛ با افزایش دما پیش از کمانش فرکانس طبیعی را کاهش داده در حالی که در حالت بعد از کمانش باعث افزایش آن می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس و تغییر دما نقشی اساسی در رفتار ارتعاش غیرخطی نانوساختارهای کمانش کرده دارند.

فهرست علائم

a	طول نانو ورق در راستای محور x
a_j	دامنه پاسخ
b	طول نانو ورق در راستای محور y
c_{ij}	ضریب قسمت خطی نیروی واندروالس
D_i	سفتی‌های خمشی
e_{ij}	ضریب قسمت غیرخطی نیروی واندروالس
E_{ij}	مدول‌های یانگ مؤثر
$\overline{E}_{ij}$	مدول‌های یانگ تبدیل یافته
I_2	ممان اینرسی جرم
M	تعداد درجات آزادی
M_{ij}	گشتاورهای اینرسی
M^T	گشتاورهای حرارتی
N_{ij}	نیروهای داخلی
N^T	نیروهای حرارتی
P	ماتریس مودال
u	مؤلفه جابجایی ناشی از ارتعاش در جهت محور x
U	جابجایی کلی در راستای محور x
u_0	مؤلفه جابجایی بعد از کمانش در راستای محور x
v	مؤلفه جابجایی ناشی از ارتعاش در جهت محور y
V	جابجایی کلی در راستای محور y
v_0	مؤلفه جابجایی بعد از کمانش در راستای محور y
w	مؤلفه جابجایی ناشی از ارتعاش در جهت محور z
W	جابجایی کلی در راستای محور z
w_0	مؤلفه جابجایی بعد از کمانش در راستای محور z
α_1	ضریب انبساط حرارتی در جهت x
α_2	ضریب انبساط حرارتی در جهت y
ε_{ij}	مؤلفه‌های کرنش در صفحه میانی نانو ورق
Φ	تابع تنش ایری
μ	پارامتر مقیاس غیرمحلی
σ	پارامتر میزان‌سازی

پیوست۱: ضرایب ثابت

با توجه به پیچیدگی و حجم بالای ضرایب با افزایش تعداد درجات آزادی، ضرایب ثابت معادله (۱۶) در ساده‌ترین حالت و بازاء $M=1$ به عنوان نمونه در ادامه آمده است.

$$c_1 := -\frac{1}{16}\frac{\pi^2 i_2\begin{pmatrix}12\pi^2a^4\mu^2+8\pi^2a^2b^2\mu^2+\\12\pi^2b^4\mu^2-3a^4b^2-3a^2b^4\end{pmatrix}}{a^3b^3}$$

$$\begin{aligned}c_2 :=\ & \frac{1}{64a^3b^3}(48\pi^4a^4\mu^2N_y^T-\\ & 27W_{0i}{}^2e_{ij}a^4b^4-27W_{0j}{}^2e_{ij}a^4b^4+\\ & 32D_3\pi^4a^2b^2+12\pi^2a^4b^2N_y^T+\\ & 48\mu^2\pi^4b^4N_x^T+12N_x^T\pi^2a^2b^4+48\pi^4a^4D_2+\\ & 48D_1\pi^4b^4-9c_{ij}a^4b^4+54W_{0i}W_{0j}e_{ij}a^4b^4\\ & +16\mu^2\pi^4a^2b^2N_x^T-\\ & 12\mu^2\pi^2b^4c_{ij}a^2+16\mu^2\pi^4a^2b^2N_y^T-\\ & 12\mu^2\pi^2c_{ij}a^4b^2-36\mu^2\pi^2b^4e_{ij}a^2W_{0i}{}^2-\\ & 36\pi^2a^4b^2\mu^2W_{0i}{}^2e_{ij}+72\pi^2a^4b^2\mu^2W_{0i}W_{0j}e_{ij}-\\ & 36\pi^2a^4b^2\mu^2W_{0j}{}^2e_{ij}+\\ & 72\pi^2a^2b^4\mu^2W_{0i}W_{0j}e_{ij}-36\pi^2a^2b^4\mu^2W_{0j}{}^2e_{ij}\end{aligned}$$

$$c_3 := -c_2$$

$$c_{45} := \frac{15}{128}\frac{e_{ij}\begin{pmatrix}8\pi^2a^2\mu^2+\\8\pi^2b^2\mu^2+5a^2b^2\end{pmatrix}(W0_i-W0_j)}{ab}$$

$$c_{67} := -\frac{15}{256}\frac{e_{ij}\begin{pmatrix}8\pi^2a^2\mu^2+\\8\pi^2b^2\mu^2+5a^2b^2\end{pmatrix}\left(W0_i-W0_j\right)}{ab}$$

$$c_{89} := -c_{45}$$

$$c_{101112} := \frac{525}{16384}\frac{e_{ij}\begin{pmatrix}12\pi^2a^2\mu^2+\\12\pi^2b^2\mu^2+7a^2b^2\end{pmatrix}}{ab}$$

$$c_{131415} := -c_{101112}$$

$$c_{161718} := -\frac{175}{16384}\frac{e_{ij}\begin{pmatrix}12\pi^2a^2\mu^2+\\12\pi^2b^2\mu^2+7a^2b^2\end{pmatrix}}{ab}$$

$$c_{192021} := -c_{161718}$$

$$c_{22} := -\frac{3}{64}\frac{C_1\begin{pmatrix}4\pi^2a^2\mu^2+\\4\pi^2b^2\mu^2+3a^2b^2\end{pmatrix}}{ab}$$

پیوست ۲: معادله بعد از کمانش

معادله جبری بعد از کمانش حاصل از انتگرال‌گیری به روش گالرکین (رابطه (۱۲)) به شرح زیر است:

$$-\frac{w_{i0}^3}{16384a^3b^3}(32768\pi^6\mu^2A_5a^2+16384\pi^6\mu^2A_2b^2+32768\pi^6\mu^2A_2a^2+$$
$$8192\pi^4A_2a^2b^2+8192\pi^4A_4a^2b^2+16384\pi^6\mu^2A_3a^2+8192\pi^4A_5a^2b^2+$$
$$32768\pi^6\mu^2A_3b^2+16384\pi^6\mu^2A_1b^2+8192\pi^6\mu^2A_7a^2+8192\pi^4A_3a^2b^2+$$
$$4096\pi^4A_6a^2b^2+16384\pi^6\mu^2A_7b^2+8192\pi^4A_1a^2b^2+4096\pi^4A_7a^2b^2+$$
$$16384\pi^6\mu^2A_6a^2+16384\pi^6\mu^2A_1a^2+8192\pi^6\mu^2A_6b^2+32768\pi^6\mu^2A_4b^2+$$
$$32768\pi^6\mu^2A_5b^2+32768\pi^6\mu^2A_4a^2+2100\pi^2a^4b^2\mu^2e_{ij}+2100\pi^2a^2b^4\mu^2e_{ij}+1225a^4b^4e_{ij})$$
$$-(1/16384)(-6300\pi^2a^4b^2\mu^2e_{ij}w_{j0}-6300\pi^2a^2b^4\mu^2e_{ij}w_{j0}-3675a^4b^4e_{ij}w_{j0})w_{i0}^2/(a^3b^3)-$$
$$(1/16384)(3072\pi^2N_y^Ta^4b^2-8192\pi^4D_3a^2b^2+12288\mu^2\pi^4N_y^Ta^4+3072\pi^2N_x^Ta^2b^4+$$
$$12288\mu^2\pi^4N_x^Tb^4+2304c_{ij}a^4b^4-12288\pi^4D_2a^4-12288\pi^4*D_1b^4+6300\mu^2\pi^2e_{ij}w_{j0}^2a^2b^4+$$
$$6300\mu^2\pi^2e_{ij}w_{j0}^2a^4b^2+3675e_{ij}w_{j0}^2a^4b^4+4096\mu^2\pi^4N_y^Ta^2b^2+4096\mu^2\pi^4N_x^Ta^2b^2+$$
$$3072\mu^2\pi^2c_{ij}a^4b^2+3072\mu^2\pi^2c_{ij}a^2b^4)w_{i0}/(a^3b^3)-(1/16384)(-2100\pi^2a^4b^2\mu^2e_{ij}w_{j0}^3-$$
$$2100\pi^2a^2b^4\mu^2e_{ij}w_{j0}^3-3072\pi^2a^4b^2\mu^2c_{ij}w_{j0}-3072\pi^2a^2b^4\mu^2c_{ij}w_{j0}-1225a^4b^4e_{ij}w_{j0}^3-$$
$$2304a^4b^4c_{ij}w_{j0})/(a^3b^3)=0$$

مراجع

[1] A.R. Setoodeh, P. Malekzadeh, A.R. Vosoughi, Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal mindlin plate theory, Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J Mech. Eng. Sci., 226(7) (2011) 1896-1906.

[2] K.F. Wang, B.L. Wang, Effect of surface energy on the non-linear postbuckling behavior of nanoplates, International Journal of Non-Linear Mechanics, 55 (2013) 19-24.

[3] R. Maitra, S. Bose, Post Buckling Behaviour of a Nanobeam considering both the surface and nonlocal effects, International Journal of Advancements in Research & Technology, 1 (2012) 1-5.

[4] W.T. Koiter, Couple Stresses in the Theory of Elasticity, I and II, Prac. Royal Netherlands Academy of Sciences, Series B, LXVII, 1(67) (1964) 17–44.

[5] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, Int. J. Sol. Struct., 4 (1968) 109–124.

[6] F. Yang, A. Chong, D. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, Int. J. Sol. Struct., 39 (2002) 2731–2743.

[7] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, J. Appl. Phys., 54 (1983) 4703–4710.

[8] A.C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, New York, 2002.

[9] S.C. Pradhan, J.K. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, J. Sound. Vib., 325 (2009) 206–223.

[10] G.A. Varzandian, S. Ziaee, Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Nano Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 48(4) (2017) 331–346 (in Persian).

[11] N. Yamaki, M. Chiba, Nonlinear Vibrations of a Clamped Rectangular Plate with Initial Deflection and Initial Edge Displacement Part I: Theory, Thin-Walled Structures, 1 (1983) 3-29.

[12] J.K. Paik, Large deflection orthotropic plate approach to develop ultimate strength formulations for stiffened panels under combined biaxial compression/tension and lateral pressure, Thin-Walled Structures, 39 (2001) 215-246.

[13] R. Ansari, R. Gholami, Size-dependent modeling of the free vibration characteristics of postbuckled third-order shear deformable rectangular nanoplates based on the surface stress elasticity theory, Composites Part B (at press), (2016).

[14] Chen Liu, Liao-Liang Ke, Jie Yang, Sritawat

Kitipornchai, Yue-Sheng Wang, Buckling and post-buckling analyses of size-dependent piezoelectric nanoplates, Theoretical & Applied Mechanics Letters, 6 (2016) 253-267.

[15] Y.M. Yue, C.Q. Ru, K.Y. Xu, Modified von Kármán equations for elastic nanoplates with surface tension and surface elasticity, International Journal of Non–Linear Mechanics, 88 (2017) 67-73.

[16] R. Gholami, R. Ansari, Y. Gholami, Size-dependent bending, buckling and vibration of higher-order shear deformable magneto-electro-thermo-elastic rectangular nanoplates, Mater. Res. Express, (at press), (2017).

[17] C.-L. Zhang, H.-S. Shen, Temperature-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes: prediction from molecular dynamics simulation, Appl. Phys. Lett. 89 081904, (2006).

[18] H.-S. Shen, Y.-M. Xu, C.-L. Zhang, Prediction of nonlinear vibration of bilayer graphene sheets in thermal environments via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 267 (2013) 458–470.

[19] H.-S. Shen, X.-Q. He, D.-Q. Yang, Vibration of thermally postbuckled carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations, International Journal of Non-Linear Mechanics, (2017).

[20] W. Lestari, S. Hanagud, Nonlinear vibration of buckled beams: some exact solutions, International Journal of Solids and Structures, 38 (2001) 4741—4757.

[21] M. Karimi, A.R. Shahidi, A general comparison the surface layer degree on the out-of phase and in-phase vibration behavior of a skew double-layer magneto–electro–thermo-elastic nanoplate, Applied Physics A, 125(106) (2019) (in press).

[22] M. Karimi, A.R. Shahidi, Comparing magnitudes of surface energy stress in synchronous and asynchronous bending/buckling analysis of slanting double-layer METE nanoplates, Applied Physics A, 125(154) (2019) (in press).

[23] L. C., C.T. W., Elastic moduli of multi-walled carbon nanotubes and the effect of vanderWaals forces, Composites Science and Technology, 11 (2003) 1517–1524.

[24] S. Kitipornchai, X.Q. He, K.M. Liew, Continuum model for the vibration of multilayered graphene sheets, Physical Review B, 72 (2005) 075443.

[25] J. Wang, X. He, S. Kitipornchai, H. Zhang, Geometrical nonlinear free vibration of multi-layered graphene sheets, J. Phys. D: Appl. Phys, 44 (2011) 135401 (135409pp).

[26] A. Farajpour, A. ArabSolghar, A. Shahidi, postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression, Physica E, 47 (2013) 197-206.

[27] M.R. Barati, Magneto-hygro-thermal vibration behavior of elastically coupled nanoplate systems incorporating nonlocal and strain gradient effects, The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, (TECHNICAL PAPER), (2017).

[28] M. Karimi, A.R. Shahidi, S. Ziaei-Rad, Surface layer and nonlocal parameter effects on the in-phase and out-of-phase natural frequencies of a double-layer piezoelectric nanoplate under thermo-electro-mechanical loadings, Microsystem Technologies, (TECHNICAL PAPER) (2017).

[29] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, A study on large amplitude vibration of multilayered graphene sheets, Computational Materials Science, 50 (2011) 1043–1051.

[30] S. Arghavan, A.V. Singh, Effects of van der Waals interactions on the nonlinear vibration of multi-layered graphene sheets, J. Phys. D: Appl. Phys., 45 (2012) 455305 (455308pp).

[31] L. Shen, H. Shen, C. Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, Comput. Mater. Sci., 48:680 (2010).

[32] E. Ventsel, T. Krauthammer, Thin Plates and Shells:

Theory, Analysis and Applications, Marcell Dekker Inc, 2001.

[33] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates and Shells: 2nd Edition, Taylor & Francis Group, 2007.

[34] I.S. Raju, G.V. Rao, K.K. Raju, Effect of longitudinal or inplane deformation and inertia on the large amplitude flexural vibrations of slender beams and thin plates, Journal of Sound and Vibration, 49(3) (1976) 415-422.

[35] A.H. Nayfeh, S.A. Emam, Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams, Nonlinear Dynamics, 54 (2008) 395–408.

[36] K.-S. Na, J.-H. Kim, Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method, Finite Elements in Analysis and Design, 42 (2006) 749-756.

[37] M. Neek-Amal, F.M. Peeters, Graphene nanoribbons subjected to axial stress, PHYSICAL REVIEW B, 82, (2010) 085432.

[38] M. Terrones et.al, Graphene and graphite nanoribbons: Morphology, properties, synthesis, defects and Applications, nano today, 5, (2010) 351-372.

[39] Xiu-Xi Wang, Jiang Qian ,Mao-Kuang Huang, A boundary integral equation formulation for large amplitude nonlinear vibration of thin elastic plates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 86 (1991) 73-86.

[40] S.R. Asemi, M. Mohammadi, A. Farajpour, A study on the nonlinear stability of orthotropic single layered graphene sheet based on nonlocal elasticity theory, Latin American Journal of Solids and Structures, 11 (2014) 1541-1564.

[41] M. Karimi, A.R. Shahidi, Buckling analysis of skew magneto-electro-thermo-elastic nanoplates considering surface energy layers and utilizing the Galerkin method, Applied Physics A, (2018) 124:681.

[42[M. Karimi, A.R. Shahidi, H.R. Mirdamadi, Shear vibration and buckling of double-layer orthotropic nanoplates based on RPT resting on elastic foundations by DQM including surface effects, Microsystem Technologies, (TECHNICAL PAPER) (2015).